الوحدة السابعة

هندسة المثلث

Geometry of Triangle

علوم

تنسج العنكبوت شبكتها من خيوط حريرية لزجة وتكون على شكل موجات مثلثية.

تستخدم العنكبوت هذه الشبكة منزلًا لها، وهي تسمح لها بالتقاط فرائسها من الحشرات.

جغرافيا

تشكل الحدود الشرقية والشمالية والجنوبية لدولة الكويت شبه مثلث على الخريطة.

تسلية

أحرزت الكويت بطولة البليارد العربية الرابعة عن فئة (٩ كرات) سنة ٢٠٠٧ في الدوحة. تبدأ هذه اللعبة بضرب كرة البليارد بمجموعة كرات موضوعة بشكل مثلث.

فنون قتالية

تعبر هذه الصورة عن الوضعية الهجومية في أحد فنون القتال، وتأخذ الوضعية شكل المثلث.

مفاهيم رياضية أساسية

متباينة المثلث: في كل مثلث، طول كل ضلع هو أصغر من مجموع طولي الضلعين الآخرين.

في المثلث **حاد الزوايا**، يكون مجموع مربعي طولي ضلعين أكبر من مربع طول الضلع الثالث.

تتقاطع **محاور المثلث** في نقطة واحدة. هذه النقطة تقع على أبعاد متساوية من رؤوس المثلث الثلاثة.

تتقاطع **منصفات زوايا المثلث** في نقطة واحدة. تقع هذه النقطة على أبعاد متساوية من أضلاعه الثلاثة.

الأعمدة المرسومة من **رؤوس المثلث** على أضلاعه الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة.

القطع المتوسطة للمثلث تتقاطع في نقطة واحدة تقسم كلًّا منها نسبة ٢ : ١ من جهة الرأس.

مشروع الوحدة

حل المسائل
افهم
خطط
حل
تحقق

مع غروب شمس نهار حار، تحتاج إلى الخروج. إلى أين ستذهب؟ إلى المتنزه! لأجيال، لجأ الناس في المدن إلى المتنزهات للاسترخاء ومقابلة الأصدقاء، حيث يكونون محاطين بالطبيعة. سوف تضع في هذا المشروع تصميمًا لمتنزه صغير تقدمه إلى البلديّة في مدينتك. نتاج عملك سوف يكون تصميمًا مفصلًا للمتنزه.

التركيز على حل المسائل

لكل مسألة مما يلي ثلاث إجابات. حدد الإجابة الصحيحة، ثم حدد الجمل المعطاة في المسألة والتي لا تتفق مع الإجابتين الأخريين:

اختبر القواعد المستخدمة في حل المسائل

عند حل المسائل، فإنه من الأهمية أن تتحقق من مدى صحة إجابتك. مثلًا، تحقق من أن حلك يتفق مع كل الحقائق الواردة في المسألة.

١ ركض أربعة أشخاص مجتمعين مسافة ٣٥ كم. ركض ناصر ١ كم أكثر من حمد، وركض مبارك ١٠٠٠ متر أقل من ناصر، أما أحمد فركض ربع المسافة التي ركضها الآخرون مجتمعين. كم ركض كل منهم؟

إجابة ١	إجابة ٢	إجابة ٣
ناصر ٩	ناصر ٩	ناصر ١٠
حمد ١٠	حمد ٩	حمد ٩
مبارك ١٢	مبارك ١٠	مبارك ٩
أحمد ٤	أحمد ٩	أحمد ٧

٢ بعد مسابقة الركض، تقابلوا في محل العصائر. دفع ناصر ٣ دنانير أكثر من مبارك، ودفع حمد مرة ونصف مما دفعه مبارك، أما مبارك فدفع ٣ دنانير أقل من أحمد. كم دفع كل منهم إذا كان مجموع فاتورتهم ١٩,٥٠٠ دينارًا.

إجابة ١	إجابة ٢	إجابة ٣
ناصر ١٠	ناصر ٦	ناصر ٦
حمد ١,٥٠٠	حمد ٤,٥٠٠	حمد ٣
مبارك ٦	مبارك ٣	مبارك ٦
أحمد ٦	أحمد ٦	أحمد ٤,٥٠٠

الوحدة السابعة

هندسة المثلث
Geometry Of Triangle

شبكات العناكب

تنسج العناكب أنواعًا مختلفة من الشبكات كالشبكة المثلثية والشبكة المدارية. ولهاتين الشبكتين نمط مثلثي.

العناكب التي تنسج شبكة مثلثية الشكل تنتظر فريستها في آخر الشبكة.

أما العناكب التي تنسج الشبكات المدارية، فيكون مدى الرؤية لديها ضعيف نسبيًّا.

تنسج العناكب شبكات جميلة ومعقدة بخيوط من الحرير اللاصق لاصطياد الفرائس. تشعر العناكب بفرائسها من خلال موجات تصدرها عند التصاقها بالشبكة.

١ علام تتغذى العناكب؟

٢ كيف تساعد الشبكة العناكب على اصطياد فرائسها؟

٣ ما هي الأشكال الهندسية التي تراها في شبكات العناكب ؟

٧ـ١

متباينة المثلث وأنواعه

Triangle Inequality and Types of Triangles

سوف تتعلم

- استخدام متباينة المثلث.
- تحديد نوع المثلث.

من الاستخدامات

- يستخدم مصممو الخيم متباينة المثلث عند وضع تصاميم لخيمهم بهدف اختيار الشكل الأفضل.

المصطلحات الأساسية

◄ متباينة المثلث
Triangle Inequality

معلومة رياضية

إذا كان أ ب + ب جـ = أ جـ، فإن النقاط الثلاث أ، ب، جـ، على استقامة واحدة.

◄ صلة الدرس في السابق تعرفت حل المتباينات. في هذا الدرس سوف تستخدم متباينة المثلث لحل مسائل متعلقة بأطوال أضلاعه أو قياس زواياه. ◄

استكشف متباينات في مثلث

الأدوات المستخدمة: مقص، مسطرة، عيدان.

اعمل ضمن مجموعة لجمع عيدان من مختلف الأطوال (٢، ٣، ٤، ٥ و٦ سم).

١ اختر ثلاثة عيدان عدة مرات لتبين ما إذا كانت تشكل مثلثًا أو لا، وأكمل الجدول. كرر العملية عدة مرات.

طول العود			تشكل مثلث
عود ١	عود ٢	عود ٣	
٢	٣	٤	نعم
٢	٣	٥	لا
٥	٤	٣	نعم

٢ اختر مجموعة عيدان تشكل مثلثًا وقارن الأطوال. أكمل:

(أ) طول عود ١ + طول عود ٢ ..... طول عود ٣

(ب) طول عود ١ + طول عود ٣ ..... طول عود ٢

(جـ) طول عود ٢ + طول عود ٣ ..... طول عود ١

٣ اختر مجموعة عيدان لا تشكل مثلثًا، وأكمل (أ)، (ب)، (جـ)، من ٢ . هل النتائج هي نفسها؟

٤ ماذا تستنتج من ٢ و ٣ بمقارنة مجموع طولي ضلعين مع طول الضلع الثالث من مثلث؟

تعلم متباينة المثلث وأنواعه

متباينة المثلث:

مجموع طولي أي ضلعين في المثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

هذه الخاصية تسمى **متباينة المثلث**.

مثلاً في المثلث أ ب جـ يكون: ب جـ + أ ب > أ جـ

أ جـ + ب جـ > أ ب

أ ب + أ جـ > جـ ب

مثال (١)

هل يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث كما يلي؟ فسر.

(أ) ٣سم، ٧سم، ٨سم.

(ب) ٣سم، ٦ سم، ١٠ سم.

(أ) المعطيات: الأطوال هي ٣سم، ٧سم، ٨سم.

المطلوب: التحقق من وجود مثلث مع الأطوال المعطاة.

البرهان: باستخدام متباينة المثلث: ٣ + ٧ > ٨؛ ٨ + ٧ > ٣؛ ٨ + ٣ > ٧.

الأطوال: ٣سم، ٧سم، ٨سم يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث.

(ب) المعطيات: الأطوال هي ٣ سم، ٦ سم، ١٠ سم

المطلوب: التحقق من وجود مثلث مع الأطوال المعطاة

البرهان: ٣ + ٦ < ١٠

الأطوال ٣ سم، ٦ سم، ١٠ سم لا يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث.

ملاحظة:

يمكن الاكتفاء باختيار أكبر الأضلاع طولًا ومقارنته بمجموع طولي الضلعين الآخرين.

حاول أن تحل

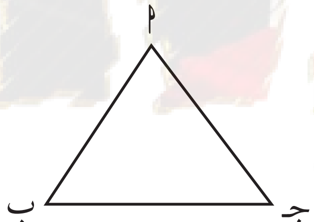
١ هل يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث ٤ سم، ٦ سم، ١٠ سم؟ فسر.

يمكن التعرف على نوع المثلث بالنسبة إلى زواياه، بمقارنة مربع طول الضلع الأكبر بمجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين.

إذا كان أ ب جـ مثلثًا فيه $\overline{\text{أ جـ}}$ **أكبر الأضلاع طولًا** فيكون المثلث أ ب جـ:

حاد الزوايا إذا كان:

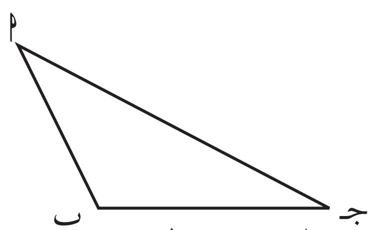
(أ جـ)^{٢} < (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}



مثلث حاد الزوايا

منفرج الزاوية في ب إذا كان:

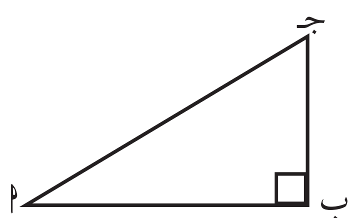
(أ جـ)^{٢} > (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}



مثلث منفرج الزاوية

قائم الزاوية في ب إذا كان:

(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}



مثلث قائم الزاوية

مثال (٢)

∵ تقرأ بما أن

∴ تقرأ إذن

حدد نوع المثلث ﻫ ب جـ بالنسبة إلى زواياه.

(أ) إذا كان ﻫ ب = ٥ سم ، ب جـ = ١١ سم ، ﻫ جـ = ١٠ سم

المعطيات: ﻫ ب = ٥ سم، ب جـ = ١١ سم، ﻫ جـ = ١٠ سم.

المطلوب: تحديد نوع المثلث بالنسبة إلى زواياه.

البرهان:

$\overline{\text{ب جـ}}$ أكبر الأضلاع طولًا في المثلث ﻫ ب جـ: (ب جـ)^{٢} = (١١)^{٢} = ١٢١

(ﻫ ب)^{٢} + (ﻫ جـ)^{٢} = (٥)^{٢} + (١٠)^{٢}

= ٢٥ + ١٠٠

= ١٢٥

∵ ١٢١ < ١٢٥

أي أن: (ب جـ)^{٢} < (ﻫ ب)^{٢} + (ﻫ جـ)^{٢}

∴ المثلث ﻫ ب جـ حاد الزوايا.

(ب) إذا كان ﻫ ب = ٢ سم ، ب جـ = ٦ سم، ﻫ جـ = ٧ سم.

المعطيات: ﻫ ب = ٢ سم، ب جـ = ٦ سم، ﻫ جـ = ٧ سم.

المطلوب: تحديد نوع المثلث بالنسبة إلى زواياه.

البرهان: $\overline{\text{ﻫ جـ}}$ أكبر الأضلاع طولًا في المثلث ﻫ ب جـ .

(ﻫ جـ)^{٢} = (٧)^{٢} = ٤٩

(ب ﻫ)^{٢} + (ب جـ)^{٢} = (٢)^{٢} + (٦)^{٢}

= ٤ + ٣٦

= ٤٠

∵ ٤٩ > ٤٠

أي أن: (ﻫ جـ)^{٢} > (ب ﻫ)^{٢} + (ب جـ)^{٢}، ∴ المثلث ﻫ ب جـ منفرج الزاوية.

حيث إن الضلع $\overline{\text{ﻫ جـ}}$ الضلع الأكبر طولًا في المثلث، فتكون الزاوية ب المقابلة له الزاوية الأكبر قياسًا.
المثلث ﻫ ب جـ منفرج الزاوية في ب.

(جـ) إذا كان ﻫ ب = ٣ سم ، ﻫ جـ = ٤ سم، ب جـ = ٥ سم.

المعطيات: ﻫ ب = ٣ سم، ﻫ جـ = ٤ سم، ب جـ = ٥ سم.

المطلوب: تحديد نوع المثلث بالنسبة إلى زواياه.

البرهان: $\overline{\text{ب جـ}}$ أكبر الأضلاع طولًا في المثلث ﻫ ب جـ.

(ب جـ)^{٢} = (٥)^{٢} = ٢٥

(ﻫ ب)^{٢} + (ﻫ جـ)^{٢} = (٣)^{٢} + (٤)^{٢}

= ٩ + ١٦ = ٢٥

∵ ٢٥ = ٢٥

أي أن: (ب جـ)^{٢} = (ﻫ ب)^{٢} + (ﻫ جـ)^{٢}، ∴ المثلث ﻫ ب جـ قائم الزاوية.

حيث إن الضلع $\overline{\text{ب جـ}}$ الضلع الأكبر طولًا في المثلث، فتكون الزاوية ﻫ المقابلة له الزاوية الأكبر قياسًا.
المثلث ﻫ ب جـ قائم الزاوية في ﻫ.

