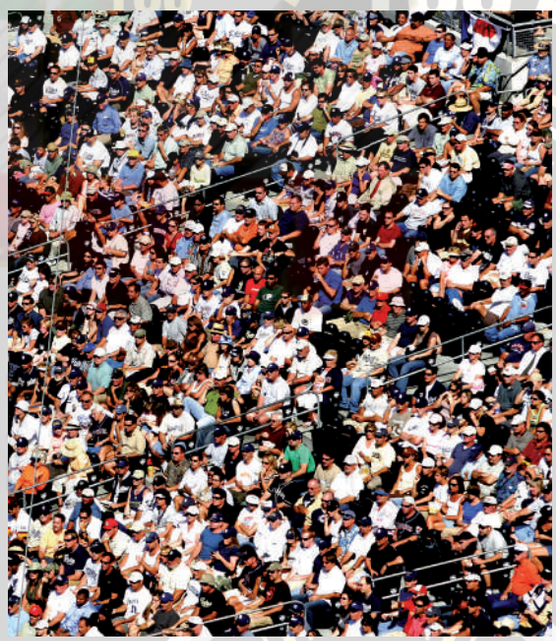
الوحدة السادسة

العلاقة والتطبيق (الدالة)
Relation and Mapping (Function)

شعوب العالم

في البدء كان نمو سكان العالم بطيئًا جدًّا، ومع مرور الزمن بدأت وتيرة النمو تتصاعد شيئًا فشيئًا حتى أصبح عدد سكان العالم قرابة المليار نسمة في بداية القرن التاسع عشر. ومع نهاية القرن العشرين تخطى هذا العدد ٦ مليارات، لذلك هناك علاقة بين الفترة الزمنية وعدد السكان.



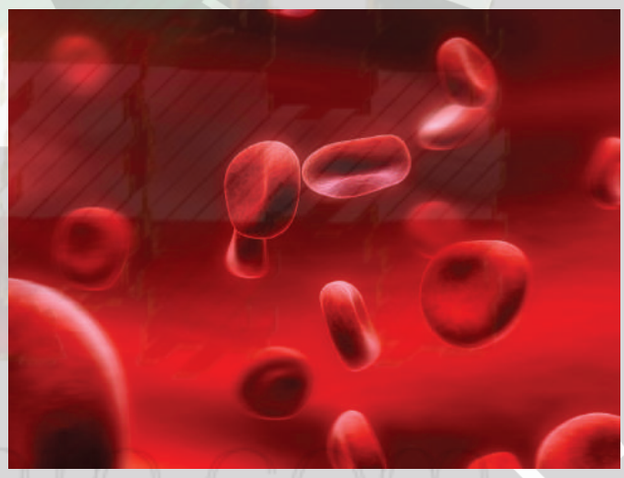
الرياضية

تستغرق بعض سيارات الفورمولا ون ١,٧ ثانية للانطلاق من صفر إلى ١٠٠ كم/ س، ٣,٨ ثوانٍ من صفر إلى ٢٠٠ كم/ س٦, ٨ ثوانٍ من صفر إلى ٣٠٠ كم/ س. هذه العلاقة تمثّل الزمن والسرعة القصوى لتلك السيارات. إن التوفيق بين الوزن الخفيف والقوة والأداء العالي للإطارات يعطي سيارات الفورمولا الأداء المميز.

علوم

يمثّل الدم نسبة ٨٪ من وزن جسم الإنسان. وتبلغ كثافة الدم ١,٠٦٠ جرام/ سم^{٣}.

يتألف الدم من البلازما بنسبة ٥٥٪، وكريات الدم الحمراء بنسبة ٤٤٪، و الكريات البيضاء والصفائح الدموية بنسبة ١٪ . وهناك علاقة بين عمر الإنسان وكثافة الدم في جسمه.



الاقتصاد

يعتبر سوق صرف الأموال أكبر الأسواق في العالم وأنشطها. نستطيع أن نميِّز نوعين من سعر الصرف: المتحرك عندما تكون العملة خاضعة للسوق، والثابت عندما تثبت قيمة العملة بالنسبة إلى عملة أخرى أو بالنسبة إلى مجموعة من العملات أو بالنسبة إلى سعر الذهب.

أفكار رياضية أساسية

حاصل الضرب الديكارتي س × ص هو مجموعة كل الأزواج المرتبة (أ ، ب) حيث أ ينتمي إلى س، ب ينتمي إلى ص.

العلاقة «ع» من س إلى ص هي مجموعة جزئية من الحاصل الديكارتي س × ص.

التطبيق علاقة تربط كل عنصر في س (المجال) بعنصر واحد فقط في ص (المجال المقابل) ومدى التطبيق هو مجموعة صور عناصر المجال.

الدالة الخطية هي دالة تمثيلها البياني خط مستقيم.

الدالة التربيعية هي دالة حيث القوة الأعلى للمتغير هي ٢. ويكون تمثيلها البياني قطعًا مكافئًا.

مشروع الوحدة

حل المسائل

افهم
خطط
حل
تحقق

سوف تستقصي في هذا المشروع عن تكاليف أو خدمات تتضمّن دفعة ابتدائية محددة تضاف إليها دفعات تتبع نمطًا معينًا. مثلًا:

شركة تأجير سيارات وضعت التعرفة التالية لزبائنها بحيث يدفع مبلغ ٥ دنانير للتأمين ضد حوادث الاصطدام والحوادث الشخصية، و١٢ دينارًا عن كل يوم إيجار لسيارة متوسطة الحجم.

التركيز على حلّ المسائل

اقرأ كل مسألة وأجب عن الأسئلة:

قراءة المسألة:

عندما تقرأ مسألة ما، ربما تربكك كمية المعلومات الواردة فيها . يمكن أن يساعد تجزيء تلك المعلومات إلى أجزاء صغيرة على فهم المسألة ككل. اسأل نفسك أسئلة كي تكون واثقًا من فهمك لكلّ جزء من المسألة.

١ تبارى حمد وناصر للفوز بالمرتبة الأولى بحساب متوسط علاماتهم في خمسة اختبارات، وأما المعلم فسوف يستبعد أدنى علامة من الخمسة.

كانت نتائج حمد كالآتي: ١٤، ١٥، ١٧، ١١، ١٨ ونتائج ناصر هي: ١٠، ١٦، ١٩، ١٣، ١٤.

من الفائز في هذه المباراة؟

(أ) عمَّ تدور المسألة؟

(ب) ماذا تتطلب المسألة؟

(جـ) ما أدنى علامة حصل عليها حمد؟

(د) ما أدنى علامة حصل عليها ناصر؟

(هـ) ما متوسط علامات حمد بعد استبعاد أدنى علامة؟

(و) ما متوسط علامات ناصر بعد استبعاد أدنى علامة؟

(ز) قارن بين متوسط علامات حمد ومتوسط علامات ناصر.

٢ أربعة أصدقاء يتمرنون في أحد النوادي الرياضيّة. استخدم أحمد آلة الجري ثلاثة أمثال مدة استخدام فهد للآلة، أما راشد فاستخدمها نصف مدّة استخدام فيصل لها. وقد استخدمها فيصل لمدة ١٥ دقيقة أكثر من أحمد. بلغ استخدام الجميع لآلة الجري ٢,٥ ساعة. ما مدّة استخدام كل فرد لآلة الجري؟

(أ) عمَّ تدور المسألة؟

(ب) ما المطلوب إيجاده؟

(جـ) ما مدّة استخدام فهد لآلة الجري بالنسبة إلى مدة استخدام أحمد؟

(د) ما مدّة استخدام فيصل لآلة الجري بالنسبة إلى مدة استخدام أحمد؟

(هـ) ما مدّة استخدام راشد لآلة الجري بالنسبة إلى مدة استخدام فيصل؟

(و) ما مدّة استخدام راشد لآلة الجري بالنسبة إلى مدة استخدام أحمد؟

(ز) ما مدّة استخدام الجميع لآلة الجري؟

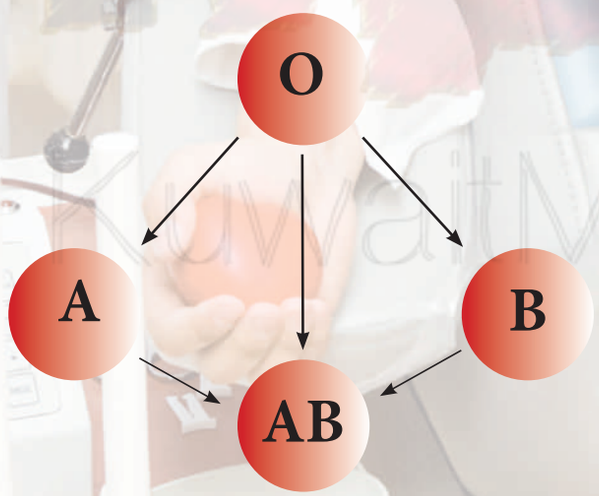
(حـ) ما مدّة استخدام كل فرد لآلة الجري؟

التبرع بالدم

التبرع بالدم هو عملية سحب الدم لتجهيزه ونقله إلى من هو بحاجة إليه. يمثّل المتبرعون المصدر الوحيد لجميع فئات دم الإنسان القابلة للنقل. يستعيد جسم الإنسان الضائع من البلازما (السائل) في ٢٤ ساعة بعد التبرع، و يعوّض كريات الدم الحمراء والخلايا الأخرى بين ستة وثمانية أسابيع. يتمكن شخص ناضج ذو صحة جيدة من التبرع بوحدة كاملة من الدم مرة واحدة كل ثمانية أسابيع.

خلال عملية نقل الدم، يجب الأخذ بعين الاعتبار عاملين أساسيين: فصيلة الدم (O، AB، B، A) وعامل «ريسوس» (Rh^-، Rh^+).

يستحسن أن تتم عملية نقل الدم بين أشخاص يحملون فصيلة الدم نفسها، لتجنب العوارض السلبية. ولكن من الممكن أيضًا، استخدام البيان السهمي المقابل لمعرفة كيفية نقل الدم من فصيلة إلى أخرى عند الحاجة.



١ كون جدولًا تبين فيه العلاقة بين الفئات المتبرعة والفئات المتلقية.

٢ اسأل أصدقاءك عن فصيلة دمهم، ومثّل علاقة تبين عملية نقل الدم في ما بينكم (دون الأخذ بعين الاعتبار العامل «ريسوس»).

٦-١

حاصل الضرب الديكارتي
Cartesian Product

◄ صلة الدرس درست في السابق الأزواج المرتبة. في هذا الدرس سوف تتعرف حاصل الضرب الديكارتي. ►

سوف تتعلم

- كيفية إيجاد حاصل الضرب الديكارتي.
- كيفية تمثيل حاصل الضرب الديكارتي بالمخططات السهمية والبيانية.

من الاستخدامات

- يستخدم مصممو الأقمشة حاصل الضرب الديكارتي لمعرفة عدد نماذج القماش وفق الألوان والنقوش المتنوعة.

استكشف الأزواج المرتبة

لدى محلات سالم تشكيلة كبيرة من القمصان التي تتميز بألوان وقياسات مختلفة.

١ اذكر خمسة ألوان مفضلة لديك.

٢ اذكر ثلاثة قياسات ممكنة.

٣ ما عدد القياسات المختلفة التي يمكنك أن تختارها لكل لون من الألوان؟

٤ ما عدد الألوان المختلفة التي يمكنك أن تختارها لكل قياس؟

٥ اصنع جدولًا كالآتي: (في الصف الأول: اكتب الألوان المختلفة التي اخترتها؛ في العمود الأول: اكتب القياسات المختلفة التي اخترتها؛ وأكمل الجدول بكتابة التشكيلات المختلفة التي يمكنك أن تحصل عليها).

٦ ما عدد التشكيلات المختلفة التي حصلت عليها؟

تعلم حاصل الضرب الديكارتي

تعلم أن الحاصل الديكارتي (أو حاصل الضرب الديكارتي) س × ص هو مجموعة كل الأزواج المرتبة (أ، ب) حيث المسقط الأول أ ∈ س، والمسقط الثاني ب ∈ ص.

أي أن:

س × ص = {(أ، ب): أ ∈ س ، ب ∈ ص}

مثال (١)

إذا كانت:

س = {١، ٢}، ص = {٣، ٤، ٥}، اكتب الحاصل الديكارتي س × ص، ثمّ مثّله بمخطط سهمي ومخطط بياني.

