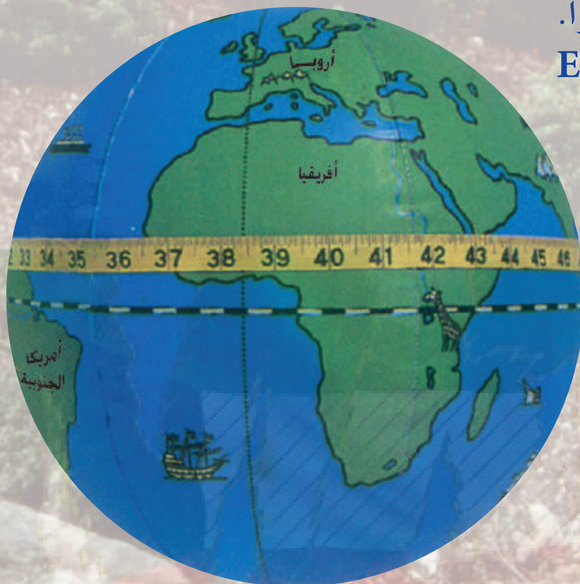
الوَحدةُ الخامسةُ

القياسُ وعناصرُ الهندسةِ والمساحاتُ والحجومُ

Geometry,Measurement,Areas and volumes

العلومُ



يبلغُ محيطُ الأرضِ ٣٩ ٧٣٠ كيلومترًا. قامَ إراتوسثينز Eratosthenes (٢٧٦ - ١٩٥ ق.م) باستخدامِ وَحدةِ قياسٍ تُسمّى ستاديا بتقديرِ محيطِ الأرضِ فوجدَ أنّه يُساوي ٣٩٧٠٠ كيلومترٍ وقد استندَ في تقديرِه هذا إلى المسافةِ بينَ مدينتين مصريّتين.

الدراساتُ الاجتماعيّةُ

الموقعُ الفلكيُّ هو موقعُ الدولةِ أو المدينةِ بالنسبةِ إلى خطوطِ الطولِ ودوائرِ العرضِ. تُحدِّدُ خطوطُ الطولِ موقعَ الدولةِ على الخريطةِ وتوقيتَها الزمنيَّ مقارنةً بخطِّ غرينتش (خطِّ الصفرِ) وتُحدِّدُ دوائرُ العرضِ مناخَ هذه الدولةِ. فمثلًا تقعُ دولةُ الكويتِ بينَ خطّي طولِ (٤٦-٤٨) شرقًا وبينَ دائرتي عرضِ (٢٨-٣٠) شمالًا. لذا يزيدُ التوقيتُ في دولةِ الكويتِ عن توقيتِ غرينتش ٣ ساعاتٍ.

شعوبُ العالمِ

قامَ عالمُ الرياضيّاتِ الهنديُّ سرينفازا رامانوجان (١٨٨٧ - ١٩٢٠) Srinivasa ramanujan بتطويرِ صيغةٍ لحسابِ قيمةِ π إلى أقربِ منزلةٍ عشريّةٍ. وبعدَ سبعةٍ وستّين عامًا على وفاتِه، تمكّنَ الحاسوبُ من حسابِ قيمةِ π مقرَّبةٍ إلى أكثرَ من ١٠٠ مليونِ منزلةٍ عشريّةٍ وباعتمادِ صيغةٍ تُشبِهُ إلى حدٍّ بعيدٍ تلك التي طوّرَها سرينفازا.

الهندسةُ

عندَ قسمةِ محيطِ قاعدةِ هرمِ خوفو الأكبرِ على ضعفِ ارتفاعِه، نحصلُ على القيمةِ التاليةِ ٣,١٤ وهي قريبةٌ نسبيًّا من قيمةِ π.

أفكارٌ رياضيّةٌ أساسيّةٌ

يُمكنُك قياسُ كمّيّاتٍ مختلفةٍ، كالطولِ، والمساحةِ، والحجمِ، والسعةِ، والوزنِ، والوقتِ إلى أقربِ وَحدةٍ تستخدمُها.

النظامُ المتريُّ هو نظامٌ قياسيٌّ يُستخدَمُ في معظمِ دولِ العالمِ ومنها دولةُ الكويتُ.

تُستخدَمُ خطوطُ الطولِ والعرضِ لتحديدِ موقعِ بلدانٍ ومدنٍ على الكرةِ الأرضيّةِ.

تُستخدَمُ مساحةُ السطحِ والحجمِ لقياسِ الأشكالِ ثلاثيّةِ الأبعادِ.

تُعتبَرُ المناشيرُ والأسطواناتُ والأهراماتُ والمخاريطُ أشكالًا ثلاثيّةَ الأبعادِ.

مشروعُ الوَحدةِ

حلُّ المسائلِ
افهمْ
خطِّطْ
حلَّ
تحقّقْ

ستُصمِّمُ في هذا المشروعِ طردًا مميَّزًا حولَ موضوعٍ معيَّنٍ تختارُه بنفسِك. وستقومُ بتنفيذِه وستقيسُ أبعادَ الطردِ وحجمَه ومساحةَ سطحِه وتُسجِّلُها. وستُعِدُّ ملخَّصًا عن كيفيّةِ اختيارِك هذا الطردَ.

التركيزُ على حلِّ المسائلِ

لقد حُلّتِ المسألةُ التاليةُ باستخدامِ ثلاثِ طرائقَ مختلفةٍ.

اشترى ثلاثةُ أصدقاءَ تفاحًا طازجًا من سوقِ الخضارِ. اشترى حسنٌ ضعفَ ما اشتراه خالدٌ من التفّاحِ. وتزيدُ كمّيّةُ التفّاحِ التي اشتراها خالدٌ ٣ تفّاحاتٍ عن تلك التي اشتراها أحمدُ. إذا كانَ مجموعُ ما اشتراه الأصدقاءُ الثلاثةُ ١٧ تفّاحةً، فكم عددُ التفّاحاتِ التي اشتراها كلٌّ منهم؟

أنت تعلمُ:
- عددُ التفاحاتِ كلِّها ١٧.
- اشترى حسنٌ ضعفَ ما اشتراه خالدٌ من التفّاحِ.
- لا يستطيعُ خالدٌ أن يشتريَ أكثرَ من ثماني تفّاحاتٍ.
- لدى أحمدَ ثلاثُ تفّاحاتٍ أقلَّ من تلك التي مع خالدٍ.
- اعتبِرْ أ حسنٌ، ب خالدٌ، جـ أحمدُ

خمِّنْ وتحقّقْ	ارسمْ مخطّطًا	الاستدلالُ
خمِّنْ: لدى خالدٍ ٦ تفّاحاتٍ. ب = ٦ أ = ٦ × ٢ = ١٢ جـ = ٦ − ٣ = ٣ **تحقّقْ:** ٦ + ١٢ + ٣ = ٢١ العددُ كبيرٌ جدًّا. **خمِّنْ:** لدى خالدٍ ٥ تفّاحاتٍ. ب = ٥ أ = ٥ × ٢ = ١٠ جـ = ٥ − ٣ = ٢ **تحقّقْ:** ٥ + ٢ + ١٠ = ١٧ التخمينُ صحيحٌ.	ليكنْ □ = عددَ تفّاحاتِ أحمدَ جـ = □ ب = □ + ٣ أ = (□ + ٣) + (□ + ٣) لدينا ٤ □ و٣ ثلاثاتٍ أي ٤ □ و٩ ١٧ − ٩ = ٨ ٤ □ تُعادِلُ ٨ تفّاحاتٍ ٨ ÷ ٤ = ٢ كلُّ □ = ٢.	■ لا يُمكِنُ أن يكونَ مع أيٍّ منهم أكثرُ من ١٧. ■ يجبُ أن يكونَ مع حسنٍ أكبرُ عددٍ من التفّاحِ المشترى. ■ يجبُ أن يشتريَ أحمدُ أصغرَ عددٍ من التفّاحِ المشترى. ■ تعتمدُ الكمّيّاتُ الأخرى على الكمّيّةِ التي مع خالدٍ. لذلك نوجِدُ ما اشتراه خالدٌ أوّلًا. ب = ٥ أ = ٥ × ٢ = ١٠ جـ = ٥ − ٣ = ٢

حُلَّ المسألةَ التاليةَ. يُمكِنُك استخدامُ إحدى الطرائقِ الثلاثِ السابقةِ أو طريقةٍ أخرى من عندِك.

١ يتمرّنُ ٤ أصدقاءَ في نادٍ رياضيٍّ. يتمرّنُ سلطانُ على الدرّاجةِ خلالَ فترةٍ تُساوي ٣ مرّاتٍ تلك التي يتمرّنُ فهدٌ خلالَها. ويتمرّنُ حمدٌ خلالَ نصفِ المدّةِ التي يتمرّنُ خلالَها إبراهيمُ. ويتمرّنُ إبراهيمُ خلالَ مدّةٍ تزيدُ بـ ١٥ دقيقةً عن تلك التي يتمرّنُ خلالَها سلطانُ. إذا تمرّنَ الأصدقاءُ جميعُهم لمدّةِ ٥ ,٢ ساعةٍ، فما المدّةُ التي يتمرّنُ خلالَها كلٌّ منهم على الدرّاجةِ؟

حلُّ المسائلِ
افهمْ
خطِّطْ
حُلَّ
تحقّقْ

حلُّ المسائلِ:

في معظمِ الأحيانِ يُمكِنُ استخدامُ أكثرَ من طريقةٍ لحلِّ مسألةٍ. يجبُ أن تستخدمَ الإستراتيجيّةَ الأكثرَ ملاءمةً لك. قد يُساعِدُك اعتمادُ إستراتيجيّاتٍ مختلفةٍ على تحديدِ أيٍّ منها تُلائِمُ طريقةَ حلِّك المسألةِ.

الوَحدةُ
الخامسةُ (أ)

عناصرُ الهندسةِ
Tools of Geometry

في الحياةِ الواقعيّةِ، إذا نظرْتَ حولَك تجدُ عناصرَ كثيرةً ترتبطُ بالهندسةِ. تقومُ بزيارةٍ إلى محلِّ النجّارِ فتُشاهِدُ بينَ يديه أدواتٍ هندسيّةً. تدخلُ إلى محلِّ حدادةٍ أو ألومنيوم فترى الأدواتِ الهندسيّةَ مبعثرةً هنا وهناكَ يستخدمونها في إبداعاتِهم. تنظرُ في أرجاءِ هذه المحلّاتِ فترى خرائطَ وشبكاتٍ لمجسَّماتٍ سوف يصنعونها. تتأمّلُ الشبابيكَ والأبوابَ حيث تتناسقُ فيها بدقّةٍ القضبانُ المتوازيةُ والمتعامدةُ. تتطلّعُ في الخارجِ إلى الأبنيةِ فتجدُ صفوفَ الحجارةِ تفصلُها الخطوطُ المتوازيةُ والمتعامدةُ.

1. يستخدمُ أصحابُ الحرفِ كثيرًا من الأدواتِ الهندسيّةِ. اذكرْ بعضَها.
2. ما المقاييسُ الهندسيّةُ الأساسيّةُ التي يستخدمُها البنّاؤون؟
3. اذكرْ مشاهداتٍ واقعيّةً تُمثِّلُ خطوطًا متوازيةً وخطوطًا متعامدةً.

٥ـ ١

المستقيماتُ المتوازيةُ والمستقيماتُ المتعامدةُ

Parallel and Perpendicular Lines

سوف تتعلّمُ

- كيفيّةَ تعرُّفِ الخطوطِ المتوازيةِ والخطوطِ المتعامدةِ ورسمِها.

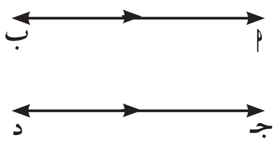
من الاستخدامات

- يبتكرُ صانعو النسيجِ تصاميمَ متوازيةً ومتعامدةً على أنوالِهم.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- متوازٍ Parallel
- متعامدٌ Perpendicular
- منصِّفٌ متعامدٌ (محورُ قطعةٍ مستقيمةٍ) Perpendicular Bisector
- قاطعٌ Transversal
- زاويةٌ داخليّةٌ Interior Angle
- زاويةٌ خارجيّةٌ exterior angle
- زوايا متبادلةٌ Alternate angle
- زوايا متناظرةٌ Corresponding Angle
- زوايا متقابلةٌ بالرأسِ Vertical Angles

◀ صلةُ الدرسِ لقد سبقَ أن تعلّمتَ أنواعًا مختلفةً من الزوايا. والآن ستُطبِّقُ هذه المعلوماتِ لتحديدِ أنواعٍ إضافيّةٍ من الزوايا ◀

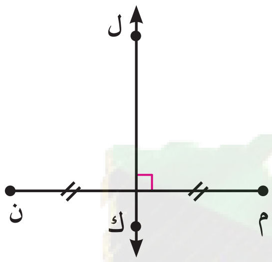


تُسمّى الخطوطُ المستقيمةُ في مستوٍ التي لا تتقاطعُ أبدًا، خطوطًا **متوازيةً**.

$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـ د}$ متوازيان ونكتبُ $\overleftrightarrow{أب} // \overleftrightarrow{جـ د}$.

تُسمّى المستقيماتُ التي تُكوِّنُ زاويةً قائمةً مستقيماتٍ **متعامدةً**.

$\overleftrightarrow{ك ل}$ متعامدٌ مع $\overline{م ن}$ ونكتبُ $\overleftrightarrow{ك ل} \perp \overline{م ن}$.



المنصِّفُ العموديُّ (محورُ القطعةِ المستقيمةِ) هو مستقيمٌ متعامدٌ مع قطعةٍ مستقيمةٍ وهو يقسمُ هذه الأخيرةَ إلى جزءينِ متطابقينِ. فمثلًا $\overleftrightarrow{ل ك}$ هو منصِّفُ $\overline{م ن}$ العموديُّ.

استكشفْ القواطعَ

القواطعُ **الأدواتُ المستخدَمةُ:** برنامجُ حاسوبٍ هندسيٌّ

١ ارسمْ مستقيمينِ متوازيينِ، ثمّ ارسمْ مستقيمًا ثالثًا يقطعُ المستقيمينِ المتوازيينِ بحيث يكونُ مائلًا. سَمِّ الزوايا الثمانيَ المبيَّنةَ في الرسمِ.

٢ قِسِ الزوايا المبيَّنةَ في الرسمِ إلى أن تجدَ زاويتينِ متطابقتينِ. اذكرِ الزاويتينِ المتطابقتينِ باستخدامِ الرمزِ ≅ .

٣ تابعْ قياسَ الزوايا كلِّها المبيَّنةِ في الرسمِ. كم قياسًا مختلفًا وجدْتَ؟

٤ اذكرْ أكبرَ عددٍ ممكنٍ من أزواجِ الزوايا المتطابقةِ.

٥ اذكرْ أكبرَ عددٍ ممكنٍ من أزواجِ الزوايا المتكاملةِ.

