الوحدة الثامنة

الهندسة
Geometry

الفن

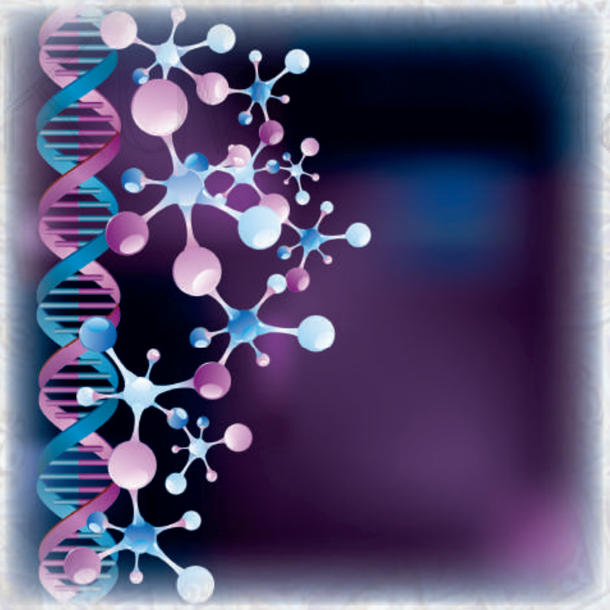
يعبّر الفن الإسلامي عن قيم الثقافة الإسلامية وطريقة نظر المسلمين إلى العالمين الروحي والمادي. تتألف هذه الزخرفة من نمط لأشكال متطابقة ومتشابهة.

الجغرافيا

ترسم خرائط المدن والبلدان على أساس مقياس رسم صغير يبلغ أحيانًا $\frac{١}{٧٥٠٠٠٠٠}$. تستطيع إيجاد المسافة بين نقطتين (مدينتين - بلدين) على الخريطة باستخدام مقياس رسم. إذا أردت رسم خارطة للعالم على ورقة قياس
٢٩٫٧ سم × ٤٢ سم فإنك بحاجة إلى مقياس رسم ١ إلى مئة مليون وهو مقياس صغير جدًّا.

العلوم

فحص الحمض النووي الوراثي (DNA) هو التكنولوجيا الأكثر تطورًا لمعرفة النسب. يبيِّن هذا الفحص أنماطًا متشابهة ومتطابقة بنسبة ٩٩٫٩٪ وأكثر إذا كان الشخصان الخاضعان للفحص مرتبطين بيولوجيًّا، وبنسبة ٠٪ إذا لم يكن الشخصان مرتبطين.



التكنولوجيا

المجهر الإلكتروني هو نوع من المجاهر حيث تصل قوة التكبير فيه إلى ٢٠٠٠٠٠٠ مرة.تكون قوّة التكبير في المجهر العادي محصورة بـ٢٠٠٠ مرة كحد أقصى وتعطي هذه المجاهر أشكالًا متشابهة ولكن بقياسات مختلفة.

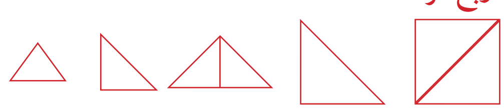
مشروع الوحدة

حل المسائل

افهم
خطط
حل
تحقق

يسمى فن طي الورق عند اليابانيين بالأوريجامي. عند طي الورق بأشكال مختلفة تحصل على أنماط عديدة.

اطو الورقة المربعة كما هو ظاهر في الصورة أدناه أربع مرات.



افتح الورقة بعد كل طية. ما هو عدد المثلثات غير المتراكبة؟ املأ الجدول الآتي:

الطية	الأولى	الثانية	الثالثة	الرابعة
عدد المثلثات	٢	-	-	-

اطو الورقة للمرة الخامسة. ما هو عدد المثلثات المؤلفة؟ برأيك كم سيكون عدد المثلثات عند طي الورقة للمرة السادسة؟

مد الجدول أعلاه ليحتوي إجابتك عن السؤال السابق. هل تلاحظ أي نمط؟

أفكار رياضية أساسية

إن المسافة بين نقطتين على مستقيم أفقي هي القيمة المطلقة للفرق بين الإحداثيات السينية لهاتين النقطتين.

لإيجاد المسافة بين نقطتين في مستوٍ، تحسب الجذر التربيعي لمجموع فرق مربع الإحداثيين السينيين مع فرق مربع الإحداثيين الصاديين.

لإيجاد إحداثيي منتصف المسافة بين نقطتين، يمكنك جمع الإحداثي السيني للنقطتين والقسمة على ٢ وجمع الإحداثي الصادي للنقطتين والقسمة على ٢، ووضعهم في زوج مرتب.

يمكن استخدام التحويلات الهندسية كالإزاحة والتناظر والدوران للحصول على أشكال مطابقة للأشكال الأصلية.

تحصل على أشكال متشابهة عند استخدام مقاييس مكبرة أو مصغرة.

يمكن أن يكون لبعض الأشكال الهندسية خط تناظر أو تناظر دوراني.

باستخدام التحويلات الهندسية، يمكنك تغطية المستوي بأنماط جميلة.

حل المسائل
افهم
خطط
حل
تحقق

قراءة المسألة

عندما تخطط لحل الخطوات في المسألة، يجب أن تتأكد من أنك تعرف جميع المعلومات الضرورية لحلها. في بعض الأحيان تفتقد المسألة إلى معلومة (معلومات) مهمة.

التركيز على حل المسائل

عرّف أي معلومات إضافية تحتاج إليها في كل مسألة. إذا كانت كل المعلومات اللازمة متوفرة، فقم بحل المسألة.

١ يريد ثلاثة أصدقاء بناء منزل خشبي صغير. تطوع أحمد لإحضار الخشب. يحتاج إلى ٩ م^{٢} من الخشب للسقف. أما أبعاد كل من الحيطان الأربعة فهي ٣م × ٢م. إلى كم متر مربع من الخشب يحتاج أحمد لإتمام بناء المنزل؟

٢ يريد سالم طلاء قسم من المنزل باللون الأخضر والقسم الآخر باللون الأبيض. سعر علبة الدهان الأخضر هو ديناران. أما سعر علبة الدهان الأبيض ٢,٥٠٠ دينار. كم سيتكلف سالم على طلاء المنزل؟

٣ يريد بلال مد شريط كهربائي من أحد زوايا السطح إلى وسطه. كم مترًا من الشريط سيلزمه علمًا أنه يحتاج إلى ٥ أمتار لتمديدات خارج المنزل؟ (ملاحظة: لا يباع الشريط بكسور الأمتار).

٤ اشترك الأصدقاء الثلاثة في طلاء المنزل. كان أحمد أسرع من سالم بمرتين، وسالم أبطأ من بلال بنسبة ٢٥٪. كم من الوقت استغرق طلاء المنزل؟

الهندسة الإحداثية في المستوي
The Coordinate Plane

الخرائط

باستخدام مقياس الرسم على الخرائط، يمكنك إيجاد المسافة بين أي نقطتين على سطح الأرض. تبيّن الخريطة أعلاه المدن الرئيسية لدولة الكويت.

١ ما هو مقياس الرسم لهذه الخريطة؟

٢ أوجد المسافة التقريبية بين مدينتي الكويت والأحمدي.

٣ تبلغ المسافة بين الدوحة والجهراء نحو ١٣ كم. ما المسافة على الخريطة بين هاتين المدينتين؟

٨–١

المسافة بين نقطتين على محور
Distance Between Two Points on an-Axis

سوف تتعلم

- إيجاد البعد بين نقطتين على محور.

من الاستخدامات

- يستخدم العاملون بالأدوات الصحية البعد بين نقطتين لتحديد قياسات المواسير التي يحتاجون إليها.

◀ صلة الدرس في السابق، تعرفت المستوي الإحداثي. في هذا الدرس، سوف تتعرف البعد بين نقطتين على محور. ▶

استكشف — التغيّر في درجات الحرارة

في ما يلي معدلات درجة الحرارة (سيليزية °C) خلال أشهر السنة في مدينة وينيبيغ (Winnipeg) في كندا.

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
°١٣−	°١١−	°٢−	°١٠	°١٩	°٢٣	°٢٦	°٢٥	°١٩	°١١	°٠	°١٠−

١ أوجد التغيّر الحاصل في درجة الحرارة من شهر يناير إلى شهر فبراير.

٢ بين أي شهرين كان التغيّر في درجة الحرارة هو الأكبر؟

٣ بين أي زوجين من الأشهر المتتالية تساوى التغيّر في درجة الحرارة؟

٤ لإيجاد التغيّر في درجات الحرارة بين شهري أبريل وديسمبر، كانت إجابة سالم: ٢٠ درجة وإجابة إبراهيم −٢٠ درجة. كيف تفسر الفرق بين الإجابتين؟

تعلم — المسافة بين نقطتين على محور

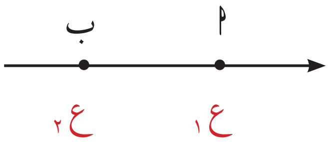
تمثّل كل نقطة على خط الأعداد بإحداثيها.

المصطلحات الأساسية

◀ المسافة (البعد) Distance

◀ القيمة المطلقة Absolute Value

المسافة (البعد) بين نقطتين على خط الأعداد هو القيمة المطلقة للفرق بين إحداثيي هاتين النقطتين.



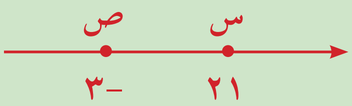
بالنظر إلى خط الأعداد أعلاه نلاحظ أن:

$$\text{أ ب} = |ع_٢ - ع_١|$$

طول $\overline{\text{أ ب}}$ — إحداثي النقطة ب — إحداثي النقطة أ

مثال (١)

(أ) أوجد طول $\overline{\text{س ص}}$ إذا كان إحداثي ص هو −٣ وإحداثي س هو ٢١ .



الحل:

س ص= |٢١ − (−٣)| = |٢٤| = ٢٤ وحدة طول

(ب) افرض أنك طرحت ٢١ من −٣ في الفقرة "أ". هل تحصل على النتيجة نفسها؟ فسِّر.

الحل:

نعم، |−٣ − ٢١| = |−٢٤| = ٢٤ وحدة طول

|س − ص| = |ص − س|

نلاحظ أن البعد بين ص ، س يساوي البعد بين س، ص.

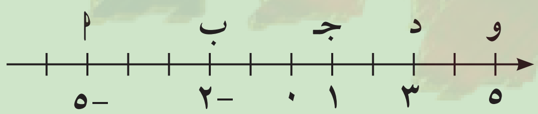
حاول أن تحل

١ أوجد طول $\overline{\text{أب}}$ إذا كان إحداثي أ هو −٨ وإحداثي ب هو ١١ .

عندما يتساوى طولا قطعتين مستقيمتين نقول إنهما متطابقتان، ونرمز لذلك بالإشارة ≅ إذا كان أ ب = جـ د عندها نكتب $\overline{\text{أب}}$ ≅ $\overline{\text{جـ د}}$

مثال (٢)

سمِّ قطعتين متطابقتين مستخدمًا خط الأعداد.