الحل:

س × ص = {(١، ٣)، (١، ٤)، (١، ٥)، (٢، ٣)، (٢، ٤)، (٢، ٥)}

المصطلحات الأساسية

◄ زوج مرتب
Ordered Pair

◄ حاصل الضرب الديكارتي
Cartesian Product

◄ مخطط سهمي
Arrow Diagram

◄ مخطط بياني
Graph

فكرة مفيدة — لحل المسائل

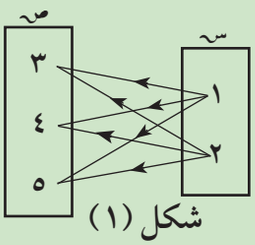
لرسم المخطط السهمي لأي علاقة:

نرسم شكل ڤن لكل من المجموعتين س ، ص ونكتب العناصر في شكل ڤن المناسب، ومن ثم نصل عناصر س بالعناصر في ص والتي ترتبط معها بعلاقة.

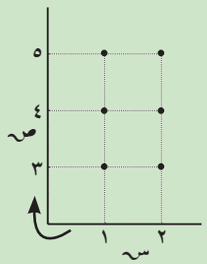
شكل (١) هو المخطط السهمي للحاصل الديكارتي س × ص.

يمكن تمثيل الحاصل الديكارتي س × ص بمخطط بياني على النحو التالي:

نمثّل عناصر «س» وعناصر «ص» على المحورين الأفقي والرأسي على الترتيب، ثم نمثل عناصر الحاصل الديكارتي س × ص كما في الشكل (٢).



شكل (١)



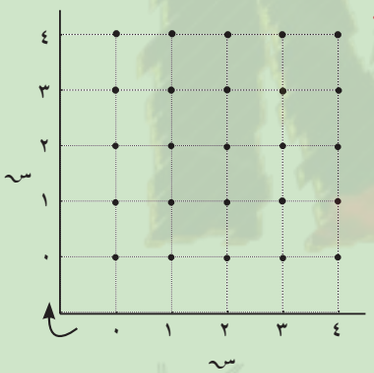
شكل (٢)

حاول أن تحل

١ من المثال (١) أوجد الحاصل الديكارتي ص × س، ثم مثّله بمخطط بياني.

مثال (٢)

إذا كانت س = {٠، ١، ٢، ٣، ٤}، فاكتب الحاصل الديكارتي س × س بذكر الصفة المميزة ثم بذكر العناصر، ومثّل س × س بمخطط بياني.



الحل:

س = {٠، ١، ٢، ٣، ٤}

بالصفة المميزة:

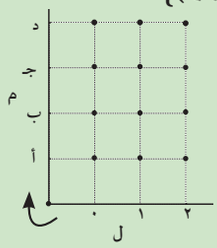
س × س = {(أ، ب): أ ∈ س ، ب ∈ س}

بذكر العناصر

س × س = {(٠، ٠)، (٠، ١)، (٠، ٢)، (٠، ٣)، (٠، ٤)،
(١، ٠)، (١، ١)، (١، ٢)، (١، ٣)، (١، ٤)، (٢، ٠)، (٢، ١)، (٢، ٢)، (٢، ٣)، (٢، ٤)، (٣، ٠)،
(٣، ١)، (٣، ٢)، (٣، ٣)، (٣، ٤)، (٤، ٠)، (٤، ١)، (٤، ٢)، (٤، ٣)، (٤، ٤)}

حاول أن تحل

٢ يوضح المخطط البياني المقابل حاصل الضرب الديكارتي ل × م. اكتب ل × م بذكر العناصر.



ملاحظة:

عدد عناصر س × ص = عدد عناصر س × عدد عناصر ص

إذا كان عدد عناصر س = م وعدد عناصر ص = ن، فإن عدد عناصر س×ص = م×ن

تحقق من فهمك

١ هل عدد عناصر الحاصل الديكارتي س × ص يساوي عدد عناصر الحاصل الديكارتي ص × س؟

٢ هل س × ص = ص × س؟

KuwaitMath.com

حل المسائل والتفكير المنطقي

١ إذا كانت س = {١، ٢، ٣}، ص = {٤، ٥، ٦}، فأي العبارات التالية صحيحة؟ فسر إجابتك.

(أ) (٥، ١) ∈ س × ص.

(ب) (٢، ٣) ∈ س × ص.

(جـ) (٣، ٦) ∈ س × ص.

(د) (٦، ٦) ∈ س × ص.

(هـ) (٤، ٣) ∈ س × ص.

(و) (٤، ٥) ∈ س × ص.

٢ إذا كانت س = {أ: أ ∈ ص، -١ < أ ≤ ٢}

ك = {ب: ب ∈ ص، -٣ ≤ ب < ٠}، حيث ص هي مجموعة الأعداد الصحيحة.

(أ) اكتب كلًّا من المجموعتين س، ك بذكر العناصر.

(ب) اكتب س × ك بذكر العناصر.

٣ إذا كانت ك = {أ: أ ∈ ص، -٢ ≤ أ ≤ ١}

ل = {ب: ب ∈ ص، -١ < ب ≤ ٣}

(أ) فاكتب كلًّا من ك، ل بذكر العناصر.

(ب) فاكتب ك × ل بذكر العناصر.

(جـ) فاكتب ل × ل بذكر العناصر.

KuwaitMath.com

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

٦ – ٢

مفهوم العلاقة
The Concept of Relation

سوف تتعلم

- مفهوم العلاقة.
- إيجاد العلاقة من مجموعة إلى مجموعة أخرى، وتمثيلها بمخطط سهمي أو بياني.
- إيجاد العلاقة على مجموعة (من مجموعة إلى نفسها) وتمثيلها بمخطط (سهمي أو بياني).

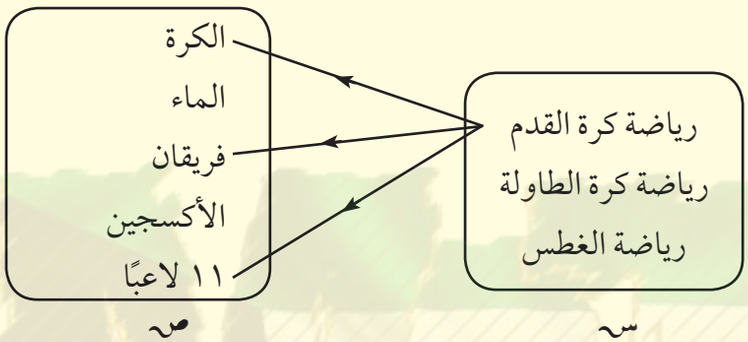
من الاستخدامات

يستخدم الأطباء مفهوم العلاقة لكي ينظموا مخططًا يبين بموجبه إمكانية نقل الدم من فئة إلى أخرى أو من شخص إلى آخر.

◄ صلة الدرس في الدرس السابق، تعرفت الحاصل الديكارتي. في هذا الدرس سوف تتعرف مفهوم العلاقة.►

استكشف العلاقة

١ اربط عناصر س بعناصر ص حيث تجد علاقة بينهما. رياضة كرة القدم معطاة كمثال.



٢ أكمل كتابة العلاقة ع التي مثّلتها العناصر. ع = {(رياضة كرة القدم، ...)، (رياضة كرة القدم، ...)، (رياضة كرة القدم، ....)، ....}

٣ قارن ع بـ س × ص.

٤ تمثل قطاعات المياه والكهرباء والهاتف الثابت مجموعة موارد يحتاجها سكان المباني في المدن، ويشكل كل مبنى مجموعة مرتبطة بمجموعة القطاعات. اربط كل شقة بالقطاعات التي ترتبط بها.

تعلم مفهوم العلاقة

لتكن س، ص مجموعتين غير خاليتين. تكون ع علاقة من س إلى ص عندما تكون ع مجموعة جزئية من الحاصل الديكارتي س × ص ونعبر عن ذلك ع ⊆ س × ص.

تكون ع علاقة على س إذا كانت ع ⊆ س × س.

المصطلحات الأساسية

◄ علاقة من مجموعة إلى مجموعة أخرى
Relation from a Set to Another

◄ علاقة على مجموعة
Relation on a Set

KuwaitMath

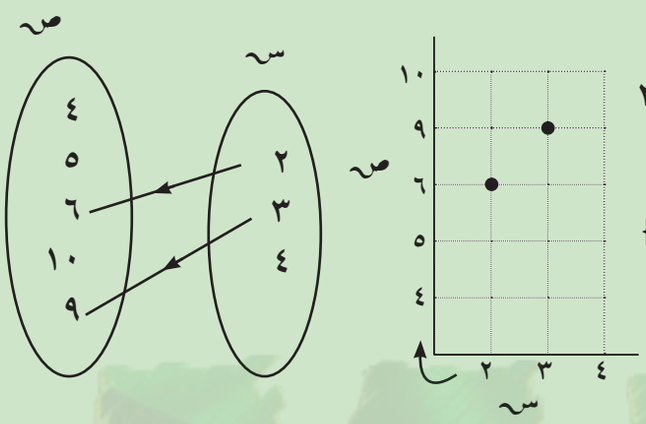
مثال (١)

لتكن:
س = {٢، ٣، ٤}، ص = {٤، ٥، ٦، ١٠، ٩}
(أ) إذا كانت ع علاقة «ثلث: $\frac{١}{٣}$» من س إلى ص، فاكتب ع بذكر العناصر.
(ب) مثّل ع بمخطط سهمي ومخطط بياني.

معلومة مفيدة

عندما نقول إن ع علاقة ثلث، نعني أن في كل زوج مرتب المسقط الأول ثلث المسقط الثاني.

الحل:



(أ) حيث إن ٢ «ثلث» ٦، و ٣ «ثلث» ٩.

إذًا ع = {(٢، ٦)، (٣، ٩)}

حاول أن تحل

١ لتكن س = {٤، ٦، ٨، ١٠}، ص = {٢، ٣، ٤}.
(أ) إذا كانت ع علاقة «ضعف» من س إلى ص، فاكتب ع بذكر العناصر.
(ب) مثّل ع بمخطط سهمي ومخطط بياني.

مثال (٢)

في ما يلي مجموعة من العلاقات المعرّفة على س = {٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨}
اكتب كل علاقة بذكر عناصرها:
(أ) ع$_١$ = {(أ، ب) : أ ∈ س، ب ∈ س، أ + ب = ٨}
(ب) ع$_٢$ = {(أ، ب) : أ ∈ س، ب ∈ س، ب = ٣أ}
(جـ) ع$_٣$ = {(أ، ب) : أ ∈ س، ب ∈ س، ب = $\frac{١}{٤}$ أ}

الحل:
(أ) حيث إن ٢ + ٦ = ٨، ٦ + ٢ = ٨، ٤ + ٤ = ٨، ٣ + ٥ = ٨، ٥ + ٣ = ٨
فتكون ع$_١$ = {(٢، ٦)، (٦، ٢)، (٤، ٤)، (٣، ٥)، (٥، ٣)}
(ب) حيث إن ٦ = ٣ × ٢
فتكون العلاقة ع$_٢$ = {(٢، ٦)}
(جـ) حيث إن ٢ = $\frac{١}{٤}$ × ٨
فتكون العلاقة ع$_٣$ = {(٨، ٢)}

حاول أن تحل

٢ إذا كانت س = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} والعلاقة ع = {(أ، ب) : أ ∈ س، ب ∈ س، ب = أ + ٢}
اكتب العلاقة بذكر عناصرها.

Kuwaitmath.com

مثال (٣)

معلومة مفيدة

عندما نقول إن ع علاقة مربع يعني أن في كل زوج مرتب المسقط الأول هو مربع المسقط الثاني.

لنأخذ:

س = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٩}

(أ) اكتب ع علاقة مربع من س إلى س بذكر العناصر.

(ب) مثّل ع بمخطط سهمي ومخطط بياني.

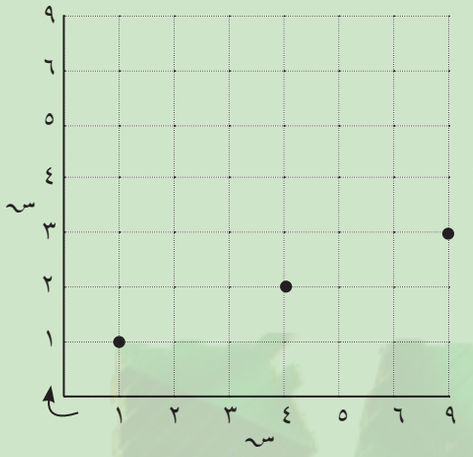
الحل:

(أ) حيث إن ١ مربع العدد ١، ٤ مربع العدد ٢، ٩ مربع العدد ٣

فتكون ع = {(١، ١)، (٤، ٢)، (٩، ٣)}

(ب) مخطط سهمي:

مخطط بياني:



حاول أن تحل

٣ لنأخذ س = {محمد، عبدالله، مروان، أحمد، عصام، جاسم}

(أ) اكتب ع علاقة «الحرف الأول هو نفسه» من س إلى س بذكر العناصر.