٦ هل يوجَدُ زوايا متتامّةٌ؟

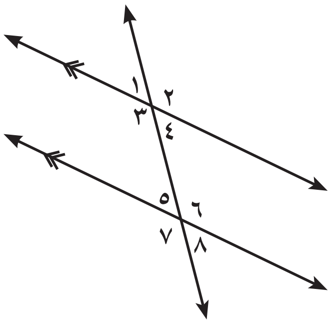
٧ دوِّرِ المستقيمَ الثالثَ بحيث يُشكِّلُ زوايا قائمةً مع المستقيمينِ المتوازيينِ. ما عددُ الزوايا القائمةِ كلِّها؟

٨ ارسمْ قطعةً مستقيمةً بحيث يكونُ أحدُ المستقيمينِ الآخرينِ في الرسمِ منصِّفًا عموديًّا.

٩ تناقَشْ مع زملائِك حولَ ما لاحظتَه عن الزوايا المبيَّنةِ في الرسمِ.

تعلَّمْ　المستقيماتُ المتوازيةُ والمستقيماتُ المتعامدةُ

القاطعُ هو مستقيمٌ يتقاطعُ مع مستقيمين (أو أكثرَ). وعندما يقطعُ قاطعٌ مستقيمين منفصِلين تتشكّلُ زوايا.



تُسمّى الزوايا الأربعُ الواقعةُ بينَ المستقيمين **زوايا داخليّةً**.
تُشكِّلُ الزوايا ٣̂ ، ٤̂ ، ٥̂ ، ٦̂ زوايا داخليّةً.

تُسمّى الزوايا الأربعُ الواقعةُ خارجَ المستقيمين **زوايا خارجيّةً**.
تُشكِّلُ الزوايا ١̂ ، ٢̂ ، ٧̂ ، ٨̂ زوايا خارجيّةً.

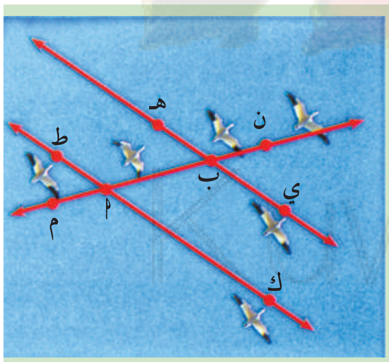
الزوايا المتبادلةُ هي الزوايا الواقعةُ على جهتين مختلفتين من القاطعِ، وتكونان إمّا داخليّتين وإمّا خارجيّتين.
تكونُ الزاويتان المتبادلتان متطابقتين إذا تقاطعَ القاطعُ مع مستقيمين متوازيين.
تُشكِّلُ الزوايا ١̂ ، ٨̂ ثمّ ٢̂ ، ٧̂ زوايا متبادلةً خارجيّةً.
تُشكِّلُ الزوايا ٣̂ ، ٦̂ ثمّ ٤̂ ، ٥̂ زوايا متبادلةً داخليّةً.

الزوايا المتناظرةُ تقعُ في الجهةِ نفسِها من القاطع احداهما خارجية والأخرى داخلية وتكونُ متطابقةً إذا تقاطعَ القاطعُ مع مستقيمين متوازيين.
تُشكِّلُ الزوايا ١̂ ، ٥̂ ثمّ ٢̂ ، ٦̂ ثمّ ٣̂ ، ٧̂ ثمّ ٤̂ ، ٨̂ زوايا متناظرةً.

فكرةٌ مفيدةٌ لحلِّ المسائلِ

الزوايا المتكاملةُ مجموعُ قياسها ١٨٠°.
الزوايا المتتامّةُ مجموعُ قياسها ٩٠°.

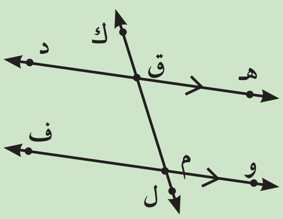
مثالٌ (١)



في الشكلِ المبيَّنِ إلى اليسارِ: $\overleftrightarrow{\text{طك}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـي}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{نم}}$ قاطعٌ لهما. حدِّدْ أزواجَ الزوايا المتبادلةِ الداخليّةِ والخارجيّةِ.

الزاويتان ط أ̂ م مع ن ب̂ ي هما زاويتان خارجيّتان متبادلتان.
الزاويتان ك أ̂ م مع ن ب̂ هـ هما زاويتان خارجيّتان متبادلتان.
الزاويتان ط أ̂ ن مع ي ب̂ م هما زاويتان داخليّتان متبادلتان.
الزاويتان ك أ̂ ن مع هـ ب̂ م هما زاويتان داخليّتان متبادلتان.

حاوِلْ أن تحلَّ

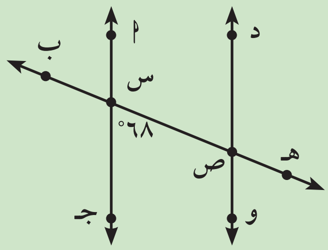


١ في الشكلِ المبيَّنِ إلى اليسارِ: $\overleftrightarrow{\text{دهـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{فو}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{كل}}$ قاطعٌ لهما حدِّدْ أزواجَ الزوايا المتبادلةِ الداخليّةِ والخارجيّةِ كلِّها.

مثالٌ (٢)

في الشكلِ المبيَّنِ إلى اليسارِ: أجـ ↔ // د و ↔، هـ ب ↔ قاطع لهما

أوجِدْ ق(د صَ̂ هـ)



أ سَ̂ هـ مع جـ سَ̂ هـ زاويتان متكاملتان.

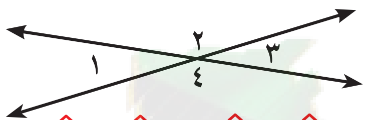
ق(أ سَ̂ هـ) = ١٨٠° - ق(جـ سَ̂ هـ)

= ١٨٠° - ٦٨° = ١١٢°

أ سَ̂ هـ مع د صَ̂ هـ زاويتان متناظرتان.

بالتالي أ سَ̂ هـ ≅ د صَ̂ هـ. (بالتوازي والتناظرِ)

ق(د صَ̂ هـ) = ١١٢°



ق(١̂) = ق(٣̂)، ق(٢̂) = ق(٤̂)

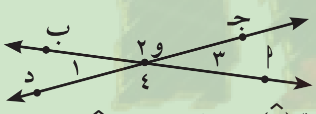
عندما يتقاطعُ مستقيمان، يُشكّلان زوجين من **الزوايا المتقابلةِ بالرأسِ** وتكونُ الزاويتان المتقابلتان بالرأسِ متطابقتين.

الزاويتان ١̂، ٣̂ متقابلتان بالرأسِ، الزاويتان ٢̂، ٤̂ متقابلتان بالرأسِ أيضًا.

مثالٌ (٣)

يتقاطع المستقيمان أب ↔، جـ د ↔ في و.

استخدِمِ الشكلَ المعطى لتجدَ ق(٣̂)، (٢̂).



ق(١̂) = ٢٢°، ق(٤̂) = ١٥٨°

ق(٣̂) = ق(١̂)، بالتقابلِ بالرأسِ

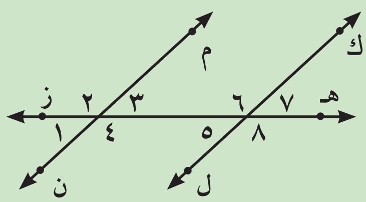
إذًا ق(٣̂) = ٢٢°

الزاويتان (١̂)، (٢̂) متكاملتان.

بالتالي ق(٢̂) = ١٨٠° - ٢٢°

= ١٥٨

حاوِلْ أن تحلَّ



٢ في الشكلِ المبيَّنِ إلى اليسارِ ك ل ↔ // م ن ↔.

هـ ز ↔ قاطعٌ لهما.

أوجِدْ قياسَ الزوايا التاليةِ إذا كانَ ق(٢̂) = ١٤٦°.

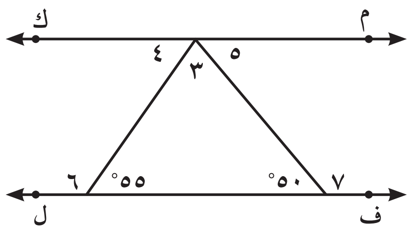
(أ) ق(٤̂) (ب) ق(٦̂) (جـ) ق(٥̂) (د) ق(٨̂)

تحقَّقْ من فهمِك

١ صِفْ موقفًا تكونُ فيه الزوايا الداخليّةُ المتبادلةُ الناتجةُ من قاطعٍ غيرَ متطابقةٍ.

٢ ماذا يوحي لك تعبيرُ «متوازٍ» حولَ البعدِ بينَ المستقيماتِ المتوازيةِ؟

٣ لنفترِضْ أنّ قاطعًا متعامدًا مع مستقيمين متوازيين. ما قياساتُ الزوايا الداخليّةِ والخارجيّةِ كلِّها؟ وضِّحْ إجابتَك.



ك م // ل ف، أوجِدْ قياسَ كلٍّ من الزوايا المرقَّمةِ في الشكلِ.

....

افهمْ

١ ما نوعُ المضلّعِ الموضَّحِ في الشكلِ؟ ....

٢ يتقاطعُ ضلعان من المضلّعِ مع المستقيمين المتوازيين، عند مدِّ كلٍّ من هذين الضلعين ينتج مستقيمان يسميان: ....

(أ) قاطعان (ب) محوران

خطِّطْ

٣ ما مجموعُ قياسِ زوايا المثلّثِ؟ ....

٤ ما العلاقةُ بينَ قياسِ كلِّ زاويتين داخليّتين متبادلتين؟ ....

٥ اذكرْ زاويةً داخليّةً متبادلةً مع الزاويةِ التي قياسُها ٥٥°، وزاويةً أخرى مع الزاويةِ التي قياسُها ٥٠°. ....

٦ ما العلاقةُ بينَ قياسِ الزاويتين المتكاملتين؟ ....

٧ اكتبْ زاويةً مكمِّلةً للزاويةِ التي قياسُها ٥٥°، وزاويةً مكمِّلةً للزاويةِ التي قياسُها ٥٠°. ....

حُلَّ

٨ اكتبْ كلًّ من:

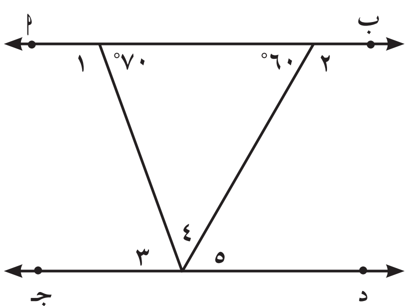
(أ) ق (٣^) .... (ب) ق (٤^) .... (جـ) ق (٥^) ....

(د) ق (٦^) .... (هـ) ق (٧^) ....

تحقَّقْ

٩ ما الطريقةُ الأخرى لإيجادِ قياسِ ٣^؟ ....

حُلَّ مسألةً أخرى



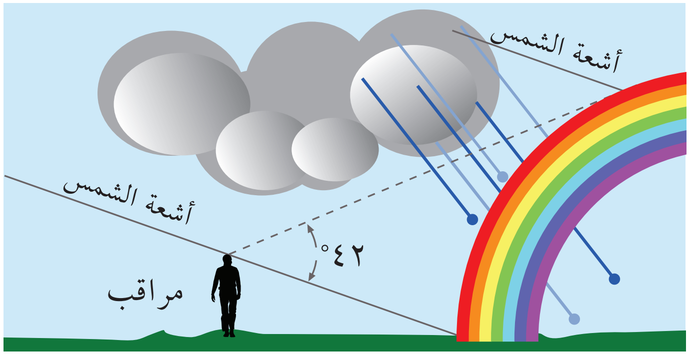
١٠ أ ب // جـ د، أوجِدْ قياسَ كلٍّ من الزوايا المرقَّمةِ في الشكلِ المقابلِ.

....

....

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ **المجلّةُ**: عندما ترى قوسَ القزحِ، تكونُ الشمسُ وراءَك، والمطرُ أمامَك. تُشكِّلُ النقاطُ علَى الجزءِ الأحمرِ من قوسِ القزحِ مع أشعّةِ الشمسِ زاويةً قياسُها ٤٢°.
استخدِمْ كلماتٍ مثلَ «متوازيةٌ، قاطعٌ، زوايا داخليّةٌ متبادلةٌ» كي تصفَ الشكلَ.



....

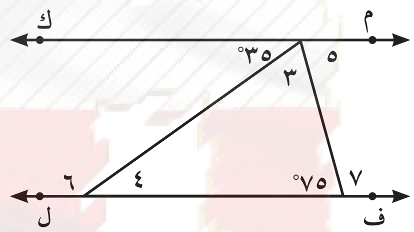
٢ **التواصلُ**: إذا كانَ مستقيمان متعامدين على المستقيمِ نفسِه، فما العلاقةُ بينَ هذين المستقيمين؟ وضِّحْ إجابتَك. ....

....

....

٣ **الهندسةُ**: $\overleftrightarrow{كم} \parallel \overleftrightarrow{لف}$، أوجِدْ مجموعَ قياساتِ زوايا المثلّثِ. ما علاقةُ ناتجِ الجمعِ هذا بالزاويةِ المستقيمةِ؟ ....

....



إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

٥ـ٢

الواجهاتُ ثلاثيّةُ الأبعادِ

3–D Views

◀ صلةُ الدرسِ لقد سبقَ أن تعلّمْتَ عن الأشكالِ ثنائيّةِ الأبعادِ. والآن ستتعلّمُ كيف تُصوِّرُ الأشكالَ ثلاثيّةَ الأبعادِ. ▶

سوف تتعلّمُ

- تمثيلَ الأشكالِ ثلاثيّةِ الأبعادِ في رسمٍ.

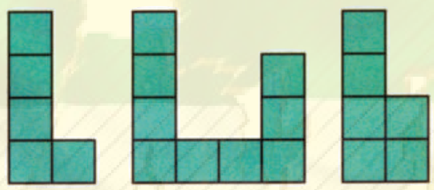
من الاستخداماتِ

- يستخدمُ النحّاتون مخطَّطاتٍ أوّليّةً لوضعِ تصاميمَ لمنحوتاتِهم ثلاثيّةِ الأبعادِ.

استكشِفْ الواجهاتُ ثلاثيّةُ الأبعادِ

السنتيمترُ المكعّبُ **الأدواتُ المستخدَمةُ:** ١١ مكعّبًا

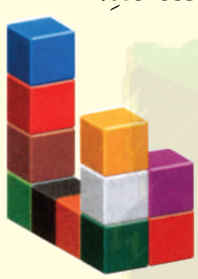
تخيَّلْ أنّك فنّانٌ يصنعُ مجسّماتٍ من المكعّباتِ. قبلَ صنعِ المجسّماتِ تصنعُ مخطّطاتٍ أوّليّةً لها. ترجِمْ فكرتَك من خلالِ وضعِ مخطَّطِه وذلك بتشكيلِ (١) ٣ واجهاتٍ: أماميّةٍ، جانبيّةٍ يمنى، علويّةٍ أو (٢) مخطّطٍ أحاديٍّ للقاعدةِ.



واجهةٌ أماميّةٌ

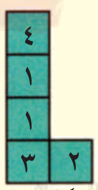
الواجهةُ الجانبيّةُ اليسرى

واجهةٌ علويّةٌ



مجسّمٌ

تُبيِّنُ الرسوماتُ الطريقتينِ الممكنتينِ لوضعِ تصميمٍ لمجسّمٍ وكيفيّةِ صنعِه.