الحل: أ ب= | − ٢ − (−٥)| =|٣| =٣ وحدات طول

ب جـ= |١ − (−٢)| = |٣|=٣ وحدات طول

بما أن أ ب= ب جـ فيكون $\overline{\text{أب}}$ ≅ $\overline{\text{ب جـ}}$

$\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$: قطعتان مستقيمتان متطابقتان.

حاول أن تحل

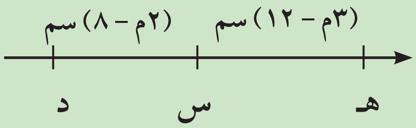
٢ سمِّ قطعتين متطابقتين أخريين من المثال (٢).

إذا وجدت نقطة ب بين نقطتين أ ،جـ بحيث إن أ، ب، جـ تنتمي إلى قطعة مستقيمة واحدة فيكون لدينا أ ب + ب جـ= أ جـ.

أي أنه إذا كانت ب تنتمي إلى $\overline{\text{أجـ}}$ ، فإن أ ب + ب جـ= أ جـ أي أن أ، ب، جـ على استقامة واحدة.

مثال (٣)

في الشكل المقابل، إذا كانت د هـ = ٦٠ سم، فأوجد قيمة «م» ثم أوجد طول كل من $\overline{\text{د س}}$ ، $\overline{\text{س هـ}}$.



الحل: ∵ س تنتمي إلى $\overline{\text{د هـ}}$

د س + س هـ = د هـ

(٢م – ٨) + (٣م – ١٢) = ٦٠ بالتعويض

٢م + ٣م – ٨ – ١٢ = ٦٠

٥م – ٢٠ = ٦٠ بالتبسيط

٥م = ٨٠ بإضافة ٢٠ إلى كلا الطرفين

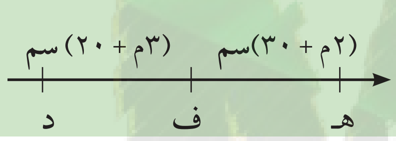
م = ١٦ بقسمة كلا الطرفين على ٥

دس = ٢م –٨= ٢(١٦) – ٨=٢٤ سم

س هـ= ٣م – ١٢ = ٣(١٦) – ١٢=٣٦ سم

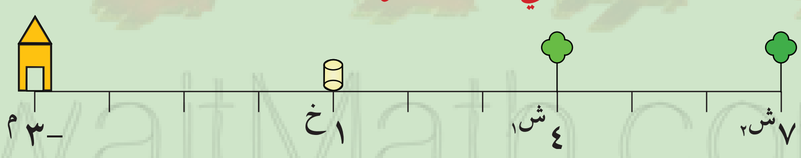
حاول أن تحل

٣ مستخدمًا الشكل المقابل، إذا كانت هـ د = ٧٠ سم، فأوجد قيمة "م"، وطول كل من $\overline{\text{هـ ف}}$، $\overline{\text{ف د}}$.



مثال (٤)

يبيّن الشكل أدناه مخطط منزل سعود، أمامه خزان ماء وشجرتا نخيل (على مستقيم واحد). مشى سعود من منزله إلى خزان الماء حيث ملأ دلوه، أكمل سيره وسقى الشجرة الأولى ثم عاد إلى الخزان، ملأ الدلو مرة ثانية وسار حتى الشجرة الثانية سقاها ثم عاد إلى منزله. ما المسافة الكلية التي سارها سعود؟



الحل:

م خ = |١ – (–٣)| = ٤ وحدات طول

خ ش$_{1}$ = |٤ – ١| = ٣ وحدات طول

خ ش$_{2}$ = |٧ – ١| = ٦ وحدات طول

ش$_{2}$م = |–٣ – ٧| = ١٠ وحدات طول

المسافة التي سارها سعود = م خ + خ ش$_{1}$ + خ ش$_{1}$ + خ ش$_{2}$ + ش$_{2}$ م = ٤ + ٣ + ٣ + ٦ + ١٠ = ٢٦

سار سعود ٢٦ وحدة طول.

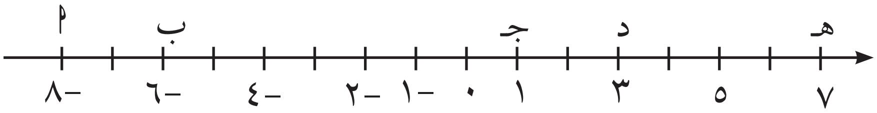
تحقق من فهمك

١ لماذا، برأيك، تمّ استخدام القيمة المطلقة للتعبير عن البعد بين نقطتين؟

٢ كيف يمكنك التأكد أن نقطة ما تقع بين نقطتين على قطعة مستقيمة واحدة.

حل المسائل والتفكير المنطقي

١ مستخدمًا خط الأعداد المقابل:



(أ) أكمل:

أ جـ= ....

ب د= ....

أ د= ....

ب هـ= ....

(ب) اكتب «صح» أو «خطأ»:

$\overline{\text{أ ب}} \cong \overline{\text{هـ د}}$ ....

ب د > جـ د ....

أ جـ + ب د= أ د ....

أ جـ + جـ د= أ د ....

(جـ) لتكن جـ ن = ٥. أوجد إحداثي النقطة ن. ....

....

هل هناك إحداثي آخر ممكن للنقطة ن؟ فسِّر. ....

....

في التمرينين ٢ ٣ استخدم الشكل المقابل (اعتبر المسافات بوحدات الطول)

٢ (أ) إذا كانت ر س = ١٥ ، س ت = ٩.

فتكون رت= ....

(ب) إذا كانت س ت = ١٥، ر ت = ٤٠.

فتكون رس = ...

٣ أوجد ر س ، س ت في الحالات التالية:

(أ) ر س = ٣م + ١ ، س ت = ٢م – ٢، ر ت = ٦٤.

....

(ب) ر س = ٨ م + ٤، س ت = ٤م + ٨، ر ت = ١٥م – ٩.

....

إستراتيجيات حل المسائل
• ابحث عن النمط.
• نظم قائمة.
• اعمل جدولًا.
• خمن وتحقّق.
• اعمل بطريقة عكسية.
• استخدم التفكير المنطقي.
• ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
• حل مسألة أبسط.

٨–٢ المسافة بين نقطتين في المستوي الإحداثي

Distance Between two Points In a Plane

سوف تتعلم

- إيجاد المسافة (البعد) بين نقطتين في المستوي الإحداثي.

من الاستخدامات

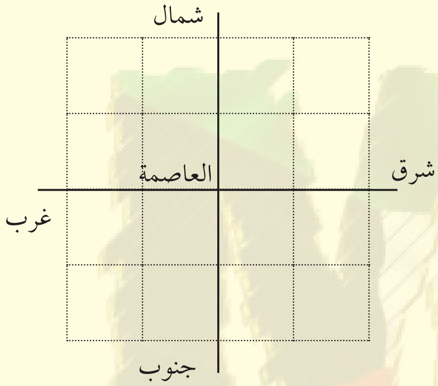
- يستخدم المساحون البعد بين نقطتين لإيجاد البعد بين القرى والمدن.

◄ صلة الدرس تعلمت سابقًا كيف تجد المسافة بين نقطتين على المحور، سوف تتعلم في هذا الدرس كيفية إيجاد البعد بين نقطتين في المستوي الإحداثي. ►

استكشف — البعد في المستوي

الأدوات المستخدمة: آلة حاسبة ، مسطرة مرقمة

ينطلق أحمد في سيارته، صباح كل يوم، من المحطة ﺃ متوجهًا إلى المحطة ب. لتكن العاصمة هي نقطة الأصل أو المركز.



موقع المحطة ﺃ: ١ كم غرب العاصمة، ثم ٢ كم جنوب العاصمة.

موقع المحطة ب: ٢ كم شرق العاصمة، ثم ٢ كم شمال العاصمة.

كل ١ سم على الرسم يمثل ١ كم على الأرض.

(أ) إن الزوج المرتب (س$_1$، ص$_1$) يمثل المحطة ﺃ. أوجد إحداثيات النقطة ﺃ.

(ب) إن الزوج المرتب (س$_2$، ص$_2$) يمثل المحطة ب. أوجد إحداثيات النقطة ب.

(جـ) أوجد البعد بين النقطتين ﺃ ، ب مستخدمًا المسطرة المدرجة.

(د) أوجد قيمة التعبير $\sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$ مستخدمًا الآلة الحاسبة.

(هـ) ماذا تمثل قيمة هذا التعبير؟

تعلم — البعد بين نقطتين في المستوي

لتكن ﺃ(س$_1$، ص$_1$) ، ب(س$_2$، ص$_2$)، نقطتين في مستوي الإحداثيات، فإن المسافة بين ﺃ، ب تُعطى بالقاعدة:

$$\text{أب} = \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$$

مثال (١)

أوجد البعد بين النقطتين ك، ل حيث ك (٥، ٢) ، ل(−٤، −١) مقربًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.

الحل: نفرض $(س_١ ، ص_١) = (٥ ، ٢)$ ، $(س_٢ ، ص_٢) = (−٤ ، −١)$ فيكون

$ك ل = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$ استخدم القانون

$ك ل = \sqrt{(−٤ - ٥)^٢ + (−١ - ٢)^٢}$ عوض

$ك ل = \sqrt{(−٩)^٢ + (−٣)^٢}$ بسط

$ك ل = \sqrt{٨١ + ٩} = \sqrt{٩٠}$

$\sqrt{٩٠} \simeq ٩,٤٨٦٨٣٢$ استخدم الآلة الحاسبة

البعد بين النقطتين ك ، ل مقربة إلى أقرب جزء من عشرة هي ٩,٥ وحدة طول.

حاول أن تحل

١ أوجد المسافة بين ل(١، −٣)، م (−٤، ٤) مقربًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.

إذا كانت القطعة المستقيمة موازية لأحد المحاور، فيمكن إيجاد طولها دون استخدام القانون العام.

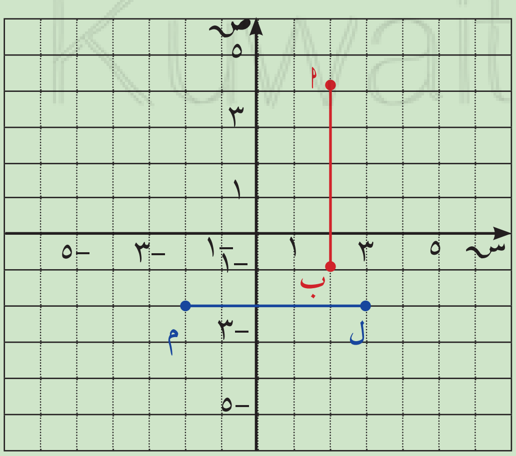
$\overline{أب}$ موازية للمحور السيني: $أب = |س_ب - س_أ|$

$\overline{أب}$ موازية للمحور الصادي: $أب = |ص_ب - ص_أ|$

مثال (٢)

استخدم الشكل المقابل لإيجاد النقطتين أ ، ب، ثم أوجد البعد بين النقطتين أ ، ب. ماذا تلاحظ؟

الحل:



أ(٢، ٤)، ب (٢، −١) لاحظ أن الإحداثي السيني متساوٍ

$\overline{أب}$ موازية للمحور الصادي

إذًا $أب = |ص_ب - ص_أ|$

$= |−١ - ٤|$

$= |−٥|$

= ٥ وحدات طول

حاول أن تحل

٢ استخدم الشكل في المثال (٢) لإيجاد النقطتين ل، م ثمّ إيجاد طول $\overline{ل م}$.