(ب) مثّل ع بمخطط سهمي ومخطط بياني.

مثال (٤)

لتكن: س = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩} ، ع علاقة معرّفة على س كما يلي: ع = {(أ، ب)، أ ∈ س، ب ∈ س، ٢أ + ١ = ب}

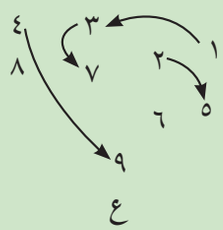
(أ) اكتب ع من س إلى س بذكر العناصر.

(ب) مثّل ع بمخطط سهمي ومخطط بياني.

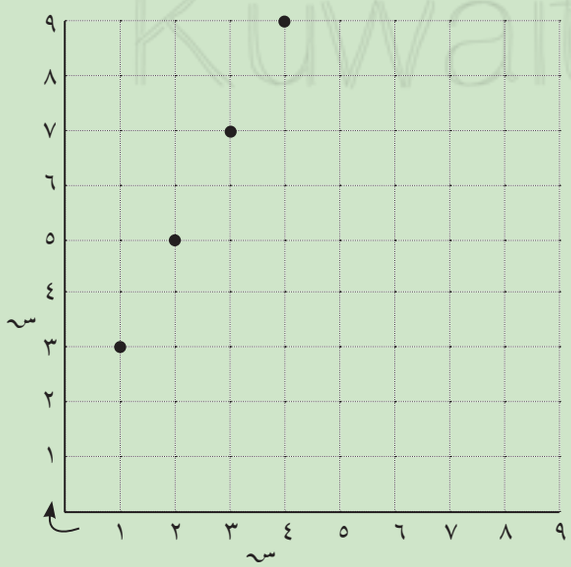
الحل:

(أ) ع = {(١، ٣)، (٢، ٥)، (٣، ٧)، (٤، ٩)}

(ب) مخطط سهمي:



مخطط بياني:



حاول أن تحل

٤ لتكن س = {١، ٢، ٣، ٤، ٧، ٩، ١٠}

ع علاقة معرّفة على س كما يلي: ع = {(أ، ب)، أ ∈ س، ب ∈ س، ٣أ − ٢ = ب}

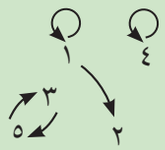
(أ) اكتب ع من س إلى س بذكر العناصر.

(ب) مثّل ع بمخطط سهمي ومخطط بياني.

KuwaitMath.com

مثال (٥)

اكتب العلاقة ع على المجموعة سـ التي يمثلها المخطط السهمي المقابل.



ع

الحل:

من المخطط السهمي: ٤ مرتبط بـ ٤ ، ١ مرتبط بـ ١ ، ١ مرتبط بـ ٢،

٣ مرتبط بـ ٥ ، ٥ مرتبط بـ ٣.

فتكون ع = {(٤، ٤)، (١، ١)، (١، ٢)، (٣، ٥)، (٥، ٣)}

حاول أن تحل

٥ اكتب العلاقة ع على المجموعة سـ التي يمثلها المخطط السهمي.

ع

تحقق من فهمك

١ هل يمثّل الحاصل الديكارتي سـ × صـ علاقة من سـ إلى صـ؟

٢ هل يمكن تحديد أكثر من علاقة من مجموعة إلى أخرى؟

KuwaitVan.com

حل المسائل والتفكير المنطقي

١ إذا كان كل من $ع_١$، $ع_٢$، $ع_٣$ علاقة على سـ = {٣، ٤، ٥، ٦}، فمثّل كلًّا منها بمخطط بياني.

(أ) $ع_١$ = {(٥، ٥)، (٤، ٤)، (٣، ٣)، (٦، ٦)}.

(ب) $ع_٢$ = {(أ، ب) : أ ∈ سـ، ب ∈ سـ، أ < ب}.

(جـ) $ع_٣$ = {(٥، ٤)، (٣، ٣)، (٤، ٤)، (٣، ٤)، (٥، ٦)}.

.....

.....

.....

.....

٢ إذا كانت سـ = {أ، ب، جـ}، صـ = {١، ٢، ٣} فأي المجموعات الآتية يمثّل علاقة من سـ إلى صـ؟ ارسم مخططًا بيانيًّا لها.

(أ) $ع_١$ = {(أ، ٣)، (أ، ١)، (أ، ٢)}

(ب) $ع_٢$ = {(أ، ٣)، (أ، ٢)، (ب، ١)، (ب، ٢)، (جـ، ١)، (جـ، ٢)، (جـ، ٣)}

(جـ) $ع_٣$ = {(أ، ٣)، (أ، ٢)، (٣، ب)، (ب، ٣)}

.....

.....

.....

.....

٣ في ما يلي مجموعة من العلاقات المعرّفة على:

سـ = {٣، ٦، ٩، ١٢، ١٥}

اكتب كل علاقة بذكر عناصرها:

(أ) $ع_١$ = {(أ، ب) : أ ∈ سـ، ب ∈ سـ، ب = أ + ٦}

(ب) $ع_٢$ = {(أ، ب) : أ ∈ سـ، ب ∈ سـ، ب = $\frac{١}{٣}$ أ}

(جـ) $ع_٣$ = {(أ، ب) : أ ∈ سـ، ب ∈ سـ، ب = أ^٢}

.....

.....

.....

.....

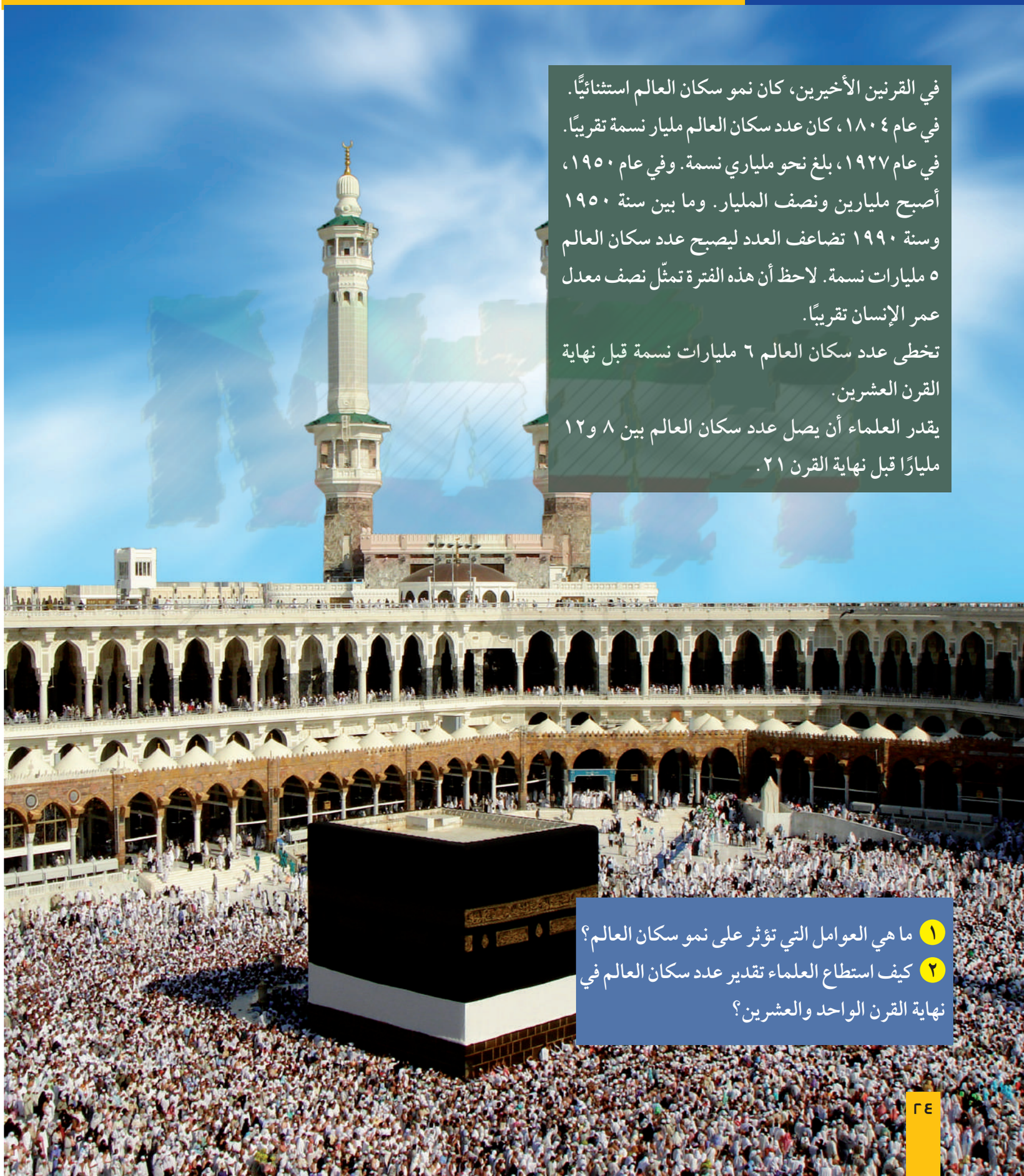
إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

KuwaitMath.com

الوحدة السادسة (ب)

التطبيق – (الدالة)
Mapping – (Function)



في القرنين الأخيرين، كان نمو سكان العالم استثنائيًّا. في عام ١٨٠٤، كان عدد سكان العالم مليار نسمة تقريبًا. في عام ١٩٢٧، بلغ نحو ملياري نسمة. وفي عام ١٩٥٠، أصبح مليارين ونصف المليار. وما بين سنة ١٩٥٠ وسنة ١٩٩٠ تضاعف العدد ليصبح عدد سكان العالم ٥ مليارات نسمة. لاحظ أن هذه الفترة تمثّل نصف معدل عمر الإنسان تقريبًا.

تخطى عدد سكان العالم ٦ مليارات نسمة قبل نهاية القرن العشرين.

يقدر العلماء أن يصل عدد سكان العالم بين ٨ و١٢ مليارًا قبل نهاية القرن ٢١.

١ ما هي العوامل التي تؤثر على نمو سكان العالم؟

٢ كيف استطاع العلماء تقدير عدد سكان العالم في نهاية القرن الواحد والعشرين؟

٦-٣

التطبيق
Mapping

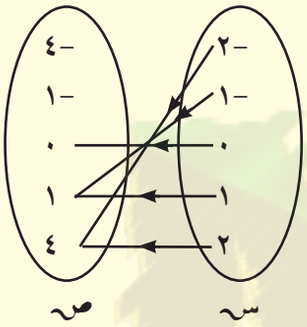
سوف تتعلم
- مفهوم التطبيق.
- تعيين التطبيق من بين عدة علاقات.
- كيفية التعبير الرمزي عن التطبيق.

من الاستخدامات
- يستخدم التقنيون التطبيق عند تصميم إشارات المرور.

صلة الدرس درست حاصل الضرب الديكارتي، ودرست العلاقة التي هي مجموعة جزئية من الحاصل الديكارتي، وكيفية تمثيل كلّ منها بالمخطط السّهمي والمخطط البياني. والتطبيق هو نوع خاصّ من العلاقات له أهمية بالغة في دراسة الرياضيات والعلوم الأخرى، وكذلك في التطبيقات الحياتية اليومية.►

استكشف العلاقات بين العناصر

يمثّل المخطط السهمي العلاقة بين عناصر من س وعناصر من ص.



١ أكمل الجدول التالي بـ:

✓ إذا كان هناك علاقة بين العنصرين.

✗ إذا لم يكن هناك علاقة بين العنصرين.

ص \ س	-٢	-١	٠	١	٢
-٤					
-١					
٠					
١					
٤					

٢ هل جميع عناصر ص مرتبطة بعناصر من س؟

٣ هل جميع عناصر س مرتبطة بعناصر من ص؟

٤ بكم عنصرًا من ص ارتبط كل عنصر من عناصر س؟

٥ املأ الفراغات بالأعداد المناسبة.