حاول أن تحل

٢ حدد نوع المثلث بالنسبة إلى زواياه إذا كان:

(أ) س ص = ١١ سم ، ص ع = ٤ سم ، س ع = ١٢ سم.

(ب) ل م = ٧ سم ، م ن = ٦ سم ، ل ن = ٥ سم.

(جـ) أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم ، أ جـ = ١٠ سم.

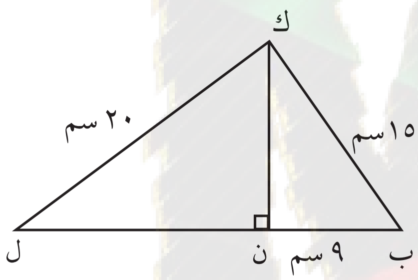
تحقق من فهمك

١ مثلث منفرج الزاوية في ب، هل من الممكن أن تكون (أ جـ)^{٢} − (أ ب)^{٢} < (ب جـ)^{٢}؟

٢ مثلث قائم الزاوية في جـ، هل من الممكن أن تكون (ب جـ)^{٢} = (أ جـ)^{٢} + (أ ب)^{٢}؟

٣ أ' ، ب' ، جـ' أطوال ثلاثة أضلاع في مثلث حيث أ' + ب' < جـ' . هل تستنتج أن أ' + جـ' < ب'؟

حل المسائل والتفكير المنطقي



١ في الشكل المقابل، إذا كان:

ب ن = ٩ سم، ب ك = ١٥ سم، ك ل = ٢٠ سم، ك ن ⊥ ب ل.

أثبت أن المثلث ب ك ل قائم الزاوية في ك.

....

....

٢ في الشكل المقابل، إذا كان:

أ د = د جـ = ٣ سم، أ ب = ٥ سم ، ب د ⊥ أ جـ .

هل المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب؟

....

....

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظّم قائمة.
- كوّن جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حلّ مسألة أبسط.

٧-٢

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في المثلث
Midsegment of Triangle

سوف تتعلم

- استخدام خصائص القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث لحل مسائل هندسية.

من الاستخدامات

- يستخدم ماسحو الأراضي خاصية القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين لإيجاد طول بحيرة ما.

◄ صلة الدرس في هذا الدرس سوف تتعرف خصائص القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث. ►

استكشف: منتصفات القطعة المستقيمة

الأدوات المستخدمة: مقص، مسطرة.

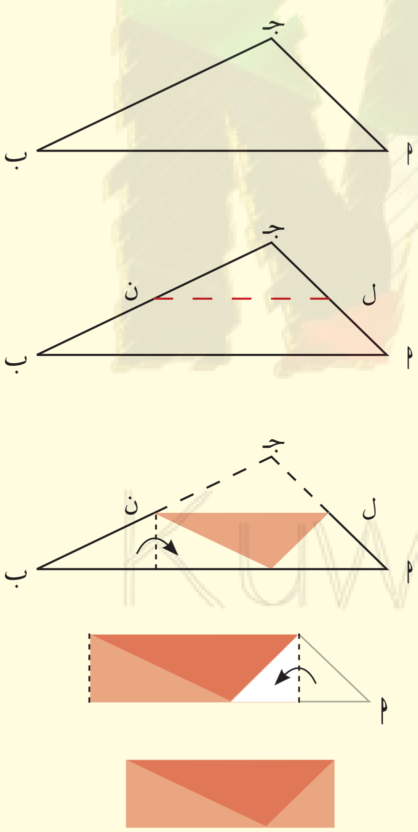
يقص كل طالب في مجموعتك عددًا من المثلثات (قائمة الزاوية، حادة الزوايا، منفرج الزاوية).

ليكن مثلث أ ب جـ. اطو أ على جـ لإيجاد منتصف القطعة المستقيمة أ جـ، وبالمثل لـ ب جـ.

ليكن ل ، ن المنتصفين. صل بينهما لتحصل على ل ن .

اطو مثلث عند ل ن .

تابع الطي كما في الرسم المرفق.



١ ما نوع الرباعي الذي يتشكل من طي المثلث ل جـ ن؟

٢ ماذا تستنتج بالنسبة إلى ل ن ، أ ب؟

٣ اذكر خاصية تربط القطعة المستقيمة المشكلة من منتصفي ضلعين بالنسبة إلى الضلع الثالث في المثلث.

تعلم: القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث

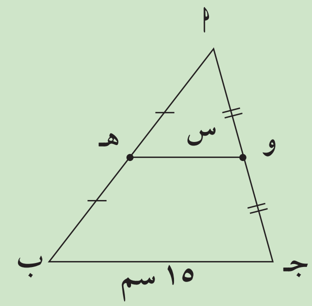
نظرية (١)

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث، وطولها يساوي نصف طول هذا الضلع.

مثال (١)

أوجد قيمة س في الحالات التالية: (بالبرهان)

(أ)



(أ) المعطيات: ا و = و جـ ، ا هـ = هـ ب ،

ب جـ = ١٥ سم

المطلوب: إيجاد قيمة س.

البرهان:

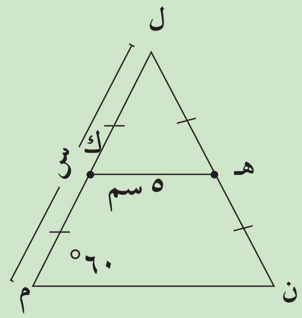
∵ و منتصف $\overline{\text{ا جـ}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ (معطى)

∴ $\overline{\text{و هـ}}$ // $\overline{\text{جـ ب}}$ ، و هـ = $\frac{١}{٢}$ جـ ب نظرية (١)

س = $\frac{١}{٢}$ × ١٥ بالتعويض

أي أن س = ٧,٥ سم.

(ب)



(ب) المعطيات: ل ك = ك م = ل هـ = هـ ن،

ق ($\hat{\text{م}}$) = ٦٠° ؛ هـ ك = ٥ سم

المطلوب: إيجاد قيمة س.

البرهان:

∵ هـ منتصف $\overline{\text{ل ن}}$ ، ك منتصف $\overline{\text{ل م}}$ (معطى)

∴ $\overline{\text{هـ ك}}$ // $\overline{\text{ن م}}$ ، هـ ك = $\frac{١}{٢}$ ن م نظرية (١)

٥ = $\frac{١}{٢}$ ن م بالتعويض

ن م = ١٠ سم

∵ ل ك = ك م = ل هـ = هـ ن (معطى)

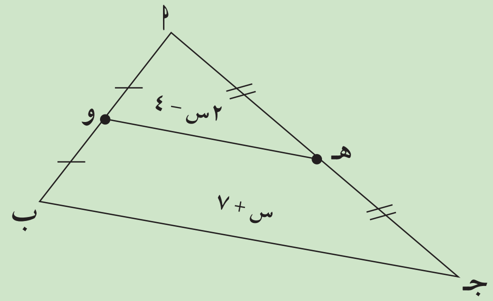
∴ ل م = ل ن

ويكون المثلث ل ن م متطابق الضلعين؛ وبما أن إحدى زواياه قياسها ٦٠°، فيصبح متطابق الأضلاع وبالتالي: س = ١٠ سم.

ملاحظة:
في المثلث متطابق الضلعين إذا كان قياس إحدى زوايا القاعدة يساوي ٦٠° فإن المثلث يكون متطابق الأضلاع.

حاول أن تحل

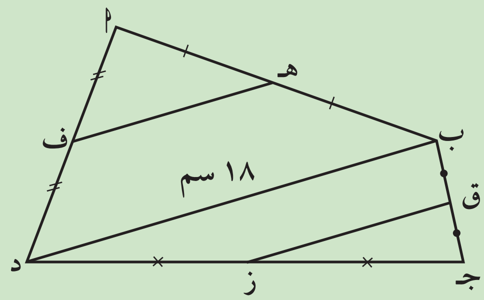
١ في الشكل المقابل، أوجد قيمة س. (بالبرهان)



مثال (٢)

في الشكل الرباعي أ ب جـ د. إذا كان هـ ، ف ، ز، ق منتصفات الأضلاع $\overline{\text{ب أ}}$ ، $\overline{\text{أ د}}$ ، $\overline{\text{د جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ ب}}$ على الترتيب.

ب د = ١٨ سم. أوجد هـ ف ، ق ز.



المعطيات: هـ منتصف $\overline{\text{ب أ}}$

ف منتصف $\overline{\text{أ د}}$

ز منتصف $\overline{\text{د جـ}}$

ق منتصف $\overline{\text{جـ ب}}$

ب د = ١٨ سم

المطلوب: إيجاد طول $\overline{\text{هـ ف}}$ ، $\overline{\text{ق ز}}$.

البرهان: في المثلث د ب جـ :

∵ ق منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$	(معطى)
∵ ز منتصف $\overline{\text{جـ د}}$	(معطى)
∴ $\overline{\text{ق ز}}$ // $\overline{\text{ب د}}$ ، ق ز = $\frac{1}{2}$ ب د	نظرية (١)
ق ز = $\frac{1}{2}$ × ١٨	بالتعويض
ق ز = ٩ سم	

في المثلث أ ب د:

∵ هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$	(معطى)
∵ ف منتصف $\overline{\text{أ د}}$	(معطى)
∴ $\overline{\text{هـ ف}}$ // $\overline{\text{ب د}}$ ، هـ ف = $\frac{1}{2}$ ب د	نظرية (١)
هـ ف = $\frac{1}{2}$ × ١٨	بالتعويض
هـ ف = ٩ سم	

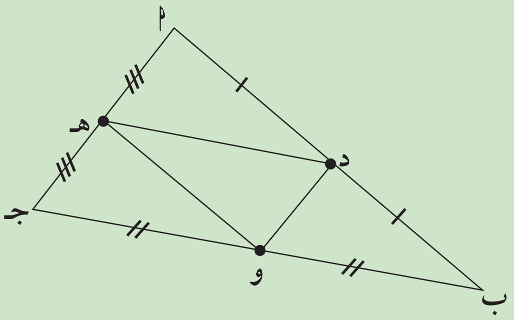
حاول أن تحل

٢ في المثال (٢)، إذا كانت أ جـ = ٢٠ سم، فأوجد ق هـ ، ز ف.

مثال (٣)

في الشكل المقابل ا ب جـ مثلث فيه د، و، هـ منتصفات ا ب ، ب جـ ، جـ ا على الترتيب.

إذا كان ب جـ = ١٠ سم فأوجد د هـ ، ثم أثبت أن د و جـ هـ متوازي أضلاع.



المعطيات: ا ب جـ مثلث حيث:

ا د = د ب ؛ ب و = و جـ

ا هـ = هـ جـ

ب جـ = ١٠ سم

المطلوب: (١) إيجاد د هـ.

(٢) إثبات أن د و جـ هـ متوازي أضلاع.

البرهان: (١) ∵ د منتصف ا ب ، هـ منتصف ا جـ (معطى)

∴ د هـ // ب جـ ؛ د هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ نظرية (١)

∴ د هـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ = ٥ سم بالتعويض

(٢) ∵ جـ و = ٥ سم (جـ و = و ب)

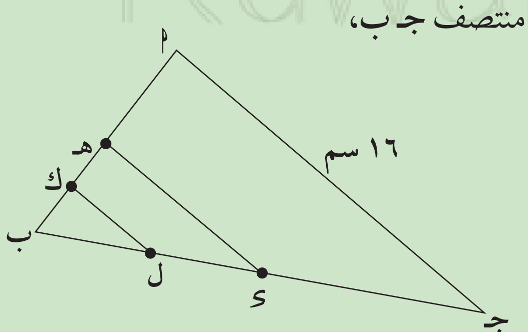
لذا يكون: د هـ = جـ و = ٥ سم

ولدينا د هـ // جـ و

∴ د و جـ هـ متوازي أضلاع (رباعي فيه ضلعان متقابلان متوازيان ومتساويان في الطول).

حاول أن تحل

٣ في الشكل المقابل ا ب جـ مثلث، ا جـ = ١٦ سم. هـ منتصف ا ب ، ى منتصف جـ ب، ك منتصف ب هـ ، ل منتصف ى ب . أوجد طول ك ل.



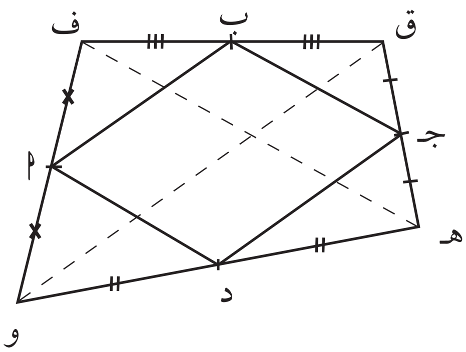
تحقق من فهمك

١ إذا وصلت المنتصفات بين كل زوجين من أضلاع في مثلث، فما علاقة محيط المثلث الذي تحصل عليه بمحيط المثلث الأساسي؟

٢ إذا كان طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين يساوي س سنتيمتر، فكم يساوي طول الضلع الثالث في المثلث؟

المرشد لحل المسائل (٧-٢)

في الشكل الرباعي المقابل، أ ، ب ، جـ ، د منتصفات الأضلاع:
ف و ، ف ق ، ق هـ ، هـ و على الترتيب.
حدد نوع الشكل الرباعي أ ب جـ د.



افهم

١ ما العلاقة التي تربط النقاط أ ، ب ، جـ ، د بالشكل الرباعي و ف ق هـ ؟ ....

٢ ما المطلوب إليك إيجاده؟ ....

خطط

٣ سمّ مثلثًا يكون أ ، ب منتصفين لضلعين من أضلاعه. ....