مثال (٣)

ما نوع المثلث ع م ر من حيث أضلاعه وزواياه حيث: ع(٢، ٤)، م(٦، ٤)، ر(٦، ٨)؟

الحل:

في المثلث ع م ر

$\text{ع م} = \sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$

استخدم القانون

$= \sqrt{(٦ - ٢)^٢ + (٤ - ٤)^٢}$

$= \sqrt{(١٦ + ٠)} = ٤$ وحدات طول

تنويه: $\overline{\text{ع م}}$ موازية للمحور السيني

$\text{ع ر} = \sqrt{(٦ - ٢)^٢ + (٨ - ٤)^٢}$

$\therefore \text{ع م} = |\text{س}_\text{م} - \text{س}_\text{ع}| = |٦ - ٢| = ٤$

$= \sqrt{١٦ + ١٦} = ٤\sqrt{٢}$ وحدة طول

$\text{م ر} = \sqrt{(٦ - ٦)^٢ + (٨ - ٤)^٢} = ٤$ وحدات طول

كذلك

المثلث ع م ر متطابق الضلعين عند م (ع م = م ر = ٤)

$\overline{\text{م ر}}$ موازية للمحور الصادي

$(\text{ع ر}) = ٤\sqrt{٢}$

$\therefore \text{م ر} = |\text{ص}_\text{ر} - \text{ص}_\text{م}| = |٨ - ٤| = ٤$

$(\text{ع ر})^٢ = ٣٢$

$(\text{م ر})^٢ + (\text{ع م})^٢ = ١٦ + ١٦$

$= ٣٢$

$(\text{ع ر})^٢ = (\text{ع م})^٢ + (\text{م ر})^٢$

من عكس نظرية فيثاغورث المثلث ع م ر قائم الزاوية في م.

∴ المثلث ع م ر قائم الزاوية ومتطابق الضلعين عند م.

حاول أن تحل

٣ ما نوع المثلث ف هـ د من حيث أضلاعه وزواياه حيث ف (١، ١)، هـ (−٣، −٣)، د(٢، ٠)؟

تحقق من فهمك

١ في المثال (١)، إذا وجدت البعد من النقطة ل إلى النقطة ك، فهل ستحصل على الإجابة نفسها؟

٢ في المثال (٢)، هل يمكن تطبيق القانون العام لإيجاد البعد بين النقطتين أ، ب؟

حل المسائل والتفكير المنطقي

١ استخدم الحساب الذهني لإيجاد البعد بين النقطتين.

(أ) ﺃ (٠، ٣) ، ب (٠، ١٢)

(ب) جـ (٥ , ١٣، ٤) ، د(٥ , ١٣، ٢)

(جـ) هـ (٨، ٠) ، و(٠، ٦)

....

....

٢ أوجد ﺃ ب، ب جـ ، ﺃ جـ حيث: ﺃ (١، ٠)، ب(٢، ٢) ، جـ(٤، ٣).

....

....

٣ إذا كان البعد بين النقطتين ﺃ (٦، −٢) ، ب هي ١٠ وحدات طول

أوجد إحداثيي النقطة ب علمًا أن الإحداثي السيني للنقطة ب يساوي الإحداثي الصادي للنقطة ﺃ.

....

....

٤ ما نوع المثلث ك ل م حيث: ك (٤، ٠) ، ل (٢ ، ٢ $\sqrt{3}$) ، م(٠، ٠)؟

....

....

٥ هل أضلاع الشكل الرباعي ك ل م ن حيث: ك (−٦، ٢)، ل(−٣، ٥) م(−٦، ٦) ، ن(−٩، ٥) هي متساوية الطول؟

....

....

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقّق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

٨–٣

إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة في المستوي الإحداثي

Midpoint Coordinates in a Plane

سوف تتعلم

- إيجاد إحداثيي منتصف قطعة مستقيمة في المستوي الإحداثي.

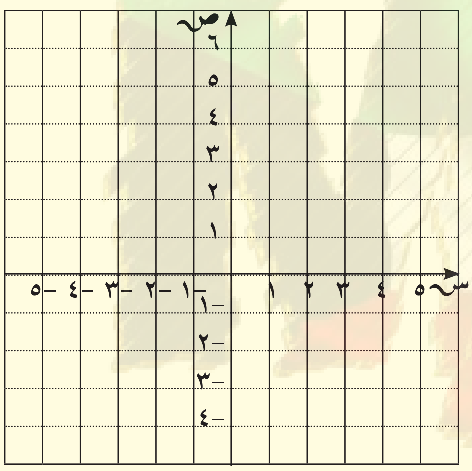
من الاستخدامات

- يستخدم صانعو الخرائط المنتصف لمعرفة نصف البعد بين أي بلدين عند الحاجة إليه.

صلة الدرس في السابق تعرفت المسافة بين نقطتين في المستوي الإحداثي والقطع المستقيمة. في هذا الدرس سوف تتعرف إحداثيات منتصفات القطع المستقيمة في المستوي. ◄

استكشف — منتصف القطعة المستقيمة

الأدوات المستخدمة: مسطرة، ورقة رسم بياني



١ مثّل في المستوي الإحداثي النقطتين أ (١، ١)، ب (١، ٥). صل النقطتين بخط مستقيم. احسب عدد الوحدات بينهم، وعيّن النقطة $م_١$ منتصف $\overline{\text{أب}}$. أوجد إحداثيي $م_١$.

٢ كرِّر ١ بالنسبة إلى ب (١، ٥)، جـ (٤، ٥) وضع النقطة $م_٢$ في منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$. أوجد إحداثيي $م_٢$.

٣ ارسم خطًّا موازيًا للمحور السيني يمر بالنقطة $م_١$ ويقطع المحور الصادي في $ل_١$. اكتب إحداثيي $ل_١$.

٤ ارسم خطًّا موازيًا للمحور الصادي يمر بالنقطة $م_٢$ ويقطع المحور السيني في $ل_٢$. اكتب إحداثيي $ل_٢$.

٥ ما علاقة إحداثيي منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ بإحداثيات نهايتي القطعة المستقيمة أ جـ؟

تعلم — إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة

تعتبر خطوط الطول والعرض في خارطة العالم أو خطوط الشوارع من خرائط المدن أمثلة عملية عن أهمية معرفة منتصف المسافة بين نقطتين.

في المستوي الإحداثي تُعطى إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة $\overline{\text{أب}}$ بالقانون:

$$\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$$ حيث أ $(س_١، ص_١)$، ب $(س_٢، ص_٢)$

المصطلحات الأساسية

◄ منتصف قطعة مستقيمة
Midpoint of a Segment

مثال (١)

أوجد م نقطة منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ حيث إن أ (٢، −٣)، ب (−٦، ١).

الحل:

نقطة المنتصف م = $\left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{٢}، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{٢}\right)$

= $\left(\frac{٢ + (-٦)}{٢}، \frac{-٣ + ١}{٢}\right) = \left(\frac{-٤}{٢}، \frac{-٢}{٢}\right) = (-٢، -١)$.

حاول أن تحل

١ أوجد إحداثيا النقطة "م" منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (١، ٢)، ب (٣، ٤).

مثال (٢)

إذا كانت م (٣، ٤) نقطة منتصف $\overline{\text{أ ب}}$، أ(−٤، −٦) فأوجد النقطة ب.

الحل:

نفرض أن ب (س$_2$، ص$_2$).

م (س، ص) = م $\left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{٢}، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{٢}\right)$

عوض عن قيم س، ص كما يلي:

$٣ = \frac{-٤ + \text{س}_2}{٢}$ ، $٤ = \frac{-٦ + \text{ص}_2}{٢}$

$٦ = -٤ + \text{س}_2$ ، $٨ = -٦ + \text{ص}_2$

س$_2$ = ١٠، ص$_2$ = ١٤ وعليه تكون النقطة ب (١٠، ١٤).

حاول أن تحل

٢ تبعد النقطة أ ثلاث وحدات شرقًا عن نقطة الأصل، وتبعد النقطة ب عدد وحدات معينة في جهة معينة بحيث إن م منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ هي $\left(\frac{٣}{٢}، \frac{٥}{٢}\right)$. أوجد إحداثيا النقطة "ب"، وحدد جهتها من نقطة الأصل.

مثال (٣)

إذا كانت م(٢، −٣) نقطة منتصف $\overline{أب}$ وكانت ب(٢، −٤) فأوجد إحداثيا النقطة أ.

الحلّ:

نفرض أن أ (س١، ص١)

$$م(س، ص) = م\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$$

بالتعويض نحصل على:

$$٢ = \frac{س_١ + ٢}{٢} \quad،\quad -٣ = \frac{ص_١ + (-٤)}{٢}$$

$$٤ = س_١ + ٢ \quad،\quad -٦ = ص_١ + (-٤)$$

$س_١ = ٢$ ، $ص_١ = -٢$ والنقطة أ (٢، −٢)

حاول أن تحل

٣ إذا كانت م(٥، ٤) نقطة منتصف $\overline{أب}$ وكانت ب(٨، ٧)، فأوجد إحداثيا النقطة أ.

مثال (٤)

أراد محمد إنشاء منزل يقع في منتصف الطريق بين مزرعتين يمتلكهما في الوفرة. حدد النقطة التي تمثل المنزل إذا كان إحداثيا المزرعتين هما النقطتين (٨، ٥)، (−٤، ١) على خارطة.

الحل:

بفرض نقطة منتصف الطريق هي م

$$نقطة المنتصف م = \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$$

$$= \left(\frac{٨ + (-٤)}{٢}، \frac{٥ + ١}{٢}\right)$$

$$= (٢، ٣)$$

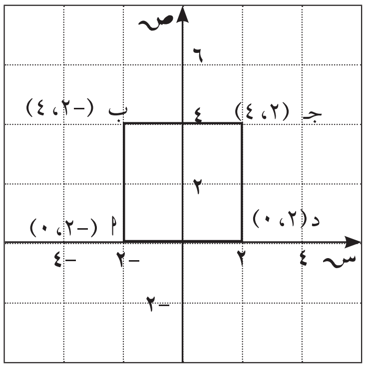
النقطة التي تمثل المنزل هي (٢، ٣).

تحقق من فهمك

١ إذا كانت نقطة الأصل هي منتصف القطعة المستقيمة حيث يقع أحد طرفي القطعة في الربع الأول، ففي أي ربع يقع الطرف الآخر؟

٢ هل لقطري شبه المنحرف المنتصف نفسه؟

المرشد لحل المسائل (٨-٣)



وضعت في قاعة المطالعة في المدرسة طاولة مربعة الشكل . أراد المشرف على القاعة وضع جهاز إنارة مثبت على عمود على الطاولة. أين ستوضع قاعدة العمود بحيث يتوزع الضوء بالتساوي على أركان الطاولة الأربعة. (يمثل الشكل المقابل أ ب جـ د مخطط الطاولة).

افهم

١ ما معطيات المسألة؟ ....

٢ ما المطلوب إليك إيجاده؟ ....