-٢ ← $\square = \square^{٢}$

-١ ← $(-١) = \square$

$\square$ ← $٠^{٢} = \square$

١ ← $\square = \square^{٢}$

٢ ← $٢ = \square$

٦ حدد القاعدة التي تربط (تقرن) عناصر س مع عناصر ص في السؤال رقم ٥

المصطلحات الأساسية
- تطبيق Mapping
- قاعدة الاقتران Mapping Rule
- مجال Domain
- مجال مقابل Corresponding Domain

KuwaitMath.com

التطبيق: علاقة تربط كل عنصر في مجموعة ولتكن س~ **بعنصر واحد فقط** في مجموعة أخرى ولتكن ص~.

نسمي س~ «**المجال**».

ونسمي ص~ «**المجال المقابل**».

ونسمي مجموعة صور عناصر المجال «**مدى التطبيق**».

الدالة: تكون علاقة بين مجموعتين من **الأعداد** حيث كل عنصر في المجموعة الأولى (**المجال**) يرتبط بعنصر واحد فقط في المجموعة الثانية (**المجال المقابل**).

وبالتالي كل دالة تعتبر تطبيق والعكس غير صحيح أي ليس كل تطبيق دالة.

بفرض أن علاقة ما تمثل تطبيقًا من س~ إلى ص~ ، فنرمز لهذا التطبيق بأحد الرموز مثل: ت، هـ، د، ل، ق، ...

ويكتب هذا التطبيق بالصورة التالية: ت: س~ ← ص~ حيث ت (س) هي قاعدة الاقتران للتطبيق.

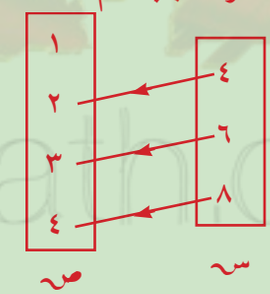
عندما يتساوى المجال «س~» مع المجال المقابل «ص~» فيكون التطبيق من س~ إلى س~.

في أي علاقة من س~ إلى ص~ عندما يرتبط عنصر في س~ بأكثر من عنصر في ص~ أو عندما نجد عنصرًا في س~ لا يرتبط بأحد عناصر ص~ فهذه العلاقة ليست تطبيقًا.

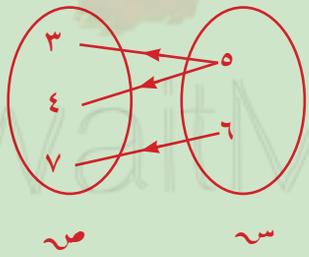
نمثّل التطبيق بمخطط سهمي أو بياني كما في العلاقة.

مثال (١)

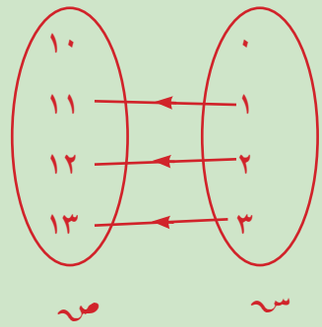
أي العلاقات التالية تمثل تطبيقًا؟ اذكر السبب، ثم حدّد المجال والمجال المقابل والمدى للتطبيق.



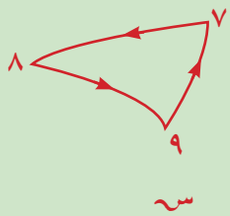
شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)

KuwaitMath.com

الحل:

شكل (١) يمثّل تطبيقًا من سـ إلى صـ لأن كل عنصر في سـ ارتبط بعنصر واحد فقط من صـ.

مجاله = {٤، ٦، ٨}، مجاله المقابل = {١، ٢، ٣، ٤}، المدى = { ٢، ٣، ٤}.

شكل (٢) لا يمثّل تطبيقًا، وذلك لأن العنصر ٥ من سـ ارتبط بعنصرين من صـ هما ٣، ٤ .

شكل (٣) لا يمثّل تطبيقًا، لأن العنصر صفر في سـ لم يرتبط بأي عنصر من صـ.

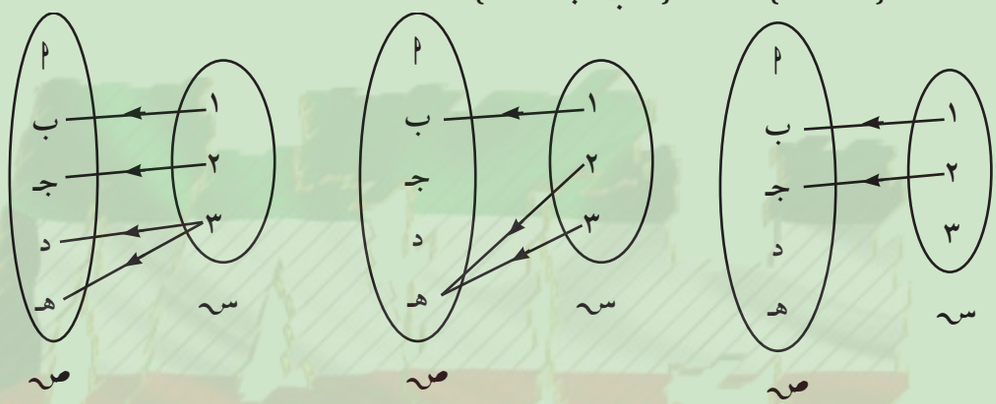
شكل (٤) يمثّل تطبيقًا من سـ إلى سـ، لأن كل عنصر من سـ ارتبط بعنصر واحد فقط من سـ.

مجاله = {٧، ٨، ٩} = مجاله المقابل = مداه.

حاول أن تحل

١ أي من العلاقات التالية يمثّل تطبيقاً من سـ إلى صـ، حيث

سـ = {١، ٢، ٣}، صـ = {أ، ب، جـ، د، هـ}؟

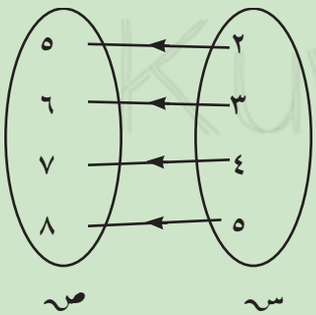


شكل (١) شكل (٢) شكل (٣)

مثال (٢)

ليكن ل: سـ ⟵ صـ تطبيق مخططه السهمي مبيّن في الشكل المقابل.

اكتب قاعدة الاقتران لهذا التطبيق.



الحل:

يربط التطبيق «ل» كل عدد في سـ بعدد في صـ يزيد عنه بمقدار ٣.

٢ ⟵ ٢ + ٣ = ٥

٣ ⟵ ٣ + ٣ = ٦

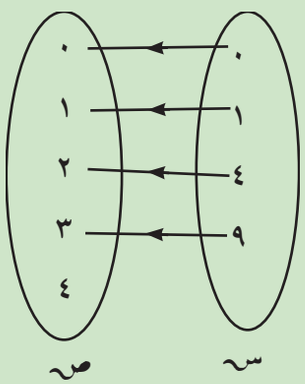
٤ ⟵ ٤ + ٣ = ٧

٥ ⟵ ٥ + ٣ = ٨

أي أن قاعدة الاقتران هي:

س ⟵ س + ٣

أو بصورة أخرى: ل(س) = س + ٣، لكل س ∈ سـ.



حاول أن تحل

٢ ليكن ي: سـ ⟵ صـ تطبيق مخططه السهمي كما في الشكل المقابل. اكتب قاعدة الاقتران لهذا التطبيق.

مثال (٣)

إذا كان التطبيق د: ط ⟵ ط حيث ط مجموعة الأعداد الطبيعية، د(س) = س + ٢

فما الأعداد التي صورها ٤، ٨، ١٥؟

الحل:

يربط التطبيق «د» كل عدد س في ط بالعدد س + ٢ في ط ، د(س) = س + ٢

إذا كان س ⟵ س + ٢ = ٤ فإن س = ٢ لأن ٢ + ٢ = ٤

كذلك س + ٢ = ٨، س = ٦ لأن ٦ + ٢ = ٨

س + ٢ = ١٥، س = ١٣ لأن ١٣ + ٢ = ١٥

∴ الأعداد التي صورها ٤، ٨، ١٥ هي ٢، ٦، ١٣ على الترتيب.

حاول أن تحل

٣ إذا كان التطبيق د: ط ⟵ ط ، د(س) = ٣س

فما الأعداد التي صورها ٦، ٩، ١٨، ٢١؟

تحقق من فهمك

١ هل العلاقة تمثّل دائمًا تطبيقًا؟ فسّر.

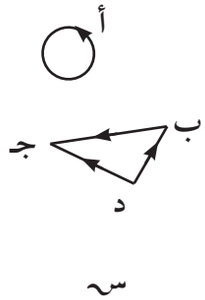
٢ كيف تستنتج أن المخططات السهمية والبيانية تمثل تطبيقًا أم لا؟ فسّر.

KuwaitMath.com

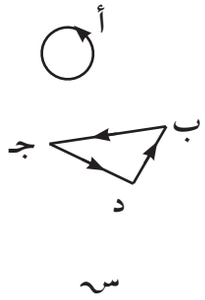
حل المسائل والتفكير المنطقي

١ أي من المخططات السهمية التالية يمثّل تطبيقًا؟

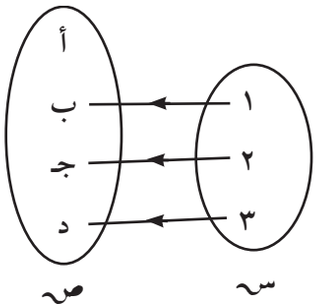
(أ)



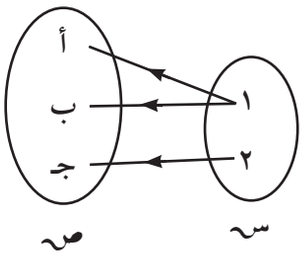
(ب)



(جـ)

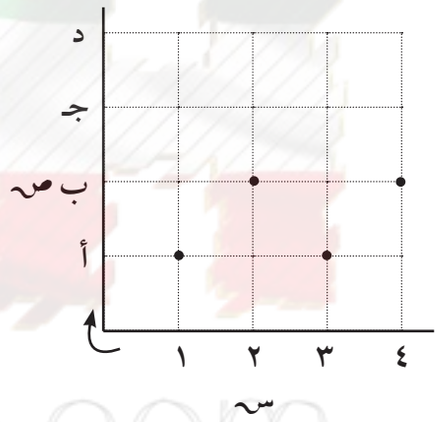


(د)

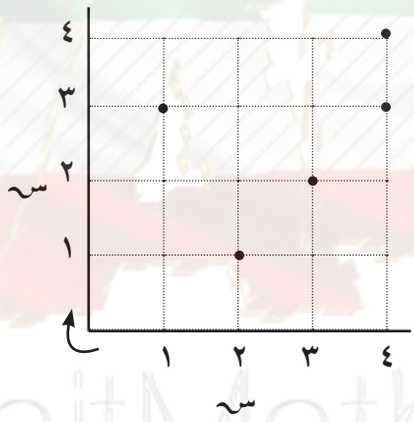


٢ أي من المخططات البيانية التالية يمثّل تطبيقًا؟

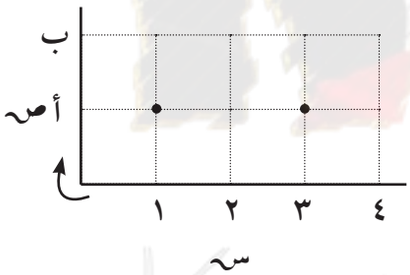
(أ)



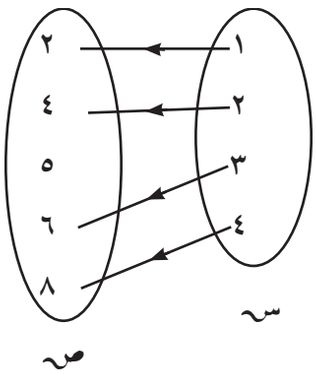
(ب)



(جـ)



٣ ليكن د: س ← ص مخططه السهمي كما في الشكل أدناه. اكتب قاعدة الاقتران لهذا التطبيق.



.....

.....

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

KuwaitMath.com

٦ – ٤

أنواع التطبيق (الدالة)

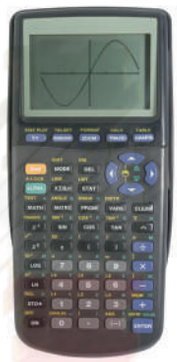
Kinds of Mapping (Function)

سوف تتعلم

- تحديد أنواع التطبيق المختلفة.