٤ سمّ مثلثًا يكون جـ ، د منتصفين لضلعين من أضلاعه. ....

....

حل

٥ مستخدمًا القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث، أوجد العلاقة بين أ ب ، و ق وبين د جـ ، و ق.

....

....

٦ استنتج علاقة بين أ ب ،د جـ . ...

٧ حدد نوع الشكل الرباعي أ ب جـ د . ...

تحقق

٨ تحقق من النتيجة مستخدمًا الضلعين الآخرين (أي جـ ب ، د أ) من الشكل الرباعي أ ب جـ د . ...

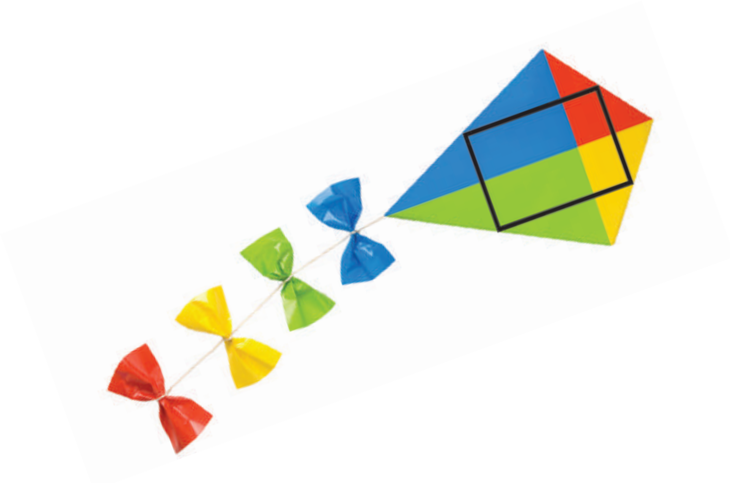
....

حل مسألة أخرى

٩ في المعين ق ف و هـ منتصفات الأضلاع هي: أ ، ب ، جـ ، د. حدد نوع الشكل الرباعي أ ب جـ د.

....

حل المسائل والتفكير المنطقي



١ **التصميم**: يصمم ناصر طائرة ورقية يخطّط فيها لاستخدام شرائط للزينة لوصل منتصفات أضلاع الطائرة ببعضها. يبلغ طول كل من قطري الطائرة ٦٤ سم ، ٩٠ سم. أوجد طول شريط الزينة المستخدم.

....

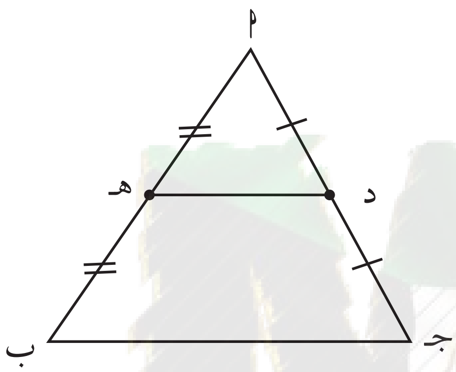
٢ مستخدمًا الرسم المقابل:

(أ) أوجد جـ ب إذا كانت د هـ = ٧ سم.

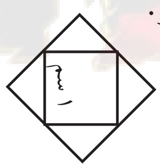
(ب) أوجد محيط المثلث ﺃ د هـ إذا كانت ﺃ ب = ١٠ سم ، ﺃ جـ = ١٣ سم.

....

....



٣ **أنماط**: رؤوس المربع الأصغر في الشكل المقابل هي منتصفات أضلاع المربع الأكبر.



(أ) أوجد طول ضلع المربع الكبير.

(ب) إذا رسمت مربعًا صغيرًا إضافيًا، فكم سيكون طول ضلع المربع الأصغر.

....

....

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- كون جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

٧-٣

القطعة المستقيمة الواصلة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر

The Segment Joining the Vertex of Right Angle to the Midpoint of the Hypotenuse

سوف تتعلم

- تحديد خواص القطعة المستقيمة التي تصل رأس زاوية قائمة بمنتصف الوتر.

من الاستخدامات

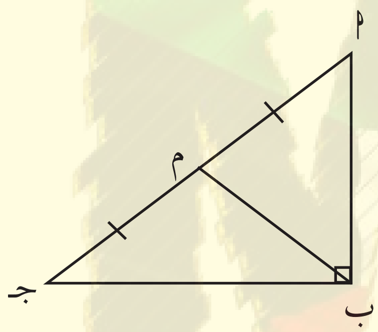
- يستخدم المهندسون قانون القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة في مثلث إلى منتصف الوتر لمعرفة طول الدعائم الحديدية المستخدمة في الجسور.

صلة الدرس تعرفت في السابق القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث . في هذا الدرس، سوف تتعرف خصائص القطعة المستقيمة التي تصل رأس زاوية قائمة بمنتصف الوتر.

استكشف من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر

الأدوات المستخدمة: مسطرة.

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في «ب» ، و «م» منتصف الوتر.



١ نأخذ نقطة د ∋ $\overleftarrow{\text{ب م}}$ بحيث تكون «م» منتصف $\overline{\text{ب د}}$.

٢ ارسم $\overline{\text{أ د}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$.

٣ ما نوع الشكل الرباعي أ ب جـ د ؟

٤ ماذا تستنتج بالنسبة إلى طولي قطري الرباعي أ ب جـ د؟

٥ ماذا تستنتج بالنسبة إلى طول القطعة المستقيمة التي تصل رأس الزاوية القائمة بمنتصف الوتر؟

تعلم القطعة الواصلة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر

نظرية (٢)

طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر في المثلث قائم الزاوية تساوي نصف طول الوتر.

تذكر

بعض خواص المثلث المتطابق الضلعين :

- فيه ضلعان متطابقان
- زاويتا قاعدة المثلث لهما القياس نفسه.
- منصف زاوية الرأس ينصف القاعدة ويكون عموديًّا عليها.

المعطيات: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ، د منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$.

$\overline{\text{أ د}}$ قطعة مستقيمة واصلة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر $\overline{\text{ب جـ}}$.

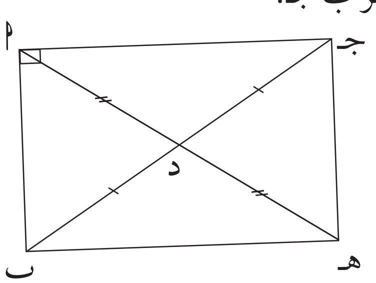
المطلوب: إثبات أن أ د = $\frac{1}{2}$ ب جـ.

العمل: نأخذ على امتداد $\overleftarrow{\text{أ د}}$ النقطة هـ حيث $\overline{\text{د هـ}} \cong \overline{\text{أ د}}$.

نصل جـ مع هـ ثم ب مع هـ .

البرهان: ∵ د جـ = د ب (معطى)

د أ = د هـ (عملاً)



∴ الشكل الرباعي أ ب هـ جـ متوازي أضلاع (القطران ينصف كلًّا منهما الآخر).

أ ب هـ جـ مستطيل (متوازي أضلاع يتضمن زاوية قائمة).

أ هـ = ب جـ (تساوي القطرين في المستطيل).

∵ أ د = $\frac{1}{2}$ أ هـ

∴ أ د = $\frac{1}{2}$ ب جـ (وهو المطلوب)

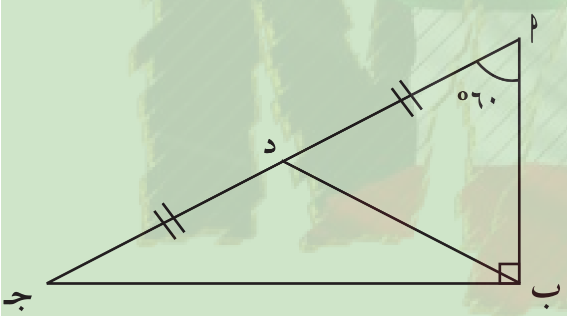
مثال (١)

تذكر
أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين رأسه أ:
أ ب = أ جـ
ق (ب̂) = ق (جـ̂)

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، ق (أ̂) = ٦٠°،
د منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$. أثبت أن: أ ب د مثلث متطابق الأضلاع، وأن أ ب = $\frac{1}{2}$ أ جـ .

المعطيات: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب.
ق (أ̂) = ٦٠°، د نقطة منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$.

المطلوب: إثبات أن المثلث أ ب د متطابق الأضلاع وأن أ ب = $\frac{1}{2}$ أ جـ



البرهان: ∵ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، د منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$.

∴ ب د = $\frac{1}{2}$ أ جـ (نظرية)

ب د = د أ = د جـ (د منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$)

ب د أ مثلث متطابق الضلعين (د ب = د أ)

ق (أ̂) = ق (أ ب̂ د) = ٦٠° (الزوايا في القاعدة متساوية القياس)

ق (ب د̂ أ) = ١٨٠° − (٦٠° + ٦٠°) (مجموع زوايا المثلث ١٨٠°)

ق (ب د̂ أ) = ٦٠°

∴ المثلث أ ب د متطابق الأضلاع.

∴ أ ب = $\frac{1}{2}$ أ جـ .

حاول أن تحل

١ أوجد ق (جـ̂) في المثال (١).

نتيجة (١)

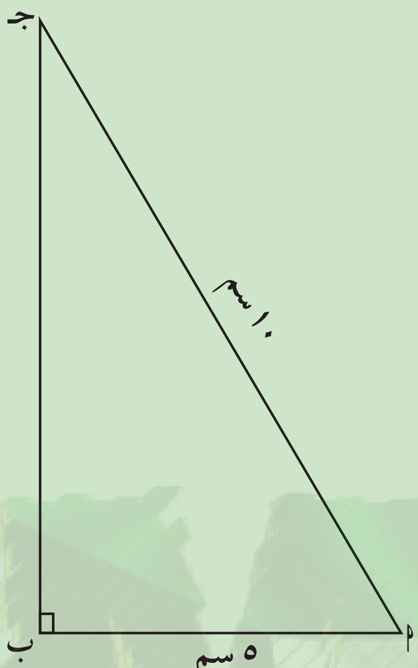
إذا كان في المثلث القائم الزاوية طول أحد ضلعي القائمة مساويًا نصف طول الوتر، فإن قياس الزاوية المقابلة لهذا الضلع ٣٠° ويسمّى المثلث ثلاثينيًّا ستينيًّا.

مثال (٢)

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب .

أ ب = ٥سم، أ جـ = ١٠سم.

أوجد ق(جـ^) .



المعطيات: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب .

أ ب = ٥ سم، أ جـ = ١٠سم.

المطلوب: إيجاد ق (جـ^) .

البرهان:

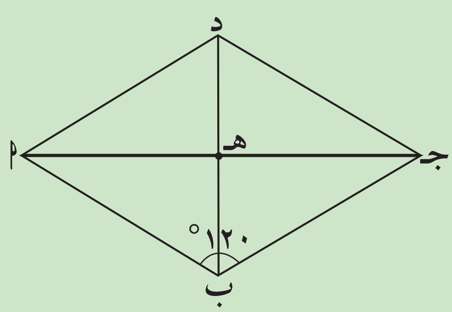
∵ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب (معطى)

∵ أ ب = ٥ سم ، أ جـ = ١٠ سم (معطى)

∴ أ ب = $\frac{1}{2}$ أ جـ (طول أحد ضلعي القائمة ($\overline{\text{أ ب}}$) يساوي نصف طول الوتر)

∴ ق (جـ^) = ٣٠° (نتيجة ١)

حاول أن تحل



٢ يبيّن الرسم معينًا، حيث ق (ب^) = ١٢٠°.

كم مثلثًا ثلاثينيًّا ستينيًّا في الرسم؟

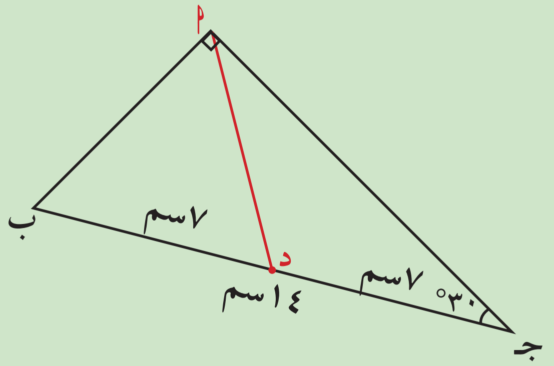
مثال (٣)

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ.

ب جـ = ١٤ سم.

ق(جـ^) = ٣٠°.

أثبت أن: ب أ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ.



المعطيات: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ.

ق(جـ^) = ٣٠°، جـ ب = ١٤سم

المطلوب: إثبات أن ب أ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ.

العمل: نأخذ د منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$، نرسم $\overline{\text{أ د}}$.

البرهان: ∵ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ (معطى)

د منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ (عملًا)

∴ أ د = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٤ = ٧ سم نظرية (٢)

أ د = د ب = د جـ = ٧ سم.

ق(ب^) = ١٨٠° − (٩٠° + ٣٠°) = ٦٠° (مجموع قياسات زوايا المثلث تساوي ١٨٠°)

∵ أ د ب مثلث متطابق الضلعين (أ د = ب د = ٧ سم)

∴ أ د ب مثلث متطابق الأضلاع (قياس إحدى زواياه ٦٠°)

نستنتج أن أ ب = ب د = د أ = ٧ سم

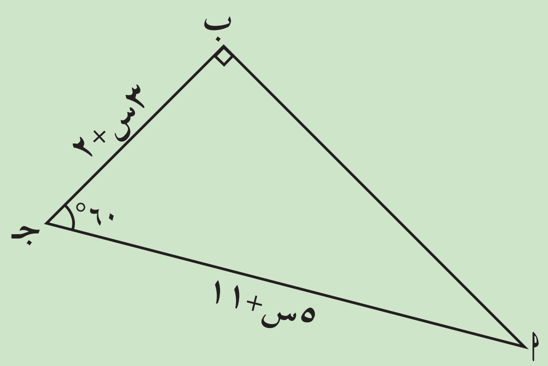
وبالتالي أ ب = $\frac{١}{٢}$ ب جـ.