مخطَّطٌ أحاديُّ القاعدةِ

مجسّمٌ

١ ارسمْ مخطَّطَ قاعدةِ مجسّماتٍ مختلفةٍ يجبُ أن تكونَ المربّعاتُ مرقّمةً بأعدادٍ مجموعُها يُساوي ١١.

٢ باستخدامِ مخطَّطِ القاعدةِ، ارسمْ ٣ واجهاتٍ لمجسَّمِك.

٣ اصنعْ مجسَّمَك استنادًا إلى المخطَّطِ الذي وضعْتَه.

٤ اصنعْ مجسَّمَ أحدِ أعضاءِ مجموعتِك استنادًا إلى المخطَّطِ الذي وضعْتَه.

٥ هل صنعَ زميلُك مجسَّمَك بشكلٍ صحيحٍ؟ هل صنعْتَ أنت مجسَّمَه بشكلٍ صحيحٍ؟

٦ إذا أردْتَ صنعَ مجسّمٍ ارتفاعُه ٦ أمتارٍ، فلِمَ ستُترجِمُ فكرتَك من خلالِ وضعِ تصميمٍ أوّليٍّ للمجسّمِ بدلًا من صنعِه مباشرةً؟

٧ ناقِشْ بعضَ الطرائقِ الأخرى لوضعِ تصميمٍ لأشياءَ ثلاثيّةِ الأبعادِ من خلالِ استخدامِ المخطَّطاتِ.

الواجهاتُ لمجسماتٍ ثلاثيّةِ الأبعادِ

عندما تُريدُ أن تتصوّرَ مجسَّمًا ثلاثيَّ الأبعادِ، كوِّنْ مخطَّطًا لمساعدتِك. وبالنسبةِ إلى الأشكالِ المؤلَّفةِ من مكعّباتٍ، يُمكِنُك رسمُ مخطَّطِ القاعدةِ لتوضيحِ ارتفاعِ المجموعاتِ المختلفةِ من المكعّباتِ. ويُمكِنُك تمثيلُ مجسَّمٍ ثلاثيِّ الأبعادِ برسمِ كلٍّ من الواجهاتِ الجانبيّةِ اليمنى، والأماميّةِ، والعلويّةِ.

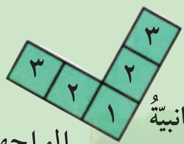
مثالٌ (١)

ارسمْ مخطَّطَ قاعدةِ المجسَّمِ.

لدينا عمودان ارتفاعُ كلٍّ منهما ٣ مكعّباتٍ

لدينا عمودان ارتفاعُ كلٍّ منهما مكعّبان

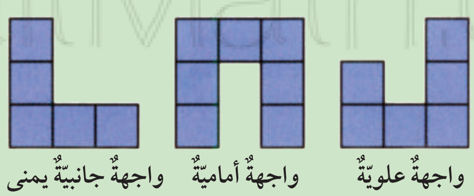
لدينا عمودٌ واحدٌ ارتفاعُه مكعّبٌ واحدٌ



يُبيِّنُ مخطَّطُ مجسَّمٍ ثلاثيِّ الأبعادِ من الواجهاتِ الجانبيّةِ اليمنى، والأماميّةِ، والعلويّةِ كيف يبدو المجسَّمُ من واجهاتٍ مختلفةٍ.

مثالٌ (٢)

ارسمْ كلًّا من الواجهةِ الجانبيّةِ اليمنى، والواجهةِ الأماميّةِ، والواجهةِ العلويّةِ للمجسَّمِ ثلاثيِّ الأبعادِ.



في الواجهةِ الأماميّةِ ٢ مجموعةٍ من ٣ مكعّباتٍ

في الواجهةِ الجانبيّةِ اليمنى مجموعةٌ واحدةٌ من ٣ مكعّباتٍ

لدينا ٤ مجموعاتٍ في كلٍّ منها مكعّبٌ واحدٌ

حاوِلْ أن تحلَّ

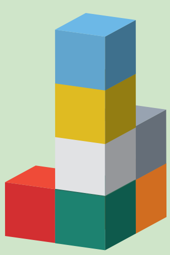
١ استخدِمِ المجسَّمَ المبيَّنَ إلى اليسارِ لتقومَ بما يلي:

(أ) ارسمْ مخطَّطَ قاعدةِ المجسَّمِ.

(ب) ارسمِ المجسَّمَ كما يبدو من الواجهةِ الجانبيّةِ اليمنى.

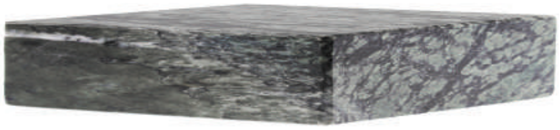
(جـ) ارسمِ المجسَّمَ كما تراه من الواجهةِ الأماميّةِ.

(د) ارسمِ المخطَّطَ كما تراه من الواجهةِ العلويّةِ.



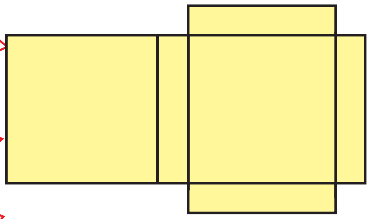
ما رأيك ؟

ارسمْ شبكةً لحجرِ الرخامِ المبيَّنِ إلى اليسارِ.



عمرُ يُفكِّرُ...

سأفتحُ تصميمَ الحجرِ مثلَ علبةِ الفطائرِ.



كريمٌ يُفكِّرُ...

سأتركُ الجوانبَ الصغيرةَ كلَّها متّصلةً.

فكرةٌ مفيدةٌ لحلِّ المسائلِ

المخطَّطُ الذي يُوضِّحُ صورةَ شكلٍ ثلاثيِّ الأبعادِ كما لو كانَ غيرَ مطويٍّ يُسمَّى شبكةً.

ما رأيُك؟

١ هل يُمكِنُك صنعُ شبكةٍ لأيِّ علبةٍ أوجهُها مستطيلةُ الشكلِ؟ وضِّحْ ذلك.

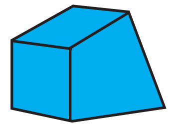
٢ هل للعلبةِ ذاتِ الأوجهِ المستطيلةِ الشكلِ شبكةٌ وحيدةٌ؟ وضِّحْ ذلك.

تحقَّقْ من فهمِك

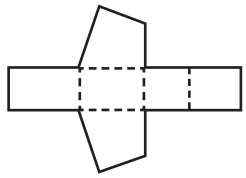
١ إذا كانَ لديك مخطَّطاتُ الواجهتين الأماميّةِ والعلويّةِ فقط، فهل يُمكِنُك صناعةُ المجسَّمِ المطلوبِ؟

٢ إذا كانَ لديك مخطَّطُ قاعدةٍ غيرُ مرقَّمٍ، فهل يُمكِنُك صنعُ المجسَّمِ المطلوبِ؟

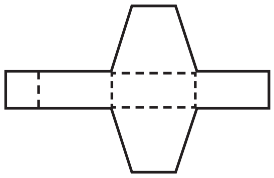
أيُّ شبكةٍ تُمثِّلُ المجسَّمَ ثلاثيَّ الأبعادِ المبيَّنَ أدناه؟



(أ)



(ب)



افهمْ

١ ما عددُ أوجهِ المجسَّمِ ثلاثيِّ الأبعادِ التي تستطيعُ رؤيتَها؟ ....

٢ ما المضلّعاتُ التي تُشكِّلُها تلك الأوجهُ في المجسَّمِ؟ ....

٣ ما عددُ الأوجهِ التي تستطيعُ رؤيتَها في كلِّ شبكةٍ؟ ....

٤ ما المضلّعاتُ التي تُشكِّلُها تلك الأوجهُ في الشبكةِ؟ ....

خطِّطْ

٥ ما أوجهُ الشبهِ بينَ الشبكتين الموضَّحتين؟ ....

٦ ما أوجهُ الاختلافِ بينَ الشبكتين الموضَّحتين؟ ....

حُلَّ

٧ اخترْ أحدَ أوجهِ الاختلافِ بينَ الشبكتين، وقارِنْ بينَه وبينَ خصائصِ المجسَّمِ. أيُّ الشبكتين تُمثِّلُ المجسَّمَ؟ ....

....

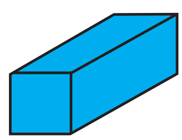
تحقَّقْ

٨ أيُّ الاختلافاتِ بينَ الشبكتين هو الأسهلُ في الاستخدامِ والمقارنةِ بالمجسَّمِ؟ وضِّحْ إجابتَك. ....

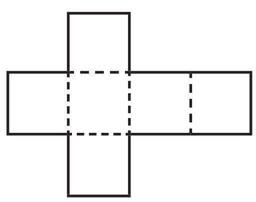
....

حُلَّ مسألةً أخرى

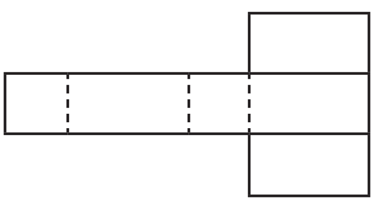
٩ أيُّ الشبكتين تُمثِّلُ المجسَّمَ الموضَّحَ أدناه؟ ....



(أ)



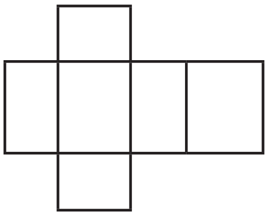
(ب)

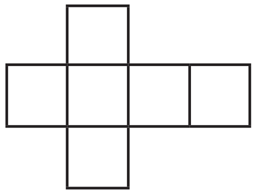


حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

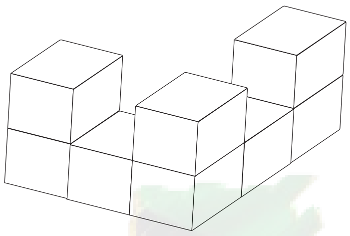
١ **الأنماطُ**: كوِّنْ مجسَّمًا بلصقِ أجزاءِ الشبكةِ الموضَّحةِ أدناه. ما المجسَّمُ الذي حصلْتَ عليه؟

....





٢ ارسمْ مخطَّطَ قاعدةِ المجسَّمِ المقابلِ.



....

....

....

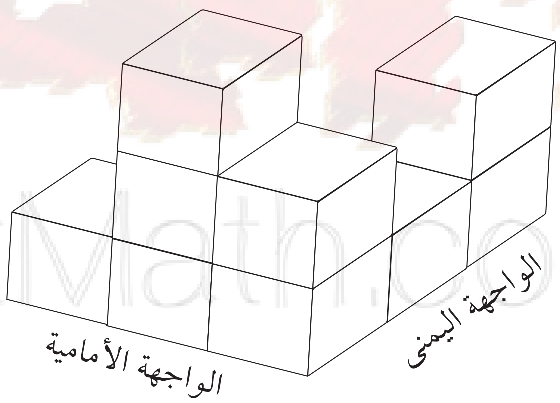
٣ ارسمِ الواجهةَ الجانبيّةَ اليمنى لهذا المجسَّمِ.

....

....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.



الوَحدةُ الخامسةُ (ب)

مساحةُ سطحِ المجسَّمِ وحجمُ المجسَّمِ
Surface area and Volume of Solids

تاريخ خدمة توصيل الطلبات

في عام ١٩٠٧ انتعشَتِ الأعمالُ التجاريّةُ في أميركا، وكانَ القليلُ من الناسِ من لديه تلفونٌ أو سيّارةٌ، فكيف كانَتِ الرسائلُ والطرودُ تُسلَّمُ للمرسلِ إليه؟

لمعَتْ فكرةٌ في ذهنِ مغامرٍ شابٍّ يُدعى جيم كاسي **jim casey** عمرُه ١٩ عامًا من ولايةِ سياتل **seattle**، فاقترضَ مبلغَ مئةِ دولارٍ، وكوّنَ شركةَ أميريكان مسنجر **American messenger Company**، واجتذَبَ عددًا من الشبابِ (دونَ العشرين عامًا) للعملِ فيها.

حقّقَتْ شركةُ جيم نجاحًا كبيرًا بسببِ القيمِ التقليديّةِ التي أخذَ بها: إرضاءِ الزبائنِ، والدقّةِ في العملِ، وعدمِ التأخيرِ في التسليمِ، والرسومِ المنخفضةِ مقابلَ الخدمةِ، وأخذَ جيم بفكرةٍ مبتكرةٍ لتعزيزِ ثقةِ الزبائنِ، فكانَتْ طرودُ العناوينِ المتجاورةِ توضَعُ في مركبةِ تسليمٍ واحدةٍ، ممّا وفّرَ الوقتَ والمالَ.

وخلالَ ثلاثينيّاتِ القرنِ العشرين تغيّرَ اسمُ شركةِ جيم إلى يونيتد بارسل سرفيس **United Parcel Service (UPS)**، وتقومُ هذه الشركةُ حاليًّا بتسليمِ أكثرَ من ١٢ مليونَ وثيقةٍ وطردٍ، حولَ العالمِ.

١ ما الرياضيّاتُ التي يُمكِنُ أن تستخدمَها شركةُ تسليمِ طرودٍ لجعلِ التسليمِ يتمُّ بدقّةٍ ودونَ أيِّ تأخيرٍ؟

٢ لِمَ تضعُ شركاتُ التسليمِ حدودًا قصوى لأبعادِ وأوزانِ الطرودِ؟

٥–٣

المساحةُ السطحيّةُ للمنشورِ والأسطوانةِ

Surface Area of Prism and Cylinder

سوف تتعلّمُ

- إيجادَ المساحةِ السطحيّةِ للمنشورِ والأسطوانةِ.

من الاستخداماتِ

- يستخدمُ مصمِّمو الديكوراتِ الداخليّةِ المساحةَ السطحيّةَ لتحديدِ كمّيّةِ الموادِّ اللازمةِ لتغطيةِ الأشياءِ المجسَّمةِ.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

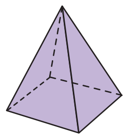
- مجسَّمٌ متعدِّدُ الأوجهِ Polyhedron
- وجهٌ Face
- حرفٌ Edge
- رأسٌ Vertex
- مساحةٌ سطحيّةٌ Surface Area
- منشورٌ Prism
- قاعدةٌ Base
- أسطوانةٌ Cylinder

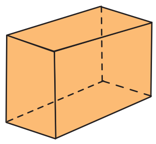
صلةُ الدرسِ لقد سبقَ أن تعلّمْتَ كيف توجدُ مساحةَ الأشكالِ المستويةِ كالمضلّعاتِ والدوائرِ، والآن ستتعلّمُ عن المساحةِ السطحيّةِ للأشكالِ ثلاثيّةِ الأبعادِ. ◄

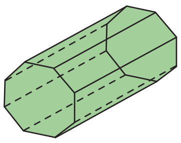
المجسَّمُ متعدِّدُ الأوجهِ هو مجسَّمٌ ثلاثيُّ الأبعادِ يتألّفُ من مضلّعاتٍ. يُسمّى كلُّ سطحٍ في المضلّعِ وجهًا.

حرفُ متعدِّدُ الأوجهِ هو الحافّةُ التي يلتقي عندها وجهان في المجسَّمِ.