من الاستخدامات

- يستخدم مبرمجو الآلات الحاسبة أنواعًا من التطبيق لبرمجة آلات حاسبة بيانية.

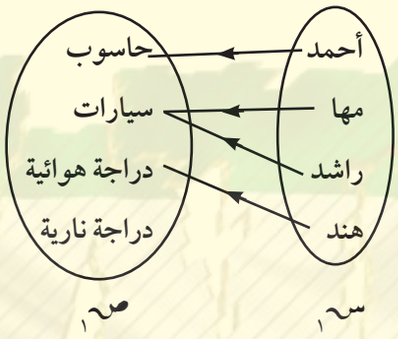


صلة الدرس في الدرس السابق تعرفت التطبيق. في هذا الدرس سوف تتعرف أنواع التطبيق.

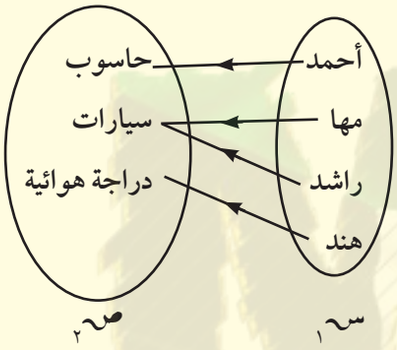
استكشف أنواع التطبيق

لنأخذ التطبيقات التالية:

١ $د_١ : س_١ \leftarrow ص_١$

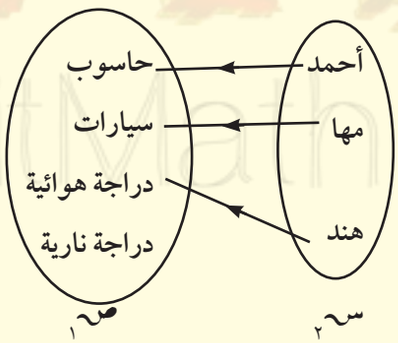


٢ $د_٢ : س_١ \leftarrow ص_٢$



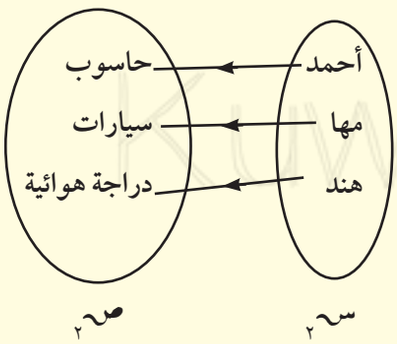
بم يتميّز المجال المقابل في ٢ عنه في ١؟

٣ $د_٣ : س_٢ \leftarrow ص_١$



بم يتميز هذا التطبيق؟

٤ $د_٤ : س_٢ \leftarrow ص_٢$



بم يتميز هذا التطبيق؟

تعلم أنواع التطبيق

التطبيق الذي يتساوى فيه المدى والمجال المقابل يسمى **تطبيقًا شاملًا**.

التطبيق الذي لا يرتبط فيه أي عنصرين مختلفين من المجال بالعنصر نفسه في المجال المقابل يسمى **تطبيقًا متباينًا**.

التطبيق الشامل والمتباين يسمّى **تقابلًا**.

المصطلحات الأساسية

- تطبيق شامل Surjective
- تطبيق متباين Injective
- تطبيق تقابل Bijective
- دالة Function

KuwaitMath.com

أمثلة

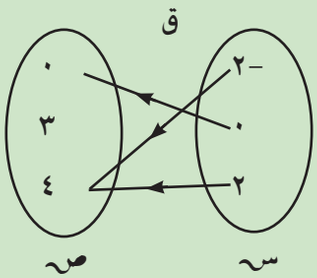
١ ليكن س = {-٢، ٠، ٢}، ص = {٠، ٢، ٤} وليكن لدينا التطبيق:

(أ) ق: س ⟵ ص حيث ق(س) = $س^{٢}$

(ب) هـ: س ⟵ ص حيث هـ(س) = س + ٢

اكتب ق ، هـ كمجموعة من الأزواج المرتبة، ثمّ مثلها بمخطط سهمي.

هل ق ، هـ شامل، متباين، تقابل؟ ولماذا؟



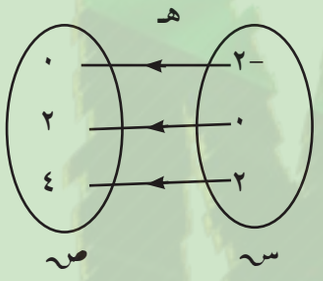
الحل:

(أ) ق = {(-٢، ٤)، (٠،٠)، (٢،٤)}

المخطط السهمي للتطبيق ق:

كلا، ق ليس شاملًا لأن المجال المقابل لا يساوي المدى.

كذلك ق ليس متباينًا لأن -٢ و٢ يرتبطان بـ ٤، وبالتالي ق ليس تقابلًا .



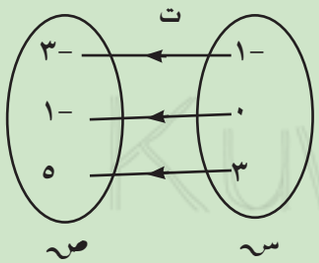
(ب) هـ = {(-٢، ٠)، (٠،٢)، (٢،٤)}

المخطط السهمي للتطبيق هـ:

التطبيق هـ هو تقابل لأنه تطبيق شامل حيث المدى يساوي المجال المقابل،

وهو أيضًا متباين لأن كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر مختلف في المجال المقابل.

٢ ليكن س = {-١، ٠، ٣}، ص = {-٣، -١، ٥}



التطبيق ت: س ⟵ ص حيث ت (س) = ٢س - ١

اكتب ت كمجموعة من الأزواج المرتبة، ثمّ مثّلها بمخطط سهمي. هل ت شامل، متباين، تقابل؟ ولماذا؟

الحل:

ت (-١)= ٢(-١) -١ = -٢ - ١ = -٣

ت (٠)= ٢(٠) -١ = ٠ - ١ = -١

ت (٣)= ٢(٣) -١ = ٦ - ١ = ٥

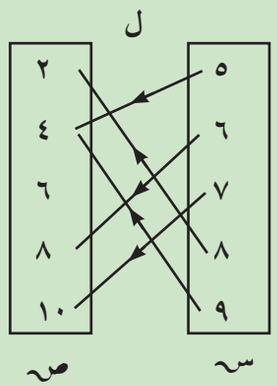
ت = {(-١، -٣)، (٠، -١)، (٣، ٥)}

المدى = {-٣، -١، ٥}

ت شامل لأن المجال المقابل يتساوى مع المدى.

ت متباين لأن ت(-١) ≠ ت (٠) ≠ ت (٣)

وبالتالي ت تقابل.



حاول أن تحل

١ ليكن ل: س ⟵ ص تطبيق مخططه السهمي مبين في الشكل المقابل.

(أ) هل ل شامل؟ ولماذا؟

(ب) هل ل متباين؟ ولماذا؟

Kuwaitmath.com

مثال (٣)

إذا كان ل: سـ ⟵ صـ حيث سـ = {١، ٢، ٣، ٤} ، صـ = {٨، ٢٧، ١، ٦٤}
وكان ل(س) = س^{٣}، فبيّن أن ل هو تطبيق شامل ومتباين (تقابل)

الحل:

ل(١) = $١^{٣}$ = ١

ل(٢) = $٢^{٣}$ = ٨

ل(٣) = $٣^{٣}$ = ٢٧

ل(٤) = $٤^{٣}$ = ٦٤

لذا المدى = {١، ٨، ٢٧، ٦٤} = المجال المقابل، فتكون ل تطبيق شامل

وحيث إن ل(١) ≠ ل(٢) ≠ ل(٣) ≠ ل(٤)، أي أنه لم يرتبط أي عنصرين مختلفين بالمجال بالعنصر نفسه بالمجال المقابل، فالتطبيق ل تطبيق متباين.

إذًا التطبيق ل يسمى تقابلًا.

حاول أن تحل

٢ إذا كان ل: صـ ⟵ صـ حيث ل(س) = س^{٢}، (صـ هي مجموعة الأعداد الصحيحة).
هل هذا التطبيق يسمى تقابلًا؟ فسر.

ملاحظة:

يكفي للحكم على كون التطبيق غير شامل الكشف عن عنصر في المجال المقابل لا يمثّل صورة لأحد عناصر المجال.

يكفي للحكم على كون التطبيق غير متباين الكشف عن عنصرين في المجال لهما الصورة نفسها في المجال المقابل.

مثال (٤)

إذا كان ط: سـ ⟵ صـ حيث: سـ = {-٢، -١، ٢، ٣} ، صـ = {٠، ٣، ٨}
وكان ط(أ) = (أ)^{٢} - ١، فبيّن أن ط هو تطبيق شامل ولكن ليس تقابلًا.

الحل:

ط(-٢) = $(-٢)^{٢}$ - ١ = ٤ - ١ = ٣

ط(-١) = $(-١)^{٢}$ - ١ = ١ - ١ = ٠

ط(٢) = $(٢)^{٢}$ - ١ = ٤ - ١ = ٣

ط(٣) = $(٣)^{٢}$ - ١ = ٩ - ١ = ٨

المدى = {٠، ٣، ٨} = صـ ∴ هو تطبيق شامل.

∵ ط(-٢) = ط(٢) = ٣ ∴ ط ليس تباينًا

وبالتالي ط هي تطبيق شامل ولكن ليس تقابلًا.

حاول أن تحل

٣ إذا كان ط: سـ ⟵ صـ: حيث: سـ = {٢، ٣، ٤، ٥}،
صـ = {٨، ١١، ١٤، ١٧، ٢٠} وكان ط(أ) = ٣أ + ٢ فبيّن أن ط هو تطبيق متباين ولكن ليس تقابلًا.

تحقق من فهمك

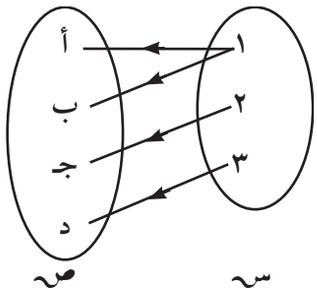
١ هل التطبيق المتباين هو تطبيق شامل؟

٢ هل العلاقة ص = $\frac{١}{س}$ من ح إلى ح تعتبر تطبيقًا حيث ح مجموعة الأعداد الحقيقية؟

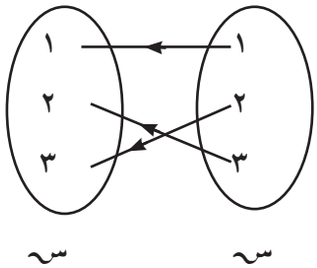
حل المسائل والتفكير المنطقي

١ هل العلاقات التالية تمثّل تطبيقًا؟ ما خواص هذا التطبيق في حالة وجوده؟

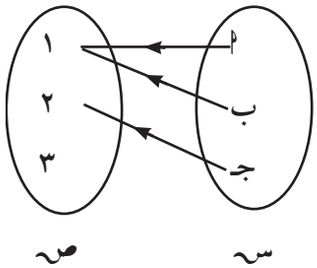
(أ)



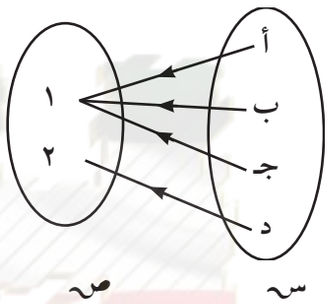
(ب)



(جـ)

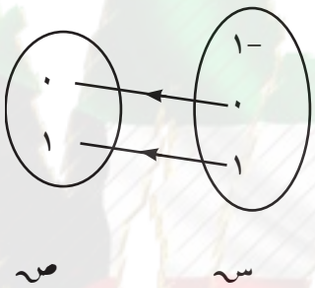


(د)



(هـ)

(و)



٢ إذا كانت سـ = {١، ٢}، فأي من التطبيقات التالية من سـ إلى سـ هو تقابل؟

(أ) {(١، ١)، (٢، ١)} (ب) {(١، ١)، (٢، ٢)} (جـ) {(١، ٢)، (٢، ٢)}

٣ لتكن (صـ هي مجموعة الأعداد الصحيحة)، **التطبيق** ي: صـ ⟵ صـ حيث ي(س) = س^{٢} ليس شاملًا لأن:

(أ) المدى = صـ (ب) المجال = المجال المقابل (جـ) المدى ≠ صـ (د) المدى ⊄ صـ

٤ إذا كانت سـ = {١، ٢، ٣}، صـ = {٢، ٥، ٨، ١٠} والتطبيق ل: سـ ⟵ صـ،

ل(س) = س^{٢} + ١

(أ) اكتب ل كمجموعة أزواج مرتبة. .....