نتيجة (٢)

في المثلث الثلاثيني الستيني يكون طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها ٣٠° مساويًا نصف طول الوتر.

حاول أن تحل

٣ في الرسم المقابل، أوجد قيمة س.



مثال (٤)

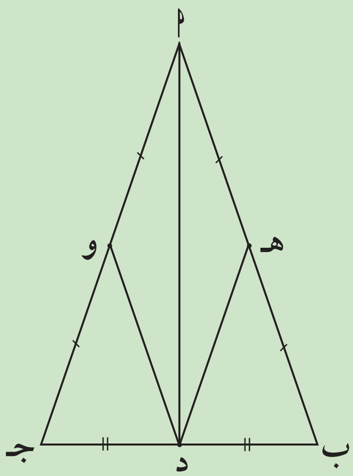
في الشكل المقابل أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين ورأسه أ.

هـ نقطة منتصف $\overline{\text{أ ب}}$.

و نقطة منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$.

د نقطة منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$.

أثبت أن الشكل الرباعي أ هـ د و معين .



المعطيات: أ ب = أ جـ

هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ؛ و منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

د منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$.

المطلوب: إثبات أن الشكل الرباعي أ هـ د و معين.

البرهان: ∵ أ ب = أ جـ ، د منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ (معطى)

∴ أ د ب مثلث قائم الزاوية في د (خواص المثلث متطابق الضلعين)

هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ (معطى)

د هـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب نظرية (٢)

∴ د هـ = هـ ب = هـ أ (١)

وبالمثل في المثلث أ د جـ

د و = $\frac{١}{٢}$ أ جـ نظرية (٢)

∴ د و = و جـ = و أ (٢)

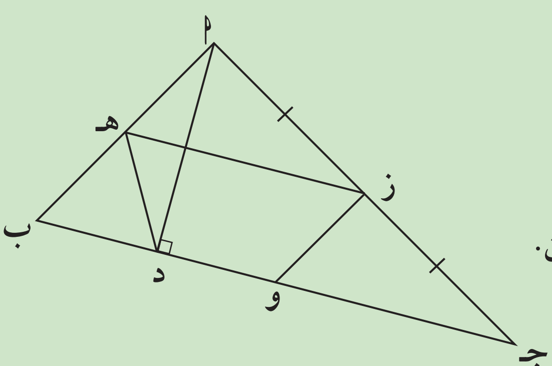
ولكن أ هـ = هـ ب = أ و = و جـ (معطى)

من (١)، (٢) نستنتج أن:

أ هـ = هـ د = د و = و أ

∴ يكون أ هـ د و معينًا.

حاول أن تحل



٤ أ ب جـ مثلث، $\overline{\text{أ د}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$.

هـ ، و، ز منتصفات $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ أ}}$ على الترتيب.

أثبت أن الشكل الرباعي هـ ز و د شبه منحرف متطابق الضلعين.

تحقق من فهمك

١ إذا كانت القطعة المستقيمة الواصلة من رأس مثلث إلى منتصف الضلع المقابل تساوي نصف طول هذا الضلع، فهل يكون المثلث قائم الزاوية؟ اشرح إجابتك.

٢ $\overline{\text{أ ب}}$ جـ مثلث قائم الزاوية ب. هـ منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$، و منتصف $\overline{\text{أ ب}}$. $\overline{\text{ب د}}$ العمود المرسوم من ب إلى الضلع المقابل $\overline{\text{أ جـ}}$. أكمل: د هـ + د و = ... (جـ ب + أ ب)

حل المسائل والتفكير المنطقي

إستراتيجيات حل المسائل
• ابحث عن النمط.
• نظم قائمة.
• كون جدولًا.
• خمن وتحقق.
• اعمل بطريقة عكسية.
• استخدم التفكير المنطقي.
• ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
• حل مسألة أبسط.

١ ما نسبة طول القطعة المرسومة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر في المثلث القائم الزاوية إلى طول الوتر؟

....

....

٢ طول أحد ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية ٦ سم، وطول ضلعها الآخر ٨ سم. أوجد طول القطعة المرسومة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر.

....

....

٣ مثلث قائم الزاوية طول أحد ضلعي القائمة ٦ سم، وطول القطعة الواصلة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر ٦ سم أيضًا. احسب طول الوتر لهذا المثلث.

....

....

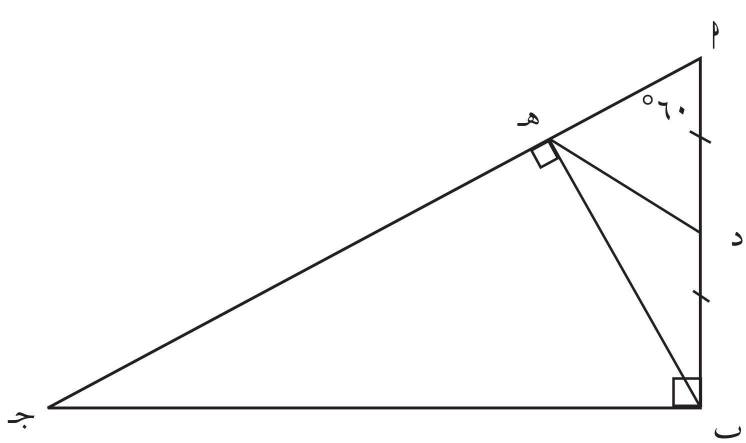
٤ مستخدمًا الرسم أدناه، حدد أي العبارات التالية خطأ.

(أ) أ هـ = هـ د

(ب) أ د = $\frac{1}{4}$ أ جـ

(جـ) أ ب = $\frac{1}{2}$ ب جـ

(د) هـ ب = $\frac{1}{2}$ ب جـ



٧–٤

محاور أضلاع المثلث
Perpendicular Bisectors of a Triangle

سوف تتعلم
- إيجاد خصائص محاور أضلاع المثلث.

من الاستخدامات
- تستخدم خاصية تقاطع محاور أضلاع المثلث في نقطة واحدة في مجالات هندسة الديكور.

◄ صلة الدرس تعرفت في السابق منتصفات الأضلاع. في هذا الدرس ستتعرف محاور الأضلاع. ►

استكشف | محاور أضلاع المثلث

الأدوات المستخدمة: مقص.

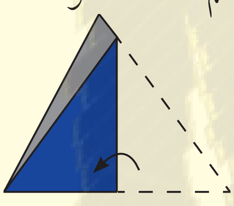
١ ارسم مثلثين أحدهما قائم الزاوية والآخر حاد الزوايا، ثم قصهما.

٢ اطو المثلث حاد الزوايا بحيث ينطبق رأسين من المثلث في كل مرة، وتتشكل فيه المنصفات العمودية (محاور) لكل ضلع. ماذا تلاحظ؟

٣ أعد الخطوة ٢ مع المثلث قائم الزاوية.

٤ ارسم مثلثاً منفرج الزاوية في وسط الورقة (لا تقصها)، ثم أعد الخطوة ٢. ماذا تلاحظ؟

٥ اذكر خاصية للمحاور في المثلث.

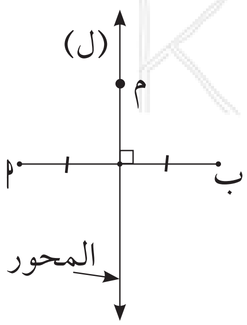


المصطلحات الأساسية
◄ محور القطعة المستقيمة
Perpendicular Bisector

تعلم | محاور أضلاع المثلث تتلاقى في نقطة واحدة

إن محور القطعة المستقيمة هو العمود المنصف لها.

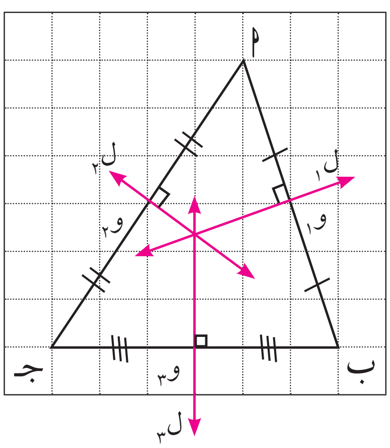
فمثلاً في الشكل: المستقيم ل محور $\overline{\text{أب}}$.



خاصية: أي نقطة تنتمي إلى محور قطعة مستقيمة تقع على بعدين متساويين من طرفيها.

في الشكل المقابل م أ = م ب.

نظرية (٣)
محاور الأضلاع الثلاثة في المثلث تتلاقى في نقطة واحدة.

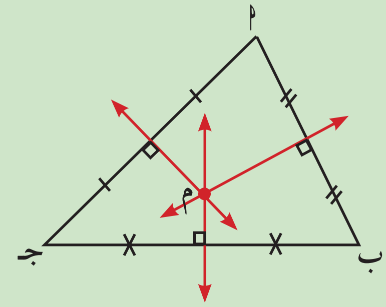


مثال (١)

عيّن نقطة تلاقي محاور أضلاع مثلث:

(أ) حاد الزوايا (ب) منفرج الزاوية (جـ) قائم الزاوية.

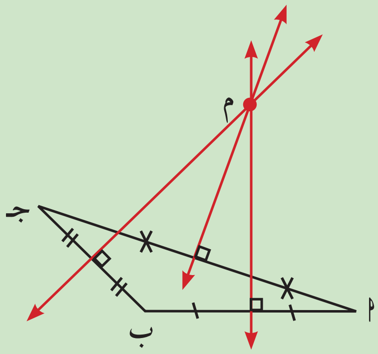
(أ) مثلث حاد الزوايا



مثلث حاد الزوايا

تقع «م» نقطة تلاقي محاور الأضلاع الثلاثة داخل المثلث.

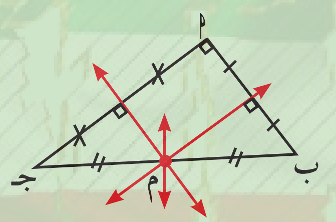
(ب) مثلث منفرج الزاوية



مثلث منفرج الزاوية في ب

تقع «م» نقطة تقاطع محاور الأضلاع الثلاثة خارج المثلث.

(جـ) مثلث قائم الزاوية



مثلث قائم الزاوية في ﺃ

تقع «م» نقطة تقاطع محاور الأضلاع الثلاثة في منتصف الوتر $\overline{\text{ب جـ}}$

حاول أن تحل

١ ارسم محاور الأضلاع في مثلث متطابق الأضلاع، وحدد في أي نقطة من المثلث يمر كل محور.

نتيجة (٣)

نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث تقع على أبعاد متساوية من رؤوسه.

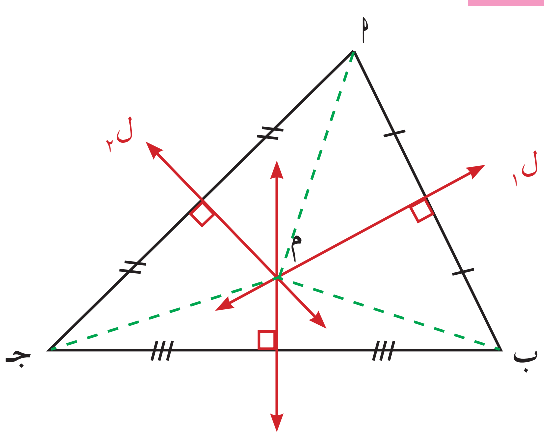
لتكن م نقطة تلاقي محاور أضلاع المثلث ﺃ ب جـ .

لاحظ:

∵ المستقيم $ل_1$ محور $\overline{\text{ﺃ ب}}$ ∴ م ﺃ = م ب (١)

∵ المستقيم $ل_2$ محور $\overline{\text{ﺃ جـ}}$ ∴ م ﺃ = م جـ (٢)

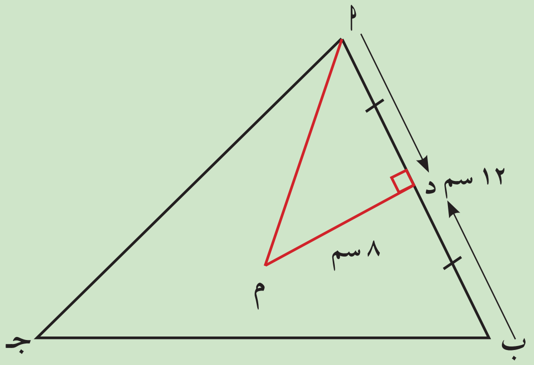
من (١)، (٢) نستنتج م ﺃ = م ب = م جـ .



مثال (٢)

أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ١٢ سم. د منتصف $\overline{\text{ب أ}}$،

م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث، م د = ٨ سم. أوجد م أ.



المعطيات: أ ب = ١٢ سم

د منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث.

م د = ٨ سم

المطلوب: إيجاد طول $\overline{\text{م أ}}$.