رأسُ متعدِّدُ الأوجهِ هو النقطةُ التي تتقاطعُ عندَها ٣ أوجهٍ أو أكثرَ من المجسَّمِ.


٥ أوجهٍ:
٤ مثلّثاتٍ
١ مربّعٌ


٦ أوجهٍ:
٦ مستطيلاتٍ


١٠ أوجهٍ:
٢ ثمانيّان
٨ مستطيلاتٍ

المساحةُ السطحيّةُ لمتعدِّدِ الأوجهِ هي مجموعُ مساحاتِ الأوجهِ كلِّها.

استكشفْ المناشيرُ

مساحاتٌ مختلفةٌ

الأدواتُ المستخدَمةُ: أوراقٌ مستطيلةُ الشكلِ أبعادُها ٢٤ سم، ٢٨ سم، شريطٌ لاصقٌ، مقصٌّ

١ أوجِدْ مساحةَ إحدى الأوراقِ.

٢ اصنعْ مجسَّماتٍ (ثلاثيّةَ الأبعادِ) باستخدامِ ورقةٍ لكلٍّ منها.

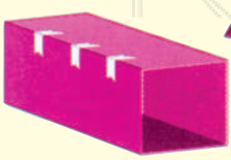
الشكلُ (أ): لُفَّ الورقةَ بحيث تتمكّنُ من لصقِ الأحرفِ المتقابلةِ.

الشكلُ (ب): اطوِ الورقةَ إلى ٣ أثلاثٍ متطابقةٍ وألصِقِ الأحرفَ.

الشكلُ (ج): اطوِ الورقةَ إلى ٤ أرباعٍ متطابقةٍ وألصِقِ الأحرفَ.


شكلُ (أ)


شكلُ (ب)


شكلُ (ج)

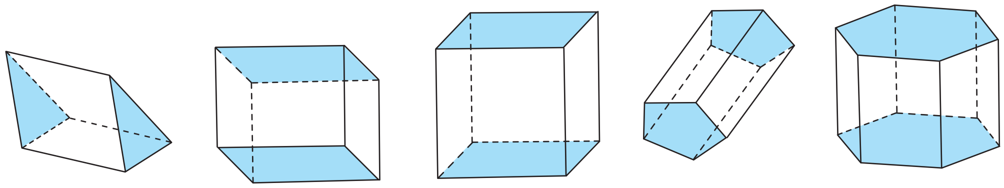
٣ هل المساحةُ السطحيّةُ لكلٍّ من هذه المجسَّماتِ أكبرُ من مساحةِ الورقةِ الأصليّةِ أو أصغرُ منها أو مساويةٌ لها؟ وضِّحْ إجابتَك.

٤ ما الأشكالُ الإضافيّةُ اللازمةُ لإكمالِ أسطحِ كلِّ مجسَّمٍ؟ ارسمْ هذه الأشكالَ، وأوجِدْ مساحاتِها، ثمّ ألصِقْ كلًّا من الأشكالِ على المجسَّمِ الملائمِ لها.

٥ رتِّبِ المجسَّماتِ الثلاثةَ من الأصغرِ إلى الأكبرِ حسبَ مساحاتِها السطحيّةِ الكلّيّةِ. وضِّحْ طريقةَ تفكيرِك.

تعلَّمْ — المساحةُ السطحيّةُ للمنشورِ والأسطوانةِ

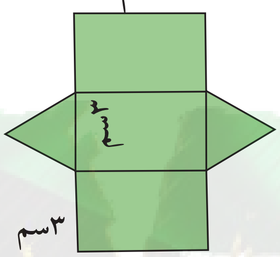
المنشورُ: هو مجسَّمٌ متعدِّدُ الأوجهِ له وجهان متطابقان وهما عبارةٌ عن مضلّعين متوازيين، ويُسمّى كلُّ وجهٍ متطابقٍ ومتوازٍ من هذين الوجهين **قاعدةً**.

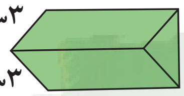


فكرةٌ مفيدةٌ لحلِّ المسائلِ

المنشورُ القائمُ هو منشورٌ حروفُه الجانبيّةُ متعامدةٌ مع قاعدتيه.

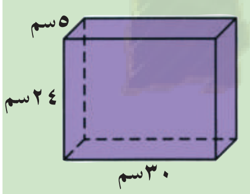
تُساعِدُ شبكةُ المجسَّمِ على إيجادِ المساحةِ السطحيّةِ لأنّها تُبيِّنُ الأوجهَ كلَّها على شكلِ مضلّعاتٍ مستويةٍ.

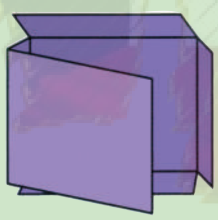




أمثلةٌ

١ أوجِدِ المساحةَ السطحيّةَ للمنشورِ القائمِ.





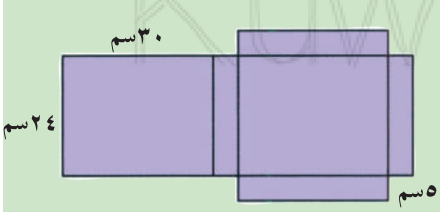
ارسم أولًا شبكة المنشور القائم، ثم اوجد مساحة كل وجه.

في المجسَّمِ ٣ أوجهٍ مستطيلةٍ مختلِفةٍ.

وجهان أبعادُهما ٣٠سم، ٢٤سم.

مساحةُ الوجهِ الواحدِ = ل × ع = ٣٠ × ٢٤

= ٧٢٠ سم^{٢}



وجهان أبعادُهما ٣٠سم، ٥سم.

مساحةُ الوجهِ الواحدِ = ل × ع = ٣٠ × ٥

= ١٥٠سم^{٢}

وجهان أبعادُهما ٢٤سم، ٥سم.

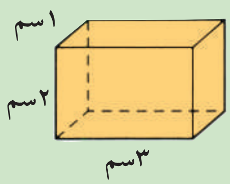
مساحةُ الوجهِ الواحدِ = ل × ع = ٢٤ × ٥ = ١٢٠سم^{٢}

المساحةُ السطحيّةُ للمنشورِ القائمِ = ٢(٧٢٠ + ١٥٠ + ١٢٠)

= ١ ٩٨٠ سم^{٢}.

حاوِلْ أن تحلَّ

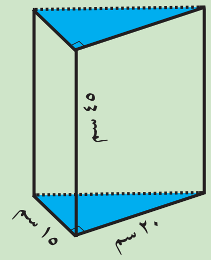
١ أوجِدِ المساحةَ السطحيّةَ للمنشورِ القائمِ الذي أبعادُه:
١سم، ٢سم، ٣سم.



الترابطُ والتداخلُ بالمهن

لدى الشركاتِ المعنيّةِ بتنظيمِ المسارحِ الكبرى طاقمٌ من العمّالِ المتخصّصين في تجهيزِ الديكورِ، وهم يعملون في مجالِ النجارةِ، والكهرباءِ، وغيرِها من الحرفِ الأخرى لتصميمِ التجهيزاتِ اللازمةِ للأداءِ المسرحيِّ.

٢ أوجِدِ المساحةَ السطحيّةَ لمنشورٍ قاعدتُه مثلّثٌ قائمُ الزاويةِ، حيث أطوالُ أضلاعِ القائمةِ ٢٠ سم، ١٥ سم، وارتفاعُ هذا المنشورِ ٤٥ سم.

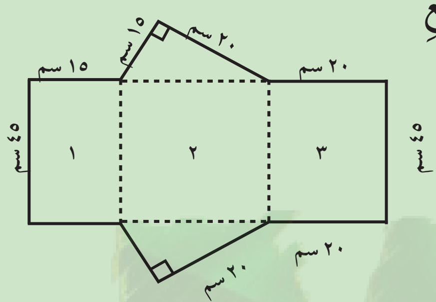


الحلُّ: نبدأُ أوّلًا برسمِ شبكةِ هذا المنشورِ ثمّ مساحةِ كلِّ وجهٍ.

– مساحةُ المثلّثين: $\frac{٢٠ \times ١٥}{٢} \times ٢ = ٣٠٠$ سم^{٢}.

– مساحةُ الوجهِ ١: $١٥ \times ٤٥ = ٦٧٥$ سم^{٢}

– مساحةُ الوجهِ ٣: $٢٠ \times ٤٥ = ٩٠٠$ سم^{٢}



لإيجادِ مساحةِ الوجهِ ٢ نحتاجُ إلى طولِ الضلعِ الناقصِ

فنستخدمُ نظريّةَ فيثاغورث:

$٢٠^{٢} + ١٥^{٢} = ٤٠٠ + ٢٢٥ = ٦٢٥$

وبالتالي الضلعُ الناقصُ يُساوي ٢٥ سم.

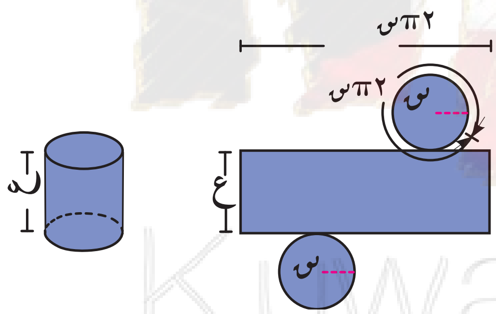
– مساحةُ الوجهِ ٢: $٢٥ \times ٤٥ = ١\ ١٢٥$ سم^{٢}

المساحةُ السطحيّةُ = $٣٠٠ + ٦٧٥ + ٩٠٠ + ١\ ١٢٥ = ٣\ ٠٠٠$

المساحةُ السطحيّةُ لهذا المنشورِ ٣ ٠٠٠ سم^{٢}

الأسطوانةُ هي مجسّمٌ ثلاثيُّ الأبعادِ له قاعدتان دائريّتان متطابقتان ومتوازيتان.

لاحِظْ أنّ طولَ المستطيلِ هو محيطُ الدائرةِ وعرض المستطيلِ هو ارتفاعُ الأسطوانةِ.

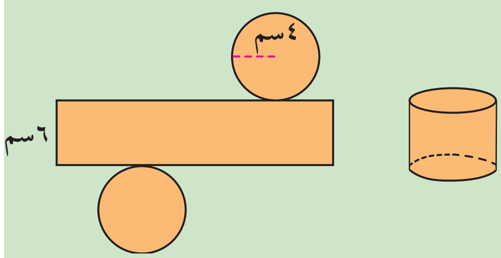


حاوِلْ أن تحلَّ

٢ (أ) أوجِدْ مساحةَ كلِّ دائرةٍ في الأسطوانةِ المبيَّنةِ إلى اليسارِ.

(ب) أوجِدِ المساحةَ الجانبيّةَ للأسطوانةِ.

(جـ) أوجِدِ المساحةَ السطحيّةَ للأسطوانةِ.



تحقَّقْ من فهمِك

١ كم بعدًا طوليًّا يلزمُ لإيجادِ المساحةِ السطحيّةِ للمنشورِ؟ وللأسطوانةِ؟ ارسمْ مخطَّطًا تُوضِّحُ فيه ذلك.

٢ كم عددُ الأوجهِ: في أيِّ منشورٍ خماسيِّ القاعدةِ؟ وفي أيِّ منشورٍ سداسيِّ القاعدةِ؟

المرشدُ لحلِّ المسائلِ (٥-٣)

تصنعُ شركةُ حبوبٍ غذائيّةٍ علبةً متوسِّطةَ الحجمِ بمضاعَفةِ أبعادِ علبةٍ صغيرةِ الحجمِ أبعادُها ١٢ سم، ٨ سم، ٢ سم. ما مساحةُ الورقِ المقوّى الإضافيِّ اللازمِ لصنعِ علبةٍ متوسِّطةِ الحجمِ؟

افهمْ

١ ما أبعادُ العلبةِ صغيرةِ الحجمِ؟ ....

٢ بكم تزيدُ أبعادُ العلبةِ متوسِّطةِ الحجمِ عن أبعادِ العلبةِ صغيرةِ الحجمِ؟ ....

....

خطِّطْ

٣ ما أبعادُ العلبةِ متوسِّطةِ الحجمِ؟ ....

٤ كيف توجِدُ مساحةَ العلبةِ السطحيّةَ؟ ....

٥ ارسمْ شبكةَ كلٍّ من العلبتين، وسَمِّ الأبعادَ. ....

حُلَّ

٦ ما مساحةُ الورقِ المقوّى اللازمِ لصنعِ علبةٍ صغيرةِ الحجمِ؟

....

٧ ما مساحةُ الورقِ المقوّى اللازمِ لصنعِ علبةٍ متوسِّطةِ الحجمِ؟

....

٨ كم سنتيمترًا مربّعًا إضافيًّا من الورقِ المقوّى يلزمُ لصنعِ العلبةِ متوسِّطةِ الحجمِ؟

....

تحقَّقْ

٩ كيف تُقارِنُ العلاقةَ بينَ أبعادِ العلبتين ومساحتِهما السطحيّةِ. ما العلاقةُ بينَهما بعدَ تغييرِ الأبعادِ بمقدارِ الضعفِ؟

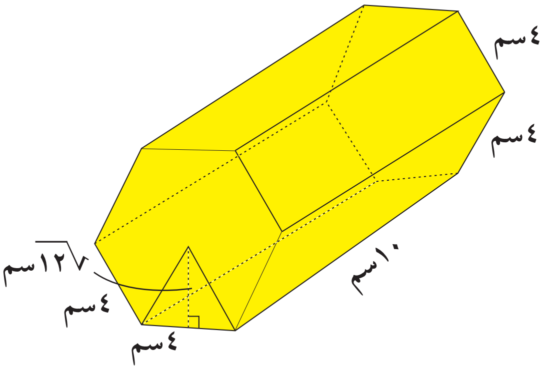
....

حُلَّ مسألةً أخرى

١٠ تصنعُ الشركةُ علبةً متوسِّطةَ الحجمِ للبسكويتِ المملَّحِ بحيث يكونُ كلُّ بعدٍ من أبعادِها ٣ أمثالِ أبعادِ علبةٍ صغيرةِ الحجمِ وهي ٤ دسم، ٣ دسم، ١ دسم. ما مساحةُ الورقِ المقوّى الإضافيِّ اللازمِ لصنعِ علبةِ البسكويتِ؟

....

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ



١ **الهندسةُ**: أوجِدِ المساحةَ السطحيّةَ للمنشورِ سداسيِّ القاعدةِ المبيَّنِ إلى اليسارِ. ....

....

....

٢ **الحسُّ العدديُّ**: أوجِدِ المساحةَ السطحيّةَ لأسطوانةٍ ارتفاعُها ٣ أمتارٍ وطولُ نصفِ قطرِها ١ م، وأوجِدِ المساحةَ السطحيّةَ لأسطوانةٍ ارتفاعُها ١ م وطولُ نصفِ قطرِها ٣م. كيف تُؤثِّرُ الصيغةُ π س^2 على هاتين النتيجتين؟

....

....

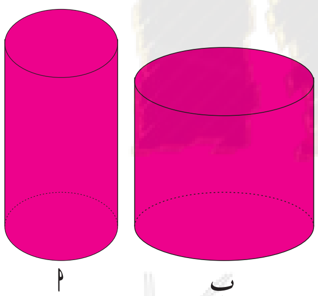
....