(ب) بيّن خواص التطبيق ل من حيث كونه شاملًا، متباينًا، تقابلًا، واذكر السبب. .....

.....

(جـ) ارسم المخطط السهمي للتطبيق.

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

KuwaitMath.com

٦ـ٥

الدالة الخطية (التطبيق الخطي)
Linear Function

◄ صلة الدرس تعلمت أن علاقات خاصة تسمى تطبيقًا أو دالة، ستتعلم في هذا الدرس كيفية تمثيل الدوال بطرق مختلفة. ►

سوف تتعلم

- تمثيل الدوال باستخدام الجداول والتمثيل البياني والمعادلات والرسم.

من الاستخدامات

- تستخدم المطابع الدوال الخطية لتحديد تكاليف أعمال الطباعة الضخمة.

استكشف الدوال الخطية

الأدوات المستخدمة: أوراق رسم بياني، مسطرة

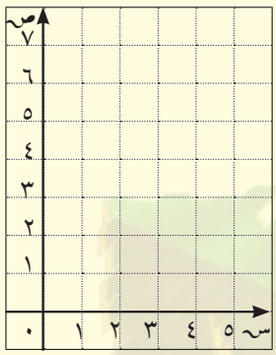
لنأخذ س = {١، ٢، ٣، ٤، ٥}، ص = {٣، ٤، ٥، ٦، ٧}

١ (أ) اكتب ع١ العلاقة من س إلى ص حيث

ع١ = {(أ، ب) : أ ∈ س، ب ∈ ص ، ب = أ + ٢}

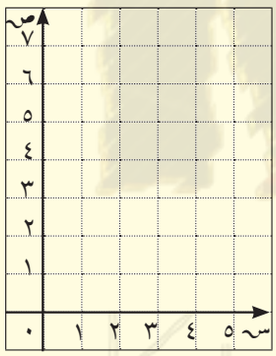
(ب) مثّل ع١ بمخطط بياني.

(جـ) هل يمكن وصل هذه النقاط بخط مستقيم؟



٢ لنأخذ س = {١، ٢، ٣}، ص = {٠، ٣، ٨}

كرر الخطوات في ١ من (أ) إلى جـ إذا كانت ب = أ^{٢} − ١ .

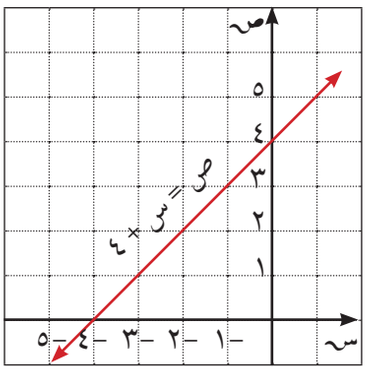


تعلم الدوال الخطية

التطبيق (الدالة) د: ح ⟵ ح حيث د (س) = س + ٤، يمكن كتابة قاعدة الاقتران على الصورة ص = س + ٤ .

عندما ترتبط قيمة ص بقيمة س يكون ص دالة في س ويسمى ص **المتغير التابع** ويسمى س **المتغير المستقل**.

في التمثيل البياني نستخدم المحور الأفقي (محور السينات) للمتغير المستقل، والمحور الرأسي (محور الصادات) للمتغير التابع.



المصطلحات الأساسية

◄ متغير تابع
Dependent Variable

◄ متغير مستقل
Independent Variable

◄ دالة خطية
Linear Function

KuwaitMath.com

الدالة د: ح ⟵ ح حيث د(س) = أ س + ب أو ص = أ س + ب ، أ، ب ∋ ح تسمى دالة خطية بيانها خط مستقيم.

ملاحظة: عندما أ = ٠ تكون الدالة ثابتة وبيانها خطًّا مستقيمًا أفقيًّا.

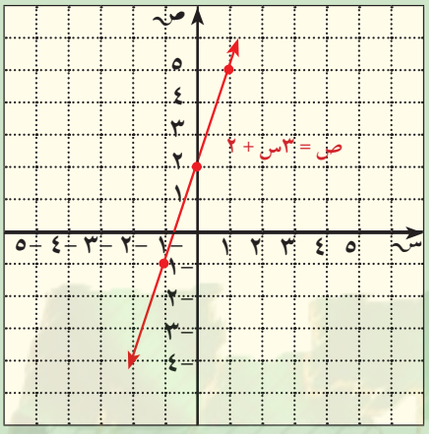
أمثلة

١ مثّل بيانيًّا العلاقة على ح حيث ص = ٣س + ٢. هل تمثّل دالة؟ هل هي دالة خطية؟

الحل:

نكوّن جدولًا لقيم المتغير المستقل والمتغير التابع:

المتغير المستقل	قاعدة الاقتران	المتغير التابع
س	٣س + ٢	ص
١−	٣ (١−) + ٢	١−
٠	٣ (٠) + ٢	٢
١	٣ (١) + ٢	٥



هذه العلاقة تمثل دالة لأن كل قيمة في المتغير المستقل (س) لها قيمة وحيدة للمتغير التابع (ص). وهي دالة خطية لأن التمثيل البياني خط مستقيم.

◄ الصلة بالرياضيات

تبين المعادلة ص = ٣س + ٢ أن التعبيرين ص ، ٣س + ٢ متساويان. وتعني الدالة ص = ٣س + ٢ أن قيمة ص معطاة من خلال القاعدة ٣س + ٢.

عند حل بعض مسائل الحياة اليومية يمكننا استخدام بيانات الدوال الخطية في تمثيلها مع ملاحظة أن بعض القيم غير منطقية بالنسبة إلى المسألة.

لذلك فالرسم البياني للمسألة ليس بالضرورة أن يكون خطًّا مستقيمًا، ولكن جميع القيم التي تحقق المسألة تقع على خط مستقيم واحد.

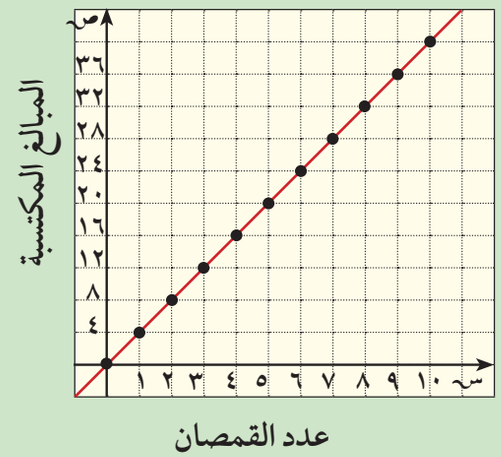
٢ يباع القميص الرياضي بمبلغ ٤ دنانير. اكتب ومثّل بيانيًّا القاعدة التي تربط بين المبالغ المكتسبة وعدد القمصان المبيعة.

إذا حصل عبدالله على ٣٦ دينارًا، فكم قميصًا باع؟ هل تصف هذه القاعدة دالة؟ فسر إجابتك.

الحل:

القاعدة التي تربط المبالغ المكتسبة بعدد القمصان المباعة هي : ص = ٤ س.

س	٠	١	٢
ص	٠	٤	٨



إذا حصل عبدالله على ٣٦ دينارًا، فيكون عدد القمصان المباعة ٩ قمصان.

نعم، تبعًا لعدد القمصان المباعة نحدد المبالغ المكتسبة.

KuwaitMath.com

٣ تمثّل المسافة التي يقطعها الحوت الأزرق دالة في الوقت، فإذا كانت سرعته في السباحة تساوي ٢٦ كم/ ساعة تقريبًا.

(أ) اكتب معادلة توضح العلاقة بين المسافة ف والوقت ن، ثمّ مثلها بيانيًّا.

(ب) استخدم المعادلة لإيجاد المسافة التي يقطعها الحوت الأزرق في كل من الأوقات التالية:

ساعتان ، ٥ ساعات ، ٨ ساعات.

الحل:

(أ) إن المسافة التي يقطعها الحوت الأزرق هي دالة في الوقت بحيث كل ساعة يقطع مسافة ٢٦ كم

المسافة = السرعة × الزمن

ف= ٢٦ن

(ب) هذا الجدول يعطينا إمكانية إيجاد الزمن إذا علمنا المسافة المقطوعة

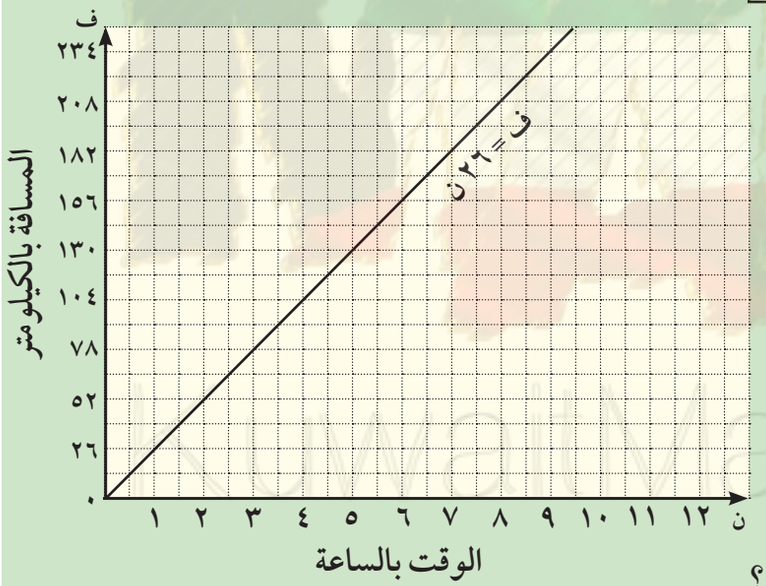
ن/ ساعة	١	٢	٥	٨
ف/ كم	٢٦	٥٢	١٣٠	٢٠٨

وذلك عن طريق تطبيق المعادلة التالية ف = ٢٦ × ن

يقطع الحوت الأزرق ٥٢ كم في ساعتين

١٣٠ كم في ٥ ساعات

٢٠٨ كم في ٨ ساعات



حاول أن تحل

١ (أ) مثّل بيانيًّا الدالة ص = −٢س،

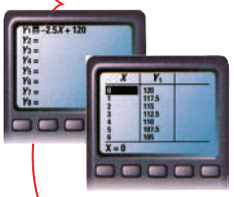
هل هي دالة خطية؟ فسر إجابتك.

(ب) مثل بيانيًّا الدالة ص = ٥؟ هل تمثل دالة خطية؟

ما رأيك؟

تنعدم الأوزان خارج المحطات الفضائية ومن ثمّ يمكن نمذجة ارتفاع قلم رصاص بعد رميه بدالة خطية في الزمن وذلك من لحظة رميه. علمًا أن القلم رمي من ارتفاع ١٢٠ سم وهبط ٥ , ٢ سم كل ثانية. كوِّن جدولًا لقيم المتغير التابع للدالة ص = −٥ , ٢ س + ١٢٠.

عبدالله يفكر ...



يمكنني إيجاد قيم المتغير التابع باستخدام الجداول في الآلة الحاسبة. إذا أدخلت
− ٥ , ٢ س ⊞ ١٢٠
على أنها الدالة Y ونظرت إلى الجدول الناتج، فيمكنني إيجاد قيم المتغير التابع، وهي:
١٢٠، ١١٧,٥، ١١٥، ١١٢,٥، .. وهكذا.

فهد يفكر ...

ألاحظ أن ١٢٠ قيمة الدّالة عندما س = ٠، فيمكنني أن أطرح ٥ , ٢ فقط لكل زيادة قدرها ١ في قيم س:

س	٠	١	٢	٣	٤	٥
ص	١٢٠	١١٧,٥	١١٥	١١٢,٥	١١٠	١٠٧,٥

−٢,٥ −٢,٥ −٢,٥ −٢,٥ −٢,٥

ما رأيك؟

ما الطريقة التي ستستخدمها إذا أردت معرفة الفترة الزمنية اللازمة حتى يصطدم قلم الرصاص بالأرضية؟ لماذا؟

تحقق من فهمك

١ لماذا لم نستخدم القيم السالبة في مثال ٣؟

٢ كيف يمكنك استخدام الرسم البياني لدالة كي توجد قيمة المتغير المستقل من أجل قيمة معطاة للمتغير التابع؟

٣ باستخدام جدول معطى، كيف يمكنك معرفة أن العلاقة دالة؟

٤ هل الرسم البياني للتطبيق ص = $\frac{١}{٢}$ س − ٥ يمثّل دالة خطية؟ وضح إجابتك.