البرهان: أ د = د ب = $\frac{١}{٢}$ أ ب = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ = ٦ سم (د منتصف $\overline{\text{أ ب}}$)

م د = ٨ سم (معطى)

أ د م مثلث قائم الزاوية في د ($\overleftrightarrow{\text{د م}}$ محور $\overline{\text{أ ب}}$)

(م أ)^{٢} = (م د)^{٢} + (أ د)^{٢} (نظرية فيثاغورث)

(م أ)^{٢} = (٨)^{٢} + (٦)^{٢} (بالتعويض)

(م أ)^{٢} = ١٠٠ (بالتبسيط)

م أ = ١٠

∴ م أ = ١٠ سم

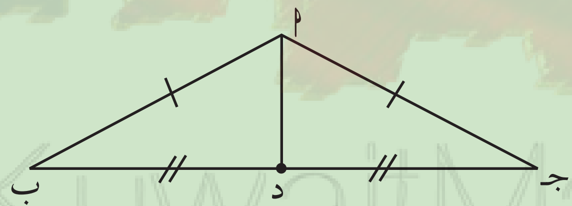
حاول أن تحل

٢ أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين فيه:

أ ب = أ جـ = ١٠ سم، ق(ب أ جـ) = ١٢٠°.

د نقطة منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$.

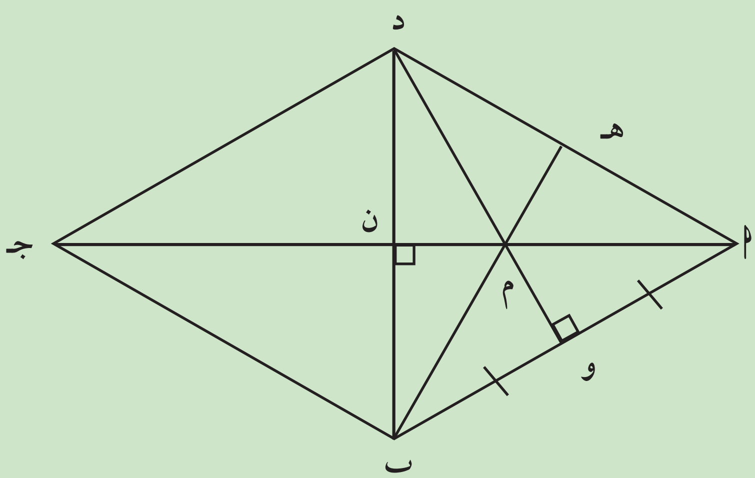
أوجد طول $\overline{\text{أ د}}$.



مثال (٣)

في الشكل، أ ب جـ د معين، $\overleftrightarrow{\text{د و}}$ محور $\overline{\text{أ ب}}$.

أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ محور $\overline{\text{أ د}}$.



الحل:

المعطيات: أ ب جـ د معين، $\overleftrightarrow{\text{د و}}$ محور $\overline{\text{أ ب}}$.

المطلوب: إثبات أن $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ محور $\overline{\text{أ د}}$.

البرهان: ∵ أ ب جـ د معين،

∴ القطران $\overline{\text{أ جـ}}$، $\overline{\text{ب د}}$ متعامدان وكل منهما ينصف الآخر.

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ن}}$ محور ب د .

∵ $\overleftrightarrow{\text{دو}}$ محور $\overline{\text{أب}}$ (معطى)

∵ $\overleftrightarrow{\text{أن}} \cap \overleftrightarrow{\text{دو}} = \{\text{م}\}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{به}}$ محور $\overline{\text{أد}}$ نظرية (٣)

حاول أن تحل

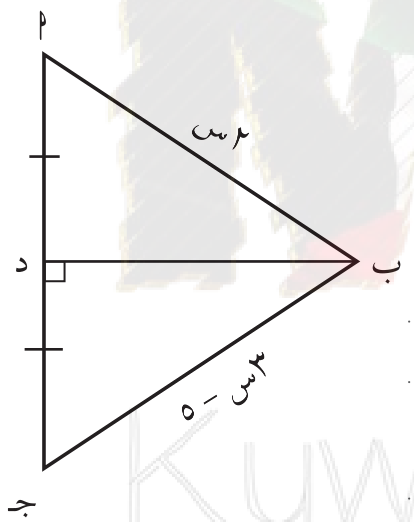
٣ في المثال (٣)، تمر محاور أضلاع المثلث أ ب د الثلاثة في رؤوس المثلث. ما نوع المثلث أ ب د؟ فسر.

تحقق من فهمك

١ في المثلث المتطابق الضلعين، واحد فقط من محاور الأضلاع يمر برأس مقابل لهذا الضلع، حدد هذا المحور واذكر السبب.

٢ إذا وجدت نقطة متساوية البعد عن الرؤوس الثلاثة لمثلث، فهل تكون نقطة تقاطع محاور الأضلاع الثلاثة لهذا المثلث؟ اشرح إجابتك.

حل المسائل والتفكير المنطقي



مستخدمًا الرسم المقابل:

١ حدد نوع المثلث أ ب جـ .

....

....

٢ أوجد طول $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$.

....

....

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- كون جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

٣ أرادت وزارة التربية بناء مدرسة تقع على البعد نفسه بين ثلاثة أحياء ليست على استقامة واحدة. ساعد الوزارة في إيجاد هذا الموقع المناسب .

....

....

....

....

٧–٥

منصفات الزوايا الداخلية للمثلث
Interior Angle Bisectors of a Triangle

سوف تتعلم

- أن منصفات الزوايا الداخلية للمثلث تتلاقى في نقطة واحدة.
- أن نقطة تلاقي المنصفات هي على أبعاد متساوية من أضلاع المثلث.

من الاستخدامات

- يستخدم مهندسو الميكانيك خاصية منصفات الزوايا للمحافظة على توازن الأجسام.

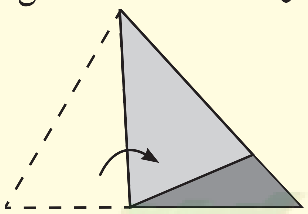
المصطلحات الأساسية

◄ منصفات الزوايا
Angle Bisectors

◄ صلة الدرس تعرفت في السابق على منصفات الزوايا. في هذا الدرس سوف تتعرف خاصية تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث في نقطة واحدة. ►

استكشف | منصفات الزوايا الداخلية في المثلث

الأدوات المستخدمة: مقص.



١ ارسم ثلاثة مثلثات (قائم الزاوية، حاد الزوايا، منفرج الزاوية) بقياس كبير لطيِّهما بشكل أفضل ثم قصهما.

٢ اطو المثلث حاد الزوايا بشكل تتكون فيه منصفات الزوايا. ماذا تلاحظ؟

٣ أعد الخطوة ٢ مع المثلثين الآخرين. ماذا تلاحظ؟

٤ اذكر خاصية لمنصفات الزوايا الداخلية للمثلث مستخدمًا (٢)، (٣).

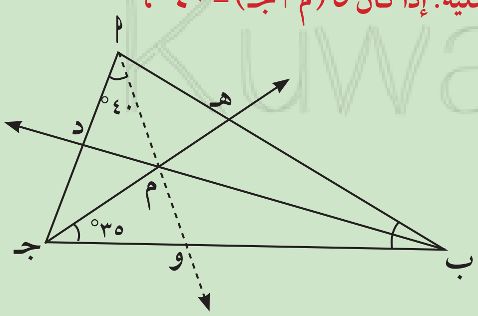
تعلم | تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث في نقطة واحدة

نظرية (٤) منصفات الزوايا الداخلية للمثلث تتلاقى في نقطة واحدة.

مثال (١)

أ ب جـ مثلث، م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية. إذا كان ق(م $\hat{أ}$ جـ) = ٤٠°، ق(ب $\hat{جـ}$ م) = ٣٥°.

أوجد: (١) ق(م $\hat{ب}$ أ) (٢) ق(ب $\hat{م}$ جـ).



المعطيات: $\overleftarrow{أم}$ منصف داخلي للزاوية أ.
$\overleftarrow{ب م}$ منصف داخلي للزاوية ب.
$\overleftarrow{جـ م}$ منصف داخلي للزاوية جـ.
م نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية للمثلث أ ب جـ.
ق(م $\hat{أ}$ جـ) = ٤٠°
ق(ب $\hat{جـ}$ م) = ٣٥°

المطلوب: إيجاد (١) ق(م $\hat{ب}$ أ)؛ (٢) ق(ب $\hat{م}$ جـ)

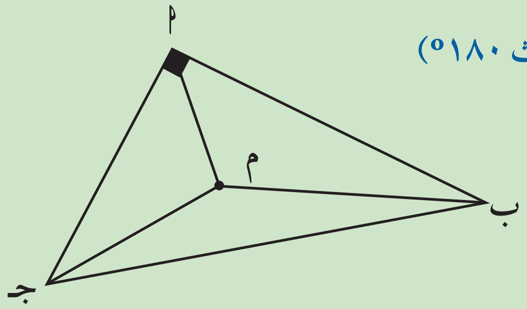
البرهان: (١) ق($\hat{أ}$) = ٢ ق(م $\hat{أ}$ جـ) = ٢ × ٤٠° = ٨٠° ($\overleftarrow{أم}$ منصف داخلي للزاوية أ)
ق($\hat{جـ}$) = ٢ ق(ب $\hat{جـ}$ م) = ٢ × ٣٥° = ٧٠° ($\overleftarrow{جـ م}$ منصف داخلي للزاوية جـ)
ق($\hat{ب}$) = ١٨٠° − (٨٠° + ٧٠°) = ٣٠° (مجموع قياس زوايا المثلث ١٨٠°)
ق(م $\hat{ب}$ أ) = $\frac{١}{٢}$ ق($\hat{ب}$) = $\frac{١}{٢}$ × ٣٠ = ١٥° ($\overleftarrow{ب م}$ منصف داخلي للزاوية ب)
∴ ق(م $\hat{ب}$ أ) = ١٥°

(٢) ق (م بَ جـ) = ق (م بَ ٲ) = ١٥°

في المثلث م ب جـ نجد:

ق (ب مَ جـ) = ١٨٠° − (٣٥° + ١٥°) = ١٣٠° (مجموع قياس زوايا المثلث ١٨٠°)

∴ ق (ب مَ جـ) = ١٣٠°.

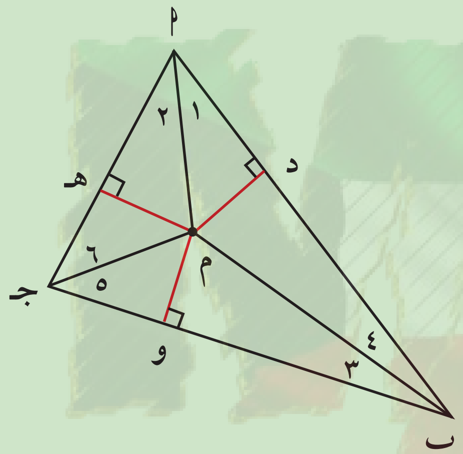


حاول أن تحل

١ ٲ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ٲ، م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية.
أوجد ق (ب مَ جـ) .

مثال (٢)

ٲ ب جـ مثلث ، ٲم⃖ ، ب م⃖ ، جـ م⃖ ثلاثة منصفات داخلية لزواياه الثلاث تتقاطع في نقطة م.
م د ⊥ ٲ ب ، م هـ ⊥ ٲ جـ ، م و ⊥ ب جـ .
أثبت أن م د = م هـ = م و.



المعطيات: ٲم⃖ منصف داخلي للزاوية ٲ.
ب م⃖ منصف داخلي للزاوية ب .
جـ م⃖ منصف داخلي للزاوية جـ.
م نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية للمثلث.
م د ⊥ ٲ ب؛ م هـ ⊥ ٲ جـ؛ م و ⊥ ب جـ.

المطلوب: إثبات أن م د = م هـ = م و.

البرهان: نأخذ المثلثين: ٲ د م، ٲ هـ م.
ق (١̂) = ق (٢̂) (ٲم⃖ منصف داخلي للزاوية ٲ)
ٲ م (ضلع مشترك في المثلثين)
ق (ٲ دَ م) = ق (ٲ هـَ م) = ٩٠° (معطى)
لذلك المثلثان: ٲ د م، ٲ هـ م متطابقان
ونستنتج أن م د = م هـ. (١)
ثم نأخذ المثلثين: ب د م، ب و م.
وبالطريقة نفسها نثبت أنهما متطابقان ونستنتج أيضًا أن: م د = م و (٢)
من (١) ، (٢) نحصل على: م د = م هـ = م و (المطلوب)

نتيجة (٤) نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية للمثلث تقع على أبعاد متساوية من أضلاعه الثلاثة. أي م د = م هـ = م و

حاول أن تحل

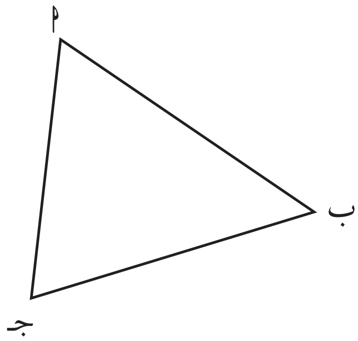
٢ مستخدمًا الرسم في المثال (٢)، أوجد طول م و إذا كان ب م = ١٣ سم، ب د = ١٢ سم.

تحقق من فهمك

١ هل نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية للمثلث متساوية الأبعاد من رؤوسه؟

٢ في رسم المثال (٢)، ماذا تمثل النقطة «م» بالنسبة إلى النقاط د، و، هـ؟

ارسم دائرة داخل المثلث ٲ ب جـ بحيث تكون مماسة لأضلاعه الثلاثة.



افهم

١ ما المطلوب إليك إيجاده؟ ....

٢ هل يمكن للدائرة أن:

(أ) تقطع أحد أضلاع المثلث؟ ....