٣ **التفكيرُ الرياضيُّ**: اذكرِ الصيغةَ المختصَرةَ المستخدَمةَ لإيجادِ المساحةِ السطحيّةِ لكلٍّ من:

(أ) المكعّبُ ....

(ب) شبهُ المكعّبِ ....

٤ طولُ قطرِ الأسطوانةِ أ يُساوي نصفَ طولِ قطرِ الأسطوانةِ ب. علمًا بأنّ ارتفاعَ الأسطوانةِ أ ضعفُ ارتفاعِ الأسطوانةِ ب.



(أ) **التواصلُ**: خمِّنْ أيّهما سيكونُ له المساحةُ الكلّيّةُ الأكبرُ: الأسطوانةُ أ أم الأسطوانةُ ب؟ وضِّح إجابتَك. ....

....

....

(ب) **التفكيرُ الناقدُ**: في رأيِك، أيُّهما سعتُه أكبرُ: الأسطوانةُ أ أم الأسطوانةُ ب؟ ولماذا؟

....

....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

٥-٤

حجمُ المنشورِ والأسطوانةِ
Volume of Prism and Cylinder

سوف تتعلّمُ

- إيجادَ حجم المنشورِ والأسطوانةِ.

من الاستخدامات

- تكونُ الطرودُ المرسَلةُ أحيانًا على شكلِ منشورٍ أو أسطوانةٍ، ويُحدِّدُ حجمُ الطردِ مقدارَ الحيِّزِ اللازمِ لشحنِه.

صلةُ الدرسِ لقد سبقَ أن تعلّمْتَ كيف توجِدُ حجمَ المنشورِ القائمِ، والآن ستتعلّمُ كيف توجِدُ حجمَ المنشورِ بوجهٍ عامٍّ والأسطوانةِ.

استكشفْ حجمُ المنشورِ وحجمُ الأسطوانةِ

المساحةُ السطحيّةُ نفسُها

الأدواتُ المستخدَمةُ: أوراقٌ مستطيلةُ الشكلِ أبعادها ٢٤ سم، ٢٨ سم، شريطٌ لاصقٌ، مقصٌ.

١ اصنعْ مجسّمين (ثلاثيّي الأبعاد) باستخدامِ ورقةٍ لكلٍّ منهما.
الشكلُ (أ): لُفَّ الورقةَ بحيث تتمكّنُ من لصقِ الحرفين المتقابلين.
الشكلُ (ب): اطوِ الورقةَ إلى أثلاثٍ متطابقةٍ وألصقِ الحرفين المتقابلين.

٢ الشكلُ (أ): أسطوانةٌ قاعدتُها دائرةٌ، محيطُها ٢٢ سم.
(أ) استخدمِ القانونَ: المحيطُ = ٢ × π × $س$ لإيجادِ طولِ نصفِ قاعدةِ الأسطوانةِ.
(ب) استخدمِ القانونَ: المساحةُ = π × $س^{٢}$ لإيجادِ مساحةِ القاعدةِ.

٣ الشكلُ (ب): منشورٌ قائمٌ قاعدتُه مثلّثٌ متطابقُ الأضلاعِ طولُ محيطِه ٢٢ سم.
(أ) استخدمِ القانونَ: المساحةُ = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ل^{٢} ، لإيجادِ مساحةِ مثلثٍ متطابقِ الأضلاعِ طولُ ضلعِه ل.
(ب) قارِنْ بين مساحتي قاعدتي المجسّمين.

٤ للمجسّمين الارتفاعُ نفسُه (٢٨ سم). إذا أردْنا ملءَ المجسّمين بالرملِ فأيٌّ منهما يتّسعُ لكميةٍ أكبرَ؟

هل تعلمُ؟

رسمُ ملصَقٍ إعلانيٍّ مساحتُه حوالى ٢٠ ٠٠٠ م^{٢} في مدينةِ سينداي في اليابانِ عامَ ١٩٩١، وقد دخلَ مجموعةَ غينيس للأرقامِ القياسيّةِ العالميّةِ.

تعلَّمْ حجمُ المنشورِ والأسطوانةِ

يُمكِنُ إيجادُ حجمِ المنشورِ القائمِ باستخدامِ القانونِ التالي:

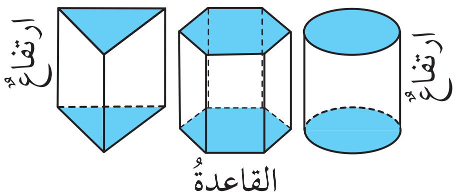
حجمُ المنشورِ القائمِ = مساحةَ القاعدةِ (م) × الارتفاعِ (ع)

ح = م × ع

مساحةُ قاعدةِ المنشورِ ثلاثيِّ القاعدةِ = $\frac{١}{٢}$ × (ق × ع) ويُمكِنُك استخدامُ هذه الصيغةِ لإيجادِ مساحةِ مثلّثٍ.

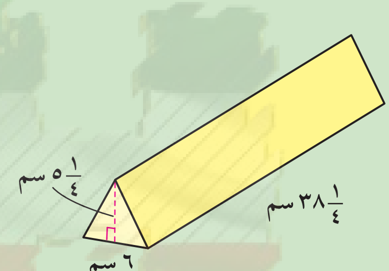
م = مساحةُ قاعدةِ المنشورِ؛ ق = طولَ ضلعِ القاعدةِ المثلّثيّةِ.

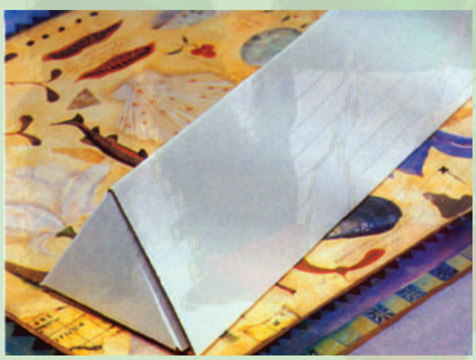
كذلك يُؤخَذُ ارتفاعان بعينِ الاعتبارِ: ارتفاعُ المثلّثِ وارتفاعُ المنشورِ.

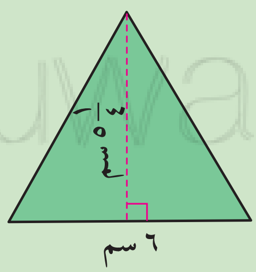


مثالٌ (١)

يُمكِنُ إرسالُ الملصَقاتِ الإعلانيّةِ بالبريدِ في علبٍ على شكلِ منشورٍ ثلاثيِّ القاعدةِ. أوجِدْ حجمَ العلبةِ المبيَّنةِ أدناه.







أوجِدْ أوّلًا مساحةَ القاعدةِ المثلّثيّةِ (ق).

م = $\frac{١}{٢}$ × (ل × ع)

م = $\frac{١}{٢}$ × (٦ × ٥$\frac{١}{٤}$) = ١٥$\frac{٣}{٤}$ سم^٢

استخدِمْ ق لإيجادِ الحجمِ.

ح = م × ع

ح = ١٥$\frac{٣}{٤}$ × ٣٨$\frac{١}{٤}$

ح = ١٥,٧٥ × ٣٨,٢٥

ح = ٦٠٢,٤٣٧٥ سم^٣

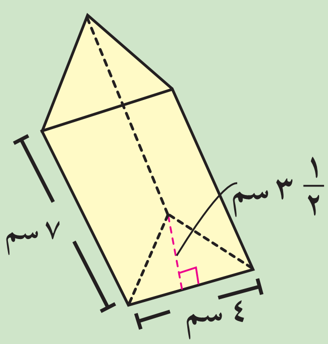
الحجمُ هو ٦٠٢,٤٣٧٥ سم^٣.

حاوِلْ أن تحلَّ

١ (أ) ما ارتفاعُ القاعدةِ المثلّثيّةِ؟

(ب) ما مساحةُ القاعدةِ المثلّثيّةِ؟

(جـ) ما حجمُ المنشورِ؟

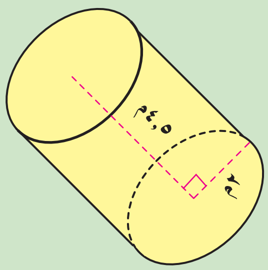


مساحةُ قاعدةِ أيِّ أسطوانةٍ م = π س^{٢}، حيث س = طولَ نصفِ القطرِ.

بالتالي **حجمُ الأسطوانةِ ح = م × ع = (π س^{٢}) × ع.**

مثالٌ (٢)

أوجِدْ حجمَ الأسطوانةِ المبيَّنةِ إلى اليسارِ.



أوجِدْ أوّلًا مساحةَ القاعدةِ (م).

م = π س^{٢}

م = π (٢)^{٢} ≈ ١٢,٥٦ م^{٢}

استخدِمْ م لإيجادِ الحجمِ.

ح = م × ع

ح ≈ ١٢,٥٦ × ٤,٥

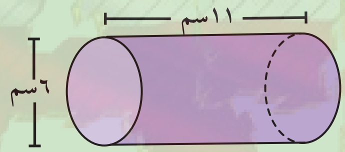
ح ≈ ٥٦,٥٢ م^{٣}

الحجمُ = ٥٦,٥٢ م^{٣} تقريبًا.

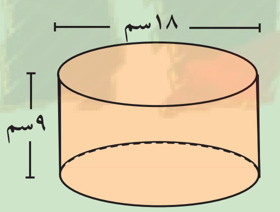
حاوِلْ أن تحلَّ

٢ أوجِدْ حجمَ كلِّ أسطوانةٍ.

(أ)



(ب)



تحقَّقْ من فهمِك

١ ارتفاعُ ٤٠ عملةً معدنيّةً يُساوي ١٠ سم وطولُ قطرِ كلِّ قطعةٍ ٢ سم. كيف توجِدُ حجمَ الرزمةِ؟

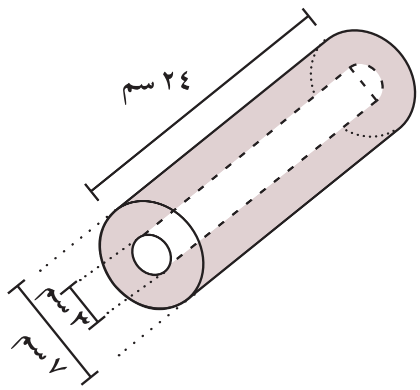
٢ ما أوجهُ التشابهِ والاختلافِ بينَ إيجادِ حجمِ منشورٍ وحجمِ أسطوانةٍ؟

٣ اذكرْ كيف توجِدُ حجمَ منشورٍ أو أسطوانةٍ عندما يُساوي الارتفاعُ صفرًا.

٤ مستخدِمًا ما تعرفُه عن كيفيّةِ إيجادِ حجمِ منشورٍ ثلاثيِّ القاعدةِ، صِفْ كيف يُمكِنُك إيجادُ حجمِ منشورٍ سداسيِّ القاعدةِ.

المرشدُ لحلِّ المسائلِ (٥-٤)

أوجِدْ حجمَ المنطقةِ المظلَّلةِ في الشكلِ إلى اليسارِ:



افهمْ

١ ما نوعُ المجسَّماتِ التي يتألَّفُ منها الشكلُ؟

....

٢ ما طولُ قطرِ الشكلِ الداخليِّ؟ وما طولُ قطرِ الشكلِ الخارجيِّ؟ ....

....

٣ ما ارتفاعُ كلٍّ من الشكلين؟ ....

خطِّطْ

٤ ما طولُ نصفِ قطرِ الشكلِ الداخليِّ؟ وما طولُ نصفِ قطرِ الشكلِ الخارجيِّ؟ ....

....

٥ ما الصيغةُ المستخدَمةُ لإيجادِ حجمِ أسطوانةٍ؟

....

٦ ما الصيغةُ المستخدَمةُ لإيجادِ مساحةِ سطحِ أسطوانةٍ؟ ....

٧ كيف يُمكنُك إيجادُ حجمِ المنطقةِ المظلَّلةِ؟ ....

....

حُلَّ

٨ ما حجمُ الأسطوانةِ الخارجيّةِ؟ ....

٩ ما حجمُ الأسطوانةِ الداخليّةِ؟ ....

١٠ ما حجمُ المنطقةِ المظلَّلةِ؟ ....

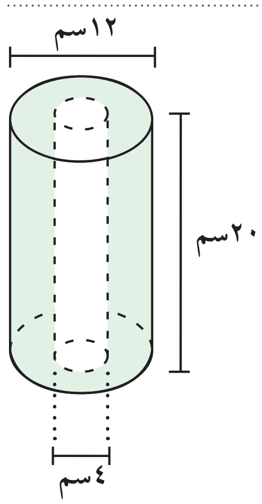
تحقَّقْ

١١ ما الطريقةُ الأخرى التي يُمكِنُك استخدامُها لإيجادِ حجمِ المنطقةِ المظلَّلةِ؟

....

حُلَّ مسألةً أخرى

١٢ أوجِدْ حجمَ المنطقةِ المظلَّلةِ في الشكلِ.

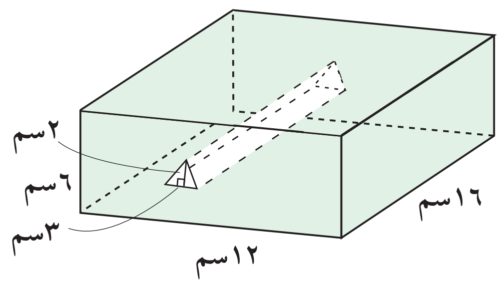


....

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

حسُّ إجراءِ العمليّاتِ: أوجِدْ حجمَ المنطقةِ المظلَّلةِ في الشكلِ أدناه.

١



٢ **الهندسةُ:** في إحدى المدنِ الكبرى فندقٌ أسطوانيُّ الشكلِ طولُ قطرِ قاعدتِه الدائريّةِ ٣٥ مترًا وارتفاعُه ٢٣٠ مترًا.

(أ) ما حجمُ المبنى مقرَّبًا إلى أقربِ مترٍ مكعّبٍ؟

(ب) تمَّت تغطيةُ السطحِ المنحني بالزجاجِ. ما مساحةُ الزجاجِ الذي يُغطّي سطحَ الفندقِ؟

٣ **المجلّةُ:** اختلطَ الأمرُ على أحدِ زملائِك حولَ الفرقِ بينَ ارتفاعِ المثلّثِ في قاعدةِ المنشورِ الثلاثيِّ القاعدةِ وارتفاعِ المنشورِ. اكتبْ توضيحًا وادعمْه بالرسوماتِ لمساعدةِ زميلِك على التمييزِ بينَ الارتفاعين.

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عنِ النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

٥ – ٥

المساحةُ السطحيّةُ للهرمِ والمخروطِ

Surface Area of Pyramid and Cone

سوف تتعلّمُ

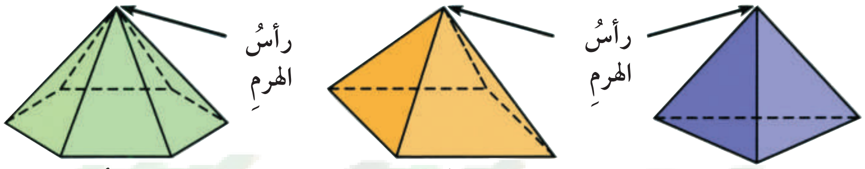
- إيجادَ المساحةِ السطحيّةِ للهرمِ والمخروطِ.