خطط

٣ اكتب قانون إيجاد نقطة منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ حيث أ (س$_1$، ص$_1$) ، جـ (س$_2$، ص$_2$). ....

....

٤ اكتب إحداثيات النقطتين أ ، جـ. ....

٥ اكتب إحداثيات النقطتين ب ، د. ....

حل

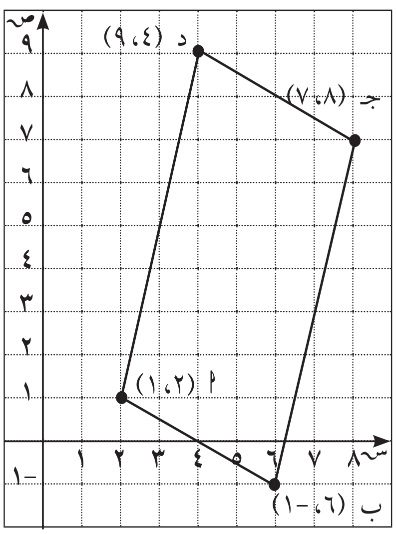
٦ أوجد النقطة م$_1$ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$. ....

٧ أوجد النقطة م$_2$ منتصف $\overline{\text{ب د}}$ . ...

تحقق

٨ في المربع أ ب جـ د يتقاطع القطران في النقطة نفسها. هل هذا صحيح؟ فسِّر.

....



حل مسألة أخرى

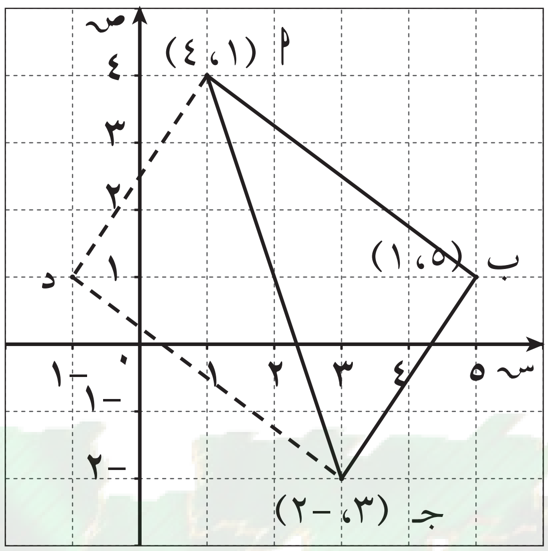
٩ أوجد إحداثيات منتصفي القطرين في متوازي الأضلاع أ ب جـ د المعطى، إحداثيات رؤوسه: أ (٢، ١)، ب (٦، -١)، جـ (٨، ٧)، د (٤، ٩). ماذا تلاحظ؟

....

....

حل المسائل والتفكير المنطقي

١ استخدم الشكل لإيجاد النقطة د التي تكوّن الرأس الرابع لمتوازي الأضلاع أ ب جـ د .



....

....

....

....

....

....

الوحدة
الثامنة (ب)

هندسة التحويلات
Geometry Transformations

كن طبيعيًّا

عندما تتراود إلى مسامعنا عبارات مثل «لقد ولد ليكون فنانًا» و«لقد ولد ليكون من رياضيي الألعاب الأولمبية».... لا بد أنه يقصد بها أن هؤلاء الأشخاص يتمتعون بقدرات ومواهب خاصة.

ولعل استخدام الأشكال الهندسية والأنماط في فنون عديدة على مدى عصور خلت، يوفر مثالًا حيًّا على المواهب التي تولد مع الإنسان والتي تمكِّن أشخاصًا كثيرين من استخدامها بالفطرة من دون أن يكونوا قد تلقوا أي دروس في الهندسة.

لقد وجد الحرفيون أن استخدام النمط المتكرر يتلاءم مع أعمالهم الفنية التي ترتكز في الأصل إلى التكرار. وفي العمل الفني المتكرر يتم تكرار صفوف من الخيوط الملونة المنسوجة في ملاءة ما أو إضافة صفوف من الخرز لإضفاء رونق على سترة. يتألف التصميم المتكرر عادة من شكل أساسي يتم تكراره مرات عدة. أما الاختلاف بين الأشكال، فيتمثل بتغير موقعها أو اتجاهها عبر استخدام التحويلات المختلفة.

١ ما الأشكال التي تراها في هذا التصميم؟

٢ اختر شكلًا ما، وارسم تصميمًا من خلال تكرار هذا الشكل.

٨–٤

التحويلات والتطابق
Transformations and Congruence

◀ **صلة الدرس** سبق ودرست أنواعًا مختلفة من المضلعات. ستستكشف في هذا الدرس ما يحدث عند قلب المضلعات أو تحريكها. ◀

التحويل هو عملية تؤثر على نقاط شكل ما كلها كالإزاحة أو القلب أو التدوير.

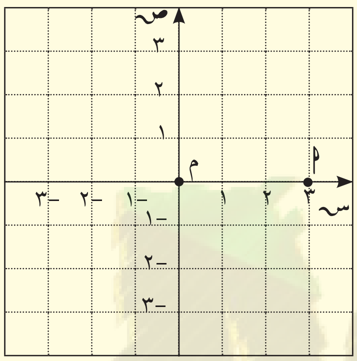
سوف تتعلم
- تحريك نقاط شكل ما كلها للحصول على شكل مطابق.

من الاستخدامات
- تشكل التحويلات أساس الأنماط المستخدمة في الفن والتصميم الهندسي.

المصطلحات الأساسية
- ◀ تحويل Transformation
- ◀ انعكاس Reflection
- ◀ دوران Rotation
- ◀ مركز الدوران Center of Rotation
- ◀ زاوية الدوران Angle of Rotation

استكشف | الدوران

الدوران **الأدوات المستخدمة:** ورق رسم بياني، فرجار، منقلة



١ عين النقطة أ (٣، ٠) في مستوى إحداثي.

٢ نريد تغيير موقع النقطة أ عن طريق دوران مركزه نقطة الأصل م، باتجاه عقارب الساعة، بزاوية قياسها ٩٠°.

٣ ما هما إحداثيا الموقع الجديد للنقطة أ؟

٤ كرر الخطوات ١، ٢، ٣ على النقاط ب (−٢، ١)، جـ(−١، −١).

٥ هل هناك علاقة بين إحداثيات النقاط قبل تطبيق عملية الدوران عليها وبعدها؟

٦ هل المثلث أ ب جـ وصورته بعد الدوران متطابقان؟

تعلم | التحويلات والتطابق

الدوران هو تحويل يدور شكلًا حول نقطة تسمى **مركز الدوران**. **وزاوية الدوران** هي زاوية حركة الدوران. يكون الشكل الذي تم تدويره مطابقًا للشكل الأصلي.

يرمز إلى الشكل الذي تم تحويله بتسمية الرؤوس المناظرة وبأحرف مختلفة على الشكل التالي: أ تناظر أَ.

قوانين الدوران باتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل:

إذا كانت أ (س، ص) نقطة في المستوى الإحداثي فإن

أ (س،ص) ← **بالدوران ٩٠° في اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل** ← أَ (ص، −س)

أ (س، ص) ← **بالدوران ١٨٠° في اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل** ← أَ (−س، −ص)

أ (س، ص) ← **بالدوران ٢٧٠° في اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل** ← أَ (−ص، س)

مثال (١)

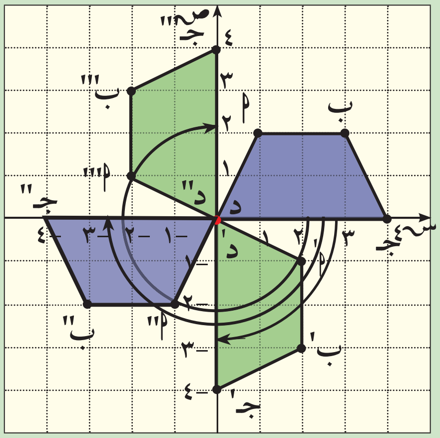
لنعتبر أن نقطة الأصل هي مركز الدوران. دوّر شبه المنحرف أ ب جـ د:

(١) ٩٠° باتجاه دوران عقارب الساعة

(٢) ١٨٠° باتجاه دوران عقارب الساعة

(٣) ٢٧٠° باتجاه دوران عقارب الساعة

استخدم جـ د موجهًا لحركة دوران شبه المنحرف.



الحل:

د(٠، ٠) هو مركز الدوران

(١) حيث إن (س، ص) ← بالدوران ٩٠° في اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل ← (ص، −س)

أ(١، ٢) ← بالدوران ٩٠° في اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل ← أ'(٢، −١)

ب(٣، ٢) ← بالدوران ٩٠° في اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل ← ب'(٢، −٣)

جـ(٤، ٠) ← بالدوران ٩٠° في اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل ← جـ'(٠، −٤)

ملاحظة: من التحويلات الدوران في اتجاه عكس عقارب الساعة وسوف يتم التطرق إليه لاحقًا.

فتكون أ' ب' جـ' د' هي صورة أ ب جـ د

أ'(٢، −١) ، ب'(٢، −٣) ، جـ'(٠، −٤) ، د'(٠، ٠)

(٢) حيث إن (س، ص) ← بالدوران ١٨٠° في اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل ← (−س، −ص)

فتكون أ" ب" جـ" د" هي صورة شبه المنحرف أ ب جـ د

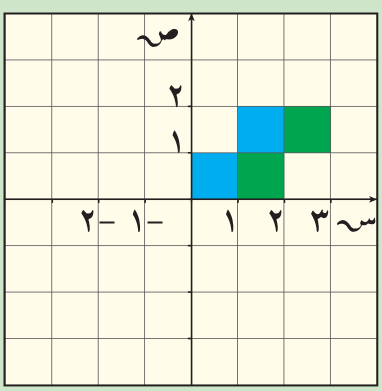
أ"(−١، −٢) ، ب"(−٣، −٢) ، جـ"(−٤، ٠) ، د"(٠، ٠)

(٣) حيث إن (س، ص) ← بالدوران ٢٧٠° في اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل ← (−ص، س)

فتكون أ‴ ب‴ جـ‴ د‴ هي صورة شبه المنحرف أ ب جـ د

أ‴(−٢، ١) ، ب‴ (−٢، ٣) ، جـ‴(٠، ٤) ، د‴(٠، ٠)

حاول أن تحل

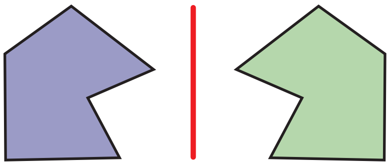


١ دوّر الشكل المقابل باتجاه دوران عقارب الساعة حول نقطة الأصل،وأوجد إحداثيات الرؤوس المناظرة في كل حركة:

(أ) ١٨٠° (ب) ٩٠° (جـ) ٢٧٠°

(د) هل الأشكال الناتجة في (أ)، (ب)، (جـ) متطابقة مع الشكل الأصلي

الانعكاس: لا بد أنك رأيت انعكاس صورتك في مرآة أو على سطح الماء.
في الرياضيات الانعكاس هو تحويل يقلب شكلاً حول خط (محور الانعكاس).
يكون الشكل المنعكس **مطابقًا** للشكل الأصلي.