حل المسائل والتفكير المنطقي

١ **التفكير الناقد:** تساءل محمد عمّا إذا كانت شركات الطيران تحدد كلفة تذكرة السفر استنادًا إلى مسافة الرحلة. لقد أوجد متوسط المسافات بالكيلومتر بين بعض المدن وتكاليف تذاكر السفر ذهابًا وإيابًا.

المسافة بالكيلومتر	السعر بالدينار
١٠٨٦	٨٥
١٦٧٠	١٢٥
١٠٨٦	٥٥
١٠٨٦	١٢٤
١٦٧٠	٢٥٠
١٦٧٠	١٥٥

(أ) هل يمثّل سعر التذكرة دالة في المسافة؟ وضّح إجابتك. .....

.....

(ب) ما العوامل الأخرى التي تؤثر في تكلفة تذكرة السفر؟ .....

.....

٢ **المجلة:** اكتب مثالًا من الحياة اليومية لدالة. وضح الأسباب التي تجعل المعادلة دالة وعرف كلًّا من المتغيرين، التابع والمستقل. .....

.....

KuwaitMath.com

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

٦-٦

الدالة التربيعية
Quadratic Functions

سوف تتعلم

- تمثيل الدوال التربيعية على شكل رسوم بيانية وجداول ومعادلات.

من الاستخدامات

- يمكن تمثيل حركة المقذوفات وحركة الألعاب النارية في حفل استعراضي باستخدام المعادلات التربيعية.

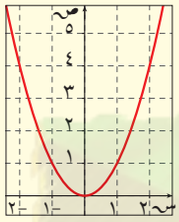
◄ صلة الدرس درست الدوال الخطية، وفي هذا الدرس ستتوسع في الأفكار التي تعلمتها عن الدوال الخطية وستتعرف نوعًا آخر من الدوال. ►

استكشف الدوال التربيعية

صعودًا أو نزولًا

الأدوات المستخدمة: آلة حاسبة بيانية

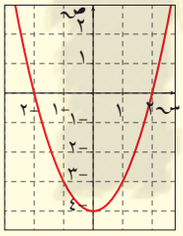
١ يمثل الشكل المقابل بيان: ص=س^{٢}. هل يمثّل الرسم البياني هذا دالة؟ وضح إجابتك.



٢ أين تزداد قيم ص؟ وأين تتناقص؟

٣ اتبع مسار الرسم البياني (أو احسب) لإيجاد قيمة ص عندما تكون س = ٤، وعندما تكون س = −٤.

٤ استخدم الرسم البياني لإيجاد قيمة سالبة لـ ص. كيف تساعدك معادلة الدالة على توضيح إجاباتك؟



٥ غيّر الدالة إلى ص = س^{٢} − ٤ (يمثل الشكل المقابل بيانها). هل يغير ذلك إجابتك عن السؤال رقم ٤؟ وضح ذلك.

تعلم الدوال التربيعية

الدالة التربيعية هي دالة فيها القوة الأعلى للمتغير المستقل تساوي ٢.

يكون الرسم البياني لدالة خطية خطًّا مستقيمًا لأن التغيرات المتساوية في قيمة س تنتج تغيرات متساوية في قيمة ص. (تذكر أن التغير في قيمة ص مقسومًا على التغير في قيمة س يمثّل الميل).

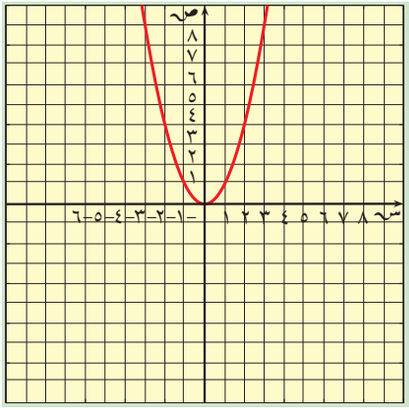
يكون الرسم البياني لدالة تربيعية منحنًى على شكل ∪ أو منحنًى على شكل ∩، ويسمى قطعًا مكافئًا.

في الدوال التربيعية، لا تؤدي التغيرات المتساوية في قيمة س إلى تغيرات متساوية في قيمة ص.

مثال (١)

كوّن جدولًا ومثل بيانيًّا ص = س^{٢}

س	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣
ص	٩	٤	١	٠	١	٤	٩



هذا التمثيل البياني للدالة ص = س^{٢}

المصطلحات الأساسية

◄ دالة غير خطية
Non-linear Function

◄ دالة تربيعية
Quadratic Function

◄ قطع مكافئ
Parabola

هل تعلم؟

في كرة السلة الأولمبية، تلقى كرة الرمية الثلاثية عن مسافة ٦ أمتار و١٥ سم.

الصورة العامة للدالة التربيعية هي:
ص = أ س^{٢} + ب س + جـ حيث أ ≠ ٠ ، أ، ب، جـ أعداد حقيقية.

حد من الدرجة الثانية — حد من الدرجة الأولى — حد ثابت

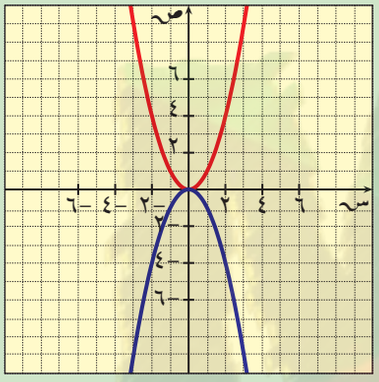
يمكن الحصول على أي تمثيل بياني لبعض الدوال التربيعية بتطبيق بعض التحويلات على التمثيل البياني للدالة التربيعية هي ص = س^{٢}: الإزاحة لأعلى ↑ أو لأسفل ↓ أو لليمين → أو لليسار ← أو الانعكاس في محور السينات ↕ .

أمثلة

٢ مثّل بيانيًّا الدالة ص = −س^{٢} مستخدمًا التمثيل البياني للدالة التربيعية ص = س^{٢}.

الحل:

يمكن رسم التمثيل البياني للدالة ص = − س^{٢} باستخدام الانعكاس في محور السينات على التمثيل البياني للدالة التربيعية ص = س^{٢}.



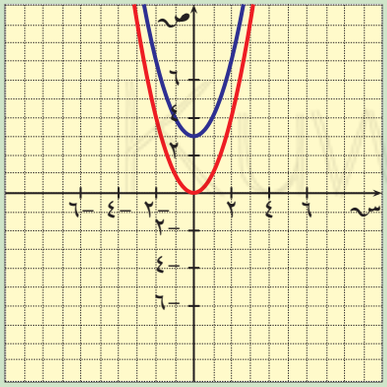
الخطوات

↕

٣ مثّل بيانيًّا الدالة ص = س^{٢} + ٣ مستخدمًا التمثيل البياني للدالة التربيعية ص = س^{٢}.

الحل:

يمكن رسم التمثيل البياني للدالة ص = س^{٢} + ٣ باستخدام الإزاحة الرأسية ٣ وحدات إلى الأعلى على التمثيل البياني للدالة التربيعية ص = س^{٢}.



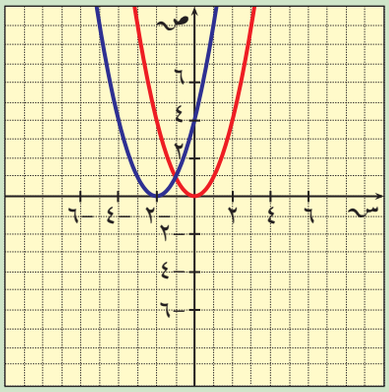
الخطوات

↑

٤ مثّل بيانيًّا الدالة ص = (س + ٢)^{٢} مستخدمًا التمثيل البياني للدالة التربيعية ص = س^{٢}.

الحل:

يمكن رسم التمثيل البياني للدالة ص = (س + ٢)^{٢} باستخدام الإزاحة الأفقية وحدتين (٢ وحدة) إلى اليسار على التمثيل البياني للدالة التربيعية ص = س^{٢}.



الخطوات

←

www.NajatMath.com

حاول أن تحل

١ (أ) مثل بيانيًّا الدالة ص = س^{٢} – ٤ مستخدمًا التمثيل البياني للدالة التربيعية ص = س^{٢}.

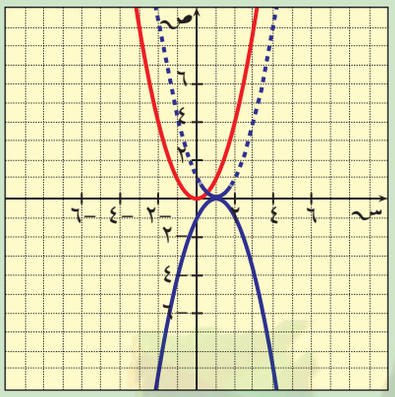
(ب) مثل بيانيًّا ص = (س – ٤)^{٢}، مستخدمًا التمثيل البياني للدالة التربيعية ص = س^{٢}.

٥ مثّل بيانيًّا الدالة ص = – (س – ١)^{٢} مستخدمًا التمثيل البياني للدالة التربيعية ص = س^{٢}.

الحل:

يمكن رسم التمثيل البياني للدالة ص = –(س – ١)^{٢} بواسطة تطبيق الإزاحة الأفقية وحدة واحدة (١ وحدة) إلى اليمين على التمثيل البياني للدالة التربيعية ص = س^{٢} ومن ثم الانعكاس في محور السينات.

الخطوات

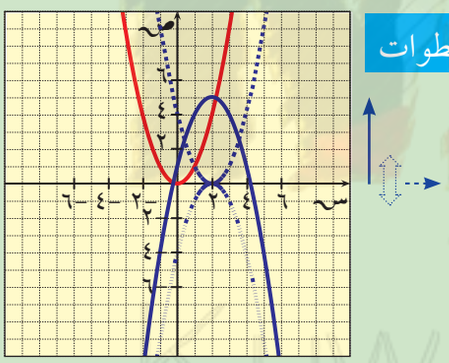


٦ مثّل بيانيًّا الدالة ص = –(س – ٢)^{٢} + ٥ مستخدمًا التمثيل البياني للدالة التربيعية ص = س^{٢}.

الحل:

يمكن رسم التمثيل البياني للدالة ص = –(س – ٢)^{٢} + ٥ عن طريق تطبيق الإزاحة الأفقية وحدتين (٢وحدة) إلى اليمين على التمثيل البياني للدالة التربيعية ص = س^{٢}، ومن ثم الانعكاس في محور السينات، والإزاحة الرأسية ٥ وحدات إلى الأعلى.

الخطوات



الدالة التربيعية	التحويلات المطبقة على التمثيل البياني للدالة التربيعية ص = س^{٢}
ص = –س^{٢}	الانعكاس في محور السينات.
ص = س^{٢} + د	الإزاحة د وحدة إلى الأعلى إذا كانت د موجبة و	د	وحدة إلى الأسفل إذا كانت د سالبة.
ص = (س + هـ)^{٢}	الإزاحة أفقيًّا هـ وحدة إلى اليسار إذا كانت هـ موجبة و	هـ	وحدة إلى اليمين إذا كانت هـ سالبة.
ص = –(س + هـ)^{٢}	الإزاحة أفقيًّا هـ وحدة إلى اليسار إذا كانت هـ موجبة و	هـ	وحدة إلى اليمين إذا كانت هـ سالبة ومن ثم الانعكاس في محور السينات.
ص = (س + هـ)^{٢} + د	الإزاحة أفقيًّا هـ وحدة إلى اليسار إذا كانت هـ موجبة و	هـ	وحدة إلى اليمين إذا كانت هـ سالبة ومن ثم الإزاحة د وحدة إلى الأعلى إذا كانت د موجبة و	د	وحدة إلى الأسفل إذا كانت د سالبة .

KuwaitMath.com

عند حلّ مسائل من الحياة اليومية، تكون بعض القيم غير منطقية بالنسبة إلى المسألة. يمكن ألا يشبه جزء من الرسم البياني الذي يحل المسألة قطعًا مكافئًا كاملًا.

◄ الربط بالعلوم

يتسارع الجسم الساقط بفعل قوة جاذبية الأرض. يسقط الجسم بسرعة أكبر إذا كانت الأرض أكبر حجمًا مما هي عليه، وبسرعة أقل كما لو كانت الأرض أصغر حجمًا مما هي عليه.