من الاستخداماتِ

- يُدرِكُ مصمِّمو النماذجِ كيف يصنعون المجسَّماتِ متعدِّدةَ الأوجهِ كالهرمِ والمخروطِ.

صلةُ الدرسِ لقد سبقَ أن تعاملْتَ مع المجسَّماتِ متعدِّدةِ الأوجهِ كالمناشيرِ؛ والآن ستتعاملُ مع نوعٍ آخرَ من المجسَّماتِ متعدِّدةِ الأوجهِ ألا وهي الأهراماتُ ◄

الهرمُ هو مجسَّمٌ متعدِّدُ الأوجهِ له قاعدةٌ واحدةٌ، وأوجهُه الأخرى كلُّها مثلّثاتٌ. ويُسمّى الهرمُ بحسبِ عددِ أضلاعِ قاعدتِه.



هرمٌ ثلاثيُّ القاعدةِ — هرمٌ رباعيُّ القاعدةِ — هرمٌ سداسيُّ القاعدةِ

استكشفْ المساحةُ السطحيّةُ للهرمِ

اصنعْ هرمًا بنفسِك! **الأدواتُ المستخدَمةُ:** ورقتان أبعادُهما ٢٢، ٢٨سم، مقصٌّ، شريطٌ لاصقٌ، مسطرةٌ

١ قُصَّ مربّعًا بعداه ٢٢سم، ٢٢سم من ورقةٍ.

٢ اطوِ المربّعَ عندَ كلٍّ من القطرين كلٍّ على حدةٍ.

٣ اقطعْ أحدَ المثلّثاتِ التي نتجَتْ، ثمّ ألصِقِ الحوافَّ معًا لصنعِ الهرمِ.

٤ اقطعْ شكلًا وألصِقْه على الوجهِ غيرِ المغطّى من الهرمِ. حدِّدِ المساحةَ السطحيّةَ للهرمِ.

الخطوةُ ٢

الخطوةُ ٣

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

◄ هرمٌ Pyramid

◄ ارتفاعٌ Height

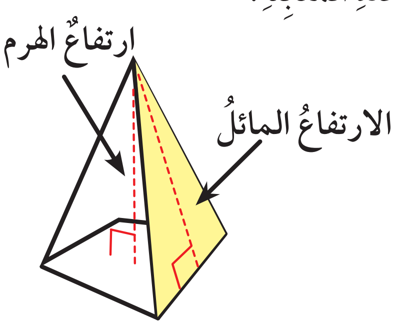
◄ ارتفاعٌ مائلٌ Slant Height

◄ رأسُ الهرمِ Edge of Pyramid

تعلَّمْ المساحةُ السطحيّةُ للهرمِ والمخروطِ

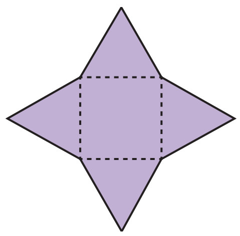
ارتفاعُ الهرمِ هو البعدُ العموديُّ من رأسِ الهرمِ إلى القاعدةِ المقابلةِ.

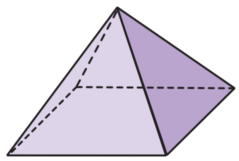
الارتفاعُ المائلُ هو البعدُ العموديُّ من رأسِ الهرمِ إلى أحدِ أحرفِ قاعدةِ الهرمِ المقابلةِ.



يُمكِنُك إيجادُ المساحةِ السطحيّةِ لهرمٍ باستخدامِ شبكتِه.

لاحِظْ في الهرمِ رباعيِّ القاعدةِ إلى اليسارِ أنَّ الارتفاعَ المائلَ هو ارتفاعُ الوجهِ المثلّثيِّ. تُمثِّلُ قاعدةُ كلِّ وجهٍ مثلّثيٍّ أحدَ أضلاعِ المربّعِ.



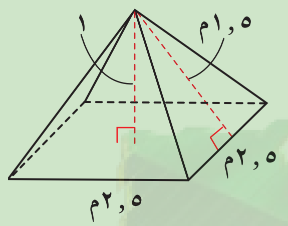


قانونُ المساحةِ السطحيّةِ للهرمِ

المساحةُ السطحيّةُ للهرمِ
= مساحةَ القاعدةِ + مساحَةَ الأوجهِ المثلثيّةِ الأربعةِ.
= مساحةَ القاعدةِ+ ٤ × مساحةُ وجهِ المثلثِ.
= مساحةَ القاعدةِ + ٤ × $\frac{١}{٢}$ × ق × ع
= مساحةَ القاعدةِ + ٢ × ق × ع

مثالٌ (١)

يُستخدَمُ في إحدى المسرحيّاتِ التي تدورُ أحداثُ قصّتِها في مصرَ هرمٌ رباعيُّ القاعدةِ. ومساحةُ قاعدتِه ٦,٢٥ م². بما أنّ ارتفاعَه المائلَ ١,٥ م، أوجِدِ المساحةَ السطحيّةَ لهذا الهرمِ.



بما أنّ قاعدةَ الهرمِ هي مربّعٌ مساحتُه ٦,٢٥ م².

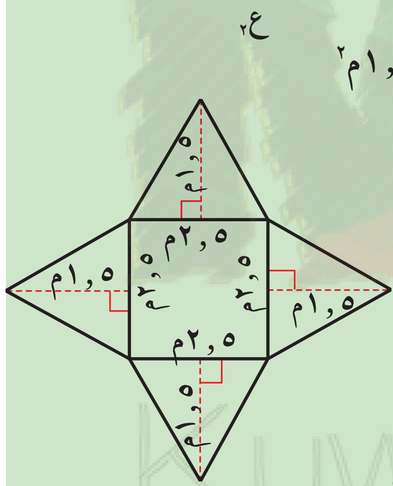
إذًا طولُ ضلعِ المربّعِ = $\sqrt{٦,٢٥}$ = ٢,٥ م

يتضمّنُ الهرمُ ٤ أوجهٍ مثلّثيّةٍ متطابقة.

المساحةُ = $\frac{١}{٢}$ ق × ع = $\frac{١}{٢}$ × (٢,٥ × ١,٥) = ١,٨٧٥ م²

المساحةُ السطحيّةُ للهرمِ = ٦,٢٥ + ٤ × ١,٨٧٥

= ١٣,٧٥ م²



حاوِلْ أن تحلَّ

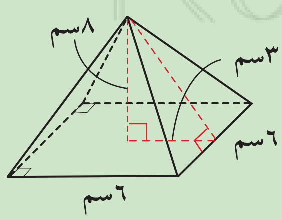
١ (أ) ما نوعُ الهرمِ المبيَّنِ في الشكلِ؟

(ب) ما ارتفاعُ هذا الهرمِ؟

(جـ) استخدِمْ نظريّةَ فيثاغورث (جـ² = أ² + ب²) لإيجادِ الارتفاعِ المائلِ للهرمِ.

(د) ما مساحةُ الوجهِ المثلّثيِّ؟

(هـ) ما المساحةُ السطحيّةُ للهرمِ؟



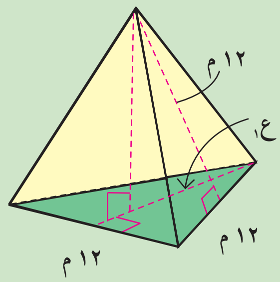
تذكَّرْ

يُمكِنُ استخدامُ نظريّةِ فيثاغورث (جـ² = أ² + ب²) لتحديدِ طولِ ضلعٍ في مثلّثٍ قائمٍ؛ أ، ب هما ضلعا الزاويةِ القائمةِ، جـ هو الوترُ.

للهرمِ ثلاثيِّ القاعدةِ أربعةُ أوجهٍ مثلّثيّةٍ. ويُشكِّلُ أحدُهما قاعدةَ الهرمِ. أمّا الارتفاعُ المائلُ للهرمِ فهُو ارتفاعُ الوجهِ المثلّثيِّ الذي لا يُمثِّلُ قاعدةَ الهرمِ.

مثالٌ (٢)

في الشكلِ هرمٌ ثلاثيُّ القاعدةِ قاعدتُه على شكلِ مثلّثٍ متطابقِ الأضلاعِ طولُ ضلعِه ١٢م والارتفاعُ المائلُ للهرمِ يساوي ١٢م. ما المساحةُ السطحيّةُ لهذا الهرمِ؟



أوّلًا: مساحةَ القاعدةِ.

استخدِمْ نظريّةَ فيثاغورث لإيجادِ $ع_1$.

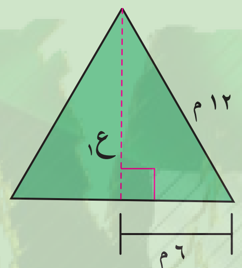
$أ^2 + ب^2 = جـ^2$

$ع_1^2 + ٦^2 = ١٢^2$

$ع_1^2 = ١٢^2 - ٦^2$

$ع_1^2 = ١٠٨$

$ع_1 \approx ١٠,٤$ م



بالتالي مساحةُ قاعدةِ الهرمِ $(م_1) = \frac{١}{٢}$ ق × $ع_1$

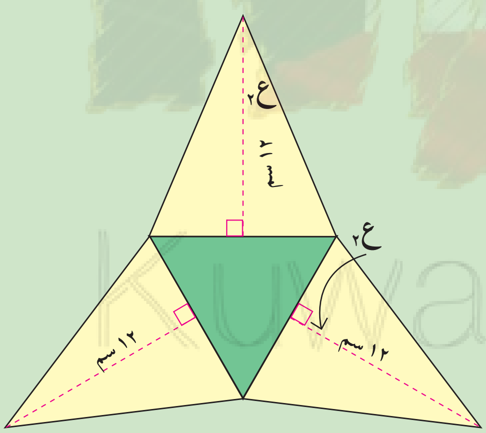
$(م_1) \approx \frac{١}{٢} \times ١٢ \times ١٠,٤$ عوِّضْ

مساحةُ قاعدةِ الهرمِ $(م_1) \approx ٦٢,٤$ م^2.

ثانيًا: مساحةَ أحدِ المثلّثاتِ الثلاثةِ المتطابقةِ (أحدُ الأوجهِ الجانبيّةِ). $(م_2)$

$م_2 = \frac{١}{٢}$ ق × $ع_2$

$= \frac{١}{٢} \times ١٢ \times ١٢ = ٧٢$ م^2.



ثالثًا: المساحةُ السطحيّةُ للهرمِ ثلاثيِّ القاعدةِ $(م) = م_1 + ٣ \times م_2$

$م \approx ٦٢,٤ + ٣(٧٢) \approx ٢٧٨,٤$ م^2.

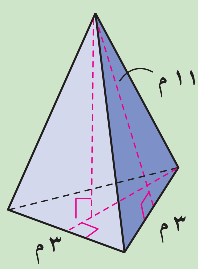
حاوِلْ أن تحلَّ

٢ (أ) ما الارتفاعُ المائلُ للهرمِ المبيَّنِ إلى اليسارِ؟

(ب) استخدِمْ نظريّةَ فيثاغورث $(أ^2 + ب^2 = جـ^2)$ لإيجادِ ارتفاعِ القاعدةِ المثلّثيّةِ.

(جـ) ما مساحةُ أحدِ الأوجهِ المثلّثيّةِ؟

(د) ما المساحةُ السطحيّةُ للهرمِ؟



المخروطُ الدائريُّ هو مجسَّمٌ ثلاثيُّ الأبعادِ قاعدتُه دائريّةُ الشكلِ وله رأسٌ واحدٌ.

لإيجادِ المساحةِ السطحيّةِ للمخروطِ، أوجِدْ مساحةَ القاعدةِ ومساحةَ السطحِ المنحني.

مساحةُ السطحِ المنحني = $\frac{1}{2}$ × محيطِ القاعدةِ × طولِ الراسمِ = $\frac{1}{2}$ × ٢ π × س × ج

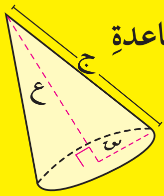
= π س ج   حيث ج = طولَ الراسم

المساحةُ السطحيّةُ للمخروطِ = مساحةَ السطحِ المنحني + مساحةَ القاعدةِ

= $\frac{1}{2}$ × محيطِ القاعدةِ ×ج + π س^{2}

= π س ج + π س^{2}

= π س (ج + س)



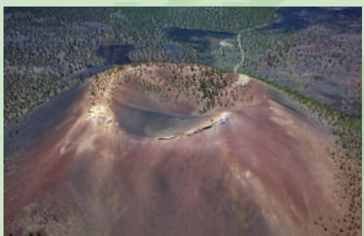
تذكَّرْ

محيطُ الدائرةِ = ٢ π س

مساحةُ الدائرةِ = π س^{2}

مثالٌ (٣)

يُريدُ فيصلٌ أن يصنعَ نموذجًا لبركانٍ مخروطيِّ الشكلِ يعرضُه في مسرحيّةِ المدرسةِ. يجبُ أن يُساوِيَ ارتفاعُ المخروطِ ١,٢ مترٍ وطولُ نصفِ قطرِ قاعدتِه ٠,٦ مترٍ وطولُ الراسمِ حوالى ١,٣٤ مترٍ. على فيصلٍ معرفةُ المساحةِ السطحيّةِ للمخروطِ لكي يشتريَ أوراقًا معدنيّةً سيستخدمُها لصنعِ المخروطِ. ما المساحةُ السطحيّةُ لهذا المخروطِ؟



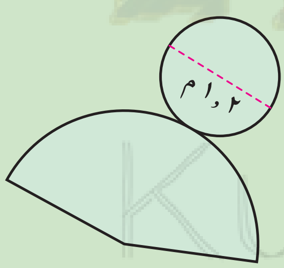
هل تعلمُ؟

الراسمُ هو القطعةُ المستقيمةُ الممتدّةُ من رأسِ المخروطِ إلى أيِّ نقطةٍ على الدائرةِ حيث هي قاعدةُ المخروطِ.

مساحةُ السطحِ المنحني = $\frac{1}{2}$ محيطِ القاعدةِ × طولِ الراسمِ

= $\frac{1}{2}$ × (٢π × ٠,٦) × ١,٣٤

= ٢,٥٢ م^{2}



مساحةُ القاعدةِ = π س^{2}

= π × (٠,٦)^{2} = ١,١٣ م^{2}

المساحةُ السطحيّةُ للمخروطِ

≈ ٢,٥٢ + ١,١٣   أوجِدِ المجموعَ

≈ ٣,٦٥ م^{2}

يحتاجُ فيصلٌ إلى ٣,٦٥ م^{2} تقريبًا من الأوراقِ المعدنيّةِ.

حلٌّ آخرُ

المساحةُ السطحيّةُ للمخروطِ

= π س (ج + س)

= ٠,٦π (١,٣٤ + ٠,٦)

≈ ٣,٦٥ م^{2}

تحقَّقْ من فهمِك

١ ما الفرقُ بينَ الارتفاعِ والراسمِ في المخروطِ الدائريِّ القائمِ؟

٢ من خلالِ إمعانِ النظرِ في شبكةِ مجسَّمٍ، كيف يُمكِنُك تحديدُ ما إذا كانَتِ الشبكةُ تُمثِّلُ هرمًا أو مخروطًا أو أسطوانةً؟

المرشدُ لحلِّ المسائلِ (٥-٥)

إذا كانَ طولُ قطرِ قاعدةِ خيمةٍ مخروطيّةِ الشكلِ مصنوعةٍ من جلدِ الجاموسِ ٦ أمتارٍ، وطولُ الراسمِ (ج) = ٤ أمتارٍ، فما مساحةُ جلدِ الجاموسِ اللازمةُ لصنعِ سطحِها الخارجيِّ؟

افهمْ

١ ضَعْ خطًّا تحتَ طولِ قطرِ الخيمةِ وارتفاعِها. ....

٢ ما شكلُ الخيمةِ؟ ....

٣ هل تُغطّى أرضيّةُ الخيمةِ الداخليّةِ بجلدِ الجاموسِ؟ ....

خطِّطْ

٤ ما طولُ نصفِ قطرِ الخيمةِ؟ ....

٥ ما الصيغةُ التي ستستخدمُها لإيجادِ مساحةِ السطحِ المنحني؟ ....

(أ) م = π س ج (ب) م = π س^2

حُلَّ

٦ ما طولُ الراسمِ للمخروطِ؟ ....

٧ اكتبْ معادلةً تُوضِّحُ فيها كيف توجدُ مساحةَ جلدِ الجاموسِ اللازمةَ.

....

٨ ما مساحةُ جلدِ الجاموسِ اللازمةُ لصنعِ سطحِ الخيمةِ الخارجيِّ؟

....

تحقَّقْ

٩ لماذا لا تطرحُ مساحةَ فُتحةِ الخيمةِ، لإيجادِ كمّيّةِ جلدِ الجاموسِ اللازمةِ؟

....

حُلَّ مسألةً أخرى

١٠ في أحدِ المعسكراتِ صفٌّ من الخيامِ مخروطيّةِ الشكلِ. إذا كانَ طولُ الراسمِ للخيمةِ ٤ أمتارٍ وطولُ قطرِها ٣,٦ أمتارٍ، فما مساحةُ القماشِ اللازمةُ لصنعِ كلِّ خيمةٍ؟ ....

....

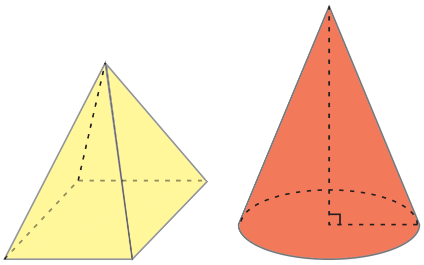
حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ **التواصلُ**: اختلطَ الأمرُ على كاملٍ وهو لا يستطيعُ التمييزَ بينَ ارتفاعِ الهرمِ وارتفاعِه المائلِ، صِفِ الفرقَ بينَ الاثنين.

....

....

في التمرينين ٢ و٣ ارجعْ إلى الهرمِ المربّعِ القاعدةِ والمخروطِ الذي له الارتفاعُ نفسُه، على أن يُساوِيَ طولُ قطرِ قاعدةِ المخروطِ طولَ ضلعِ قاعدةِ الهرمِ المربّعةِ.



٢ **التفكيرُ الرياضيُّ**: أيُّهما أكبرُ: محيطُ القاعدةِ المربّعةِ أم محيطُ القاعدةِ الدائريّةِ؟

....

٣ **التفكيرُ الناقدُ**: في رأيك، أيُّهما له المساحةُ السطحيّةُ الأكبرُ؟ وضِّحْ إجابتَك.

....

٤ **المجلّةُ**: ماذا يحدثُ للمساحةِ السطحيّةِ للهرمِ إذا تضاعفَ ارتفاعُه؟ اذكرْ مثالًا تُوضِّحُ فيه الإجابةُ.

....

٥ **التواصلُ**: اصنعْ مستطيلًا واذكرْ كيف يتغيّرُ كلٌّ من المحيطِ والمساحةِ إذا تغيّرَ أحدُ بعدي المستطيلِ.

....

٦ **الحسُّ العدديُّ**: كم وجهًا للهرمِ السداسيِّ؟ وكم وجهًا للهرمِ الثمانيِّ؟ اكتبِ النمطَ العدديَّ.

....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

٥-٦

حجمُ الهرمِ والمخروطِ

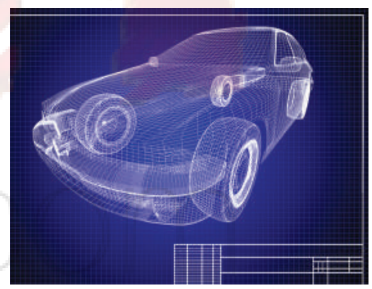
Volume of Pyramid and Cone

سوف تتعلّمُ

- إيجادَ حجمِ الهرمِ والمخروطِ.

من الاستخداماتِ

- يبتكرُ مشغلُ كاد CAD رسوماتٍ ونماذجَ ثلاثيّةَ الأبعادِ لدرّاجاتٍ ناريّةٍ، وسيّاراتٍ، وطائراتٍ، وأشياءَ أخرى تتطلّبُ تصاميمَ ومخطَّطاتٍ هندسيّةً مفصّلةً.

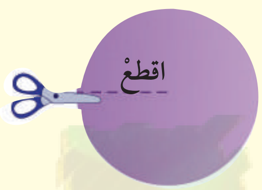


◄ **صلةُ الدرسِ** لقد سبقَ أن أوجدْتَ حجمَ المنشورِ والأسطوانةِ. والآن ستستخدمُ معلوماتِك لإيجادِ حجمِ الهرمِ والمخروطِ. ►

استكشِفْ من المخروطِ إلى الأسطوانةِ

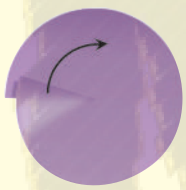
أكوابٌ وأقماعٌ

الأدواتُ المستخدَمةُ: مقصٌّ، شريطٌ لاصقٌ، مسطرةٌ، ورقٌ مقوًّى قياسُ ٢٨ سم × ٤٣ سم، فرجارٌ، رملٌ ملوّنٌ.

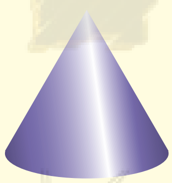


١ استخدِمِ الفرجارَ لترسمَ دائرةً طولُ نصفِ قطرِها ١٢,٧ سم، واستخدِمِ المسطرةَ لترسمَ نصفَ قطرِ هذه الدائرةِ، ثمّ قُصَّ الدائرةَ.

٢ قُصَّ الورقةَ عندَ نصفِ القطرِ الذي رسمْتَه.

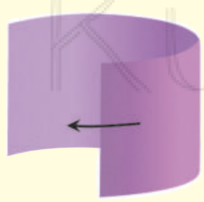


٣ أمسِكْ أحدَ طرفي الخطِّ الذي قطعْتَ عندَه ولُفَّه بحيث تصنعُ مخروطًا طولُ قطرِ دائرةِ قاعدتِه ١٥,٢ سم. استخدِمِ الشريطَ اللاصقَ لتثبيتِ المخروطِ.

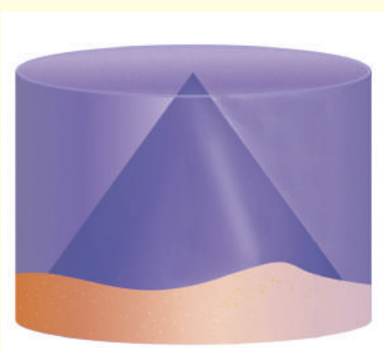


٤ قِسِ ارتفاعَ هذا المخروطِ وسجِّلْه.

٥ قُصَّ مستطيلًا ارتفاعُه مساوٍ لارتفاعِ المخروطِ، واصنعْ منه أسطوانةً على أن يكونَ قطرُ قاعدتِها مساويًا لقطرِ قاعدةِ المخروطِ.



٦ املأِ المخروطَ بالرملِ الملوّنِ ثمّ اسكبْه في الأسطوانةِ. كرِّرْ هذه العمليّةَ بعدَ ذلك مرّتين.

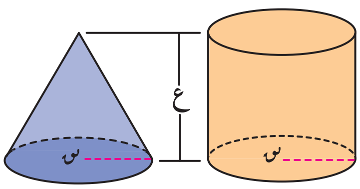


٧ ماذا تُلاحِظُ عن كمّيّةِ الرملِ في الأسطوانةِ في نهايةِ المرحلةِ الثالثةِ؟ اشرحْ إجابتَك.

٨ ناقِشْ مع زملائِك حولَ العلاقةِ بينَ حجمِ الأسطوانةِ وحجمِ المخروطِ.

تعلَّمْ حجمُ الهرمِ وحجمُ المخروطِ

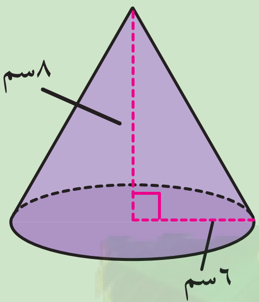
حجمُ المخروطِ هو $\frac{١}{٣}$ حجمِ الأسطوانةِ المشتركةِ معه في القاعدةِ والارتفاعِ.



ح$_{مخروط}$ = $\frac{١}{٣}$ × (م × ع)، حيث م مساحةُ القاعدةِ، ع الارتفاعُ.

مثالٌ (١)

أوجِدْ حجمَ المخروطِ المبيَّنِ إلى اليسارِ.



أوجِدْ أوّلًا مساحةَ القاعدةِ الدائريّةِ (م).

ق = π س^{٢}

ق = π × ٦^{٢} ≈ ١١٣,٠٤سم^{٢}

استخدِمْ ق لإيجادِ الحجمِ.

ح = $\frac{١}{٣}$ × (م × ع)

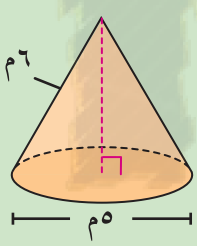
ح ≈ $\frac{١}{٣}$ × (١١٣,٠٤ × ٨)

ح ≈ ٣٠١,٤٤ سم^{٣}

يُساوي الحجمُ حوالى ٣٠١,٤٤ سم^{٣}.

حاوِلْ أنْ تحلَّ

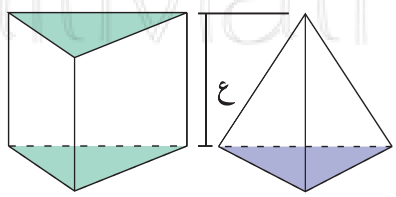
١ أوجِدْ حجمَ المخروطِ المبيَّنِ إلى اليسارِ.



التقديرُ

إذا استخدمْتَ π = ٣,١٤ في حساباتِك، تختلفُ النتيجةُ التي تحصلُ عليها عن تلك التي تُعطيها الآلةُ الحاسبةُ عندَ استخدامِ مفتاحِ π (٣,١٤١٥٩٢٦٥٤...).

تختلفُ الصيغةُ المستخدَمةُ لإيجادِ مساحةِ قاعدةِ مجسَّمٍ (م) باختلافِ شكلِ القاعدةِ.

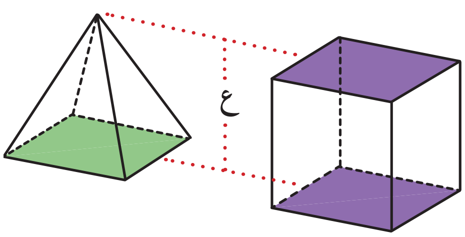


ويختلفُ إيجادُ مساحةِ قاعدةٍ مربّعةِ الشكلِ عن إيجادِ مساحةِ قاعدةٍ مثلّثةِ الشكلِ.

يرتبطُ حجمُ الهرمِ بحجمِ المنشورِ الذي له القاعدةُ والارتفاعُ نفسُهما.

فإذا كانَ حجمُ منشورٍ ح = م × ع،

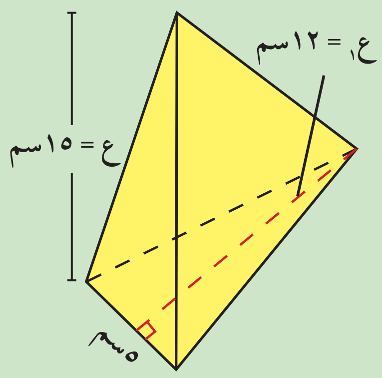
يكونُ حجمُ الهرمِ الذي له القاعدةُ والارتفاعُ نفسُهما ح = $\frac{١}{٣}$ × (م × ع).



مثالٌ (٢)

أوجِدْ حجمَ الهرمِ المبيَّنِ إلى اليسارِ.

ليكنْ $ع_١$ ارتفاعَ المثلّثِ.



$ح = \frac{١}{٣} \times م \times ع$

$ح = \frac{١}{٣} \times (\frac{١}{٢} \times ق \times ع_١) ع$

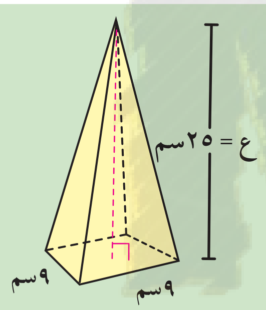
$ح = \frac{١}{٣} \times (\frac{١}{٢} \times ٥ \times ١٢) \times ١٥$

$ح = \frac{١}{٣} \times (٣٠) \times ١٥ = ١٥٠$ سم^٣

حجمُ الهرمِ يُساوي ١٥٠ سم^٣.

مثالٌ (٣)

أوجِدْ حجمَ الهرمِ المبيَّنِ إلى اليسارِ.



$ح = \frac{١}{٣} \times م \times ع$

$ح = \frac{١}{٣} \times (٩^٢) \times ع$

$ح = \frac{١}{٣} \times (٨١) \times ٢٥$

$ح = ٦٧٥$ سم^٣

حجمُ الهرمِ يُساوي ٦٧٥ سم^٣.

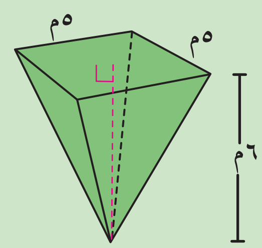
تذكَّرْ

للهرمِ قاعدةٌ واحدةٌ فحسبُ.

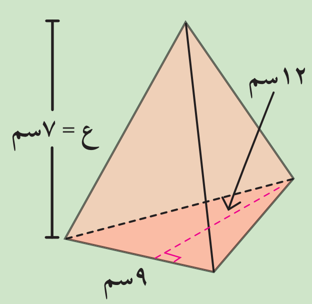
حاوِلْ أن تحلَّ

٢ أوجِدْ حجمَ كلِّ مجسَّمٍ:

(أ)



(ب)



تحقَّقْ من فهمِك

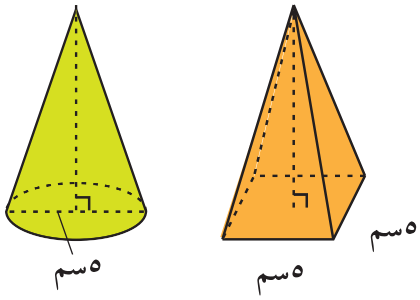
١ ما أوجهُ الشبهِ بينَ حجمِ الهرمِ وحجمِ المخروطِ؟

٢ إذا كانَ ارتفاعُ مخروطٍ ١٨ سم وطولُ قطرِ قاعدتِه الدائريّةِ ٨ سم، فصِفِ الأسطوانةَ التي يُساوي حجمُها ٣ مرّاتٍ حجمَ هذا المخروطِ.

٣ عندما يزدادُ ارتفاعُ هرمٍ، هل يزدادُ ارتفاعُه المائلُ؟ وضِّحْ إجابتَك.

المرشدُ لحلِّ المسائلِ (٥-٦)

أيُّ المجسَّمين الموضَّحين أكبرُ حجمًا: الهرمُ أم المخروطُ؟
علمًا بأنّ ارتفاعَ كلٍّ منهما ١٢سم



افهمْ

١ ما ارتفاعُ المخروطِ؟

....

٢ ما ارتفاعُ الهرمِ؟

....

خطِّطْ

٣ ما الصيغةُ المستخدَمةُ لإيجادِ حجمِ المخروطِ؟ ....

٤ ما الصيغةُ المستخدَمةُ لإيجادِ مساحةِ قاعدةِ المخروطِ؟ ....

٥ ما الصيغةُ المستخدَمةُ لإيجادِ حجمِ الهرمِ؟ ....

٦ ما الصيغةُ المستخدَمةُ لإيجادِ مساحةِ قاعدةِ الهرمِ؟ ....

حُلَّ

٧ ما حجمُ المخروطِ؟ ....

٨ ما حجمُ الهرمِ؟ ....

٩ ما المجسَّمُ الأكبرُ حجمًا؟ ....

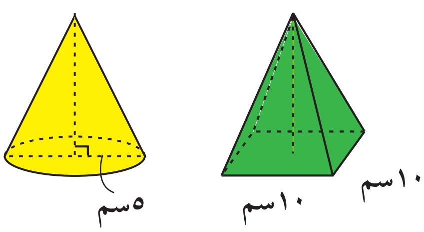
تحقَّقْ

١٠ كيف يُمكِنُك تحديدُ المجسَّمِ الأكبرِ حجمًا من دونِ حسابِ حجمِ كلٍّ من المجسَّمين؟ وضِّحْ إجابتَك.

....

حُلَّ مسألةً أخرى

١١ أيُّ المجسَّمين الموضَّحين أكبرُ حجمًا: الهرمُ أم المخروطُ؟ علمًا بأنّ ارتفاعَ كلٍّ منهما ١٠ سم.



....

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

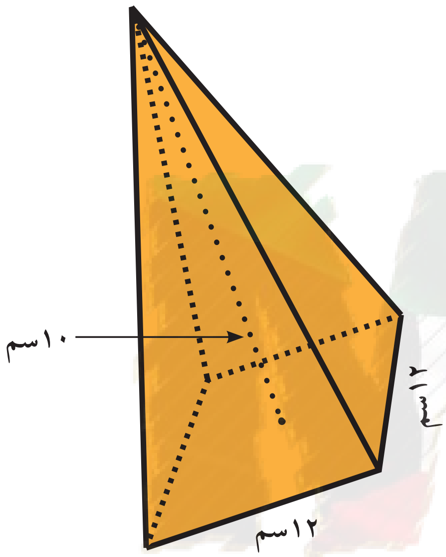
١ **التواصلُ**: لنفترِضْ أنّك تعرفُ أبعادَ مخروطٍ لكنّك نسيتَ الصيغةَ المستخدَمةَ لإيجادِ حجمِه. اذكرْ طريقةً يُمكِنُك استخدامُها لإيجادِ حجمِ المخروطِ.

....

....

٢ **الجبرُ**: اكتبْ معادلةً واستخدِمْ نظريّةَ فيثاغورث لإيجادِ ارتفاعِ مخروطٍ، إذا كانَ ارتفاعُه المائلُ يُساوي ١٥سم وطولُ نصفِ قطرِه ٩سم.

....



٣ **التفكيرُ الناقدُ**: تُعبَّأُ الأواني الزجاجيّةُ في أحدِ المصانعِ في صناديقَ هرميّةِ الشكلِ.

(أ) ما مساحةُ الورقِ المقوّى التي يُمكِنُ استخدامُها في التصميمِ الهرميِّ المربّعِ القاعدةِ؟

....

(ب) ما حجمُ المجسّمِ الهرميِّ المربّعِ القاعدةِ؟

....

٤ **اخترْ إستراتيجيّةً**: يُريدُ صانعُ قبعّاتٍ مخروطيّةِ الشكلِ تعبئةَ كلِّ قبعّةٍ في علبةٍ أسطوانيّةٍ لها القطرُ والارتفاعُ نفسُهما. ما حجمُ المادّةِ العازلةِ اللازمةِ لملءِ كلِّ علبةٍ بالكاملِ؟

....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

اختبارُ الوَحدةِ الخامسةِ

١ في الشكلِ إلى اليسارِ.

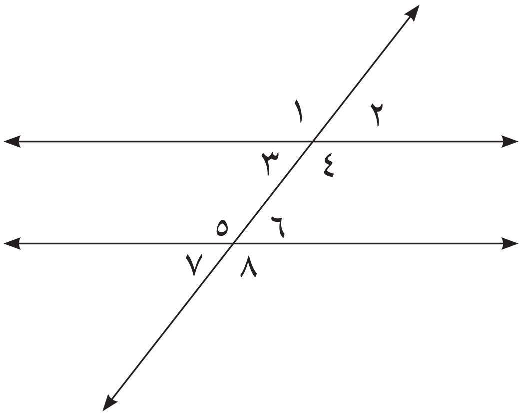
سَمِّ زوجًا من الزوايا:

(أ) متبادلةٌ داخليّةٌ

(ب) متقابلةٌ بالرأسِ

(جـ) متناظرةٌ

(د) متبادلةٌ خارجيّةٌ



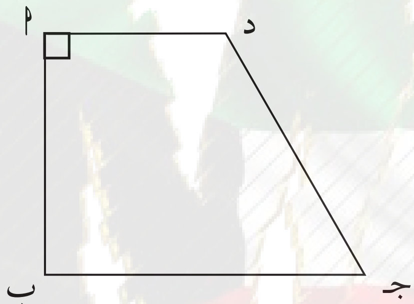
٢ أوجِدْ قياسَ الزاويةِ المتمِّمةِ والزاويةِ المكمِّلةِ للزاويةِ ٥٤°

٣ حدِّدْ في الشكلِ إلى اليسارِ:

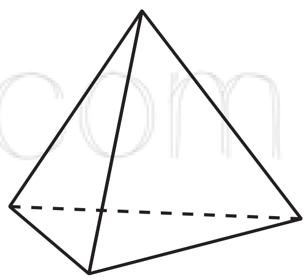
(أ) قطعٌ مستقيمةٌ متوازيةٌ

(ب) قطعٌ مستقيمةٌ متعامدةٌ

(جـ) زاويةٌ مكمِّلةٌ للزاويةِ جـ



٤ ارسمْ شبكةً لكلِّ مجسَّمٍ ممّا يلي:



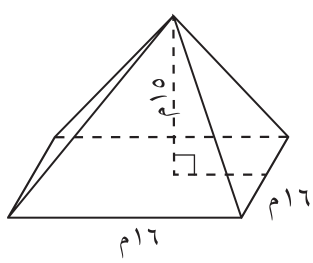
جميعُ المثلّثاتِ متطابقةُ الأضلاعِ

جذعُ مخروطٍ

٥ (أ) ارسمْ شبكةً للهرمِ الموضحِ بالشكلِ.

(ب) أوجِدْ طولَ الارتفاعِ المائلِ في الهرمِ

(جـ) احسبِ المساحةَ السطحيّةَ للهرمِ

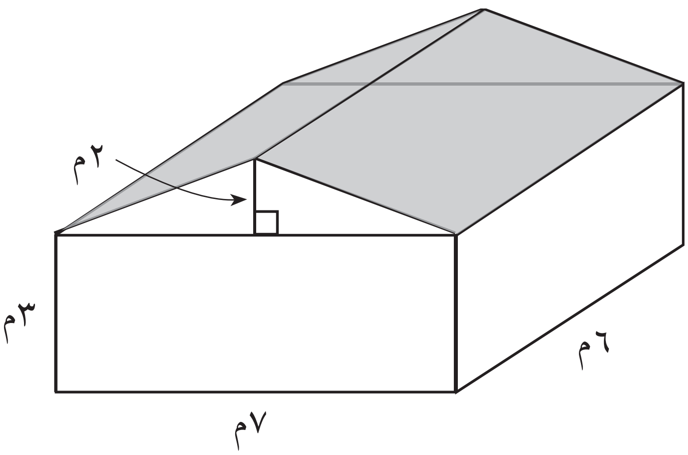


اختبارُ الوَحدةِ الخامسةِ

٦ يُبيِّنُ الشكلُ إلى اليسارِ منزلًا يعلوه القرميدُ

(أ) ما حجمُ هذا المنزلِ؟

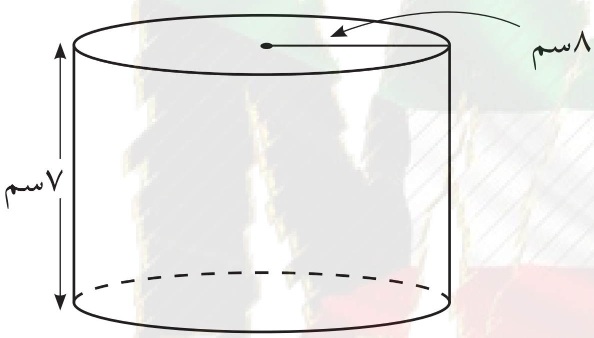
(ب) ما المساحةُ السطحيّةُ من المنزلِ التي يُمكِنُ طلاؤُها؟



٧ يُبيِّنُ الشكلُ إلى اليسارِ أسطوانةً مع قياساتٍ أساسيّةٍ

(أ) أوجِدِ المساحةَ السطحيّةَ للأسطوانةِ

(ب) أوجِدْ حجمَ الأسطوانةِ

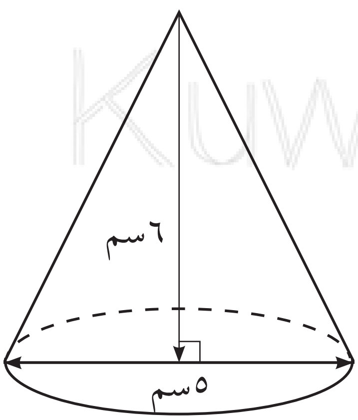


٨ يُبيِّنُ الشكلُ إلى اليسارِ مخروطًا

(أ) ما حجمُ هذا المخروطِ؟

(ب) ما مساحةُ السطحِ المنحني للمخروطِ؟

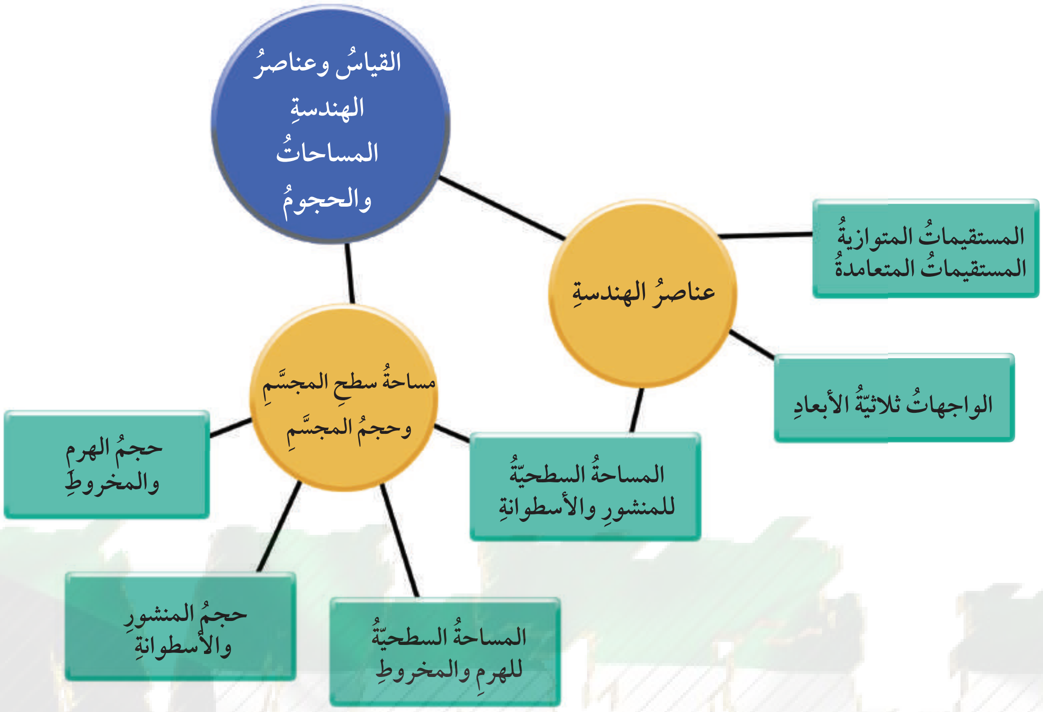
(جـ) ما المساحةُ السطحيَّةُ؟



٩ حوِّلْ: ١٧ مترًا ٢٥ دسّيمترًا إلى سنتيمترٍ.

١٠ قالَ إبراهيمُ لصديقِه بعدَ أن قاسَ قامتَه إنّ طولَك هو ١,٧ م أو ١٧١ سم. في رأيِك، أيُّ قياسٍ هو الأدقُّ؟

مخطط تنظيمي للوحدة الخامسة



الوَحدةُ الخامسةُ (أ): عناصرُ الهندسةِ

- يُشكِّلُ القاطعُ مع مستقيمين متوازيين زوايا داخليّةً وزوايا خارجيّةً وزوايا متبادلةً وزوايا متناظرةً.
- تكونُ الزوايا الداخليّةُ المتبادلةُ متساويةَ القياسِ.
- تكونُ الزوايا المتناظرةُ متساويةَ القياسِ.
- إذا تقاطعَ مستقيمانِ وشكّلا زاويةً قائمةً يكونُ المستقيمانِ متعامدينِ.
- تُساعِدُ الرؤيا للمجسَّماتِ من الأمامِ ومن الجانبِ ومن الأعلى على تكوينِ فكرةٍ عن شكلِ هذه المجسَّماتِ.

الوَحدةُ الخامسةُ (ب): مساحةُ سطحِ المجسَّمِ وحجمُ المجسَّمِ

- المساحةُ السطحيّةُ لأيِّ مجسَّمٍ هي ناتجُ مجموعِ مساحاتِ القواعدِ والجوانبِ.
- حجمُ المجسَّمِ هو الحيّزُ الذي يشغلُه هذا المجسَّمُ.

أودع في مكتبة الوزارة تحت رقم (٥١) بتاريخ ١٠/ ٥/ ٢٠١٥م

شركة مطابع الرسالة – الكويت