(ب) تمر بأحد رؤوس المثلث؟ ....

خطط

٣ ما هي الخاصية الأساسية لمركز الدائرة؟ ....

٤ هل تتساوى الأبعاد بين مركز الدائرة والأضلاع الثلاثة؟ ....

....

٥ ما العلاقة بين هذه الأبعاد وطول نصف قطر الدائرة؟ ....

٦ ما هي النقطة التي تتساوى الأبعاد بينها و بين أضلاع المثلث؟ ....

حل

٧ ارسم منصفي الزاويتين ٲ، ب ولتكن م نقطة تقاطعهما. ....

....

٨ ارسم القطعة العمودية $\overline{\text{دم}}$ من النقطة م إلى أحد أضلاع المثلث. ....

٩ ارسم الدائرة التي مركزها م وتمر بالنقطة د. ....

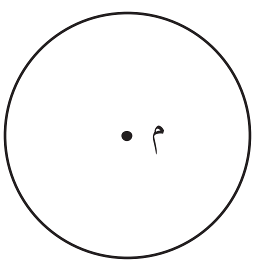
تحقق

١٠ كيف تتحقق من أن الدائرة المرسومة هي مماسة للأضلاع الثلاثة؟ ....

....

حل مسألة أخرى

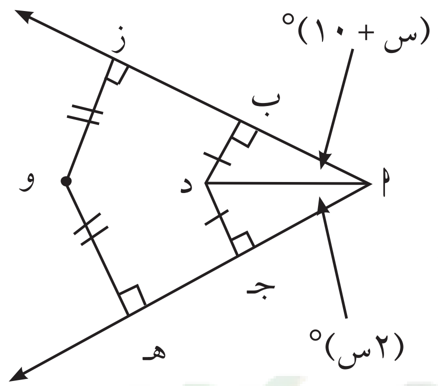
١١ ارسم مثلثًا تتقاطع منصفات زواياه الداخلية في مركز الدائرة المرسومة. ....



حل المسائل والتفكير المنطقي

١ ارسم ثلاثة مثلثات (قائم الزاوية ، حاد الزوايا، منفرج الزاوية). ثم ارسم منصفات الزوايا الداخلية لكل منها. وحدد موقع نقطة تلاقي منصفات الزوايا.

٢ مستخدمًا الرسم المقابل:



(أ) ماذا تستنتج بالنسبة إلى النقاط أ ، د ، و ؟

....

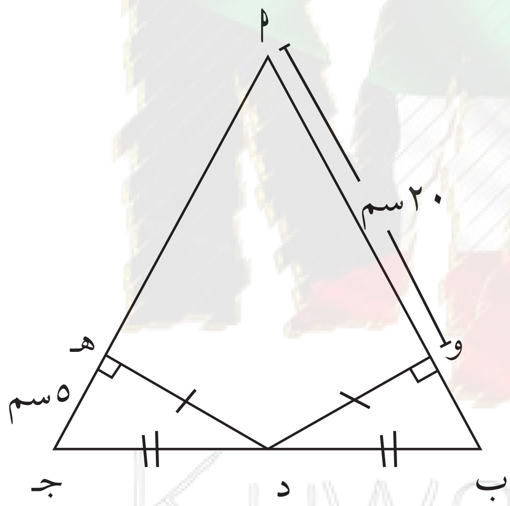
(ب) أوجد س.

....

(جـ) أوجد ق (هـ أ̂ ز).

....

٣ مستخدمًا الرسم المقابل:



(أ) أوجد أ ب.

....

(ب) ماذا تستنتج بالنسبة إلى $\overleftarrow{\text{أد}}$ ؟

....

(جـ) إذا كان ق (هـ أ̂ د) = ٢٧° ، فأوجد ق (أ ب̂ جـ).

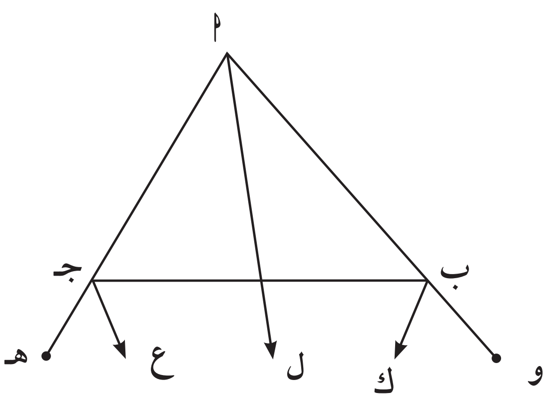
....

(د) إذا كان ب د = ٨ سم، فأوجد محيط المثلث أ ب جـ.

....

إستراتيجيات حل المسائل
• ابحث عن النمط.
• نظم قائمة.
• كون جدولًا.
• خمن وتحقق.
• اعمل بطريقة عكسية.
• استخدم التفكير المنطقي.
• ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
• حل مسألة أبسط.

٤ **التحدي:** في المثلث أ ب جـ ، $\overleftarrow{\text{أل}}$ ، $\overleftarrow{\text{بك}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـع}}$ هي على الترتيب منصفات الزوايا (ب أ̂ جـ) ، (جـ ب̂ و) ، (ب جـ̂ هـ) . أثبت أن هذه المنصفات الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة.



....

....

....

....

....

٦-٧ الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه

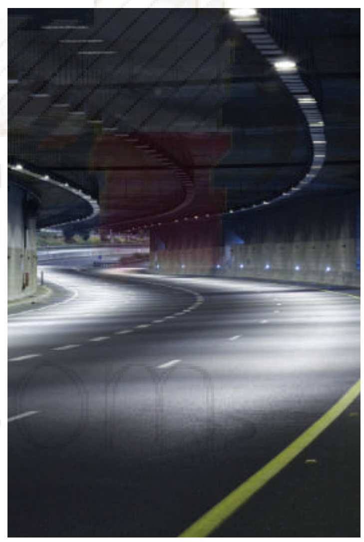
Altitudes from Vertices of a Triangle to its Sides

سوف تتعلم

- أن الأعمدة المرسومة من رؤوس مثلث على أضلاعه تتلاقى في نقطة واحدة .

من الاستخدامات

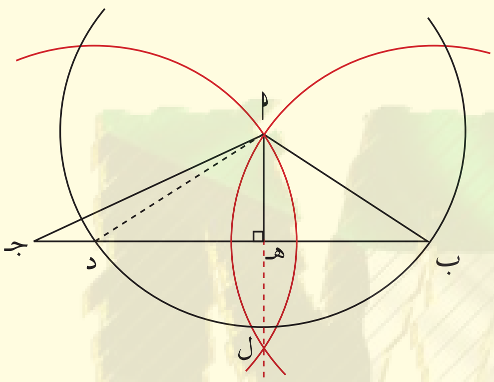
- يستخدم مهندسو التنظيم المدني خاصية الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه لمعرفة الطرق المختصرة بين الشوارع في المدن.



◀ **صلة الدرس** في السابق تعرفت محاور أضلاع المثلث. في هذا الدرس سوف تتعرف الأعمدة المرسومة من رؤوس مثلث على أضلاعه وخاصيتها.◀

استكشف — الأعمدة المرسومة من رؤوس مثلث على أضلاعه

الأدوات المستخدمة: فرجار، مسطرة.



١ ارسم مثلث ٲ ب جـ.

٢ ارسم دائرة بواسطة الفرجار مركزها ٲ وتمر بالنقطة ب. هذه الدائرة تقطع $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ في نقطة د مختلفة عن ب (انظر الشكل المقابل).

٣ ارسم قوسين من دائرتين مركزهما ب، د ويمران في ٲ. يتقاطع القوسان في نقطة ثانية ل.

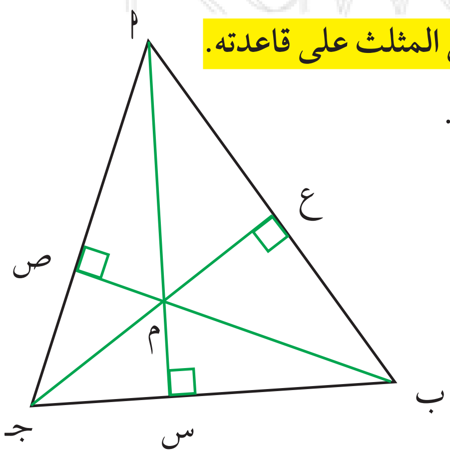
٤ $\overleftrightarrow{\text{ٲ ل}}$ تقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ في هـ . تحقق من أن $\overline{\text{ٲ هـ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$.

٥ نفذ الخطوات (٢) ، (٣) ، (٤) باستخدام كلّ من الرأسين ب ، جـ .

٦ ماذا تلاحظ بالنسبة للأعمدة المرسومة؟

تعلم — الأعمدة المرسومة من رؤوس مثلث على أضلاعه

ارتفاع المثلث هو طول العمود المرسوم من رأس المثلث على قاعدته.



بما أن للمثلث ثلاثة رؤوس إذًا هناك ثلاثة أعمدة.

المثلث ٲ ب جـ حاد الزوايا فيه:

$\overline{\text{ٲ س}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ؛ ٲ س ارتفاع للمثلث.

$\overline{\text{ب ص}} \perp \overline{\text{ٲ جـ}}$ ؛ ب ص ارتفاع للمثلث.

$\overline{\text{ٲ س}}$ يقطع $\overline{\text{ب ص}}$ في م.

ارسم $\overrightarrow{\text{جـ م}}$ بحيث يقطع $\overline{\text{ٲ ب}}$ في ع.

هل $\overline{\text{م ع}} \perp \overline{\text{ٲ ب}}$؟ وهل جـ ع ارتفاع للمثلث؟

تحقق من صحة إجابتك باستخدام الأدوات الهندسية.

نظرية (٥) الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه تتقاطع في نقطة واحدة.

المصطلحات الأساسية

◀ الأعمدة Altitudes

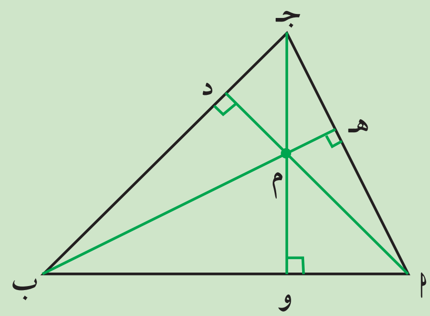
◀ الارتفاع Height

مثال (١)

ﺃ ب جـ مثلث حاد الزوايا،   ك ل ن مثلث منفرج الزاوية،   س ص ع مثلث قائم الزاوية.

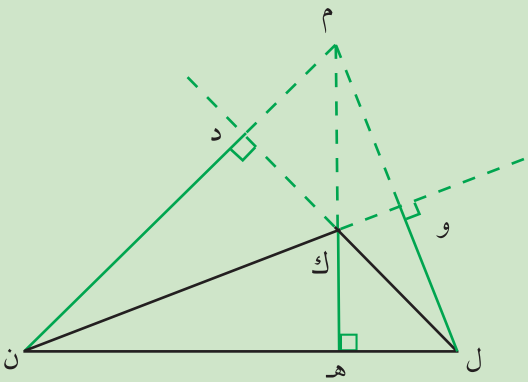
عيّن نقطة تلاقي الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه في كل حالة، وحدد موقعها.

الحل: (أ) ﺃ ب جـ مثلث حاد الزوايا



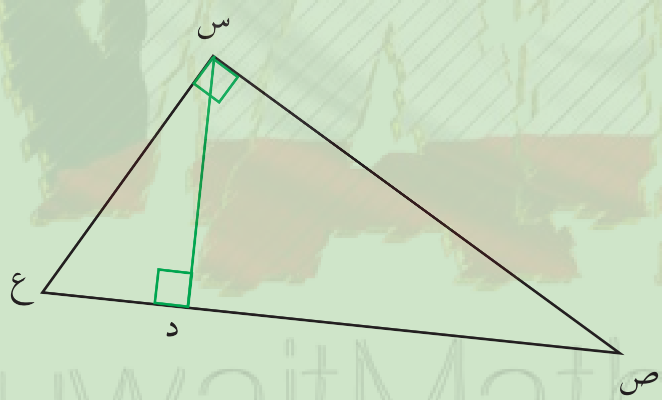
أعمدة المثلث ﺃ ب جـ: ﺃد، ب هـ، جـو تتقاطع في النقطة «م» التي تقع داخل المثلث.

(ب) ك ل ن مثلث منفرج الزاوية



أعمدة المثلث ك ل ن: ك هـ، ل و، ن د ، تتقاطع في النقطة «م» التي تقع خارج المثلث.

(جـ) س ص ع مثلث قائم الزاوية.



العمود من س على ص ع هو س د

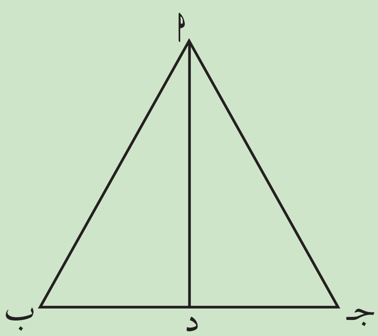
العمود من ص على س ع هو ص س

العمود من ع على ص س هو ع س

وبالتالي الأعمدة الثلاثة في المثلث القائم الزاوية تتقاطع في النقطة س (رأس الزاوية القائمة).