يغيّر الانعكاس حول محور السينات إشارة كل إحداثي صادي أي أن (س، ص) $\xrightarrow{\text{ع}_{\text{س}}}$ (س، −ص)

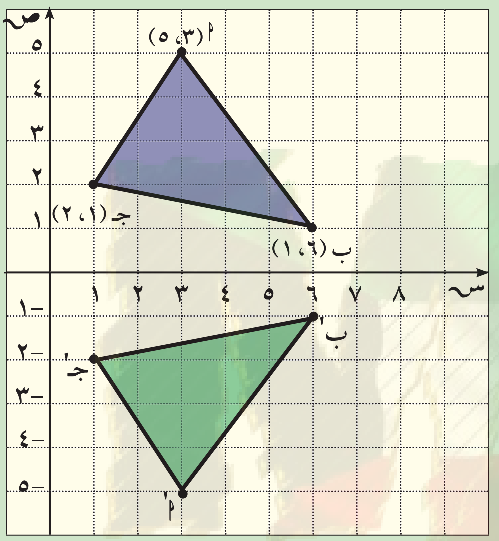
يغيّر الانعكاس حول محور الصادات إشارة كل إحداثي سيني أي أن (س، ص) $\xrightarrow{\text{ع}_{\text{ص}}}$ (−س، ص)

مثال (٢)

إحداثيات Δ أ ب جـ: أ(٣، ٥)، ب (٦، ١)، جـ (١، ٢).

(أ) اعكس Δ أ ب جـ حول محور السينات، وحدد إحداثيات Δ أ' ب' جـ'.

(ب) أثبت تطابق المثلثين أ ب جـ، أ' ب' جـ'.



الحل:

(أ) يتغير كل إحداثي صادي لأن الشكل ينعكس حول محور السينات.
مثّل النقاط أ' ب'جـ' على شبكة الإحداثيات، وصل بينها لترسم المثلث.
إحداثيات Δ أ ب جـ الصادية موجبة.
فتكون إحداثيات Δ أ' ب'جـ' الصادية سالبة.

أي أن (س، ص) $\xrightarrow{\text{ع}_{\text{س}}}$ (س، −ص)

أ(٣، ٥) $\xrightarrow{\text{ع}_{\text{س}}}$ أ'(٣، −٥)

ب (٦، ١) $\xrightarrow{\text{ع}_{\text{س}}}$ ب'(٦، −١)

جـ (١، ٢) $\xrightarrow{\text{ع}_{\text{س}}}$ جـ'(١، −٢)

(ب) في المثلثين أ ب جـ، أ' ب' جـ':

$\text{أ ب} = \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2} = \sqrt{(٦ - ٣)^2 + (١ - ٥)^2} = \sqrt{٩ + ١٦} = ٥$ المسافة بين نقطتين في المستوي

$\text{أ' ب'} = \sqrt{(٦ - ٣)^2 + (-١ + ٥)^2} = \sqrt{٩ + ١٦} = ٥$

∴ أ ب = أ' ب'

$\text{أ جـ} = \sqrt{(١ - ٣)^2 + (٢ - ٥)^2} = \sqrt{٤ + ٩} = \sqrt{١٣}$

$\text{أ' جـ'} = \sqrt{(١ - ٣)^2 + (-٢ + ٥)^2} = \sqrt{٤ + ٩} = \sqrt{١٣}$

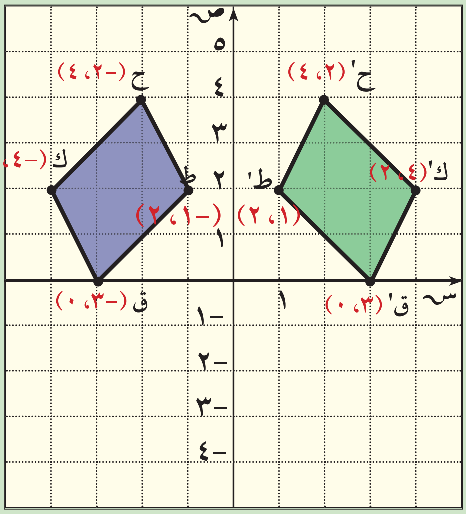
∴ أ جـ = أ' جـ'

ونثبت بالطريقة نفسها أن ب جـ = ب'جـ'

المثلثان أ ب جـ ، أ' ب'جـ' متطابقان بالحالة (ض، ض، ض).

مثال (٣)

اعكس الشكل ح ط ق ك حول محور الصادات، وحدد إحداثيات ح' ط' ق' ك'.



الحل:

يتغير رمز كل إحداثي سيني لأن الانعكاس يتم حول محور الصادات.

مثّل النقاط ح'، ط'، ق'، ك'، على شبكة الإحداثيات وارسم ح' ط' ق' ك'.

الإحداثيات السينية لرؤوس ح' ط' ق' ك' موجبة.

(س ، ص) $\xleftarrow{\text{ع}_{\text{ص}}}$ (− س ، ص)

ح (−٢، ٤) $\xleftarrow{\text{ع}_{\text{ص}}}$ ح' (٢، ٤)

ط (−١، ٢) $\xleftarrow{\text{ع}_{\text{ص}}}$ ط' (١، ٢)

ق (−٣، ٠) $\xleftarrow{\text{ع}_{\text{ص}}}$ ق' (٣، ٠)

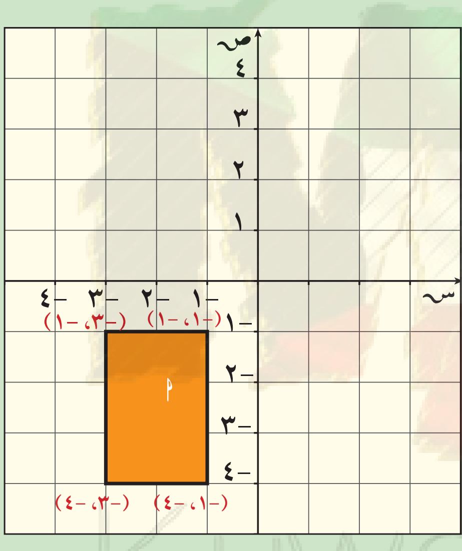
ك (−٤، ٢) $\xleftarrow{\text{ع}_{\text{ص}}}$ ك' (٤، ٢)

حاول أن تحل

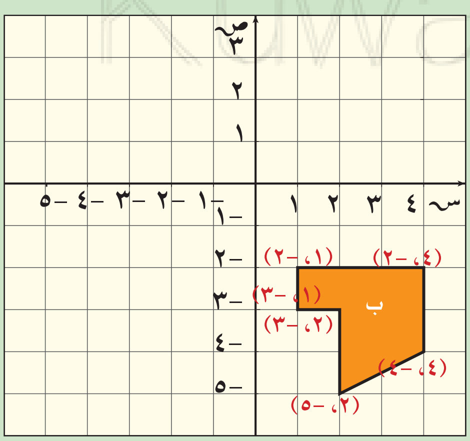
٢ يمكن مشاهدة النمط الموضح في الأواني الفخارية القديمة.

حدد إحداثيات رؤوس الشكلين ٲ ، ب بعد كل انعكاس.

(أ) اعكس الشكل ٲ حول محور السينات.



(ب) اعكس الشكل ب حول محور الصادات.

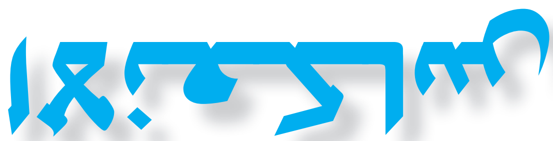
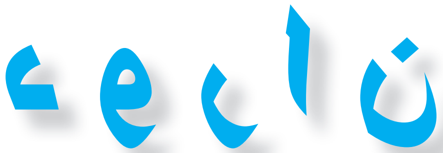


تحقق من فهمك

١ وضحّ هل تتغير إحداثيات شكل بعد تدويره ٣٦٠° في اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

٢ هل تتغير إحداثيات نقطة تقع على محور انعكاس بعد انعكاسها في هذا المحور.

١

(أ)  (ب) 

ما التحويلات، إن وجدت، التي تحوّل كل شكل أعلاه مستخدمًا تعبيرًا رياضيًّا تعلمته حديثًا؟ (دوران الكتاب واستخدام مرآة قد يساعدانك في التحديد).

٢ **المجلة**: فسّر كيف يمكن أن ينتج تحويلان مختلفان لشكل ما الصورة نفسها، أعط مثالًا على ذلك.

....

....

٣ **التفكير الرياضي**: هل يوجد تحويل يغيّر متوازي الأضلاع إلى شبه منحرف؟ فسّر إجابتك. ....

....

٤ **التواصل**: فسّر الفرق بين الانعكاس والدوران. أعط رسمًا تخطيطيًّا مثالًا على ذلك.

....

....

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

٨-٥

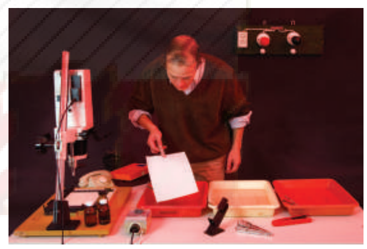
تحويلات وتشابه
Transformations and Similarity

سوف تتعلم

- تحويل شكل للحصول على شكل مشابه للشكل الأصلي لكنه ليس مطابقًا له.

من الاستخدامات

- يبتكر طابعو الصور أشكالًا مشابهة عندما يقومون بعمليات التكبير.

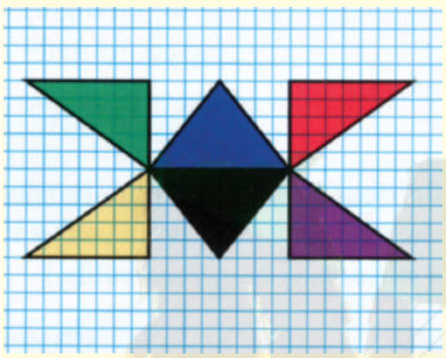


◄ صلة الدرس لقد سبق أن رأيت كيف تنتج التحويلات أشكالًا متطابقة. ستستخدم في هذا الدرس تحويلًا ينتج شكلًا مشابهًا للشكل الأصلي لكنه غير مطابق له. ►

استكشف | تغيير الأبعاد

أشكال أكبر فأكثر — **الأدوات المستخدمة:** ورق رسم بياني، مسطرة

يمثل التصميم المبين مفاهيم الفن السيوكي وهو يوضح ستة اتجاهات: الشرق (أحمر) والغرب (أصفر) والشمال (أزرق) والجنوب (أسود). فضلًا عن الاتجاه العلوي والاتجاه السفلي.



١ انسخ هذا الشكل على ورقة رسم بياني.

٢ ارسم على ورقة رسم بياني أخرى رسمًا مشابهًا لهذا التصميم مستخدمًا معامل التكبير ٢ (أي مضاعفة الأطوال).

٣ هل كل من المثلثات الستة في التصميم الذي تم تغيير أبعاده، مطابق للمثلث المناظر له في التصميم الأصلي؟ هل هو مشابه له؟ وضّح إجابتك.

تعلم | التحويلات والتشابه

يمكن تحديد إحداثيات شكل تم تغيير أبعاده في مستوي إحداثيات بضرب كل إحداثي في معامل التكبير على اعتبار أن (٠، ٠) مركز التكبير.

إذا كانت (س، ص) نقطة في المستوى الإحداثي

فإن (س، ص) $\xrightarrow[\text{ومركزه نقطة الأصل}]{\text{تكبير معامله ك}}$ (ك س، ك ص)

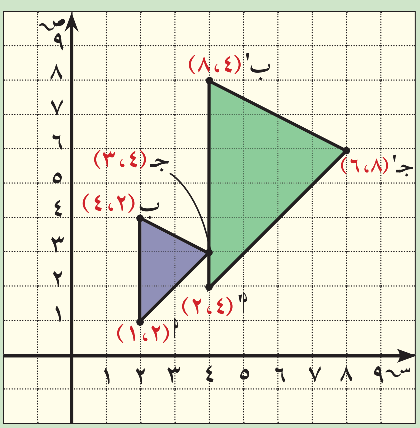
يسمى ك معامل التكبير شرط ك > ٠

مثال (١)

ارسم صورة المثلث أ ب جـ مستخدمًا التكبير الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله ٢.

الحل:

نوجد إحداثيات الرؤوس الجديدة، ثم نرسم الشكل بعد تغيير الأبعاد.



$\triangle$ أ ب جـ		(٢ × س، ٢ × ص)		$\triangle$ أ' ب' جـ'
↓		↓		↓
أ (٢، ١)	←	(٢ × ٢، ٢ × ١)	←	أ' (٤، ٢)
ب (٢، ٤)	←	(٢ × ٢، ٢ × ٤)	←	ب' (٤، ٨)
جـ (٤، ٣)	←	(٢ × ٤، ٢ × ٣)	←	جـ' (٨، ٦)

يؤدي معامل التكبير الأكبر من ١ إلى تكبير شكل ما، أما معامل التصغير الموجب الأصغر من ١ فيؤدي إلى تصغير شكل ما. ويستخدم نفس القانون السابق.

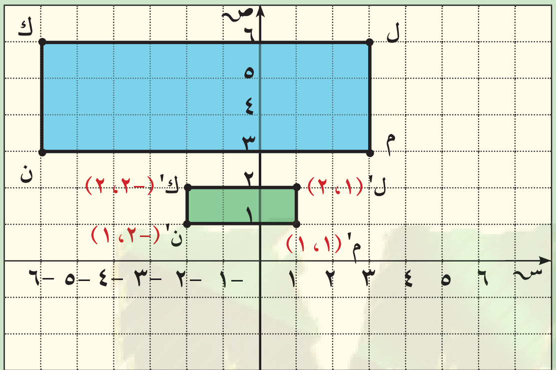
مثال (٢)

اكتب النقاط التي تمثل رؤوس الشكل ك ل م ن، ثم ارسم صورة الشكل مستخدمًا التصغير الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله $\frac{١}{٣}$.

الحل:

نوجد إحداثيات الرؤوس الجديدة، ثم نرسم الشكل بعد تغيير الأبعاد.

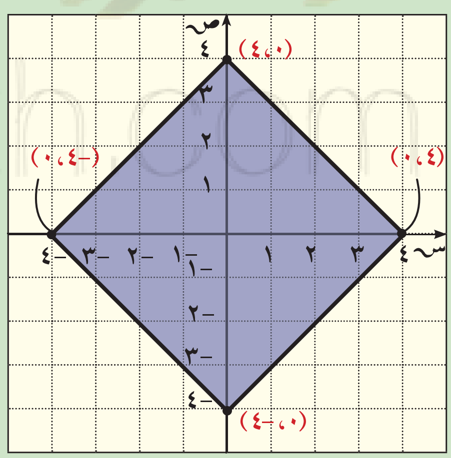
الشكل ك ل م ن		($\frac{١}{٣}$ × س، $\frac{١}{٣}$ × ص)		الشكل ك' ل' م' ن'
↓		↓		↓
ك (−٦، ٦)	←	($\frac{١}{٣}$ × (−٦)، $\frac{١}{٣}$ × ٦)	←	ك' (−٢، ٢)
ل (٣، ٦)	←	($\frac{١}{٣}$ × ٣، $\frac{١}{٣}$ × ٦)	←	ل' (١، ٢)
م (٣، ٣)	←	($\frac{١}{٣}$ × ٣، $\frac{١}{٣}$ × ٣)	←	م' (١، ١)
ن (−٦، ٣)	←	($\frac{١}{٣}$ × −٦، $\frac{١}{٣}$ × ٣)	←	ن' (−٢، ١)



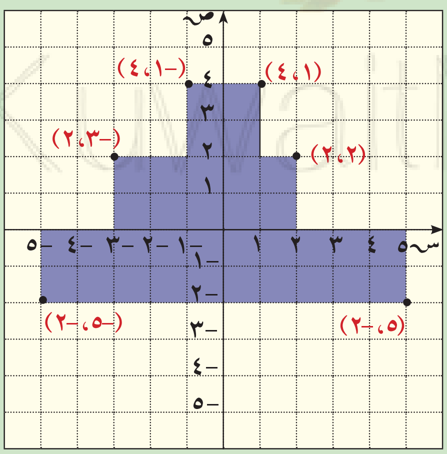
حاول أن تحل

١ أوجد النقاط التي تمثل الرؤوس الجديدة بعد تغيير أبعاد كل من الشكلين أدناه باستخدام:

(أ) تصغير معامله $\frac{١}{٢}$ ومركزه نقطة الأصل



(ب) تكبير معامله ٥, ٢ ومركزه نقطة الأصل



مثال (٣)

تقع النقطة أ' (٤، ١٢) على مضلع ناتج من تكبير معامله ٤ ومركزه نقطة الأصل. أوجد النقطة المناظرة أ؟

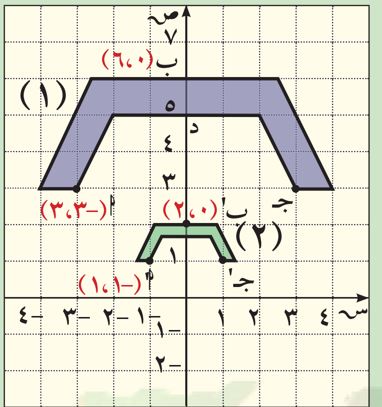
الحل:

أ'(٤ ÷ ٤، ١٢ ÷ ٤) ← أ (١، ٣)   اقسم إحداثيات أ' على ٤.

إذا كان لديك شكل وصورته، وكانت إحداثيات الرؤوس المناظرة معطاة، فيمكنك إيجاد معامل التكبير أو معامل التصغير المستخدم لإيجاد الصورة على اعتبار مركز التكبير أو التصغير هو نقطة الأصل.

مثال (٤)

في الشكل المقابل: أوجد معامل (التكبير أو التصغير) المستخدم لتحويل المضلع (١) إلى المضلع (٢).



الحل:

قارن بين الإحداثيين السينيين أو الإحداثيين الصاديين للنقطتين

أ (-٣، ٣)، أ' (-١، ١).

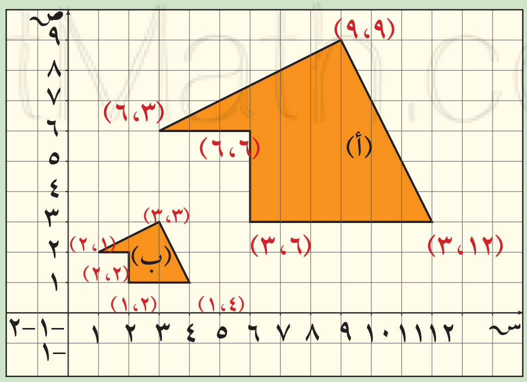
$$\frac{\text{الإحداثي السيني للنقطة أ'}}{\text{الإحداثي السيني للنقطة أ}} = \frac{-١}{-٣} = \frac{١}{٣}$$

معامل التصغير يساوي $\frac{١}{٣}$.

حاول أن تحل

٢ (أ) أوجد معامل التصغير أو التكبير المستخدم لتحويل الشكل أ إلى الشكل ب.

(ب) أوجد معامل التصغير أو التكبير المستخدم لتحويل الشكل ب إلى الشكل أ.



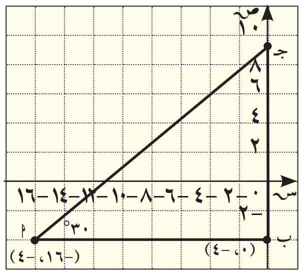
تحقق من فهمك

١ قبل رسم الشكل الذي تم تغيير أبعاده، كيف تعرف هل كان تكبيرًا أو تصغيرًا.

٢ إذا كان الشكل س صورة الشكل ص بعد تغيير أبعاده، فهل يمكن أيضًا اعتبار ص صورة الشكل س بعد تغيير أبعاده؟ وضح إجابتك.

حل المسائل والتفكير المنطقي

القياس: تمَّ تصغير المثلث ٲ ب جـ بمعامل $\frac{٣}{٤}$.



١ ما طول الضلع $\overline{ٲب}$ ؟

....

....

٢ ما إحداثيات الرأس ٲ'؟

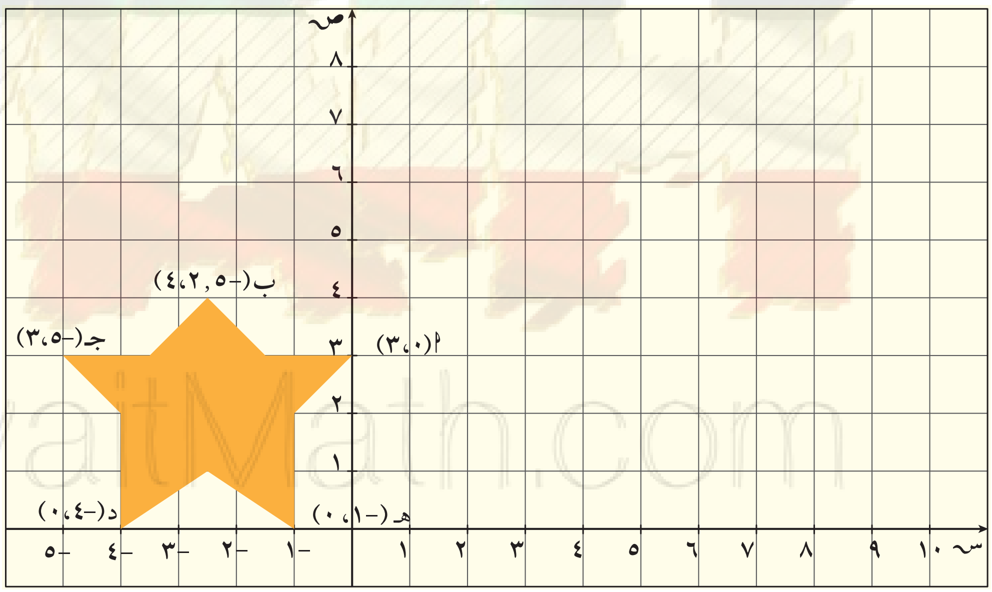
....

....

٣ **التفكير الناقد**: في الشكل أدناه، استخدم معامل ٢ لتكبير الشكل بعد انعكاسه في محور الصادات. ما إحداثيات الرؤوس الجديدة؟ مثِّل «التكبير» بيانيًّا.

....

....



إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

٨-٦

التناظر (التماثل)

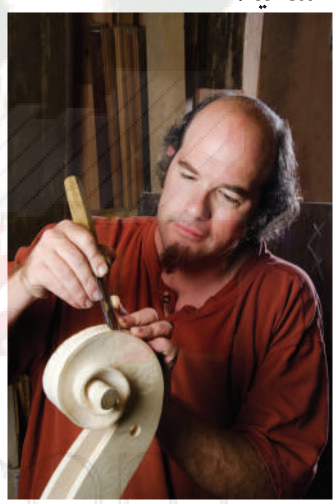
Symmetry

سوف تتعلم

- كيفية تعرف أنواع مختلفة من التناظر.

من الاستخدامات

- يستخدم صانعو الآلات الموسيقية الوترية مفهوم التناظر لتصميم الآلات الموسيقية بحيث تسمح للأوتار بالذبذبة بدقة متناهية.

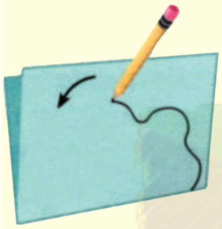


◄ صلة الدرس لقد سبق أن رأيت كيف تؤثر التحويلات على الأشكال. ستتعلم في هذا الدرس كيف يمكن للتحويلات أن توضح ما إذا كان شكل ما متماثلًا أم لا. ►

استكشف | التماثل الخطي

صورة مجزأة **الأدوات المستخدمة**: ورقة قياسها ٢٢ سم × ٢٨ سم، مقص

١ اطو ورقة إلى نصفين. وعلى أحد النصفين ارسم خطًّا منحنيًا يبدأ عند خط طي الورقة وينتهي عنده.

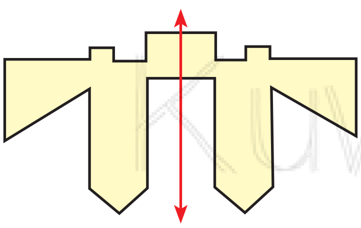


٢ قص الورقة المطوية على طول الخط الذي رسمته ،ثم قارن بين النصفين، واذكر ما الذي حدث بعد قص الشكل. ما هو خط التناظر (خط التماثل)؟

٣ اطو ورقة أخرى إلى نصفين، ثم اطوها إلى نصفين مرة أخرى. ارسم خطًّا منحنيًا يبدأ عند أحد جزءي الورقة وينتهي عند الجزء الثاني. قصّ على طول الخط. كم خط تناظر وجدت؟

تعلم | التناظر

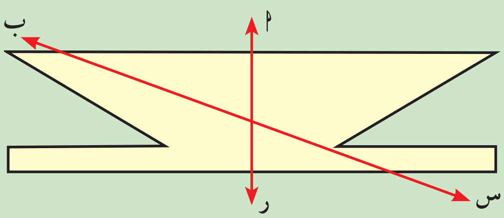
يكون لشكل ما خط تناظر، إذا كان ينطبق نصفاه تطابقًا تامًّا بعد عملية التحويل.



يكون لشكل ما تناظر خطي، إذا كان له خط تناظر يقسمه إلى نصفين متطابقين. والتناظر الخطي مبني على عملية الانعكاس.

مثال (١)

ما الخط الذي يمثل خط تناظر في الشكل إلى اليسار؟



الحل:

$\overleftrightarrow{أر}$ خط تناظر لأنه يقسم الصورة إلى نصفين متطابقين.

المصطلحات الأساسية

◄ تناظر
Symmetry

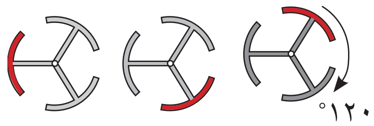
◄ تناظر خطي
Line Symmetry

◄ خط تناظر
Line of Symmetry

◄ تناظر دوراني
Rotational Symmetry

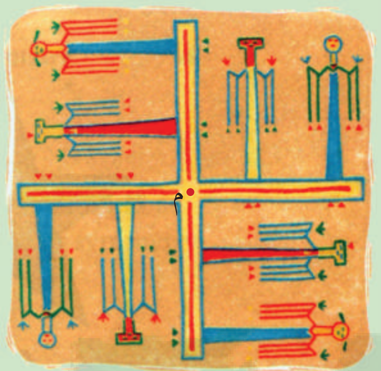
◄ تناظر نقطي
Point Symmetry

إذا تم تدوير شكل حول نقطة داخله لدورة أقل من ٣٦٠° وبقي الشكل نفسه، فيكون له **تناظر دوراني** فمثلاً إذا دار الشكل نصف دورة أي بزاوية قياسها ١٨٠° وانطبق على نفسه، فيصبح للشكل **تناظر دوراني حول نقطة**.



مثال (٢)

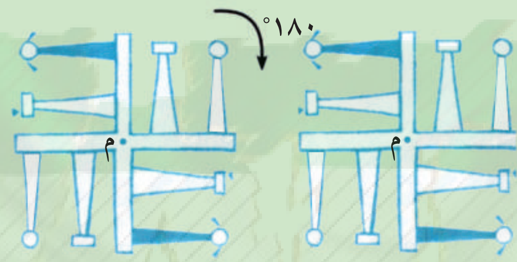
هل لهذه القطعة تناظر دوراني حول نقطة؟



الحل:

دوِّر الشكل ١٨٠° حول النقطة م.

نعم، للشكل تناظر دوراني حول نقطة.

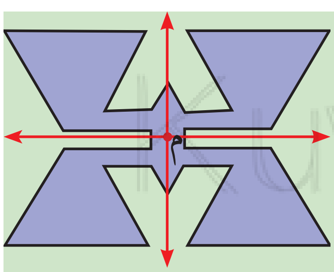


◄ الربط بالعلوم

بحسب مقياس بوفورت لتأثيرات الرياح، فإن الإعصار يحدث عندما تبلغ سرعة الريح ١١٧ كم/ ساعة أو أكثر. يساوي رقم بوفورت الذي يمثل الإعصار ١٢.

مثال (٣)

ما أنواع التناظر التي تراها في الشكل إلى اليسار؟



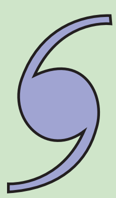
الحل:

للشكل خطا تناظر. تحقق من خطوط التناظر.

للشكل تناظر دوراني (١٨٠°) حول النقطة م. تحقق من التناظر الدوراني.

حاول أن تحل

ما أنواع التناظر التي يتضمنها رمز الإعصار الموضح إلى اليسار؟



تحقق من فهمك

١ اذكر العلاقة بين شكل له خط تناظر والانعكاس.

٢ ما عدد خطوط التناظر في دائرة؟ وضح إجابتك.

٣ إذا كان لشكل خط تناظر، فهل من الضروري أن يكون له تناظر دوراني حول نقطة؟ وضح إجابتك.

حل المسائل والتفكير المنطقي

يبين الرسم نمطًا لشكل حيوان الكنغر.

١ **الأنماط**: هل توجد أشكال متشابهة؟ أشكال متطابقة؟ فسِّر إجابتك.

....

....

٢ **التواصل**: ما نوع التناظر، إن وجد، في النمط بأكمله؟ فسِّر إجابتك.

....

....

٣ **التفكير الرياضي**: كيف يمكنك تحويل «كنغر» من الصف الأعلى إلى الصف الأسفل؟

....

....

٤ **اختر إستراتيجية**: ارسم شكلًا له أربعة خطوط تناظر.

....

....

٥ (أ) قياسات الزوايا اللازمة لكي يدور مثلث متطابق الأضلاع حول نقطة داخله، وينطبق على نفسه؟

....

....

(ب) ما عدد خطوط التناظر لمثلث متطابق الأضلاع؟

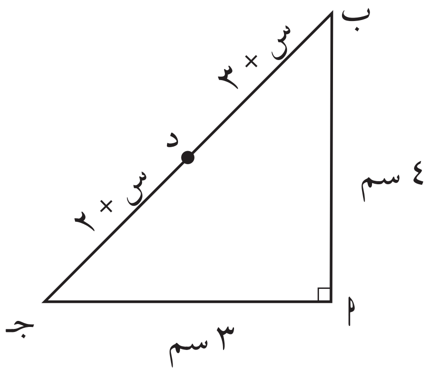
....

....

إستراتيجيات حل المسائل
• ابحث عن النمط.
• نظم قائمة.
• اعمل جدولًا.
• خمن وتحقق.
• اعمل بطريقة عكسية.
• استخدم التفكير المنطقي.
• ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
• حل مسألة أبسط.

اختبار الوحدة الثامنة

١ (أ) أوجد قيمة «س» في الرسم المقابل.



(ب) إذا وضعنا هذا المثلث على شبكة إحداثيات حيث أ تتطابق مع نقطة الأصل، فأوجد إحداثيات النقطة ب والنقطة جـ .

(جـ) أوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$ مستخدمًا الإحداثيات في (ب).

٢ م $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٣}\right)$ منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (١ ، ٢). أوجد إحداثيات النقطة «ب».

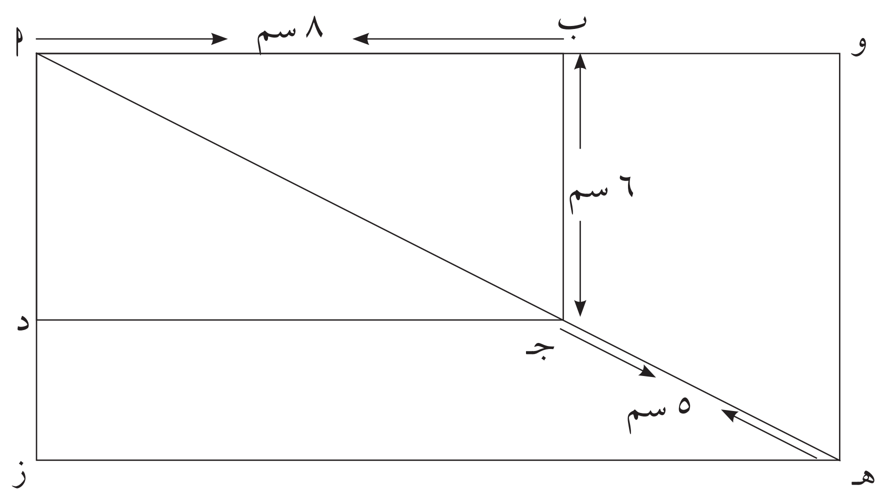
٣ أوجد قيمة «س» إذا كانت م (٤ ، ٢) منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (٢ ، ٢س)، ب(س، −٨).

٤ في الرسم المقابل المستطيل أ و هـ ز هو تكبير للمستطيل أ ب جـ د . النقاط أ، جـ، هـ على مستقيم واحد.

(أ) احسب طول أ جـ.

(ب) أوجد معامل التكبير.

(جـ) احسب طول $\overline{\text{أ و}}$ ، $\overline{\text{أ ز}}$.

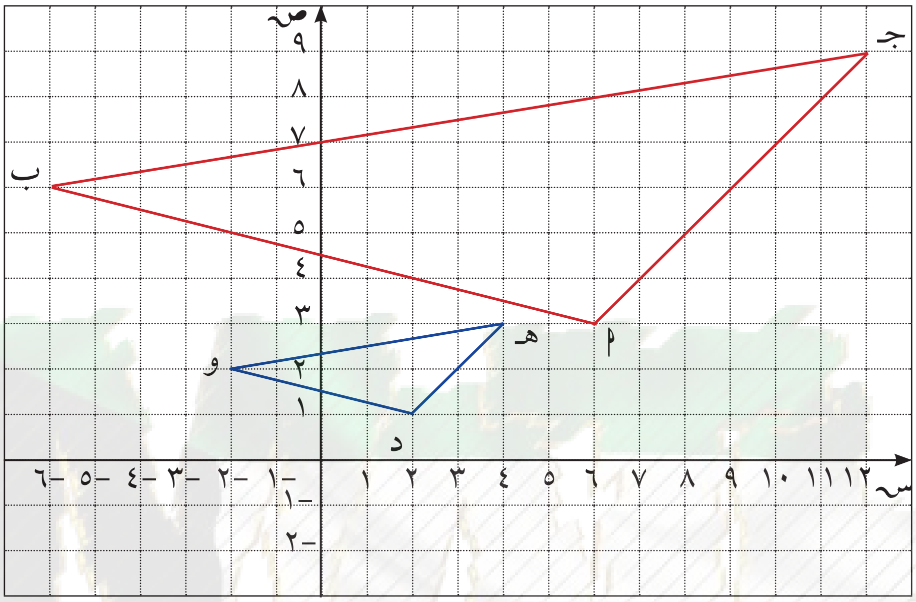


اختبار الوحدة الثامنة

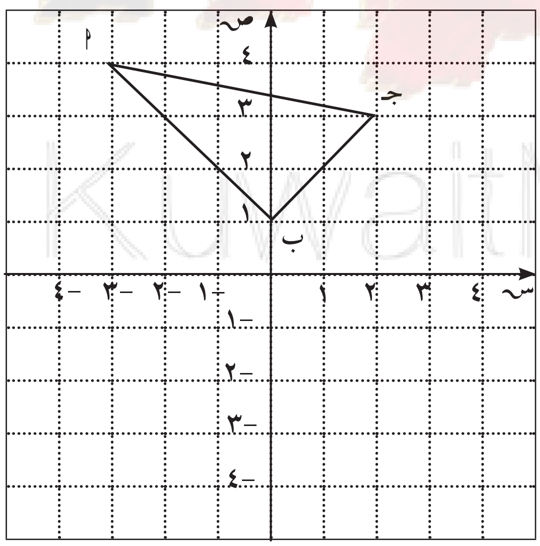
٥ في الرسم أدناه:

(أ) ما هو معامل التصغير بين المثلثين ء ب جـ ، د هـ و.

(ب) هل هناك علاقة بين إحداثيات رؤوس المثلثين؟ إذا وجدت ما هي؟



٦ في الشكل أدناه:



(أ) حدد النقاط التي تمثل رؤوس المثلث ء ب جـ.

(ب) ارسم ء' ب'جـ' صورة المثلث ء ب جـ بدوران زاوية °٢٧٠ باتجاه دوران عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

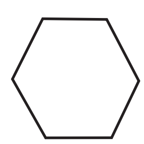
(جـ) أثبت أن المثلثين ء' ب'جـ' ، ء ب جـ متطابقان.

(د) ارسمء'' ب''جـ'' صورة المثلثء ب جـ بدوران زاوية °١٨٠ باتجاه دوران عقارب الساعة حول نقطة الأصل .

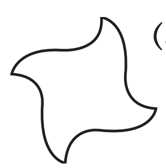
(هـ) أثبت أن المثلثين ء'' ب''جـ'' ، ء ب جـ متطابقين.

٧ حدد، لكل من الرسوم أدناه إذا وُجد، خط تناظر أو تماثل دوراني.

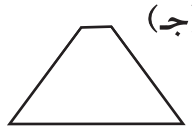
(أ)



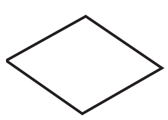
(ب)

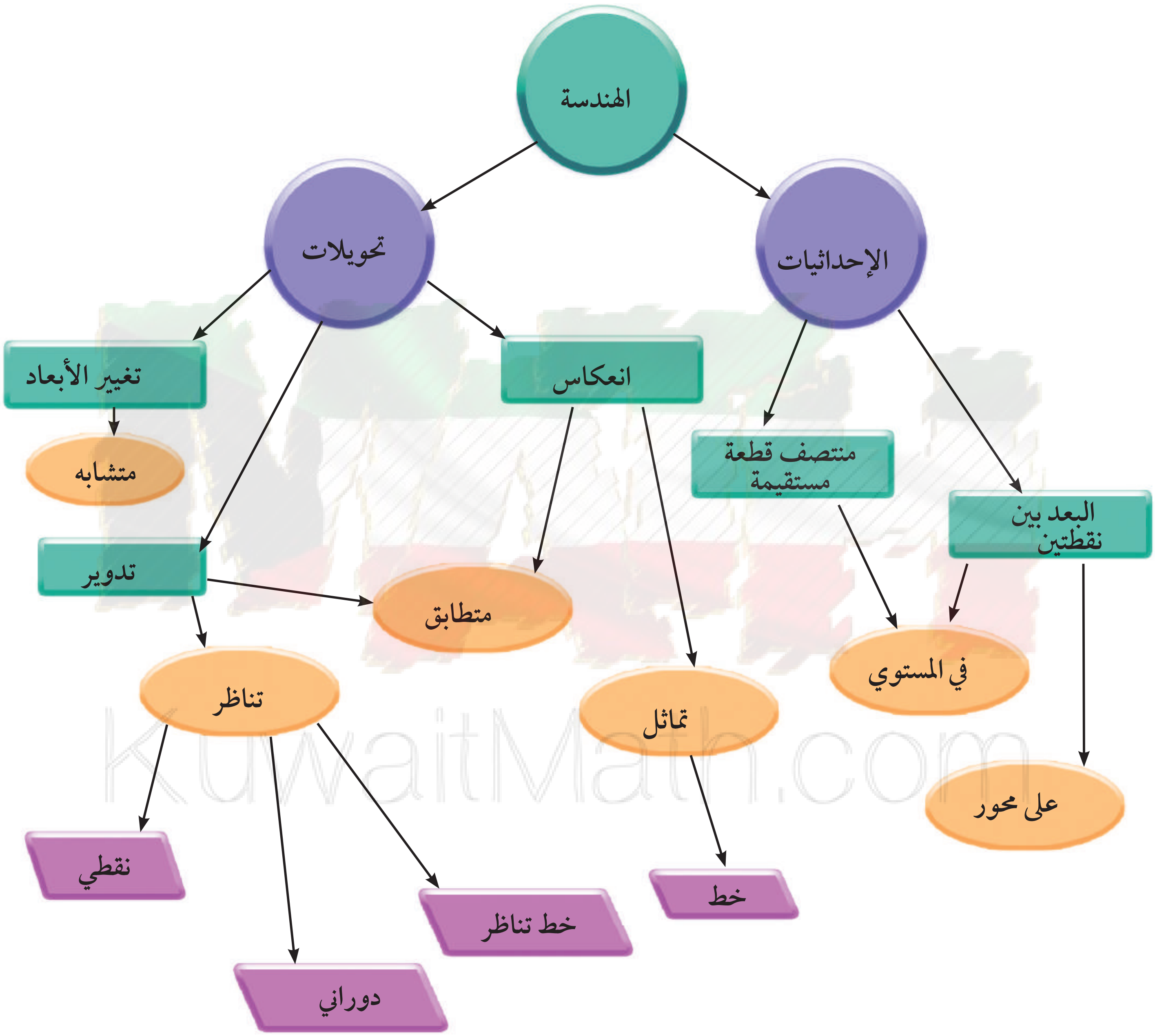


(جـ)



(د)




الهندسة
الإحداثيات
تحويلات
تغيير الأبعاد
انعكاس
متشابه
تدوير
متطابق
تناظر
تماثل
منتصف قطعة مستقيمة
البعد بين نقطتين
في المستوي
على محور
نقطي
خط تناظر
دوراني
خط

ملخص الوحدة الثامنة(أ): الهندسة الإحداثية في المستوي

- المسافة بين نقطتين على محور هي القيمة المطلقة للفرق بين إحداثيا هاتين النقطتين.
- عندما يتساوى طولا قطعتين مستقيمتين نقول إنهما متطابقتان ونرمز لهما بالإشارة $\cong$.
- استخدم القاعدة $\text{أب} = \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$ لإيجاد البعد بين النقطتين أ$(\text{س}_1، \text{ص}_1)$، ب$(\text{س}_2، \text{ص}_2)$.
- إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{أب}}$ هي $\left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2} ، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2}\right)$ حيث أ$(\text{س}_1، \text{ص}_1)$، ب$(\text{س}_2، \text{ص}_2)$.

ملخص الوحدة الثامنة (ب): التحويلات

- التحويل هو تغيير في الشكل، قد يكون انعكاسًا، أو إزاحة، أو دورانًا، أو تغيير أبعاد.
- يغيّر الانعكاس في محور السينات إشارة كل إحداثي صادي.
- يغيّر الانعكاس في محور الصادات إشارة كل إحداثي سيني.
- الدوران باتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل بزاوية:

إذا كانت أ نقطة في المستوى الإحداثي فإن:

$$\text{أ}(\text{س}،\text{ص}) \xrightarrow[\text{حول نقطة الأصل}]{\text{بالدوران } 90^\circ \text{ في اتجاه عقارب الساعة}} \text{أ}'(\text{ص}، -\text{س})$$

$$\text{أ}(\text{س}، \text{ص}) \xrightarrow[\text{حول نقطة الأصل}]{\text{بالدوران } 180^\circ \text{ في اتجاه عقارب الساعة}} \text{أ}'(-\text{س}، -\text{ص})$$

$$\text{أ}(\text{س}، \text{ص}) \xrightarrow[\text{حول نقطة الأصل}]{\text{بالدوران } 270^\circ \text{ في اتجاه عقارب الساعة}} \text{أ}'(-\text{ص}، \text{س})$$

- يمكن تغيير أبعاد شكل ما باستخدام معامل التكبير أو معامل التصغير.
- تتغير إحداثيات شكل في مستوي إحداثيات بضرب كل إحداثي في معامل التكبير (التصغير) على اعتبار أن نقطة الأصل (٠، ٠) مركز التكبير (التصغير) باستخدام القاعدة التالية:

$$(\text{س}، \text{ص}) \xrightarrow[\text{ومركزه نقطة الأصل}]{\text{تكبير (تصغير) معامله ك}} (\text{ك س}، \text{ك ص}) \text{ حيث ك} > 1 \text{ ، } (0 < \text{ك} < 1)$$

- يكون للشكل تناظر إذا انطبق على نفسه بعد التحويل، وأنواع التناظر الثلاثة هي: تناظر خطي، تناظر دوراني، تناظر نقطي.