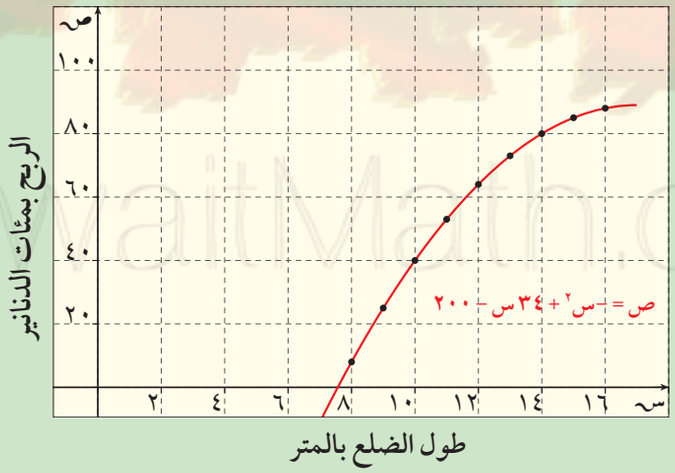
مثال (٧)

تبيع إحدى الشركات أشرعة مربعة الشكل للمراكب الشراعية.
تنمذج المعادلة ص = $-س^{٢} + ٣٤س - ٢٠٠$ ربح الشركة
حيث س طول ضلع الشراع بالمتر وص الربح بمئات الدنانير من مبيع الشراع الواحد.
اعمل جدولًا، وضع تمثيلًا بيانيًّا مستخدمًا س = ٨ إلى س = ١٦.
هل يمكنك استخدام قيم سالبة لـ س أو ص؟
ولماذا لم يكن الرسم البياني قطعًا مكافئًا كاملًا؟

الحل:

يمكنك استخدام قيم سالبة للمتغيرين س، ص، لكن سيكون من غير المنطقي بالنسبة إلى المسألة أن تستخدم قيمًا سالبة لطول ضلع الشراع. ولكن يمكن استخدام قيم سالبة لـ ص حيث الربح سالب (أي أن الشركة لا تحقق أرباحًا بل خسارة). وبما أن القيم السالبة لم تستخدم، فالرسم البياني ليس قطعًا مكافئًا.

طول الضلع	سعر المبيع
٨	٨
٩	٢٥
١٠	٤٠
١١	٥٣
١٢	٦٤
١٣	٧٣
١٤	٨٠
١٥	٨٥
١٦	٨٨



حاول أن تحل

٢ تبيع شركة ثانية أشرعة مربعة الشكل للمراكب الشراعية وتنمذج أرباحها بالمعادلة ص = $- س^{٢} + ٢٨$ س $- ١٠٠$ (حيث س بالمتر وص بمئات الدنانير).

اعمل جدولًا، وضع تمثيلًا بيانيًّا مستخدمًا س = ٥ إلى س = ١٤.

KuwaitMath.com

تحقق من فهمك

١ ما أوجه الاختلاف بين الدالة التربيعية والدالة الخطية؟

٢ كيف يؤثر ضرب س^{٢} في −١ على الرسم البياني لدالة تربيعية؟

٣ قارن بين الرسمين البيانيين للدالتين ص = س^{٢} − ٢ ، ص = س − ٢. ما أوجه الشبه والاختلاف بينهما؟

٤ متى يمكنك إسقاط قيم س السالبة؟ ولماذا؟

KuwaitMath.com

حل المسائل والتفكير المنطقي

١ **التواصل**: رمى حمد حجرًا في الوادي، فسمع صوت ارتطامه بالأرض بعد مرور ٥ ثوانٍ. تمثّل الدالة: ع = −٥ن^{٢} هذا الحدث. يمثّل ن الزمن بالثواني، ع الارتفاع بالأمتار. مثّل هذه الدالة بيانيًّا، وأوجد عمق الوادي ذاكرًا سبب حصولك على قيمة سالبة.

.....

.....

٢ **التفكير الناقد**: أجب عن الأسئلة المتعلقة بكلّ دالة.

(١) ص = ٤ س^{٢} (٢) ص = −٤س^{٢}

(٣) ص = س^{٢} + ٢ (٤) ص = −٢س^{٢}

(أ) أي من الرسوم البيانية للدوال السابقة يتجه إلى أعلى؟ وضّح إجابتك.

.....

(ب) أي من الرسوم البيانية يمر بالنقطة (٠، ٠)؟ وضّح إجابتك.

.....

(جـ) أي من الرسوم البيانية متماثل حول محور الصادات؟

.....

٣ **المجلة**: كيف يمكنك استخدام قاعدة الاقتران لمعرفة أن رسمها البياني هو قطع مكافئ؟

.....

.....

٤ أطلق جسم في الهواء. تمثّل الدالة ع = −٥ن^{٢} + ٢٥ن عملية الإطلاق، حيث يمثّل ع = الارتفاع بالمتر، ن = الزمن بالثواني.

(أ) متى يصبح الجسم على ارتفاع ٢٠ مترًا في الهواء؟ وضّح إجابتك.

.....

.....

(ب) ما الذي يحدث بعد $٢\frac{١}{٢}$ ثانية؟

.....

.....

KuwaitMath.com

اختبار الوحدة السادسة

١ إذا كانت س = {أ:أ ∈ ك، أ عدد فردي، أ ⩽ ٧}، ل = {ب:ب ∈ ص، ب^{٢} = ٤} (حيث ك مجموعة الأعداد الكلية، ص مجموعة الأعداد الصحيحة).

(أ) ما عدد عناصر س، ل، س × ل، ل × س، س × س، ل × ل؟

(ب) اكتب كلًّا من المجموعات المذكورة في فقرة (أ) بذكر العناصر.

(جـ) مثّل كلًّا من س × ل، ل × س بمخطط بياني.

(د) مثّل ل × ل بمخطط سهمي.

٢ اكتب كلًّا من العلاقات التالية على مجموعة س = {أ، أ ∈ ص ، −٥ ⩽ أ ⩽ ٥} (حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة) بذكر العناصر.

(أ) ع$_{١}$ = {(أ، ب): أ ∈ س، ب ∈ س، أ^{٢} + ب^{٢} ⩽ ٥}

(ب) ع$_{٢}$ = {(أ، ب): أ ∈ س، ب ∈ س، |أ| + |ب| = ٢}

(جـ) ع$_{٣}$ = {(أ، ب): أ ∈ س، ب ∈ س ، ب = ٣أ}

٣ إذا كان د: س ⟵ ص تطبيقًا حيث س = {١، ٢، ٣، ٤، ٥}، ص = {١، ٣، ٥، ٧، ٩، ١١}، د(س) = ٢س + ١.

(أ) أوجد د(١)، د(٢)، د(٣)، د(٤)، د(٥).

(ب) اكتب مدى التطبيق د.

(جـ) مثّل التطبيق د بمخطط سهمي.

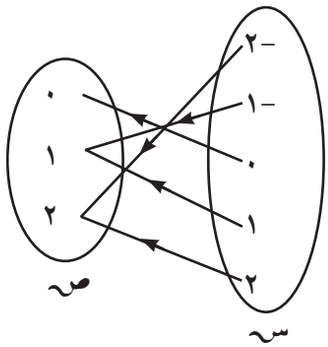
(د) بيّن نوع التطبيق د (شامل، متباين، تقابل).

KuwaitMath.com

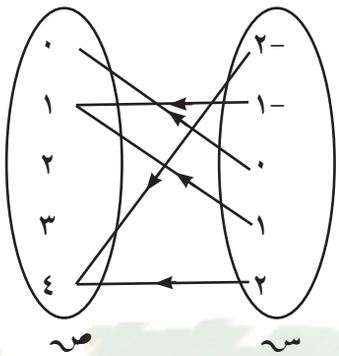
اختبار الوحدة السادسة

٤ اكتب قاعدة الاقتران التي تمثّلها كلّ من المخططات السهمية التالية:

(أ)



(ب)



(جـ)

٥ في ما يلي قواعد بعض الدوال. أكمل كلًّا من الجداول.

(أ) ص = $\frac{١}{٢}$س + ٢ (ب) ص = س^{٢} − ٤ (جـ) ص = (س + ١)^{٢} − ٢

س	ص
−٦	
	٠
٠	
١	
	٣
٣	

س	ص
−٢	
−١	
٠	
١	
٢	
٣	

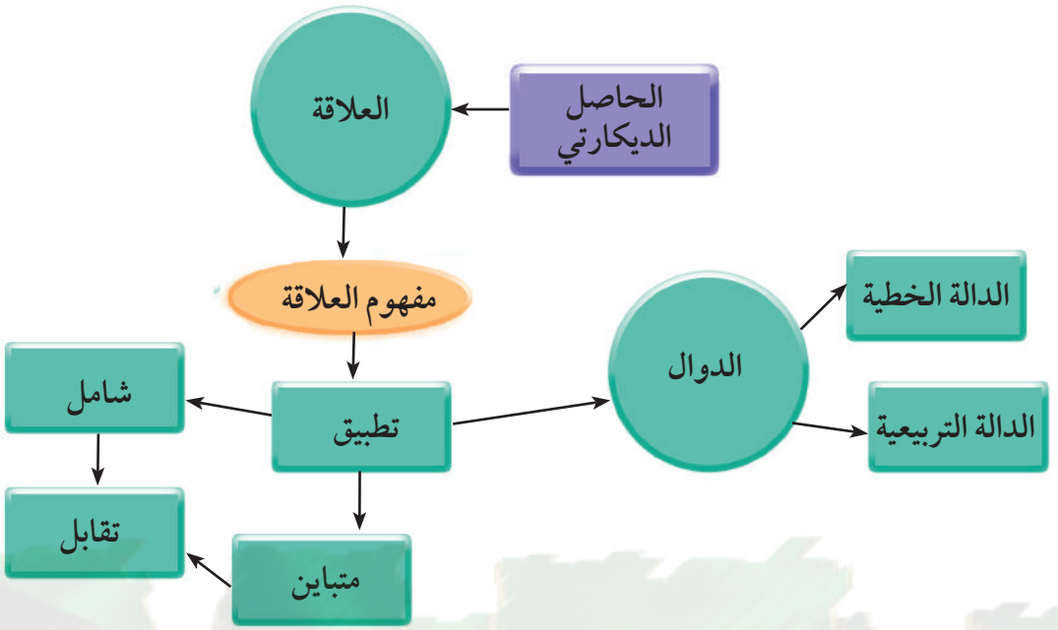
س	ص
−٣	
−١	
	−١
١	
٢	
٤	

٦ كوّن جدولًا ومثّل بيانيًّا كلًّا من الدوال التالية في الفترة [−٣، ٣]:

(أ) ص = ٢س − ١ (ب) ص = −س^{٢} + ١ (جـ) ص = ٣

Kuwaitmath.com

مخطط تنظيمي للوحدة السادسة



ملخص الوحدة السادسة (أ): العلاقة

- إن المجموعة التي تتكوّن من جميع الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول عنصر في المجموعة س ومسقطها الثاني عنصر في المجموعة ص تسمى حاصل الضرب الديكارتي وتكتب س × ص.
- العلاقة (ع) هي مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتي س × ص أي أن ع ⊆ س × ص .
- العلاقة (ع) هي تطبيق عندما يظهر كل عنصر من عناصر س مرة واحدة في المسقط الأول في كل من الأزواج المرتبة المحددة لبيان العلاقة.
- لكل تطبيق أو دالة مجاله ومجاله المقابل والمدى.
- عندما يتساوى المدى والمجال المقابل يسمى التطبيق شاملًا.
- التطبيق الذي لا يرتبط أي عنصرين مختلفين من المجال بالعنصر نفسه في المجال المقابل يسمى تطبيقًا متباينًا.
- كل تطبيق شامل ومتباين يسمى تقابلًا.

ملخص الوحدة السادسة (ب): الدوال

- الدالة هي علاقة تعطي قيمة المتغير التابع لكل قيمة متغير مستقل، ولا يمكن لأي قيمتي متغير تابع مختلفتين أن يكون لهما القيمة للمتغير المستقل نفسها.
- لتمثيل الدالة بيانيًّا يستخدم محور السينات للمتغير المستقل، ومحور الصادات للمتغير التابع.
- تكون الدالة دالة خطية إذا كان رسمها البياني خطًّا مستقيمًا، والدالة التربيعية هي دالة غير خطية حيث قيمة س فيها مضروبة في نفسها (مربعة)، ورسمها البياني قطع مكافئ بالشكل ∪ أو الشكل المقلوب ∩.

KuwaitMath.com