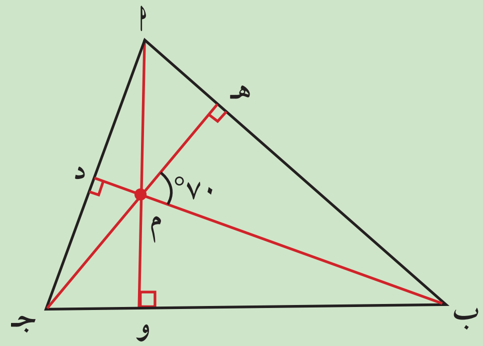
حاول أن تحل

١ ﺃ ب جـ مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه ١٠ سم.
أوجد طول ﺃ د العمود النازل من ﺃ على جـ ب .



مثال (٢)

في الشكل المقابل ﺃ ب جـ مثلث. م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه
ق(هـ مَ ب) = ٧٠°.
أوجد قياس (ب ﺃ̂ جـ).



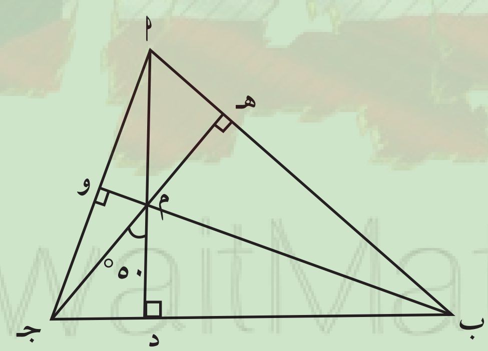
المعطيات: $\overline{\text{ب د}} \perp \overline{\text{ﺃ جـ}}$
$\overline{\text{جـ هـ}} \perp \overline{\text{ﺃ ب}}$
$\overline{\text{ﺃ و}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$
ق(هـ مَ ب) = ٧٠°

المطلوب: إيجاد قياس الزاوية ﺃ .

البرهان: في الشكل الرباعي ﺃ هـ م د: ق(هـ مَ د) = ١٨٠° − ٧٠° = ١١٠° (زاويتان متكاملتان)
ق(ﺃ هَـ م) = ق(ﺃ دَ م) = ٩٠° (معطى)
ق(ب ﺃ̂ جـ) = ٣٦٠° −(٩٠° + ٩٠° + ١١٠°) (مجموع قياس زوايا الشكل الرباعي ٣٦٠°)
ق(ب ﺃ̂ جـ) = ٧٠°

حاول أن تحل

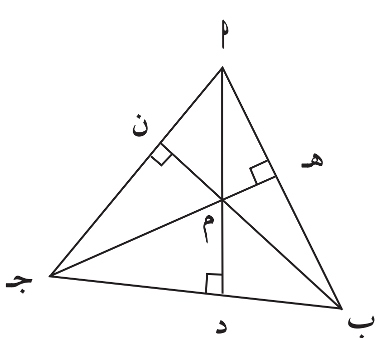
٢ ﺃ ب جـ مثلث.
م نقطة تقاطع الأعمدة $\overline{\text{ﺃ د}}$ ، $\overline{\text{ب و}}$ ، $\overline{\text{جـ هـ}}$ ،
ق(د مَ جـ) = ٥٠°.
أوجد ق(ﺃ بَ جـ) .



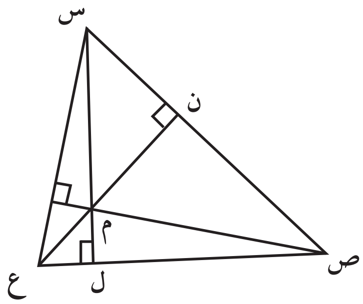
تحقق من فهمك

حدد نقطة تلاقي الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه لكل مما يلي، ثم وضح إجاباتك.

١ المثلث ﺃ ب جـ.
٢ المثلث ب م جـ.
٣ المثلث ﺃ د جـ.



حل المسائل والتفكير المنطقي

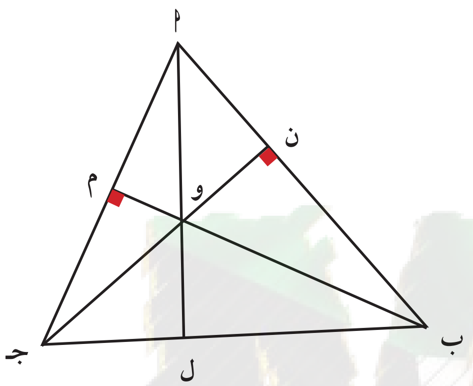


١ من الرسم المقابل، حدد المثلث الذي تكون نقطة تلاقي الأعمدة من رؤوسه هي:

(أ) س؟ ....

(ب) م؟ ....

(جـ) ن؟ ....



٢ أ ب جـ مثلث، $\overline{ب م} \perp \overline{أ جـ}$،

$\overline{جـ ن} \perp \overline{أ ب}$، $\overline{ب م} \cap \overline{جـ ن} = \{و\}$

إذا كان ق (أ جـ^ ب) = ٥٠°، أوجد ق (ل أ^ جـ).

....

....

....

٣ أ ب جـ مثلث، م نقطة تقاطع الأعمدة على أضلاعه، ق (جـ أ^ ب) = ٣٠°، ق (أ ب^ جـ) = ٣٥°. أوجد:

(أ) ق (ب م^ جـ).

....

(ب) ق (م ب^ جـ).

....

(جـ) ق (ب جـ^ م).

....

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- كون جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

٧-٧

القطع المتوسطة للمثلث
Medians of a Triangle

سوف تتعلم

- خواص القطع المتوسطة للمثلث.

من الاستخدامات

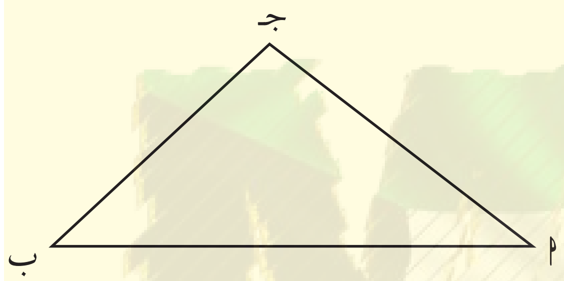
- يستخدم رجال الإطفاء خطوطًا متقاطعة للتركيز على أماكن الحريق.

◄ صلة الدرس في السابق تعرفت المحاور في المثلث. في هذا الدرس سوف تتعرف القطع المتوسطة للمثلث. ►

استكشف القطع المتوسطة

الأدوات المستخدمة: فرجار، مسطرة.

أ ب جـ مثلث.



١ افتح الفرجار بطول أكبر من نصف طول $\overline{\text{أب}}$.

٢ بدون تغيير فتحة الفرجار، من أ ارسم قوسًا في كل جهة من $\overline{\text{أب}}$.

٣ بدون تغيير فتحة الفرجار ومن ب ارسم قوسًا في كل جهة من $\overline{\text{أب}}$ بحيث تتقاطع الأقواس في ٢ ، ٣ .

٤ صل نقاط تقاطع الأقواس (هذه القطعة المستقيمة هي محور $\overline{\text{أب}}$). سمِّ «م» نقطة تقاطع هذه القطعة مع $\overline{\text{أب}}$.

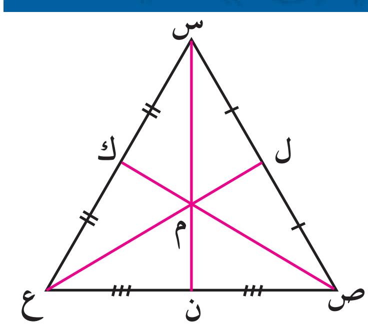
٥ صل جـ ، م. ماذا تمثل القطعة المستقيمة $\overline{\text{جـ م}}$؟

تعلم القطع المتوسطة للمثلث

القطعة المتوسطة للمثلث هي القطعة المستقيمة التي تصل أي رأس للمثلث بمنتصف الضلع المقابل.

المثلث س ص ع له ثلاثة رؤوس وثلاثة أضلاع، إذًا له ثلاث قطع متوسطة وهي:

$\overline{\text{ع ل}}$، $\overline{\text{ص ك}}$، $\overline{\text{س ن}}$.



المصطلحات الأساسية

◄ القطعة المتوسطة

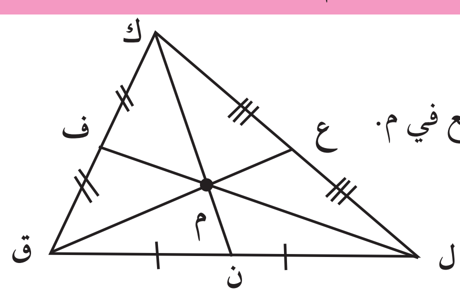
Median

نظرية (٦) القطع المتوسطة للمثلث تتقاطع في نقطة واحدة تقسم كلًّا منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس.

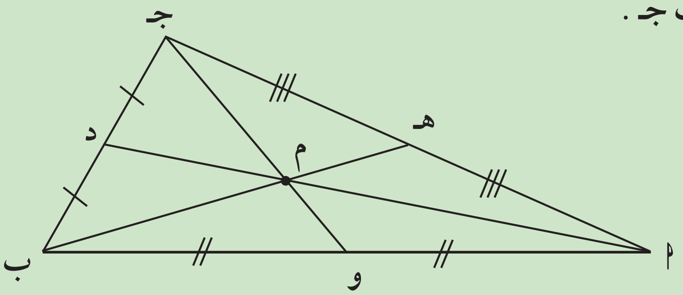
في الشكل المقابل ك ل ق مثلث فيه:

$\overline{\text{ك ن}}$ ، $\overline{\text{ق ع}}$ ، $\overline{\text{ل ف}}$ ثلاث قطع متوسطة تتقاطع في م.

فيكون: $\frac{\text{ك م}}{\text{م ن}} = \frac{\text{ل م}}{\text{م ف}} = \frac{\text{ق م}}{\text{م ع}} = \frac{٢}{١}$



في الشكل، $\frac{جـ م}{جـ و} = \frac{ب م}{ب هـ} = \frac{أ م}{أ د} = \frac{٢}{٣}$ ، حيث م نقطة تقاطع القطع المتوسطة في المثلث أ ب جـ .



المعطيات: م هي نقطة تقاطع القطع المتوسطة في المثلث أ ب جـ .

المطلوب: إثبات أن: $\frac{جـ م}{جـ و} = \frac{ب م}{ب هـ} = \frac{أ م}{أ د}$

البرهان: ∵ م نقطة تقاطع القطع المتوسطة في Δ أ ب جـ

∴ $\frac{جـ م}{م و} = \frac{٢}{١}$ (نظرية)

جـ م = ٢ م و

جـ و = جـ م + م و (معطى)

م و = $\frac{١}{٢}$ جـ م (نظرية ٦)

جـ و = جـ م + $\frac{١}{٢}$ جـ م (بالتعويض)

جـ و = $\frac{٣}{٢}$ جـ م (بالتبسيط)

أي: $\frac{جـ م}{جـ و} = \frac{٢}{٣}$

بالمثل نثبت أن $\frac{ب م}{ب هـ} = \frac{أ م}{أ د} = \frac{٢}{٣}$

مثال (١)

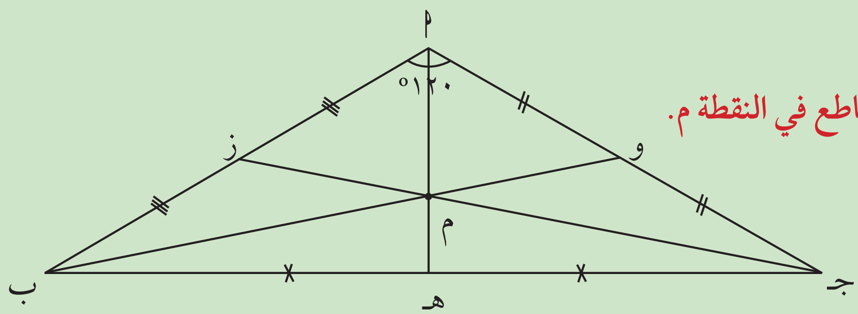
أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين.

أ ب = أ جـ = ٢٤ سم

ق (جـ أ̂ ب) = ١٢٠°

متوسطات المثلث $\overline{\text{أ هـ}}$ ، $\overline{\text{ب و}}$ ، $\overline{\text{جـ ز}}$ تتقاطع في النقطة م.

أوجد طول: أ هـ ، م أ ، م هـ .



المعطيات: أ ب = أ جـ = ٢٤ سم

ق (جـ أ̂ ب) = ١٢٠°

$\overline{\text{أ هـ}}$ ، $\overline{\text{ب و}}$ ، $\overline{\text{جـ ز}}$ متوسطات في المثلث

المطلوب: إيجاد طول: أ هـ ، م هـ ، م أ .

البرهان: $\overline{\text{أ هـ}}$ متوسط في مثلث متطابق الضلعين حيث رأسه أ لذا يكون $\overline{\text{أ هـ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

ق (أ هـ̂ جـ) = ٩٠° ($\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ محور $\overline{\text{ب جـ}}$)

ق (جـ أ̂ هـ) = ٦٠° ($\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ منصف الزاوية أ)

ق (أ جـ̂ هـ) = ٣٠° (مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠°)

∴ المثلث أ هـ جـ ثلاثيني ستيني.

أ هـ = $\frac{١}{٢}$ أ جـ (ضلع مقابل الزاوية ٣٠° في المثلث الثلاثيني الستيني)

أ هـ = $\frac{١}{٢}$ × ٢٤ (بالتعويض)

أ هـ = ١٢ سم.

$\frac{\text{م أ}}{\text{م هـ}} = \frac{٢}{١}$ نظرية (٦)

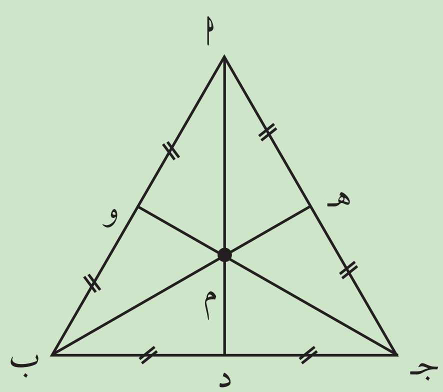
فيكون م أ = $\frac{٢}{٣}$ أ هـ

م أ = $\frac{٢}{٣}$ × ١٢ (بالتعويض)

م أ = ٨ سم

ثم م هـ = ١٢ − ٨ = ٤ سم. أو م هـ = $\frac{١}{٣}$ أ هـ

م هـ = $\frac{١}{٣}$ × ١٢ = ٤ سم



حاول أن تحل

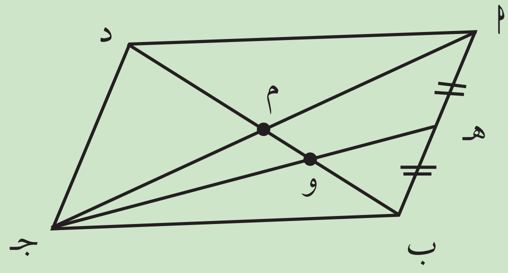
١ أ ب جـ مثلث متطابق الأضلاع، طول ضلعه ١٢ سم ،
هـ ، د ، و منتصفات $\overline{\text{أ جـ}}$، $\overline{\text{جـ ب}}$، $\overline{\text{أ ب}}$ على الترتيب.
أوجد طول أ د ، م أ ، م د .

مثال (٢)

ا ب جـ د متوازي أضلاع، فيه د ب = ١٨ سم.

يتقاطع قطراه في م. النقطة هـ منتصف $\overline{\text{ا ب}}$.

أوجد طول $\overline{\text{ب و}}$ ، $\overline{\text{و م}}$.



المعطيات: م نقطة تقاطع القطرين في متوازي الأضلاع.

هـ منتصف $\overline{\text{ا ب}}$

ب د = ١٨ سم

المطلوب: إيجاد طول $\overline{\text{ب و}}$ ، $\overline{\text{م و}}$.

البرهان: م ب = م د ، م جـ = م ا (يتقاطع القطران في نقطة منتصف كليهما في متوازي الأضلاع)

م د = م ب = $\frac{١}{٢}$ × ١٨

م ب = ٩ سم (بالتعويض)

$\frac{\text{و ب}}{\text{و م}} = \frac{٢}{١}$ (نظرية (٦)، حيث إن و نقطة تقاطع القطع المتوسطة في المثلث ا ب جـ)

فيكون و ب = ٦ سم، و م = ٣ سم

حاول أن تحل

٢ في المثال (٢)، أوجد: $\frac{\text{و ب}}{\text{و د}}$.

تحقق من فهمك

١ ما وجه الاختلاف والتشابه بين القطع المتوسطة والمحاور في المثلث؟

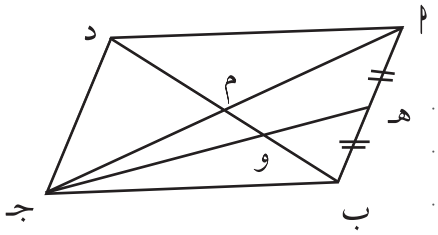
٢ في أي نوع من المثلثات ينطبق محور واحد مع القطعة المتوسطة. فسر؟

حل المسائل والتفكير المنطقي

١ أ ب جـ د متوازي أضلاع مركزه م.

هـ منتصف أ ب ، و نقطة تقاطع جـ هـ ، ب د، ب و= ١٠ سم.

أوجد طول ب د .



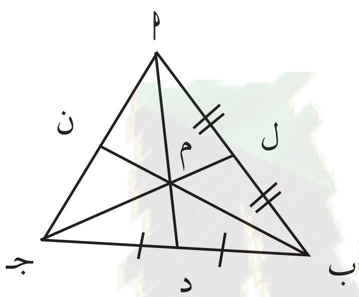
....

....

....

٢ (أ) أوجد «س» إذا كان أ م= ١٥ س، م د= ٥س + ٣.

(ب) أوجد طول ل جـ إذا كان طول ل م= ٥٤ سم.



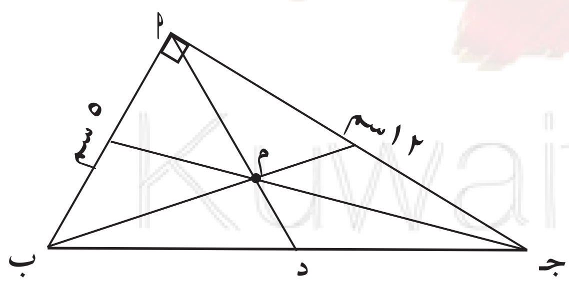
....

....

....

٣ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ . م نقطة تقاطع القطع المتوسطة.

أوجد طول كل من م د ، م أ.



....

....

....

إستراتيجيات حل المسائل

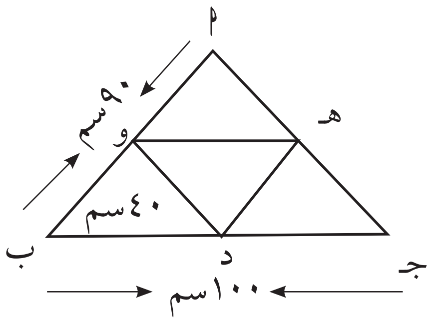
- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- كون جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

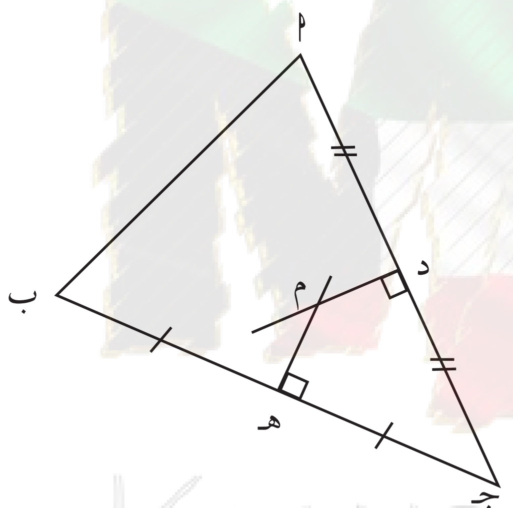
اختبار الوحدة السابعة

١ حدد نوع المثلث ﻡ ب جـ بالنسبة إلى زواياه إذا كان: ﻡ جـ = ٧ سم، ﻡ ب = ٣ سم، ب جـ = ٩ سم.

٢ في الشكل المجاور، المثلث ﻡ ب جـ فيه: هـ، و، د منتصفات الأضلاع.

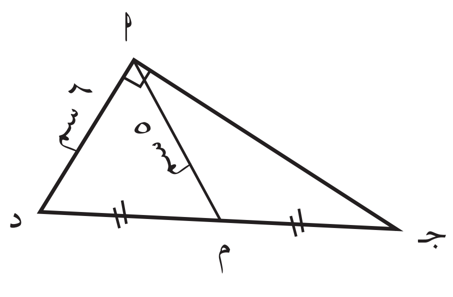
أوجد: هـ و، هـ د، ﻡ جـ.





٣ أوجد طول $\overline{\text{م جـ}}$ في الرسم: إذا كان م هـ = ٦ سم، هـ ب = ١٠ سم.

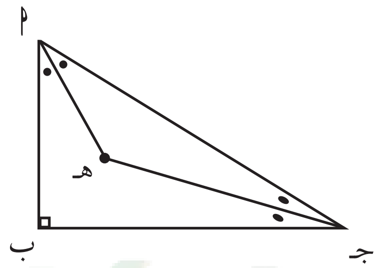
٤ في الرسم، أوجد طول $\overline{\text{جـ د}}$، طول $\overline{\text{جـ ﻡ}}$.



٥ أ ب جـ د متوازي أضلاع حيث يتقاطع قطراه في نقطة و.

نأخذ على امتداد $\overleftarrow{\text{جـ أ}}$ من جهة أ النقطة هـ بشرط أ هـ = أ جـ .

أثبت أن أ هي نقطة تقاطع القطع المتوسطة في المثلث هـ ب د.



٦ في الشكل المقابل أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب.

يتقاطع منصفا الزاويتين الداخليتين $\hat{\text{أ}}$ ، $\hat{\text{جـ}}$ في هـ.

أوجد ق (هـ $\hat{\text{ب}}$ جـ) .

٧ أ ب جـ مثلث. د نقطة تناظر أ بالنسبة إلى النقطة ب ،

هـ نقطة تناظر أ بالنسبة إلى النقطة جـ . يتقاطع $\overline{\text{د جـ}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ في النقطة م.

عيّن القطع المتوسطة الثلاث في المثلث أ د هـ . اشرح إجابتك.

٨ أ ب جـ مثلث ، د ∈ $\overline{\text{أ ب}}$.

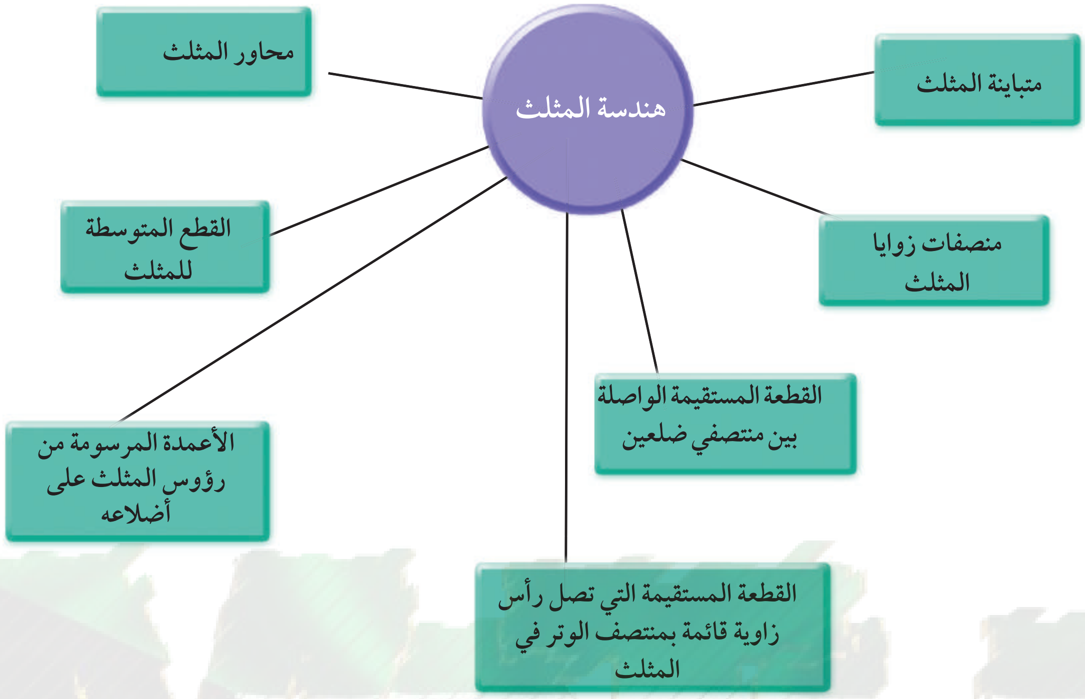
ارسم مستقيمًا موازيًا لِـ $\overline{\text{ب جـ}}$ يمر في د ويقطع $\overline{\text{أ جـ}}$ في هـ .

تتقاطع منصفات الزوايا (أ $\hat{\text{د}}$ هـ) ، (أ $\hat{\text{هـ}}$ د) في م.

تتقاطع منصفات الزوايا (أ $\hat{\text{ب}}$ جـ) ، (أ $\hat{\text{جـ}}$ ب) في ن.

أثبت أن النقاط أ ، م ، ن على مستقيم واحد.

مخطط تنظيمي للوحدة السابعة



ملخص الوحدة السابعة: هندسة المثلث

- في المثلث، مجموع طول ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث وهذه الخاصية تسمى متباينة المثلث.
- في المثلث مختلف الأضلاع، تكون الزاوية الأكبر مقابلة للضلع الأكبر.
- إذا لم تتساو زاويتان في مثلث، يكون الضلع الأكبر مقابلًا للزاوية الكبرى.
- إن القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث موازية للضلع الثالث، ويساوي طولها نصف طوله.
- إن طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر في المثلث القائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر.
- في المثلث الثلاثيني الستيني يكون طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها 30° مساويًا لنصف طول الوتر، والعكس صحيح.
- إن محور القطعة المستقيمة هو العمود المنصف لها، وتتلاقى محاور الأضلاع الثلاثة في المثلث بالنقطة نفسها.
- إن نقطة تقاطع المحاور لأضلاع المثلث هي على أبعاد متساوية من رؤوسه.
- تتلاقى منصفات الزوايا الثلاث الداخلية للمثلث في نقطة واحدة. وتقع نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث على أبعاد متساوية من أضلاعه الثلاثة.
- إن ارتفاع المثلث هو طول العمود المرسوم من رأس المثلث على قاعدته وتتلاقى هذه الأعمدة في النقطة نفسها.
- إن القطعة المتوسطة للمثلث هي القطعة المستقيمة التي تصل أي رأس للمثلث بمنتصف الضلع المقابل. تتقاطع هذه القطع المتوسطة في نقطة واحدة وتقسم نقطة التقاطع هذه القطع المتوسطة بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس.