الوَحدةُ الثالثةُ

التحليلُ والمعادلاتُ والمتبايناتُ والحدوديّاتُ النسبيّةُ
Factorising, Equations, Inequalities, and Rational Polynominals

شعوبُ العالمِ

كانَتْ أقدمُ آلةِ تصويرٍ بحجمِ غرفةٍ مع مساحةٍ لشخصٍ واحدٍ أو أكثرَ في الداخلِ. آلةُ التصويرِ الأولى كانَتْ صغيرةً ومحمولةً وعمليّةً للتصويرِ صنعَها يوهان زان عامَ ١٦٨٥ . هل تعلمُ أنّ كلَّ صورةٍ لها الصيغةُ التاليةُ: $\frac{١}{ف} = \frac{١}{د_١} + \frac{١}{د_٢}$ حيث

ف = بؤرةُ عدسةِ آلةِ التصويرِ.

$د_١$ = المسافةُ بينَ العدسةِ والمرادِ تصويرُه.

$د_٢$ = المسافةُ بينَ العدسةِ والشاشةِ حيث تستقرُّ الصورةُ على آلةِ التصويرِ.

الدراساتُ الاجتماعيّةُ

يُمكِنُ خفضُ استهلاكِ الطاقةِ الكهربائيّةِ باتّباعِ بعضِ الإرشاداتِ والنصائحِ:

- الإكثارُ من الضوءِ الطبيعيِّ أثناءَ النهارِ.
- إطفاءُ الأنوارِ فورَ مغادرةِ الأمكنةِ المشغولةِ.
- استخدامُ مصابيحَ تُوفِّرُ الطاقةَ.
- فصلُ الكهرباءِ عن السخّانِ إذا لم يكنْ في حالةِ الاستخدامِ.
- إغلاقُ جهازِ التكييفِ عندَ تركِ الغرفةِ لفترةٍ طويلةٍ، أمّا بالنسبةِ إلى خفضِ استهلاكِ المياهِ فيُمكنُ اتّباعُ بعضِ الإرشاداتِ والنصائحِ: تذكَّرْ أنّ أكبرَ كمّيّةٍ لاستهلاكِ المياهِ هي في الحمّاماتِ (حوالى ٤٠٪). لذا حاوِلْ تخفيفَ كمّيّةِ تدفّقِ المياهِ.
- إنّ ثاني أكبرِ كمّيّةٍ لاستهلاكِ المياهِ هي في المطابخِ، لذا يُستحسَنُ تركيبُ تحويلةٍ في طرفِ الصنبورِ لضبطِ تدفّقِ المياهِ.
- استخدِمِ الدشَّ بدلًا من المغطسِ.
- أغلِقْ صنبورَ الماءِ أثناءَ غسلِ الأسنانِ أو الحلاقةِ واستخدِمْ كوبًا يحتوي على الماءِ.

العلومُ

إنّ التكلفةَ د(س)، بملايينِ الدنانيرِ لتلقيحِ س٪ من سكّانِ إحدى الدولِ ضدَّ الأمراضِ الموسميّةِ مثلِ الإنفلونزا التي تنتشرُ في الفصولِ الباردةِ من السنةِ تُعطى بالحدوديّةِ النسبيّةِ:

$$د(س) = \frac{١٣٠ س}{١٠٠ - س}.$$

الهندسةُ

تُستخدَمُ الحدوديّاتُ النسبيّةُ لتقديرِ أو نمذجةِ معادلاتٍ معقّدةٍ في هندسةِ الاتّصالاتِ عبرَ الأقمارِ الصناعيّةِ، بالإضافةِ إلى علمِ البصريّاتِ لتحسينِ نوعيّةِ الصورةِ.

أفكارٌ رياضيّةٌ أساسيّةٌ

إذا أردْنا حلَّ معادلةٍ من الدرجةِ الثانيةِ بعدَ تحليلِها إلى عواملَ، فعلينا إيجادُ أصفارِ عامليَها.

نحلُّ المتباينةَ بإيجادِ كلِّ قيمِ المتغيِّراتِ التي تُحقِّقُ المتباينةَ ونُمثِّلُ هذه القيمَ على خطِّ الأعدادِ.

الحدوديّةُ النسبيّةُ هي قسمةُ كثيرةِ الحدودِ على أخرى، مثالٌ: $\frac{س^٢ + ٢}{٢س}$.

لجمعِ الحدوديّاتِ النسبيّةِ أو لطرحِها يجبُ أن نأخذَ المضاعَفَ المشترَكَ الأصغرَ لمقاماتِ الحدوديّاتِ النسبيّةِ.

لضربِ الحدوديّاتِ النسبيّةِ نضربُ البسطَ في البسطِ والمقامَ في المقامِ.

عندَ قسمةِ حدوديّةٍ نسبيّةٍ على أخرى، نضربُ الحدوديّةَ الأولى في المعكوسِ الضربيِّ للحدوديّةِ الثانيةِ.

مشروعُ الوَحدةِ

حلُّ المسائلِ

افهمْ
خطِّطْ
حُلَّ
تحقَّقْ

في هذا المشروعِ، سوف يقومُ الطلّابُ بدراسةِ استهلاكِ الطاقةِ الكهربائيّةِ والمياهِ في مجمَّعٍ تجاريٍّ وكتابةِ تقريرٍ مفصَّلٍ عن مجالاتِ الهدرِ واقتراحِ الحلولِ الصحيحةِ لترشيدِ استهلاكِ الطاقةِ الكهربائيّةِ والمياهِ.

التركيزُ على حلِّ المسائلِ

تتضمّنُ هذه المسألةُ معطَياتٍ غيرَ ضروريّةٍ. أشِرْ إليها. وقسِّمِ المسألةَ إلى مسائلَ بسيطةٍ، وأجِبْ عن الأسئلةِ التاليةِ:

يُخطِّطُ أحمدُ لزراعةِ قطعةِ أرضٍ مستطيلةِ الشكلِ في حديقةِ منزلِه ويُريدُ زراعةَ نصفِ مساحتِها بالطماطمِ، والنصفِ الآخرِ منها بالخيارِ لبيعِها في السوقِ بسعرِ دينارٍ لكلِّ كيلوجرامٍ. طولُ قطعةِ الأرضِ المرادِ زراعتُها ضعفُ عرضِها، والذي يُساوي س مترٍ. وسعرُ كلِّ مترٍ مربّعٍ ٤٠٠ دينارٍ. إذا أرادَ أحمدُ أن يُحيطَ قطعةَ الأرضِ بممرٍّ عرضُه مترٌ واحدٌ من الجهاتِ الأربعِ لقطعةِ الأرضِ بحيث يرصفُه بالحصى بمساحةِ ٤٠ مترًا مربّعًا، فأوجِدْ طولَ وعرضَ قطعةِ الأرضِ المرادِ زراعتُها.

١ علامَ تُركِّزُ المسألةُ؟

٢ ما المطلوبُ إليك إيجادُه؟

٣ أوجِدْ مساحةَ الممرِّ مع قطعةِ الأرضِ المزروعةِ بدلالةِ س.

٤ أوجِدْ مساحةَ قطعةِ الأرضِ المزروعةِ بدلالةِ س.

٥ أوجِدْ مساحةَ الممرِّ بدلالةِ س.

٦ أوجِدْ قيمةَ س.

٧ أوجِدْ طولَ الحديقةِ وعرضَها.

٨ ما المعطَياتُ غيرُ الضروريّةِ في المسألةِ؟

KuwaitMath.com

حلُّ المسائلِ
افهمْ
خطِّطْ
حُلَّ
تحقَّقْ

قراءةُ المسألةِ

عندَ قراءةِ المسألةِ قد تجدُ صعوبةً في فهمِ المسألةِ. أوّلًا احذفِ المعطَياتِ غيرَ الضروريّةِ، ثمّ قسِّمِ المسألةَ إلى مسائلَ صغيرةٍ. تأكَّدْ من فهمِ كلِّ جزءٍ من المسألةِ.

التحليلُ
Factorising

إنتاجُ المصانعِ

تأخذُ مصانعُ الرقاقاتِ الإلكترونيّةِ بالاعتبارِ ثلاثةَ عواملَ:

الكلفةُ، والعائداتُ، والربحُ. وهي قواعدُ أساسيّةٌ ومهمّةٌ في التحليلِ الماليِّ لإنتاجِ الشركةِ. وبناءً على مقارنتِها يُحدَّدُ نجاحُ الشركةِ. فهناك الكلفةُ الثابتةُ بغضِّ النظرِ عن كمّيّةِ الإنتاجِ مثلِ: فواتيرِ الطاقةِ، والإيجارِ، والتأمينِ، والدعايةِ، وغيرِها. وهناك أيضًا الكلفةُ المرتبطةُ مباشرةً بكمّيّةِ الإنتاجِ أي كلفةُ الموادِّ الأوّليّةِ التي تدخلُ في عمليّةِ تصنيعِ المنتَجِ.

أمّا عائداتُ المصنعِ، فهي المبلغُ الإجماليُّ الذي دخلَ إلى المصنعِ والعائدُ عن بيعِه منتَجًا أو من أيِّ خدماتٍ أخرى. أمّا الربحُ فهو ناتجُ طرحِ الكلفةِ من العائداتِ. يهتمُّ بعضُ المحلِّلين بإيجادِ مستوى الإنتاجِ لتفادي خساراتٍ غيرِ مرغوبٍ فيها، فيلجأون إلى صياغةِ معادلاتٍ رياضيّةٍ للكلفةِ، والعائداتِ، والأرباحِ، في سبيلِ الحصولِ على مستوى الإنتاجِ حيث تتعادلُ الكلفةُ مع العائداتِ، محاولين حلَّ معادلاتٍ رياضيّةٍ عن طريقِ تحليلِها.

في شركاتِ إنتاجِ الرقاقاتِ الإلكترونيّةِ، يقولُ المحلِّلون إنّ الأرباحَ تُمثِّلُها المعادلةُ التاليةُ:

$$ر(س) = -س^{٢} + ٨س - ٧$$

حيث: ر: الربحُ الأسبوعيُّ بآلافِ الدنانيرِ.

س: الكمّيّةُ المباعةُ بآلافِ الوَحداتِ.

١ هل يربحُ المصنعُ إذا لم يُنتِجْ؟ إذا أنتجَ ألفَ رقاقةٍ؟ ألفين؟ ٤ آلافٍ؟ ٥ آلافٍ؟ ٧ آلافٍ؟

٢ ابحثْ عن طريقةٍ تُمكِّنُك من كتابةِ $-س^{٢} + ٨س - ٧$ على صورةِ ضربِ عاملين.

٣-١

تحليلُ الفرقِ بينَ مربّعين

Factorising the Difference betweenTwo Squares

◄ **صلةُ الدرسِ** تعرّفْتَ في السابقِ على المقاديرَ الجبريّةَ، وتحليلَ الفرقِ بينَ مربّعين. ►

سوف تتعلّمُ

- تحليلَ الفرقِ بينَ مربّعين.

من الاستخداماتِ

- يستخدمُ الباحثون العلميّون تحليلَ المقاديرِ الجبريّةِ في حلِّ الكثيرِ من المسائلِ الفيزيائيّةِ.

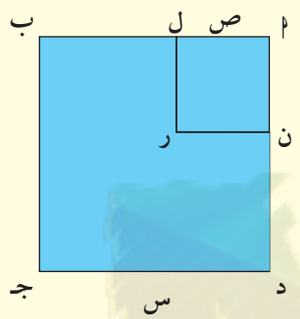
المصطلحاتُ الأساسيّةُ

◄ الفرقُ بينَ مربّعين
Difference between Two Squares

استكشِفْ تحليلُ الفرقِ بينَ مربّعين

مستلزَماتٌ: مسطرةٌ – مقصٌّ

شكلُ (١)



في الرسمِ: أب جـ د مربّعٌ طولُ ضلعِه س، أل ر ن مربّعٌ طولُ ضلعِه ص.

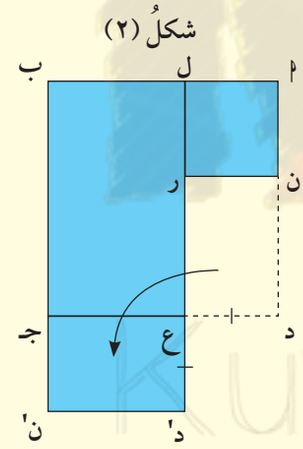
١ (أ) أوجِدْ مساحةَ كلٍّ من المربّعين.

(ب) ما الفرقُ بينَ مساحتي المربّعين؟

٢ في الشكلِ (١)، حدِّدِ المنطقةَ التي تُمثِّلُ الفرقَ بينَ مساحتي المربّعين.

٣ عيِّنِ النقطةَ ع على دجـ حيث د ع = أل.

شكلُ (٢)



٤ قُصَّ المستطيلَ ن ر ع د وألصِقْه على الضلعِ ع جـ كما هو مبيَّنٌ في الشكلِ المقابلِ.

(أ) ما أبعادُ المستطيلِ ل ب ن' د'؟

(ب) ما مساحةُ المستطيلِ ل ب ن' د'؟

٥ تحقَّقْ من صحّةِ العلاقةِ:

$س^{٢} - ص^{٢} = (س - ص)(س + ص)$

تعلَّمْ تحليلُ الفرقِ بينَ مربّعين

يُمكِنُك استخدامُ الفرقِ بينَ مربّعين لتحليلِ تعابيرَ جبريّةٍ إلى عواملِها الأوّليّةِ.

$س^{٢} - ص^{٢} = (س - ص)(س + ص)$

مثالٌ (١)

حلِّلْ تحليلًا تامًّا: $س^{٢} - ١$.

الحلُّ: $س^{٢} - ١ = س^{٢} - ١^{٢}$

$= (س - ١)(س + ١)$

KuwaitMath.com

حاوِلْ أن تحلَّ

١ حلِّلْ تحليلًا تامًّا: ١ – ٤ م^{٢}

مثالٌ (٢)

حلِّلْ تحليلًا تامًّا: ٤ – ٤٩و^{٢}

الحلُّ: ٤ – ٤٩و^{٢} = (٢)^{٢} – (٧و)^{٢}

= (٢ – ٧و)(٢ + ٧و)

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ حلِّلْ كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا:

(أ) و^{٢} – ٣٦ (ب) ٦٤س^{٢} – ١٢١ (جـ) ١٦ – ص^{٢}

مثالٌ (٣)

حلِّلْ تحليلًا تامًّا: ٨ – ٢س^{٢}

الحلُّ: ٨ – ٢س^{٢} = ٢ × ٤ – ٢س^{٢}

= ٢(٤ – س^{٢})

= ٢(٢ – س)(٢ + س).

حاوِلْ أن تحلَّ

٣ حلِّلْ تحليلًا تامًّا: ٥٠ – ١٨ك^{٢}

مثالٌ (٤)

مربّعان يزيدُ طولُ ضلعِ أحدِهما عن الآخرِ بمقدارِ وَحدةِ طولٍ واحدةٍ، وتزيدُ مساحتُه ٧ وَحداتٍ مربّعةٍ عن مساحةِ الآخرِ. أوجِدْ طولَ ضلعِ المربّعِ الأصغرِ.

الحلُّ: ليكنْ س طولَ ضلعِ المربّعِ الأصغرِ.

المعادلةُ: (س + ١)^{٢} – س^{٢} = ٧

(س + ١ – س)(س + ١ + س) = ٧

(١) (٢س + ١) = ٧

٢س = ٦

س = ٣

يبلغُ طولُ ضلعِ المربّعِ الأصغرِ ٣ وَحداتٍ.

KuwaitMath.com

تحقَّقْ من فهمِك

١ هل يُمكِنُ تحليلُ مجموعِ المربّعين أ^{٢} + ب^{٢}؟

٢ حلّلَ زميلُك ٤س^{٢} – ١٢١، وحصلَ على (٤س + ١١)(٤س – ١١). ما الخطأُ الذي وقعَ فيه؟

٣ هل يُمكِنُك تحليلُ مجموعِ مربّعين؟

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ أوجِدْ قيمةَ ٢١٧^{٢} – ١٦^{٢} بالتحليلِ.

.....

.....

٢ ع ن د مثلّثٌ قائمُ الزاويةِ في ن. إذا كانَ ع د = ٢٥سم، ع ن = ٢٠سم، فأوجِدْ طولَ $\overline{\text{دن}}$.

.....

.....

٣ حلِّلْ كلًّا ممّا يلي:

(أ) $\frac{١}{٤}$ م^{٢} – $\frac{١}{٩}$ ب^{٢}

.....

(ب) ٢٥حـ^{٢} د^{٢} – ١

.....

(جـ) ١٦ص^{٤} – ١

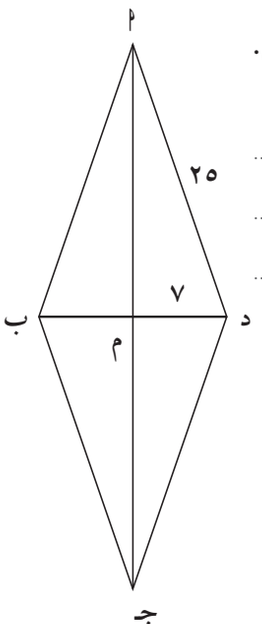
.....

٤ أ ب جـ د معيَّنٌ. م نقطةُ تلاقي قطريه. دم = ٧سم، أ د = ٢٥سم. أوجِدْ طولَ $\overline{\text{أجـ}}$.

.....

.....

.....



إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

معلومةٌ مفيدةٌ

مركزُ المعيَّنِ هو نقطةُ تلاقي قطريه.

KuwaitMath.com

٣-٢

تحليلُ الفرقِ بينَ مكعّبين أو مجموعِهما

Factorising the Difference between Two Cubes or their Sum

سوف تتعلّمُ

- تحليلَ الفرقِ بينَ مكعّبين.
- تحليلَ مجموعِ مكعّبين.

من الاستخداماتِ

- يستخدمُ مهندسو البناءِ الفرقَ بينَ المكعّبين أو مجموعِهما لمعرفةِ كمّيّةِ الأسمنتِ المستخدَمةِ.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- فرقُ المكعّبين
  Difference between Two Cubes
- مجموعُ المكعّبين
  Sum of Two Cubes

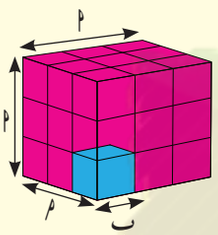
صلةُ الدرسِ حلّلْتَ في الدرسِ السابقِ الفرقَ بينَ مربّعين. الآن سوف تتعلّمُ تحليلَ الفرقِ بينَ مكعّبين أو مجموعِهما.

استكشِفْ تحليلُ الفرقِ بينَ مكعّبين

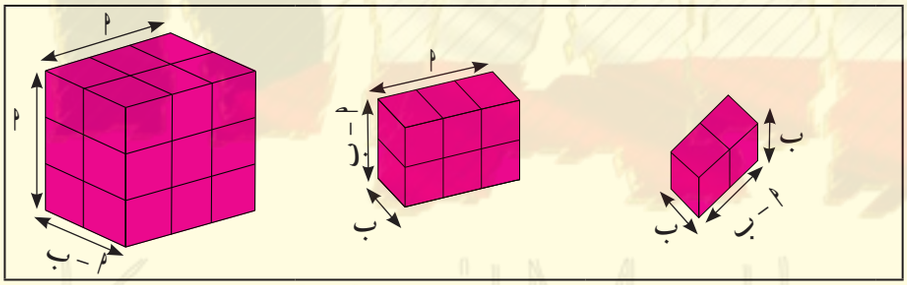
مستلزَماتُ الدرسِ: مقصٌّ

١ (أ) خُذْ مكعّبًا طولُ ضلعِهِ ا وانزعْ من إحدى رؤوسِه مكعّبًا صغيرًا طولُ ضلعِهِ ب.
في الرسمِ: ا = ٣، ب = ١ (شكلُ ١).
(ب) أوجِدْ حجمَ المجسَّمِ الناتجِ بدلالةِ ا، ب.

٢ اقطعِ المجسَّمَ الناتجَ إلى ثلاثةِ مجسَّماتٍ كلٌّ منها على شكلِ شبهِ مكعّبٍ كما في الرسمِ.



شكلُ (١)



٣ اكتبْ حجمَ كلِّ قطعةٍ بدلالةِ ا، ب.

٤ حدِّدِ العاملَ المشترَكَ بينَ الأحجامِ الثلاثةِ.

٥ (أ) أوجِدْ ناتجَ جمعِ أحجامِ المجسَّماتِ الثلاثةِ.
(ب) حلِّلِ الناتجَ مستخدِمًا العاملَ المشترَكَ في ٤.

٦ اكتبِ العلاقةَ بينَ ما حصلْتَ عليه في ١(ب)، ٥(ب).

تعلَّمْ تحليلُ الفرقِ بينَ مكعّبين وتحليلُ الجمعِ بينَ مكعّبين

ا^{٣} – ب^{٣} تُسمّى الفرقَ بينَ مكعّبين.

القانونُ: ا^{٣} – ب^{٣} = (ا – ب)(ا^{٢} + اب + ب^{٢})

عندَ تحليلِ الفرقِ بينَ مكعّبين يُمكِنُ استخدامُ القانونِ:

الفرقُ بينَ مكعّبي كمّيّتين = (الكمّيّةُ الأولى – الكمّيّةَ الثانيةَ)(مربّعُ الكمّيّةِ الأولى + ناتجَ ضربِ الكمّيّتين + مربّعَ الكمّيّةِ الثانيةِ).

KuwaitMaths

مثالٌ (١)

حلِّلْ: $س^{٣} - ٢٧$.

الحلُّ: $س^{٣} - ٢٧ = س^{٣} - (٣)^{٣}$

$= (س - ٣)(س^{٢} + س \times ٣ + ٣^{٢})$

$= (س - ٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)$

حاوِلْ أن تحلَّ

١ حلِّلْ: $أ^{٣} - ١٢٥$.

يُمكِنُ استخدامُ قانونِ الفرقِ بينَ مكعّبين لتحليلِ المقدارِ $أ^{٣} + ب^{٣}$.

يُكتَبُ المقدارُ $أ^{٣} + ب^{٣}$ على الصورةِ $أ^{٣} - (-ب)^{٣}$.

$أ^{٣} + ب^{٣} = أ^{٣} - (-ب)^{٣}$

$= (أ - (-ب))(أ^{٢} + أ(-ب) + (-ب)^{٢})$

$= (أ + ب)(أ^{٢} - أب + ب^{٢})$

القانونُ: $أ^{٣} + ب^{٣} = (أ + ب)(أ^{٢} - أب + ب^{٢})$

مجموعُ مكعّبي كمّيّتين = (الكميّةُ الأولى + الكمّيّةَ الثانيةَ)(مربّعُ الكمّيّةِ الأولى - ناتجَ ضربِ الكمّيّتين + مربّعَ الكمّيّةِ الثانيةِ).

مثالٌ (٢)

حلِّلْ: $ص^{٣} + ٦٤$.

الحلُّ: $ص^{٣} + ٦٤ = ص^{٣} + (٤)^{٣}$

$= (ص + ٤)(ص^{٢} - ص \times ٤ + ٤^{٢})$

$= (ص + ٤)(ص^{٢} - ٤ص + ١٦)$

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ حلِّلْ: (أ) $م^{٣} + ٨$.

(ب) $ع^{٣} + ١$.

KuwaitMath.com

مثالٌ (٣)

حلِّلْ: $٨أ^{٣} - ٣٤٣$.

الحلُّ: $٨أ^{٣} - ٣٤٣ = (٢أ)^{٣} - (٧)^{٣}$

$= (٢أ - ٧)((٢أ)^{٢} + ٧ \times ٢أ + (٧)^{٢})$

$= (٢أ - ٧)(٤أ^{٢} + ١٤أ + ٤٩)$

حاوِلْ أن تحلَّ

٣ حلِّلْ: $٢٧ + ٦٤ك^{٣}$.

مثالٌ (٤)

حلِّلْ: $٣ع^{٣} + ١٩٢$ تحليلًا كاملًا.

الحلُّ: $٣ع^{٣} + ١٩٢ = ٣(ع^{٣} + ٦٤)$

$= ٣(ع^{٣} + ٤^{٣})$

$= ٣(ع + ٤)(ع^{٢} - ٤ع + ١٦)$

حاوِلْ أن تحلَّ

٤ $أ^{٣} - ٢٧ب^{٣}$.

تحقَّقْ من فهمِك

١ كيف يُمكِنُك تحويلُ قانونِ الفرقِ بينَ مكعّبين إلى الجمعِ بينَ مكعّبين؟

KuwaitMath.com

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ أكمِلْ لتُحقِّقَ التحليلَ.

(أ) $٢٧س^{٣} + ١ = (... + ١)(٩س^{٢} - .... + ...)$

(ب) $ل^{٣} - \frac{١}{٦٤} = (ل - ...)(ل^{٢} + ... + ...)$

(جـ) $ن^{٦} - ١ = (ن^{٢})^{...} - ١^{...} = (ن^{٢} - ..)(... + ... + ١)$

$= (ن - ...)(ن + ...)(... + ... + ...)$

٢ فكِّرْ: حلِّلْ تحليلًا تامًّا.

(أ) $س^{٣} - ص^{٣} + س^{٢} - ص^{٢}$

.....

.....

.....

(ب) $\frac{١}{١٢٥}$ $أ^{٣}$ $- \frac{٢٧}{٦٤}$ $ص^{٣}$

.....

.....

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

KuwaitMath.com

٣-٣

تحليلُ حدوديّةٍ ثلاثيّةٍ على الصورةِ: س^{٢} + ب س + جـ

Factorising Trinomials of the Form: $x^2 + bx + c$

صلةُ الدرسِ تعلّمْتَ في الدرسِ السابقِ كيفيّةَ التحليلِ باستخدامِ الفرقِ بينَ مربّعين، وتحليلُ الفرقِ بينَ مكعّبينِ ومجموعُ مكعّبينِ والآن سوف تُحلِّلُ حدوديّةً ثلاثيّةً على الصورةِ س^{٢} + ب س + جـ.

سوف تتعلّمُ

- تحليلَ الحدوديّةِ الثلاثيّةِ على الصورةِ: س^{٢} + ب س + جـ.

من الاستخداماتِ

- يستخدمُ الفيزيائيّون تحليلَ الحدوديّاتِ الثلاثيّةِ لحلِّ مسائلِ السقوطِ الحرِّ أو القفزِ بالمظلّةِ.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- حدوديّةٌ ثلاثيّةٌ Trinomial

استكشِفْ: تحليلُ حدوديّةٍ على الصورةِ س^{٢} + ب س + جـ

لتحليلِ س^{٢} + ٦س + ٨ ابحثْ عن عددين يكونُ ناتجُ ضربِهما ٨ وناتجُ جمعِهما ٦.

١ أكمِلِ الجدولَ:

العددان	ناتجُ الضربِ	ناتجُ الجمعِ
١، ٨	٨	٩
-١، -٨	٨	
٢، ٤		
-٢، -٤		

٢ ما العددان اللذان يُحقِّقان الشرطين التاليين: ناتجُ ضربِهما ٨ وناتجُ جمعِهما ٦؟

٣ بسِّطْ: (س + □)(س + ○) حيث □، ○ تُمثِّلان العددين اللذين اخترْتَهما.

٤ كرِّرِ الخطواتِ من: ١ إلى ٣ مع الحدوديّةِ: س^{٢} - ١٠س - ٢٤. أوجِدْ عددين يكونُ ناتجُ ضربِهما -٢٤ وناتجُ جمعِهما -١٠.

تعلَّمْ: تحليلُ حدوديّةٍ على الصورةِ س^{٢} + ب س + جـ

لتحليلِ حدوديّةٍ ثلاثيّةٍ س^{٢} + ب س + جـ إلى عواملِها، ابحثْ عن عددين م، ن يُحقِّقان: م × ن = جـ، م + ن = ب، ثمّ اكتبْ س^{٢} + ب س + جـ = (س + م)(س + ن).

مثالٌ (١)

حلِّلْ: ب^{٢} − ٥ب + ٦ إلى عواملِها.

الحلُّ: ابحثْ عن عددين يكونُ ناتجُ ضربِهما ٦ وجمعِهما −٥.

−١، −٦: (−١) × (−٦) = ٦ ، (−١) + (−٦) = −٧ كلّا

−٢، −٣: (−٢) × (−٣) = ٦ ، (−٢) + (−٣) = −٥ نعم

إذًا: ب^{٢} − ٥ب + ٦ = (ب − ٢)(ب − ٣)

تحقَّقْ: (ب − ٢)(ب − ٣) = ب^{٢} − ٣ب − ٢ب + ٦

= ب^{٢} − ٥ب + ٦

حاوِلْ أن تحلَّ

١ حلِّلْ: س^{٢} + ٧س + ١٢.

لاحِظْ في مثالِ (١) أنّ ناتجَ الضربِ هو ٦، عددٌ موجَبٌ، وبالتالي العددان لهما الإشارةُ نفسُها. وبما أنّ ناتجَ الجمعِ هو −٥ سالبٌ نستنتجُ أنّ العددين سالبان.

مثالٌ (٢)

حلِّلْ: س^{٢} − ١٤س − ٣٢ إلى عواملِها.

الحلُّ: ابحثْ عن عددين ناتجُ ضربِهما −٣٢ وناتجُ جمعِهما −١٤.

العددان +٢، −١٦ يُحقِّقان: ٢ × (−١٦) = −٣٢ ، +٢ − ١٦ = −١٤

إذًا: س^{٢} − ١٤س − ٣٢ = (س + ٢)(س − ١٦)

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ حلِّلْ: م^{٢} + ٢م − ٣٥

لاحِظْ أنّ في المثالِ (٢) ناتجُ الضربِ سالبٌ، إذًا للعددين إشارتان مختلِفتان.

مثالٌ (٣)

حلِّلْ: س^{٢} − ١٢س + ٣٥ إلى عواملِها.

الحلُّ: ابحثْ عن عددين ناتجُ ضربِهما ٣٥ وناتجُ جمعِهما −١٢.

العددان −٥، −٧ يُحقِّقان: (−٥) × (−٧) = ٣٥، (−٥) + (−٧) = −١٢

∴ س^{٢} − ١٢س + ٣٥ = (س − ٥)(س − ٧)

حاوِلْ أن تحلَّ

٣ حلِّلْ: س^{٢} −٢س − ٣٥ إلى عواملِها.

KuwaitMath.com

تحقَّقْ من فهمِك

أيٌّ ممّا يلي هو تحليلٌ للمقدارِ ل^{٢} + ١١ل + ٢٤؟ فسِّرْ.

(١) (ل – ٨)(ل – ٣)　　(٢) (ل – ٨)(ل + ٣)

(٣) (ل + ٢)(ل + ١٢)　　(٤) (ل + ٨)(ل + ٣)

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ أكمِلْ، مستبدِلًا ▭ بالعاملِ الناقصِ أو العواملِ الناقصةِ لتحصلَ على عبارةٍ صحيحةٍ.

(أ) س^{٢} + ٢س – ١٥ = (س + ٥)(　　).

(ب) ل^{٢} + ١٠ل – ٢٤ = (ل – ٢)(　　).

(جـ) ب^{٢} + ▭ ب + ٣٠ = (ب + ٥)(ب + ٦).

٢ هل يُمكِنُ التأكيدُ أنّه لا يُمكِنُ تحليلُ الحدوديّةِ س^{٢} + ٥س + ٨٠ إلى عواملَ؟ فسِّرْ.

.....

.....

.....

٣ في الحدوديّةِ الثلاثيّةِ س^{٢} + ب س + جـ ، ب عددٌ موجَبٌ، م، ن ناتجُ ضربِهما هو جـ وناتجُ جمعِهما هو ب. هل يُمكِنُك التأكيدُ أنّ العددين م، ن هما عددان موجَبان؟ فسِّرْ. أعطِ مثالًا على ذلك.

.....

.....

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

KuwaitMath.com

٣-٤

تحليلُ حدوديّةٍ ثلاثيّةٍ على الصورةِ:
أ س٢ + ب س + جـ ، أ ≠ ٠

Factorising Trinomials of the Form:
$ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

سوف تتعلّمُ

- تحليلَ حدوديّةٍ ثلاثيّةٍ على الصورةِ أ س٢ + ب س + جـ.

من الاستخداماتِ

- يستخدمُ سلاحُ المدفعيّةِ تحليلَ الحدوديّاتِ الثلاثيّةِ لدراسةِ موقعٍ وزمانِ سقوطِ القذيفةِ.

◄ **صلةُ الدرسِ** في الدرسِ السابقِ، حلّلْتَ حدوديّاتٍ ثلاثيّةً على الصورةِ س٢ + ب س + جـ.
والآن، سوف تُحلِّلُ حدوديّاتٍ على الصورةِ: أ س٢ + ب س + جـ ►

استكشِفْ تحليلُ حدوديّةٍ على الصورةِ: أ س٢ + ب س + جـ

١ أوجِدْ ناتجَ ضربِ كلٍّ ممّا يأتي:

(أ) (٢س + ١)(س + ٣) = ...

(ب) (٣س + ٢)(٤س + ١) = ...

(جـ) (٢س − ٣)(س + ١) = ...

٢ ما العلاقةُ بينَ معاملِ س٢ وناتجِ ضربِ معاملي س في العواملِ؟

٣ ما العلاقةُ بينَ الحدِّ الثابتِ في الصيغةِ المبسَّطةِ والحدّين الثابتين في الصيغةِ المحلَّلةِ إلى عواملَ؟

٤ كيف تحصلُ على معاملِ س في الصيغةِ المبسَّطةِ؟ على الصورةِ أ س٢ + ب س + جـ؟

تعلَّمْ تحليلُ حدوديّةٍ ثلاثيّةٍ على الصورةِ أ س٢ + ب س + جـ

لتحليلِ حدوديّةٍ ثلاثيّةٍ على الصورةِ أ س٢ + ب س + جـ إلى عواملَ، نبدأُ أوّلًا بكتابةِ أزواجِ الأعدادِ م، ن ناتجُ ضربِها يُساوي أ، ونكتبُ بالقربِ منها أزواجَ الأعدادِ ك، ل التي يُساوي ناتجُ ضربِها جـ. نختارُ من بينِ أزواجِ الأعدادِ المتوافقةِ التي مجموعُها ب.

ونُمثِّلُ ذلك بالصورةِ:

أ س٢ + ب س + جـ = (م س + ك)(ن س + ل) = م ن س٢ + (م ل + ك ن)س + ك ل

م × ن = أ (معاملُ س٢) م ل + ك ن = ب (معاملُ س) ك × ل = جـ (الحدُّ الثابتُ)

م س	ك
ن س	ل

م س × ل + ن س × ك = ب س (الحدُّ الأوسطُ)

مثالٌ (١)

حلِّلْ: ٥س^{٢} + ٧س − ٦.

الحلُّ:

الطريقةُ الأولى:

الحدوديّةُ الثلاثيّةُ: أس^{٢} + ب س + جـ

تُكتَبُ: (م س + ك)(ن س + ل) وبالمقارنةِ نجدُ أنّ:

م × ن = ٥؛ ك × ل = −٦، م × ل + ك × ن = ٧

نبحثُ عن عددين م، ن يكونُ ناتجُ ضربِهما ٥ ونبحثُ عن عددين ك، ل

ناتجُ ضربِهما −٦ على أن يكونَ: م × ل + ك × ن = ٧

فنجدُ م = ١، ك = ٢، ن = ٥، ل = −٣

وبالتالي، تكونُ الحدوديّةُ بالتحليلِ تُساوي: (١س + ٢) (٥س − ٣)

أو (س + ٢)(٥س − ٣)

الطريقةُ الثانيةُ:

(معاملُ س^{٢}) = ٥	(الحدُّ الثابتُ) = −٦

١ س	٢
٥ س	−٣

حيث إنّ:

١س × (−٣) + ٥س × ٢ = −٣ س + ١٠ س

= ٧س = الحدَّ الأوسطَ

وبالتالي يكونُ: ٥س^{٢} + ٧س − ٦ = (س + ٢)(٥س − ٣)

فكرةٌ مفيدةٌ لحلِّ المسائلِ

(س + أ)(س + أ) = (س + أ)^{٢}

KuwaitMath.com

مثالٌ (٢)

حلِّلْ: ٦س^{٢} − ١٩س + ١٠.

الحلُّ:

الطريقةُ الأولى:

نكتبُ: ٦س^{٢} − ١٩س + ١٠ = (م س + ك)(ن س + ل)

= م ن س^{٢} + (م ل + ك ن)س + ك ل

إذًا، نبحثُ عن العددين م، ن ناتجُ ضربِهما ٦ ونبحثُ عن عددين ك، ل ناتجُ ضربِهما ١٠ على أن يكونَ م ل + ك ن = −١٩

فنجدُ: م = ٢، ن = ٣، ك = −٥، ل = −٢.

وبالتحليلِ نكتبُ: ٦س^{٢} − ١٩س + ١٠ = (٢س − ٥)(٣س − ٢)

الطريقةُ الثانيةُ:

(معاملُ س^{٢}) = ٦	(الحدُّ الثابتُ) = ١٠

٢س	−٥
٣س	−٢

حيث إنّ: ٢س × (−٢) + ٣س × (−٥) = −٤س − ١٥س = −١٩س = الحدَّ الأوسطَ

وبالتالي يكونُ: ٦س^{٢} − ١٩س + ١٠ = (٢س − ٥)(٣س − ٢)

حاوِلْ أن تحلَّ

حلِّلْ:

١ ٣س^{٢} + ٧س − ٦.

٢ ٦س^{٢} − ٥س − ٦.

٣ ١٠س^{٢} + ١٤س − ١٢.

٤ ٤س^{٢} − ١٢س + ٩.

تحقَّقْ من فهمِك

١ كيف تُحلِّلُ المقدارَ الثلاثيَّ أس^{٢} + ب س + جـ، حيث أ ≠ ٠؟ فسِّرْ.

٢ ما الفرقُ بينَ طريقةِ تحليلِ كلٍّ من الحدوديّتين الثلاثيّتين: س^{٢} + ب س + جـ، أس^{٢} + ب س + جـ؟

٣ حلِّلِ الحدوديّةَ ٢س^{٢} + ٨س + ٦ بطريقتين مختلِفتين.

KuwaitMath.com

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ أكمِلْ:

(أ) $س^{٢} - ٦س - ٧ = (س + ١)(س - ...)$

(ب) $٢س^{٢} - ١٥س + ٧ = (س - ٧)(.....)$

(جـ) $٦ب^{٢} + ١٣ب - ٥ = (.....)(.....)$

٢ أوجِدِ القيمةَ التي تُكمِلُ كلَّ مقدارٍ جبريٍّ بحيث يُمكِنُ تحليلُه إلى عاملين كلٌّ منهما مكوَّنٌ من حدّين. وضِّحْ كلَّ تحليلٍ.

(أ) $٢س^{٢} - س - ...$

.....

(ب) $٢ب^{٢} - ٧ب + ...$

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

KuwaitMath.com

المعادلاتُ والمتباينـاتُ
Equations and Inequalities

ما الفائدةُ؟

فجأةً، انطفأَتِ الأنوارُ وأظلمَتْ شاشاتُ التلفزيونِ والحاسوبِ. فلا يُمكِنُك تذكّرُ آخرِ لحظةٍ رأيْتَ فيها وميضَ ضوءٍ من دونِ تلك الإخفاقاتِ النادرةِ في الطاقةِ حيث كنّا بالتأكيدِ سنعتبرُ الطاقةَ الكهربائيّةَ مضمونةً. في يومي ٩-١٠ نوفمبرَ ١٩٦٥، حصلَ أكبرُ إخفاقٍ في تاريخِ الطاقةِ حيث تأثّرَ ٣٠ مليونَ شخصٍ وتركَ مساحةَ ٢٠٨ ٠٠٠ كم^2 في الظلامِ في مدينةِ نيويورك، فقد انقطعَتِ الكهرباءُ الساعةَ ٥:٢٧ ب. ظ ولم تعدْ إلّا بعدَ أكثرَ من ١٣ ساعةً.

هل يُمكِنُك تخيّلُ الفوضى الناتجةِ حيث لا مصاعدَ ولا مصابيحَ شوارعَ ولا حاسوبَ ولا تلفزيونَ! إنّنا ننسى أنّ أشياءَ عديدةً تتوقّفُ عندما تنقطعُ أكبرُ كمّيّةٍ من الكهرباءِ. فالكهرباءُ هي صورةُ طاقةٍ يُمكِنُ تحويلُها إلى طاقةٍ أخرى: الحرارةُ لحفظِ منازلِنا، الضوءُ لمصابيحِنا، طاقةُ الصوتِ في جهازِ التسجيلِ وطاقةٌ ميكانيكيّةٌ لإدارةِ المحرّكاتِ في غسّالاتِ الثيابِ والأطباقِ إلخ.

١. اذكرِ الأجهزةَ الكهربائيّةَ التي تستخدمُها في منزلِك وفي المدرسةِ وتتأثّرُ بانقطاعِ الكهرباءِ.

٢. في رأيِك، ما هي الأجهزةُ التي تستهلكُ طاقةً كهربائيّةً لمدّةِ ساعةٍ؟

٣. في رأيِك، ما الأجهزةُ التي تستهلكُ أكبرَ كمّيّةٍ من الطاقةِ الكهربائيّةِ طيلةَ الوقتِ الذي تعملُ هذه الأجهزةُ خلالَه؟

٥–٣

حلُّ معادلةٍ من الدرجةِ الثانيةِ في متغيِّرٍ واحدٍ بالتحليلِ

Solving Second Degree Equation in One Variable by Factorising

◄ صلةُ الدرسِ حلَلْتَ في الدرسِ السابقِ الفرقَ بينَ مربّعين وحدوديّاتٍ ثلاثيّةٍ، ومجموعَ مكعّبين، والفرقَ بينَ مكعّبين، والآن في هذا الدرسِ، سوف تحلُّ معادلاتٍ من الدرجةِ الثانيةِ في متغيِّرٍ واحدٍ بالتحليلِ. ►

سوف تتعلّمُ

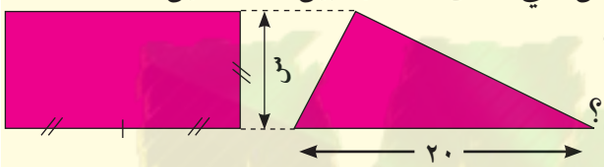
- حلَّ المعادلةِ التربيعيّةِ باستخدامِ التحليلِ.

من الاستخداماتِ

- يستخدمُ البنّاؤون المعادلاتِ التربيعيّةَ عندَ رصفِ سقوفِ المنازلِ بقطعِ القرميدِ.

استكشِفْ حلُّ معادلاتٍ من الدرجةِ الثانيةِ بالتحليلِ

الهدفُ من هذا النشاطِ إيجادُ قيمِ س التي تُحقِّقُ المساواةَ بينَ المساحتين.



١ ما ارتفاعُ المثلّثِ بدلالةِ س؟

٢ ما طولُ المستطيلِ بدلالةِ س؟

٣ اكتبْ كلًّا من مساحةِ المثلّثِ ومساحةِ المستطيلِ بدلالةِ س.

٤ أيٌّ من قيمِ س تُحقِّقُ المعادلةَ $س^{٢} = ٥س$:

س = ٣، س = ٤، س = ٥، س = ٦ ؟

تعلَّمْ خاصّيّةُ الضربِ في صفرٍ

إذا كانَ حاصلُ ضربِ عددين (عاملين) يُساوي صفرًا، فإنّ أحدَهما أو كلاهما يُساوي صفرًا، أي أنّ لكلِّ أ، ب عددين حقيقيّين، إذا كانَ أب = صفرًا، فإنّ أ = ٠ أو ب = ٠

مثالٌ (١)

أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المعادلةِ: (س + ٥)(س + ٦) = ٠، ثمّ تحقَّقْ من صحّةِ الحلِّ.

الحلُّ:

(س + ٥)(س + ٦) = ٠

س + ٥ = ٠ أو س + ٦ = ٠ — استخدِمْ خاصّيّةَ الضربِ في صفرٍ

س = −٥ أو س = −٦ — أوجِدْ قيمَ س

مجموعةُ الحلِّ = {−٥، −٦}

تحقَّقْ: عوِّضْ بـ −٥ بدلًا من س — عوِّضْ بـ −٦ بدلًا من س

(−٥ + ٥)(−٥ + ٦) = صفرًا — (−٦ + ٥)(−٦ + ٦) = صفرًا

٠ × ١ = ٠ (عبارةٌ صحيحةٌ) — (−١) × ٠ = ٠ عبارةٌ صحيحةٌ

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- معادلةٌ من الدرجةِ الثانيةِ في متغيِّرٍ واحدٍ
  Second Degree Equation with One Variable
- حلُّ معادلةٍ
  Solving an Equation

Kuwaitmath.com

حاوِلْ أن تحلَّ

١ أوجِدْ مجموعةَ حلِّ كلِّ معادلةٍ ممّا يلي:

(أ) (س + ٧)(س − ٤) = ٠ (ب) (٣ص − ٥)(ص − ٢) = ٠

مثالٌ (٢)

أوجِدْ مجموعةَ حلِّ كلِّ معادلةٍ ممّا يلي:

(أ) $س^{٢} - ٥س = ٠$ (ب) $(س + ٢)^{٢} = ١٤٤$

الحلُّ:

(أ) $س^{٢} - ٥س = ٠$

س(س − ٥) = ٠ حلِّلْ

س = ٠ أو س − ٥ = ٠ استخدِمْ خاصّيّةَ الضربِ في صفرٍ

س = ٠ أو س = ٥ أوجِدْ قيمَ س

مجموعةُ الحلِّ = {٠، ٥}

الحلُّ:

(ب) $(س + ٢)^{٢} - ١٤٤ = ٠$

(س + ٢ − ١٢)(س + ٢ + ١٢) = ٠ الفرقُ بينَ مربّعين

(س − ١٠)(س + ١٤) = ٠ بسِّطْ

س − ١٠ = ٠ أو س + ١٤ = ٠ استخدِمْ خاصّيّةَ الضربِ في صفرٍ

س = ١٠ أو س = −١٤ أوجِدْ قيمَ س

مجموعةُ الحلِّ = {١٠، −١٤}

هل تعلمُ؟

قدّمَ الخوارزميُّ في كتابِه «حسابُ الجبرِ والمقابلةُ» حوالى العامِ ٨٣٠ م، أوّلَ حلٍّ منهجيٍّ للمعادلاتِ التربيعيّةِ.

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ أوجِدْ مجموعةَ حلِّ كلِّ معادلةٍ ممّا يلي:

(أ) $س^{٢} - ١٢س = ٠$ (ب) $٣س^{٢} = ١٢$

مثالٌ (٣)

أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المعادلةِ: $٦ص^{٢} + ١٢ص + ١٣ = ٢ص^{٢} + ٤$.

الحلُّ:

$٦ص^{٢} + ١٢ص + ١٣ = ٢ص^{٢} + ٤$

KuwaitMath.com

٦ص^{٢} − ٢ص^{٢} + ١٢ص + ١٣ − ٤ = ٠ أضِفِ المعكوسَ الجمعيَّ إلى كلٍّ من ٢ص^{٢}، +٤

٤ص^{٢} + ١٢ص + ٩ = ٠ بسِّطْ

(٢ص + ٣) (٢ص + ٣) = ٠

(٢ص + ٣)^{٢} = ٠ $أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢} = (أ + ب)^{٢}$

٢ص + ٣ = ٠ ∵ $أ^{٢}$ = ٠ ∴ أ = ٠

٢ص = −٣

ص = $-\frac{٣}{٢}$

مجموعةُ الحلِّ = $\{-\frac{٣}{٢}\}$

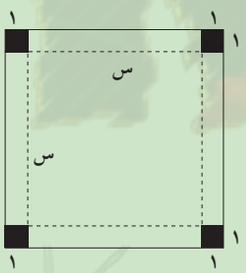
حاوِلْ أن تحلَّ

٣ أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المعادلةِ: ٣٥س^{٢} + ٤٥س − ١ = ١٠س^{٢} − ٢٥س − ٥٠

مثالٌ (٤)

يُوضِّحُ الرسمُ أدناه مخطَّطَ شبكةِ صندوقٍ مفتوحٍ من الواجهةِ العلويّةِ، المساحةُ الكلّيّةُ للوحةِ الورقِ المقوّى المصنوعِ منه الصندوقُ هي ١٤٤سم^{٢}، وارتفاعُ الصندوقِ ١سم، وقد تمَّ قطعُ ١سم × ١سم من كلِّ ركنٍ من أركانِ لوحةِ الورقِ المقوّى.

أوجِدْ أبعادَ الصندوقِ.



الحلُّ:

الشكلُ المرسومُ هو منطقةٌ مربّعةٌ

طولُ ضلعِها = س + ١ + ١ = س + ٢

مساحةُ المنطقةِ المربّعةِ = طولَ الضلعِ في نفسِه

١٤٤ = (س + ٢)(س + ٢)

أي أنّ (س + ٢)^{٢} = ١٤٤

(س + ٢)^{٢} − (١٢)^{٢} = ٠ ١٤٤ = ١٢^{٢}

(س + ٢ − ١٢)(س + ٢ + ١٢) = ٠ الفرقُ بينَ مربّعين

(س − ١٠)(س + ١٤) = ٠ بسِّطْ

س − ١٠ = ٠ أو س + ١٤ = ٠ خاصّيّةُ الضربِ في صفرٍ

س = ١٠ أو س = −١٤

وحيث إنّ الطولَ يجبُ أن يكونَ موجَبًا، فالحلُّ هو ١٠ . وعلى ذلك تكونُ أبعادُ الصندوقِ هي ١٠سم، ١٠سم، ١سم.

تحقَّقْ من فهمِك

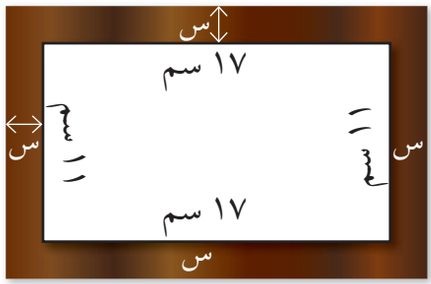
١ ما خاصّيّةُ الضربِ في صفرٍ؟ أعطِ مثالًا على ذلك.

٢ هل يُمكِنُ تطبيقُ هذه الخاصّيّةِ إذا استُبدِلَ الصفرُ بـ ٥؟ فسِّرْ.

KuwaitMath.com

حلُّ المسائلِ
افهمْ
خطِّطْ
حُلَّ
تحقَّقْ

يُخطِّطُ رامي لصنعِ إطارٍ خشبيٍّ لصورةٍ أخذَها أثناءَ رحلةٍ قامَ بها مع عائلتِه.
يبلغُ طولُ الصورةِ ١٧ سم وعرضُها ١١ سم.



ويُريدُ رامي أن يكونَ للإطارِ العرضُ نفسَهُ من الجهاتِ الأربعِ وأن تكونَ مساحةُ الصورةِ مع الإطارِ ٣١٥ سم^{٢}. كم يجبُ أن يكونَ عرضُ الإطارِ؟

افهمْ

١ ما هي معطَياتُ المسألةِ؟ .....

٢ ما المطلوبُ إليك إيجادُه؟ .....

خطِّطْ

٣ **فسِّرِ المعادلةَ:** (٢س + ١١) (٢س + ١٧) = ٣١٥. .....

٤ بسِّطِ المعادلةَ في ٣. .....

٥ ما صورةُ المعادلةِ التي حصلْتَ عليها؟ .....

٦ ما طريقةُ الحلِّ التي ستعتمدُها؟ .....

.....

حُلَّ

٧ حلِّلْ: س^{٢} + ١٤س − ٣٢ إلى عواملَ. .....

٨ حُلَّ المعادلةَ س^{٢} + ١٤س − ٣٢ = ٠ .....

٩ لماذا حصلْتَ على إجابتين؟ .....

تحقَّقْ

١٠ هل القيمتان اللتان حصلْتَ عليهما مقبولتان؟ فسِّرْ. .....

.....

حُلَّ مسألةً أخرى

١١ تُريدُ صنعَ إطارٍ خشبيٍّ لصورةٍ أبعادُها ٢٠ سم ، ١٤ سم وتُريدُ أن يكونَ عرضُ الإطارِ هو نفسَه في الجهاتِ الأربعِ وأن تكونَ مساحةُ الصورةِ مع الإطارِ ٥٢٠ سم^{٢}. كم عرضُ الإطارِ؟ .....

KuwaitMath.com

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ **حسابٌ ذهنيٌّ**: استخدِمِ الحسابَ الذهنيَّ لحلِّ كلِّ معادلةٍ ممّا يأتي:

(أ) (س – ٣)(س – ٢) = ٠

.....

.....

(ب) (س + ٤)(٢س – ٩) = ٠

.....

.....

٢ **الهندسةُ**: إذا زادَ طولُ كلِّ ضلعٍ من أضلاعِ مربّعٍ ٣ سم، فإنّ مساحةَ المربّعِ الجديدِ ستكونُ ٦٤ سم^{٢}، أوجِدْ طولَ ضلعِ المربّعِ الأصليِّ.

.....

.....

.....

٣ قطعةُ أرضٍ مستطيلةُ الشكلِ طولُها ضعفُ عرضِها، ومساحتُها تُساوي ٨٠٠ م^{٢}.

أوجِدْ بعدي قطعةِ الأرضِ.

.....

.....

٤ صندوقٌ على شكلِ شبهِ مكعّبٍ أبعادُه : ٤، س + ٢، س + ٢ من السنتميتراتِ، وحجمُه ٤٠٠ سم^{٣}.

أوجِدْ قيمةَ س.

.....

.....

٥ **التحضيرُ للاختبارِ**: إذا كانَ أ^{٢} + ب^{٢} = ٩، أب = ٦، فما قيمةُ (أ + ب)^{٢}؟

.....

(أ) ٣ (ب) ١٥ (جـ) ٢١ (د) ٣٠ (هـ) ٣٦

٦ **التحدّي**: حُلَّ المعادلةَ: س^{٣} – ١٦ س = صفرًا.

.....

.....

.....

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

KuwaitMath.com

٦-٣

حلُّ متباينةٍ من الدرجةِ الأولى في متغيِّرٍ واحدٍ

Solving First Degree Inequality in One Variable

سوف تتعلّمُ

- حلَّ متبايناتٍ من الدرجةِ الأولى مع متغيِّرٍ واحدٍ.

من الاستخداماتِ

- يحلُّ الإخصائيّون في المعاملِ المتباينات كي لا تتخطّى كلفةُ إنتاجِ السلعةِ المبلغَ المقرَّرَ.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- متباينةٌ Inequality

◄ **صلةُ الدرسِ** درسْتَ فيما سبقَ حلَّ المتباينات وتعرّفْتَ القيمةَ المطلَقةَ للعددِ، والآن، سوف نحلُّ مسائلَ متباينات تتضمّنُ القيمةَ المطلَقةَ. ►

استكشِفْ حلُّ متباينةٍ من الدرجةِ الأولى مع متغيِّرٍ واحدٍ

في مهرجانِ نهايةِ العامِ، أرادَ نادي الرياضةِ في المدرسةِ تصميمَ رايةٍ مستطيلةِ الشكلِ يُحيطُ بها شريطٌ من قماشٍ ذهبيِّ اللونِ.

١ ما القانونُ الذي يُعطي محيطَ الرايةِ؟

٢ قرّرَتْ لجنةُ النادي أن يكونَ طولُ الرايةِ ٦٨ سم شرطَ ألّا يتعدّى طولُ شريطِ القماشِ ذهبيِّ اللونِ ٢٢٠ سم. اكتبْ متباينةً تُحقِّقُ هذه الشروطَ.

٣ (أ) حُلَّ المتباينةَ التي كتبْتَها.

(ب) ما العرضُ الأقصى للرايةِ؟

تعلَّمْ حلُّ متباينةٍ من الدرجةِ الأولى مع متغيِّرٍ واحدٍ

في المعادلاتِ نستخدمُ علاقةَ المساواةِ، بينما في المتباينات نستخدمُ العلاقاتِ (<، ≤، >، ≥).

المتباينات ٢٠س > ٥، ب < −٣، ٢م + ٤ ≤ ٧، هي متبايناتٌ من الدرجةِ الأولى في متغيِّرٍ واحدٍ، بينما ٣ص^{٢} − ٤ > ٥ هي متباينةٌ من الدرجةِ الثانيةِ لأنّ أسَّ المتغيِّرِ ص يُساوي ٢.

طريقةُ حلِّ المتباينات من الدرجةِ الأولى في متغيِّرٍ واحدٍ تُشبِهُ طريقةَ حلِّ المعادلاتِ من الدرجةِ الأولى في متغيِّرٍ واحدٍ.

المتباينةُ ٢م + ٤ > ٧، إذا كانَتْ م = ٣، تُصبِحُ ٢ × ٣ + ٤ > ٧ وهذه عبارةٌ صحيحةٌ. العددُ ٣ يُحقِّقُ المتباينةَ وهو أحدُ حلولِها.

KuwaitMath.com

مثالٌ (١)

أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ ٢م + ٤ > ٧ في ح، ومثِّلْ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ.

الحلُّ:

٢م + ٤ > ٧

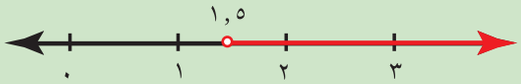
٢م + ٤ − ٤ > ٧ − ٤ أضِفِ المعكوسَ الجمعيَّ (−٤) إلى الطرفين

٢م > ٣ بسِّطْ

$\frac{١}{٢} \times ٢م > \frac{١}{٢} \times ٣$ اضربِ الطرفين في المعكوسِ الضربيِّ للعددِ ٢

$م > \frac{٣}{٢}$ أي م > ١,٥

مجموعةُ الحلِّ = (١,٥ ، ∞)



يُمكِنُ تمثيلُ مجموعةِ الحلِّ على النحوِ المبيَّنِ إلى اليسارِ.

حاوِلْ أن تحلَّ

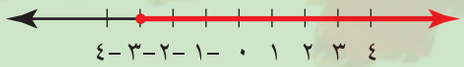
١ أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ ٣س − ٥ ≤ ٤ في ح، ومثِّلْ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ.

مثالٌ (٢)

أوجِدْ مجموعةَ حلِّ ٥ − س ≥ ٨ في ح، ومثِّلْها على خطِّ الأعدادِ.

الحلُّ:

٥ − س ≥ ٨



− س ≥ −٥ + ٨

−س ≥ ٣

س ≤ −٣

مجموعةُ حلِّ المتباينةِ : [−٣، ∞)

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ حُلَّ: ٤ − ٢س ≤ −٦، ومثِّلْها على خطِّ الأعدادِ.

حُلَّ متبايناتٍ تتضمّنُ قيمةً مطلَقةً.

علمْنا فيما سبقَ أنّه إذا كانَ |س| = ٢ حيث ٢ ∈ ح+

فإنّ س = −٢ أو س = ٢

والآن، ماذا نستنتجُ إذا كانَ |س| ≥ ٢ حيث ٢ ∈ ح+

تذكَّرْ

ط = مجموعةُ الأعدادِ الطبيعيّةِ.

ص = مجموعةُ الأعدادِ الصحيحةِ.

ن = مجموعةُ الأعدادِ النسبيّةِ.

$\overline{ن}$ = مجموعةُ الأعدادِ غيرِ النسبيّةِ.

ح = مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيّةِ.

فكرةٌ مفيدةٌ لحلِّ المسائلِ

مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيّةِ الموجَبةِ يُرمَزُ إليها بالرمزِ ح+

مساعدةٌ رياضيّةٌ

عندَ ضربِ طرفي المتباينةِ في عددٍ سالبٍ نعكسُ علاقةَ الترتيبِ.

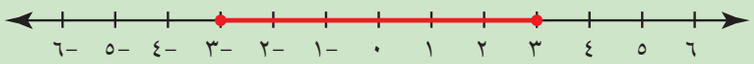
KuwaitMath.com

مثالٌ (٣)

أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ: |س| ≥ ٣ في ح ومثِّلِ الحلَّ على خطِّ الأعدادِ.

المتباينةُ |س| ≥ ٣ تعني أنّ س عددٌ حقيقيٌّ بعدُه عن الصفرِ أصغرُ من أو يُساوي ٣، أي أنّ:

-٣ ≥ س ≥ ٣



وتُكتَبُ مجموعةُ حلِّ المتباينةِ كالتالي [-٣، ٣].

تعميم:

إذا كانَ |س| ≥ أ فإنّ -أ ≥ س ≥ أ والعكسُ صحيحٌ حيث س ∈ ح، أ ∈ ح+

مثالٌ (٤)

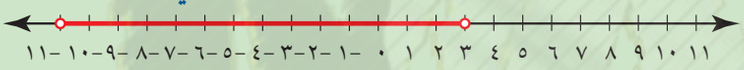
أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ |س + ٤| < ٧ في ح، ومثِّلْها على خطِّ الأعدادِ .

الحلُّ: |س + ٤| < ٧

-٧ < س + ٤ < ٧ استخدِمِ التعميمَ

-٧ - ٤ < س + ٤ - ٤ < ٧ - ٤ أضِفِ المعكوسَ الجمعيَّ (-٤)

-١١ < س < ٣



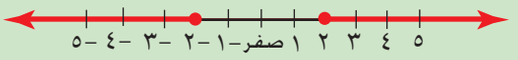
مجموعةُ الحلِّ: (-١١، ٣)

مثالٌ (٥)

أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ |س| ≥ ٢ في ح ومثِّلِ الحلَّ على خطِّ الأعدادِ.

الحلُّ: المتباينةُ |س| ≥ ٢ تعني أنّ س عددٌ حقيقيٌّ بُعده عن الصفرِ أكبرُ من أو يُساوي ٢

أي أنّ س ≥ ٢ أو س ≤ -٢



وتُكتَبُ مجموعةُ حلِّ المتباينةِ كالتالي:

[٢، ∞) ∪ (-∞، -٢]

تعميم:

إذا كانَ |س| ≥ أ فإن س ≥ أ أو س ≤ -أ حيث س ∈ ح، أ ∈ ح+

KuwaitMath.com

مثالٌ (٦)

أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ: $|٢س - ١| + ٢ > ٥$ في ح، ومثِّلْ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ

الحلُّ: $|٢س - ١| + ٢ > ٥$

$|٢س - ١| + ٢ - ٢ > ٥ - ٢$ إضافةُ المعكوسِ الجمعيِّ إلى الطرفين (-٢)

$|٢س - ١| > ٣$ استخدِمِ التعميمَ

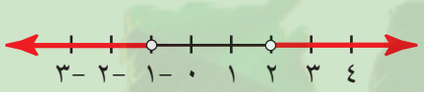
$٢س - ١ > ٣$ أو $٢س - ١ < -٣$

$٢س > ٣ + ١$ $٢س < -٣ + ١$

$٢س > ٤$ $٢س < -٢$

$س > ٢$ $س < -١$

مجموعةُ الحلِّ: $(٢، \infty) \cup (-\infty، -١)$.



حاوِلْ أن تحلَّ

٣ أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ $|س + ٧| < ٥$ في ح، ومثِّلْ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ.

٤ أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ $٢|م + ٨| \geq ٤$ في ح، ومثِّلْ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ.

مثالٌ (٧)

أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ: $|٢س + ٥| - ٢ \leq ٣$ في ح، ومثِّلْ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ.

الحلُّ: $|٢س + ٥| - ٢ \leq ٣$

$|٢س + ٥| - ٢ + ٢ \leq ٣ + ٢$ إضافةُ المعكوسِ الجمعيِّ إلى الطرفين (٢)

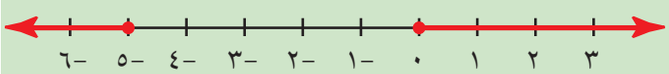
$|٢س + ٥| \leq ٥$

$٢س + ٥ \leq ٥$ أو $٢س + ٥ \geq -٥$ استخدِمِ التعميمَ

$٢س \leq ٠$ $٢س \geq -١٠$

$س \leq ٠$ $س \geq -٥$

مجموعةُ الحلِّ: $[٠، \infty) \cup (-\infty، -٥]$.



حاوِلْ أن تحلَّ

٥ أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ $|٣س - ٢| + ٤ \leq ٨$ في ح، ومثِّلْ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ.

٦ أوجِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ $|٣ص - ١| + ٣ \geq ٤$ في ح، ومثِّلْ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ.

KuwaitMath.com

تحقَّقْ من فهمِك

١ اكتبْ ٤ قيمٍ للمتغيِّرِ تُحقِّقُ كلَّ متباينةٍ ممّا يلي:

(أ) $\frac{١}{٢}$ س $< ٠,٥$ (ب) $\frac{س}{٣} \geq -٤$ (جـ) $-٦ل > ٦$

٢ أعطِ قيمةً لـ س تُحقِّقُ المتباينتين معًا.

$٢(س + ٥) \leq ٤، ٣(س - ١) > ٣$

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ قالَ خالدٌ إنّه يستطيعُ حلَّ المتباينةِ س $- \frac{١}{٢} \geq ١٣$ بالتعويضِ عن س بـ ١٣، ١٤، ١٥. وعندما عوّضَ عن س = ١٣ كانَتِ العبارةُ الناتجةُ خطأً. وعندما عوّضَ عن س = ١٤، كانَتِ المتباينةُ صحيحةً؛ لذلك قالَ خالدٌ إنّ حلَّ المتباينةِ هو س $\leq$ ١٤، فهل قولُه صحيحٌ؟ فسِّرْ إجابتَك.

.....

.....

٢ عبِّرْ عن المتباينةِ م $- ٢ > ٧$ بالكلماتِ.

.....

٣ ليحصلَ طالبٌ على تقديرٍ ممتازٍ في مادّةِ الرياضيّاتِ، فإنّ عليه أن يحصلَ على ما لا يقلُّ عن ٢٧٠ درجةً في ٣ اختباراتٍ لهذه المادّةِ. حصلَ سالمٌ على الدرجاتِ ٩١، ٨٤ في الاختبارين الأوّلِ والثاني. ما الدرجاتُ التي يُمكِنُ أن يحصلَ عليها سالمٌ في الاختبارِ الثالثِ لكي يكونَ تقديرُه ممتازًا؟

.....

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

KuwaitMath.com

الوَحدةُ الثالثةُ (جـ)

الحدوديّاتُ النسبيّةُ
Rational Polynomials (Functions)

منذ القدمِ، حاولَ الإنسانُ سبرَ أغوارِ المحيطاتِ، ولكنّ محاولاتِه باءَتْ بالفشلِ بسببِ ضعفِ الإمكاناتِ والمواردِ، بالإضافةِ إلى خطورةِ الغطسِ إلى تلك الأعماقِ السحيقةِ.

أمّا اليومَ، فيكتشفُ العلماءُ قعرَ المحيطاتِ باستخدامِ مختبَراتٍ داخلَ غوّاصاتٍ تستطيعُ الغوصَ إلى عمقٍ حوالى ٧٠٠٠ مترٍ. فيُصبِحُ ضغطُ الماءِ على الغوّاصةِ حوالى ٣٣ كيلوجرامًا/ سم^{٢}. لذا تُؤخَذُ بعينِ الاعتبارِ مساحةُ الغوّاصةِ وحجمُها باستخدامِ العمليّاتِ مع الحدوديّاتِ النسبيّةِ، للتأكّدِ من دقّةِ القياساتِ وتأمينِ سلامةِ الغوّاصةِ وركّابِها.

١ هل التعابيرُ الجبريّةُ حدوديّاتٌ نسبيّةٌ؟

٢ لماذا لا يستطيعُ الإنسانُ تحمّلَ الضغطِ في أعماقِ البحرِ؟

٣-٧

الحدوديّاتُ النسبيّةُ وتبسيطُها

Simplifying Rational Expressions

سوف تتعلّمُ

- الحدوديّاتِ النسبيّةَ.
- تبسيطَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ.

من الاستخداماتِ

- يستخدمُ الطهاةُ الحدوديّاتِ النسبيّةَ لتقديرِ الوقتِ اللازمِ لإنضاجِ العجينِ كي يُصبحَ خبزًا.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

◄ حدوديّةٌ نسبيّةٌ
Rational Expression

ملحوظةٌ

المقاماتُ أينما وُجِدَتْ ≠ ٠

◄ **صلةُ الدرسِ** حلّلْتَ في الدرسِ السابقِ بعضَ الحدوديّاتِ الثلاثيّةِ. والآن، سوف تتعرّفُ الحدوديّاتِ النسبيّةَ وتبسيطَها. ►

استكشِفْ تبسيطُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ

يستخدمُ الغطّاسون في البحارِ غوّاصةً على شكلِ كرةٍ طولُ نصفِ قطرِها $س$، وذلك كمعملٍ اختباريٍّ لدراسةِ البحارِ والمحيطاتِ.

إذا كانَتِ المساحةُ السطحيّةُ للغوّاصةِ = $٤\pi س^{٢}$.

حجمُ الغوّاصةِ = $\frac{٤}{٣}\pi س^{٣}$.

١ اكتبْ نسبةَ المساحةِ السطحيّةِ إلى الحجمِ.

٢ اختصِرْ بالعاملِ المشترَكِ. اشرحِ الإجابةَ.

تعلَّمْ تبسيطُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ

الكسورُ مثلُ $\frac{٥}{٩}$، $\frac{٧}{١٢}$، $\frac{١}{٢}$، تُدعى أعدادًا نسبيّةً. تُسمّى كلٌّ من المقاديرِ الجبريّةِ التاليةِ:

$\frac{١}{س}$ ، $\frac{س + ٢}{س - ٣}$ ، $\frac{س^{٢} - ٥}{س^{٢} - ١٠س + ٢٥}$ حدوديّاتٍ نسبيّةً (لأنّ كلًّا من البسطِ والمقامِ حدوديّةٌ).

بالتأكيدِ قيمةُ الحدوديّةِ في المقامِ لا يُمكِنُ أن تكونَ صفرًا، لأنّ القسمةَ على صفرٍ غيرُ محدَّدةٍ. في هذا الدرسِ نعتبرُ أنّ قيمَ المتغيِّراتِ التي تُعطي قيمةَ صفرٍ للمقامِ هي قيمٌ غيرُ مقبولةٍ، وعليه فإنّ المقامَ لا يُساوي صفرًا لأيِّ حدوديّةٍ نسبيّةٍ سواءٌ أذكرْنا ذلك أم لم نذكرْه. وكما في تبسيطِ الكسورِ الاعتياديّةِ، تستطيعُ أيضًا وبالطريقةِ نفسِها تبسيطَ الحدوديّةِ النسبيّةِ أو اختصارَها أو وضعَها في أبسطِ صورةٍ، وذلك بقسمةِ كلٍّ من الحدوديّتين في البسطِ والمقامِ على العاملِ المشترَكِ الأكبرِ (ع. م. ﻫ) لهما.

فمثلًا، $\frac{ر + ٥}{١٠ر}$ هي في أبسطِ صورةٍ.

مثالٌ (١)

بسِّطِ الحدوديّةَ النسبيّةَ $\frac{٦ص + ١٢}{ص + ٢}$

الحلُّ:

$$\frac{٦ص + ١٢}{ص + ٢} = \frac{٦(ص + ٢)}{ص + ٢}$$ تحليلُ البسطِ

$$= \frac{٦(ص + ٢)}{ص + ٢}$$ اقسمْ على العاملِ المشترَكِ (ص + ٢) بشرطِ أنّ ص ≠ −٢

$$= ٦$$

حاوِلْ أن تحلَّ

١ بسِّطْ كلَّ حدوديّةٍ نسبيّةٍ ممّا يلي:

(أ) $\frac{١٥ب}{٢٥ب^{٢}}$ (ب) $\frac{١٢ع^{٢}}{٣ع + ٦}$ (جـ) $\frac{٤م - ٢}{١ - ٢م}$

قد تحتاجُ إلى تحليلِ الحدوديّاتِ الثلاثيّةِ لتبسيطِ الحدوديّاتِ النسبيّةِ.

مثالٌ (٢)

بسِّطِ الحدوديّةَ النسبيّةَ $\frac{٢س - ١٢}{س^{٢} - ٧س + ٦}$

الحلُّ:

$$\frac{٢س - ١٢}{س^{٢} - ٧س + ٦} = \frac{٢(س - ٦)}{(س - ٦)(س - ١)}$$ حلِّلِ البسطَ والمقامَ واختصِرْ بشرطِ أنّ س ≠ ٦، س ≠ ١

$$= \frac{٢}{س - ١}$$

مثالٌ (٣)

بسِّطِ الحدوديّةَ النسبيّةَ $\frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} - ٥س + ٦}$

الحلُّ:

$$\frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} - ٥س + ٦} = \frac{(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)}{(س - ٢)(س - ٣)}$$ حلِّلِ البسطَ والمقامَ واختصِرْ بشرطِ أنّ س ≠ ٢، س ≠ ٣

$$= \frac{س^{٢} + ٢س + ٤}{س - ٣}$$

KuwaitMath.com

مثالٌ (٤)

بسِّطِ الحدوديّةَ النسبيّةَ $\frac{٢٧س^{٣}+١٢٥}{٣س^{٢}-س-١٠}$

الحلُّ:

$$\frac{٢٧س^{٣}+١٢٥}{٣س^{٢}-س-١٠}=\frac{(٣س+٥)(٩س^{٢}-١٥س+٢٥)}{(٣س+٥)(س-٢)}$$

حلِّلِ البسطَ والمقامَ بشرطِ أنّ $س \neq -\frac{٥}{٣}$، $س \neq ٢$

$$=\frac{٩س^{٢}-١٥س+٢٥}{س-٢}$$

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ بسِّطْ كلًّا من الحدوديّاتِ النسبيّةِ الآتيةِ:

(أ) $\frac{٣س+١٢}{س^{٢}-س-٢٠}$ (ب) $\frac{س^{٣}+٢٧}{س^{٢}-٣س+٩}$ (جـ) $\frac{٨أ+١٦}{٢+أ٥+أ^{٢}٢}$

يُمكِنُ استخدامُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ لنمذجةِ بعضِ مسائلِ الحياةِ اليوميّةِ.

مثالٌ (٥)

يرتبطُ الزمنُ الذي نخبزُ خلالَه العجينَ بقياسِ وشكلِ قطعةِ العجينِ. فمثلًا، يُقدَّرُ زمنُ خبزِ قطعةِ عجينٍ أسطوانيّةِ الشكلِ بالمعادلةِ $ن = \frac{١٢ س \times ع}{س + ع}$ حيث ن: الزمنُ بالدقائقِ، س = طولُ نصفِ القطرِ بالسنتيمترِ، ع: الارتفاعُ بالسنتيمترِ أيضًا. قدِّرِ الزمنَ اللازمَ لخبزِ قطعةِ عجينٍ أسطوانيّةِ الشكلِ طولُ نصفِ قطرِ قاعدتِها ١٠ سم وارتفاعُها ١٢ سم.

$$ن = \frac{١٢ س \times ع}{س + ع} = \frac{١٢ \times (١٠) \times (١٢)}{١٠ + ١٢} = \frac{١٤٤٠}{٢٢} \approx ٦٥$$

زمنُ خبزِ قطعةِ العجينِ هو تقريبًا ٦٥ دقيقةً.

حاوِلْ أن تحلَّ

٣ باستخدامِ المعادلةِ الواردةِ في مثالِ (٣)، قدِّرِ الزمنَ اللازمَ لخبزِ قطعةِ عجينٍ أسطوانيّةِ الشكلِ طولُ نصفِ قطرِ قاعدتِها ١٠ سم وارتفاعُها ٨سم.

تحقَّقْ من فهمِك

١ أيٌّ ممّا يلي ليسَ حدوديّةً نسبيّةً؟ فسِّرْ.

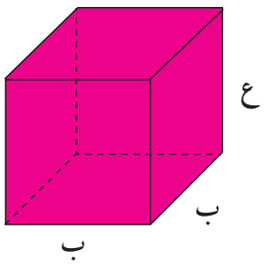
(أ) $\frac{س^{٢}-٢س+١٥}{س}$ (ب) $\frac{٣}{م+١}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣ل+٤}}{ل+١}$

٢ اشرحْ كيف تُبسِّطُ حدوديّةً نسبيّةً. دعِّمْ شرحَك بمثالٍ.

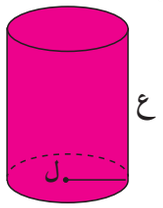
حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ **البناءُ:** للتخفيفِ من كلفةِ التبريدِ، يُحاوِلُ المهندسون أن تكونَ نسبةُ مساحةِ سطحِ المجسَّمِ إلى حجمِه أصغرَ ما يُمكِنُ. أوجِدِ الحدوديّةَ النسبيّةَ التي تُمثِّلُ مساحةَ سطحِ المجسَّمِ إلى حجمِه في كلِّ شكلٍ ممّا يلي:

(أ)



(ب)



.....

.....

٢ اشرحْ متى $\frac{س^{٢} - ٩}{س + ٣}$ لا تُساوي س − ٣.

.....

.....

٣ **التفكيرُ المنطقيُّ:** حدِّدْ ما إذا كانَتْ كلُّ عبارةٍ ممّا يلي هي صحيحةً دائمًا أو صحيحةً أحيانًا أو غيرَ صحيحةٍ.

(أ) $\frac{٢ب}{ب} = ٢$ .....

(ب) $\frac{٢ب^{٣}}{ب^{٤}} = \frac{٢}{ب}$ .....

(جـ) $\frac{٢ك + ١٠}{١٢} = \frac{ك + ٥}{٦}$ .....

٤ اكتبْ حدوديّةً نسبيّةً تُصبِحُ بعدَ تبسيطِها $\frac{٣}{(س - ٢)(س + ٣)}$.

.....

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

KuwaitMath.com

٣-٨

جمعُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ

Adding Rational Expressions

◄ **صلةُ الدرسِ** تعرّفْتَ الحدوديّاتِ النسبيّةَ وتبسيطَها. والآن سوف تجمعُ الحدوديّاتِ النسبيّةَ. ►

سوف تتعلّمُ

- جمعَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ.

من الاستخداماتِ

- يستخدمُ الفنّيّون جمعَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ في تقديرِ وقتِ الرحلاتِ الجوّيّةِ بينَ مدينتين أو دولتين.

استكشِفْ جمعُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ

يتألّفُ أحدُ السباقاتِ من ثماني دوراتٍ، تبلغُ مسافةُ كلِّ دورةٍ ١٠ كم. أنهى أحدُ المتسابقين أوّلَ ثلاثِ دوراتٍ خلالَ زمنِ ن دقيقةٍ، أمّا في بقيّةِ الدوراتِ فقد زادَ من سرعتِه وأنهى هذه الدوراتِ في الزمنِ نفسِه ن دقيقةٍ كما في الدوراتِ الثلاثِ الأولى.

١ اكتبْ حدوديّةً نسبيّةً تُمثِّلُ متوسِّطَ سرعةِ المتسابقِ بدلالةِ الزمنِ في الدوراتِ الثلاثِ الأولى.

٢ اكتبْ حدوديّةً نسبيّةً تُمثِّلُ متوسِّطَ سرعةِ المتسابقِ بدلالةِ الزمنِ في الدوراتِ الخمسِ الباقيةِ.

٣ أوجِدْ متوسِّطَ سرعتِه في مجملِ السباقِ بدلالةِ الزمنِ في أبسطِ صورةٍ.

تعلَّمْ جمعُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ

أوّلًا: جمعُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ الموحَّدةِ.

يُشبِهُ جمعُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ الموحَّدةِ، جمعَ الأعدادِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ الموحَّدةِ. إذا كانَتْ ﺃ، ب، جـ تُمثِّلُ حدوديّاتٍ (جـ ≠ ٠) فإنّ $\frac{\text{ﺃ}}{\text{جـ}} + \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{ﺃ} + \text{ب}}{\text{جـ}}$

تذكَّرْ

مقامُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ لا يُساوي صفرًا أينما وُجِدَ

مثالٌ (١)

اجمعْ: $\frac{٢}{س + ٣}$ ، $\frac{٥}{س + ٣}$

الحلُّ: $\frac{٢}{س + ٣} + \frac{٥}{س + ٣} = \frac{٥ + ٢}{س + ٣}$ جمعُ البسوطِ

$= \frac{٧}{س + ٣}$ التبسيطُ

حاوِلْ أن تحلَّ

١ أوجِدْ ناتجَ كلٍّ ممّا يلي في أبسطِ صورةٍ.

(أ) $\frac{٣}{س + ٢} + \frac{٢}{س + ٢}$

(ب) $\frac{ص}{ص - ٥} + \frac{٣ص}{ص - ٥}$

(جـ) $\frac{٥ن}{ن + ١} + \frac{٥}{ن + ١}$

Kuwaitvan.com

ثانيًا: جمعُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ المختلِفةِ.

لجمعِ الحدوديّاتِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ المختلِفةِ، يُمكِنُك أن تبدأَ بكتابةِ هذه الحدوديّاتِ مع المقامِ المشترَكِ الأصغرِ، وهو المضاعَفُ المشترَكُ الأصغرُ للمقامين.

م.م.^{2} (الأعدادُ الكلّيّةُ)

$٤ = ٢ \times ٢$

$٦ = ٢ \times ٣$

م.م.^{2} $= ٢ \times ٢ \times ٣ = ١٢$

م.م.^{2} [الحدودُ (وحيدةُ الحدِّ)]

$٤س = ٢ \times ٢ \times س$

$٦س^{٢} = ٢ \times ٣ \times س \times س$

م.م.^{2} $= ٢ \times ٢ \times ٣ \times س \times س = ١٢س^{٢}$

جمعُ حدوديّاتٍ نسبيّةٍ مقاماتُها وحيدةُ الحدِّ.

مثالٌ (٢)

أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ $\frac{٢}{٣س} + \frac{١}{٦}$

الحلُّ:

الخطوةُ ١:

أوجِدْ م.م.^{2} لـ ٣س، ٦

$٣س = ٣ \times س$

$٦ = ٣ \times ٢$

م.م.^{2} $= ٣ \times ٢ \times س = ٦س$

الخطوةُ ٢:

أعِدْ كتابةَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ مستخدِمًا م.م.^{2}، ثمّ اجمعْ.

$$\frac{٢}{٣س} + \frac{١}{٦} = \frac{٢ \times ٢}{٢ \times ٣س} + \frac{١ \times س}{٦ \times س}$$ أعِدْ كتابةَ الحدوديّاتِ مستخدِمًا م.م.^{2}

$$= \frac{٤}{٦س} + \frac{س}{٦س}$$ بسِّطْ

$$= \frac{٤ + س}{٦س}$$ اجمعِ البسوطَ

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ أوجِدْ ناتجَ كلٍّ ممّا يلي في أبسطِ صورةٍ.

(أ) $\frac{٣}{٧ص^{٤}} + \frac{٢}{٣ص^{٢}}$

(ب) $\frac{٣}{١٢ب} + \frac{١٥}{٣٦ب^{٢}}$

KuwaitMath.com

يُمكِنُك أيضًا إيجادُ م.م.أ لحدوديّاتٍ من حدّين أو أكثرَ.

مثالٌ (٣)

أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ $\frac{٥}{ل + ٢} + \frac{٦}{ل - ٣}$

الحلُّ:

الخطوةُ ١:

أوجِدْ م.م.أ لـ: (ل + ٢)، (ل − ٣)

بما أنّه لا توجَدُ عواملُ مشترَكةٌ فإنّ م.م.أ هو (ل + ٢)(ل − ٣).

الخطوةُ ٢:

أعِدْ كتابةَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ مستخدِمًا م.م.أ ثمّ اجمعْ.

$$\frac{٥}{ل + ٢} + \frac{٦}{ل - ٣} = \frac{٥(ل - ٣)}{(ل + ٢)(ل - ٣)} + \frac{٦(ل + ٢)}{(ل + ٢)(ل - ٣)}$$

أعِدْ كتابةَ الحدوديّاتِ مستخدِمًا م.م.أ

$$= \frac{٥ل - ١٥}{(ل + ٢)(ل - ٣)} + \frac{٦ل + ١٢}{(ل + ٢)(ل - ٣)}$$

اجمعِ البسوطَ

$$= \frac{٥ل - ١٥ + ٦ل + ١٢}{(ل + ٢)(ل - ٣)}$$

بسِّطْ، حيث
ل ≠ −٢، ل ≠ ٣

$$= \frac{١١ل - ٣}{(ل + ٢)(ل - ٣)}$$

حاوِلْ أن تحلَّ

٣ أوجِدْ ناتجَ كلٍّ ممّا يلي في أبسطِ صورةٍ.

(أ) $\frac{٥}{س + ٤} + \frac{٣}{س - ١}$

(ب) $\frac{٢}{ب + ٢} + \frac{٣ب}{٢ب - ١}$

تحقَّقْ من فهمِك

١ أوجِدْ ناتجَ: $\frac{٢}{٣س + ٤} + \frac{٦}{س + ٢}$

٢ ما المضاعَفُ المشترَكُ الأصغرُ لحدوديّتين لا عواملَ مشترَكةً لهما؟

KuwaitMath.com

المرشدُ لحلِّ المسائلِ (٣-٨)

تبلغُ المسافةُ بينَ المدينةِ ن والمدينةِ ل حوالى ٤٠٠٠ كم. تزيدُ سرعةُ الطائرةِ نحوَ ١٥٪ عندَ الطيرانِ من ن إلى ل عنها عندَ الطيرانِ من ل إلى ن، بسببِ وجودِ تيّارٍ هوائيٍّ قويٍّ في طبقاتِ الجوِّ العليا. إذا كانَتْ ع تُمثِّلُ سرعةَ الطائرةِ من المدينةِ ل إلى المدينةِ ن، فاكتبْ حدوديّةً نسبيّةً وبسِّطْها إذا أمكنَ لتُبيِّنَ الزمنَ اللازمَ للذهابِ والإيابِ بينَ المدينتين.

افهمْ

١ ما معطَياتُ المسألةِ؟

.....

.....

٢ ما المطلوبُ إليك إيجادُه؟

.....

.....

خطِّطْ

٣ إذا كانَتِ السرعةُ ع من مدينةِ ل إلى مدينةِ ن، فكم تُصبِحُ السرعةُ من مدينةِ ن إلى مدينةِ ل؟

.....

٤ ما العلاقةُ بينَ المسافةِ والسرعةِ والزمنِ؟

.....

٥ ما الكسرُ الذي يُعطي الزمنَ بدلالةِ السرعةِ والمسافةِ؟

.....

حُلَّ

٦ اكتبِ الحدوديّةَ النسبيّةَ التي تُبيِّنُ الزمنَ اللازمَ للطيرانِ من مدينةِ ل إلى مدينةِ ن.

.....

٧ لماذا تُمثِّلُ الحدوديّةُ النسبيّةُ $\frac{٤٠٠٠}{١,١٥ ع}$ الزمنَ اللازمَ للطيرانِ من مدينةِ ن إلى مدينةِ ل؟

.....

٨ اجمعِ الحدوديّتين النسبيّتين في ٦، ٧ وبسِّطِ الإجابةَ.

.....

تحقَّقْ

٩ عوِّضْ عن ع بـ ٨٠٠ في كلٍّ من ٦، ٧، ٨. هل مجموعُ ناتجي ٦، ٧ يُساوي ناتجَ ٨؟

.....

حُلَّ مسألةً أخرى

١٠ تبلغُ المسافةُ بينَ المدينتين أ، ب ٢٠٠٠ كم. تزيدُ سرعةُ الطائرةِ ١٢٪ عندَ الطيرانِ من أ إلى ب عنها من ب إلى أ. اكتبْ حدوديّةً نسبيّةً وبسِّطْها لتُبيِّنَ الزمنَ اللازمَ للذهابِ والإيابِ بينَ المدينتين.

.....

KuwaitMath.com

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ كتبَ سامي: $\frac{٢}{س + ٣} + \frac{٣}{س + ١} = \frac{٥}{٢س + ٤}$. ما الخطأُ الذي ارتكبَه سامي؟

.....

.....

٢ اكتبْ حدوديّتين نسبيّتين ذواتي مقاماتٍ مختلِفةٍ. أوجِدْ م.م.أ ثمّ اجمعِ الحدوديّتين.

.....

.....

٣ **الكتابةُ**: عندَ جمعِ حدوديّتين نسبيّتين، هل تكونُ الإجابةُ في أبسطِ صورةٍ إذا استخدمْتَ م.م.أ؟ فسِّرْ.

.....

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

KuwaitMath.com

٩-٣

طرحُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ

Subtracting Rational Expressions

سوف تتعلّمُ

- طرحَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ المتساويةِ.
- طرحَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ المختلفةِ.

من الاستخداماتِ

- يستخدمُ المتسابقون في مبارياتِ التجذيفِ، طرحَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ لمعرفةِ تأثيرِ مقاومةِ التيّارِ على انسيابِ القواربِ.

صلةُ الدرسِ تعرّفْتَ في الدرسِ السابقِ الحدوديّاتِ النسبيّةَ وجمعَها، والآن سوف تطرحُ الحدوديّاتِ النسبيّةَ.

استكشِفْ طرحُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ

تقومُ شركةٌ بتصميمِ الملصَقاتِ للدعايةِ. تبلغُ المصاريفُ الثابتةُ عندَ هذه الشركةِ ٥٤ ٠٠٠ دينارٍ شهريًّا، وتكلفةُ الموادِّ الأوّليّةِ عن كلِّ ملصَقٍ ٢٨٠ فلسًا.

١ إذا كانَ الإنتاجُ في الشهرِ الأوّلِ هو س ملصَقٍ، فما هي تكلفةُ الملصَقِ الواحدِ؟

٢ إذا أصبحَ الإنتاجُ في الشهرِ الثاني ضعفَ الشهرِ الأوّلِ، فما هي تكلفةُ الملصَقِ الواحدِ؟

٣ اكتبِ الحدوديّةَ النسبيّةَ التي تُمثِّلُ الفرقَ في تكلفةِ الإنتاجِ للملصَقِ الواحدِ بينَ الشهرِ الأوّلِ والشهرِ الثاني.

تعلَّمْ طرحُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ

أوّلًا: طرحُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ الموحَّدةِ.

طرحُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ **الموحَّدةِ** يُماثِلُ طرحَ الأعدادِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ **الموحَّدةِ**.

فمثلًا إذا كانَتْ ﺃ، ب، جـ تُمثِّلُ حدوديّاتِ (جـ ≠ صفرٍ)،

فإنّ $\frac{\text{ﺃ}}{\text{جـ}} - \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{ﺃ} - \text{ب}}{\text{جـ}}$.

مثالٌ (١)

أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ: $\frac{٢ص + ١}{ص - ١} - \frac{ص + ٢}{ص - ١}$

الحلُّ:

$\frac{٢ص + ١}{ص - ١} - \frac{ص + ٢}{ص - ١} = \frac{(٢ص + ١) - (ص + ٢)}{ص - ١}$ — المقامُ مشترَكٌ

$= \frac{٢ص + ١ - ص - ٢}{ص - ١}$ — اطرحْ

$= \frac{ص - ١}{ص - ١}$ — بسِّطْ شرطَ أنّ ص ≠ ١

$= ١$

KuwaitMath.com

حاوِلْ أن تحلَّ

١ أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ:

(أ) $\frac{٧ب - ٢}{٣ب + ٦} - \frac{ب + ٧}{٣ب + ٦}$ (ب) $\frac{٢س + ١}{٥س + ٢} - \frac{٣س - ٤}{٥س + ٢}$

ثانيًا: طرحُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ المختلِفةِ.

لطرحِ حدوديّاتٍ نسبيّةٍ ذاتِ مقاماتٍ مختلِفةٍ، يُمكِنُك أوّلًا إعادةُ كتابةِ هذه الحدوديّاتِ باستخدامِ المضاعَفِ المشترَكِ الأصغرِ م.م.أ للمقاماتِ. (راجِعْ جمعَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ ذاتِ المقاماتِ المختلِفةِ).

مثالٌ (٢)

اطرحْ: $\frac{٥}{س + ٢}$ من $\frac{٦}{س - ٣}$.

الحلُّ:

الخطوةُ ١:

أوجِدْ م.م.أ لـ (س + ٢)، (س − ٣).

بما أنّه لا يوجَدُ عاملٌ مشترَكٌ، فيكونُ م.م.أ هو (س + ٢)(س − ٣).

الخطوةُ ٢:

أعِدْ كتابةَ الحدوديّتين مستخدِمًا م.م.أ، ثمّ اطرحْ.

$$\frac{٦}{س - ٣} - \frac{٥}{س + ٢} = \frac{٦(س + ٢)}{(س - ٣)(س + ٢)} - \frac{٥(س - ٣)}{(س - ٣)(س + ٢)}$$ أعِدْ كتابةَ الحدوديّتين

$$= \frac{٦س + ١٢}{(س - ٣)(س + ٢)} - \frac{٥س - ١٥}{(س - ٣)(س + ٢)}$$

$$= \frac{(٦س + ١٢) - (٥س - ١٥)}{(س - ٣)(س + ٢)}$$ اطرحْ

$$= \frac{٦س + ١٢ - ٥س + ١٥}{(س - ٣)(س + ٢)}$$ استخدِمِ الخاصّيّةَ التوزيعيّةَ

$$= \frac{س + ٢٧}{(س - ٣)(س + ٢)}$$ بسِّطْ، شرطَ أنّ $س \neq ٣$ ، $س \neq -٢$

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ:

(أ) $\frac{٣أ}{٢أ - ١} - \frac{٢}{أ + ٢}$ (ب) $\frac{٦}{٧ص^{٣}} - \frac{٨}{٣ص}$

مثالٌ (٣)

أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ: $\frac{٢ن - ١}{٢ن^{٢} + ٥ن - ٣} - \frac{ن + ٣}{ن^{٢} - ٩}$.

الحلُّ: $\frac{٢ن - ١}{٢ن^{٢} + ٥ن - ٣} - \frac{ن + ٣}{ن^{٢} - ٩}$

حلِّلْ كلًّا من المقامين شرطَ أنّ:
$ن \neq \frac{١}{٢}$ ، $ن \neq -٣$، $ن \neq ٣$

$= \frac{٢ن - ١}{(٢ن - ١)(ن + ٣)} - \frac{ن + ٣}{(ن - ٣)(ن + ٣)}$

اقسمْ على العاملِ المشترَكِ

$= \frac{١}{ن + ٣} - \frac{١}{ن - ٣}$

استخدِمِ المضاعَفَ المشترَكَ الأصغرَ للمقامين

$= \frac{ن - ٣}{(ن + ٣)(ن - ٣)} - \frac{ن + ٣}{(ن - ٣)(ن + ٣)}$

اطرحْ

$= \frac{(ن - ٣) - (ن + ٣)}{(ن + ٣)(ن - ٣)}$

استخدِمِ الخاصّيّةَ التوزيعيّةَ

$= \frac{ن - ٣ - ن - ٣}{(ن + ٣)(ن - ٣)}$

بسِّطْ، شرطَ أنّ $ن \neq -٣$، $ن \neq ٣$

$= \frac{-٦}{(ن + ٣)(ن - ٣)}$

حاوِلْ أن تحلَّ

٣ أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ: $\frac{٢س + ١٠}{س^{٢} + س - ٢٠} + \frac{-س - ٤}{س^{٢} - س - ٢٠}$

تحقَّقْ من فهمِك

١ أوجِدْ ناتجَ: $\frac{٦ص - ٧}{ص + ٢} - \frac{٦ص - ١١}{ص + ٢}$.

٢ كيف يتشابهُ طرحُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ وجمعُها؟ وبمَ يختلفان؟

KuwaitMath.com

حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ **بسِّطِ الحدوديّةَ:** $\frac{٧د - ٢}{د^{٢} + ٢د - ٨} - \frac{٤}{د + ٤} - \frac{د}{د - ٢}$.

.....

.....

.....

.....

.....

الاختيارُ من متعدِّدٍ:

٢ م.م.أ لمقامي الحدوديّتين: $\frac{س}{س^{٢} - ١}$ ، $\frac{-٢}{س - ١}$ هو: .....

(أ) س + ١ (ب) س − ١ (جـ) $س^{٢} - ١$ (د) $(س^{٢} - ١)(س + ١)$

٣ ناتجُ طرحِ $\frac{٢س}{٣س - ٢}$ من $\frac{٥س}{٣س - ٢}$ هو: .....

(أ) −٢ (ب) $\frac{-٣س}{٣س - ٢}$ (جـ) $\frac{٧س}{٣س - ٢}$ (د) $\frac{٣س}{٣س - ٢}$

٤ **التفكيرُ المنطقيُّ:** يتدرّبُ أعضاءُ نادي الدرّاجاتِ ذهابًا وإيابًا على طريقٍ طولُه ١٥ كم. خلالَ العودةِ، كانَ اتّجاهُ الريحِ مع خطِّ سيرِهم، فازدادَتْ سرعتُهم بمعدَّلِ ٥ كم/ ساعةٍ (على ١٥ كم إيابًا).

(أ) استخدِمْ ع كمعدَّلِ السرعةِ. اكتبْ حدوديّةً نسبيّةً تُبيِّنُ فرقَ الزمنِ بينَ الذهابِ والإيابِ.

.....

.....

.....

(ب) إذا كانَ معدَّلُ سرعتِهم ٢٠كم/ س ذهابًا، فما الزمنُ الذي استغرقَه التدريبُ؟

.....

.....

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

KuwaitMath.com

٣-١٠

ضربُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ وقسمتُها

Multiplying and Dividing Rational Expressions

سوف تتعلّمُ

- ضربَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ.
- قسمةَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ.

من الاستخداماتِ

- يستخدمُ موظّفو المصارفِ ضربَ وقسمةَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ لتحديدِ قيمةِ كلِّ دفعةٍ عندَ تسديدِ المبلغِ المقترَضِ من المصرفِ.

◄ صلةُ الدرسِ في الدروسِ السابقةِ تعرّفْتَ جمعَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ وطرحَها. في هذا الدرسِ سوف تتعلّمُ ضربَ الحدوديّاتِ النسبيّةِ وقسمتَها. ►

استكشِفْ ضربُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ وقسمتُها

اعملْ مع رفاقِك لمراجعةِ تبسيطِ وضربِ وقسمةِ الأعدادِ الكسريّةِ.

١ (أ) **بسِّطْ**: $\frac{٨}{٢}$، $-\frac{١٥}{٢٤}$، $\frac{١٥}{٣٥}$.

(ب) اكتبِ الخطواتِ التي استخدمْتَها في الفقرةِ (١ – أ) لتبسيطِ الكسورِ.

٢ (أ) اكتبْ كلًّا ممّا يلي في أبسطِ صورةٍ.

$-\frac{٨}{٢١} \times \frac{٧}{٤}$، $\frac{٣}{٥} \times \frac{٢}{٧}$، $\frac{٣}{٤} \times (-٢)$.

(ب) اكتبِ الخطواتِ التي استخدمْتَها في الفقرةِ (٢ – أ).

٣ (أ) اكتبْ كلًّا ممّا يلي في أبسطِ صورةٍ.

$٦ \div \frac{٣}{٨}$، $\frac{٢}{٣} \div \left(\frac{-٤}{٥}\right)$، $\frac{٣}{٤} \div ٢$.

(ب) اكتبِ الخطواتِ التي استخدمْتَها في الفقرةِ (٣ – أ).

تعلَّمْ ضربُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ وقسمتُها

أوّلًا: ضربُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ.

ضربُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ يُشبهُ ضربَ الأعدادِ النسبيّةِ. إذا كانَتْ أ، ب، جـ، د تُمثِّلُ حدوديّاتِ (ب ≠ ٠، د ≠ ٠)، فإنّ: $\frac{أ}{ب} \times \frac{جـ}{د} = \frac{أ\,جـ}{ب\,د}$.

مثالٌ (١)

أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ: $\frac{٢س + ١}{٣} \times \frac{٦س}{٤س^{٢} - ١}$

الحلُّ: $\frac{٢س + ١}{٣} \times \frac{٦س}{٤س^{٢} - ١} = \frac{٦س(٢س + ١)}{٣(٤س^{٢} - ١)}$ $\frac{أ}{ب} \times \frac{جـ}{د} = \frac{أ\,جـ}{ب\,د}$

$= \frac{٦س(٢س + ١)}{٣(٢س - ١)(٢س + ١)}$ حلِّلِ المقامَ

$= \frac{٢^{\cancel{٦}}س(\cancel{٢س + ١})}{\cancel{٣}^{١}(٢س - ١)(\cancel{٢س + ١})}$ اقسمْ على العاملين ٣، (٢س + ١)

$= \frac{٢س}{٢س - ١}$ وبسِّطْ

شرطَ أنّ س ≠ $\frac{١}{٢}$

KuwaitMath.com

حاوِلْ أن تحلَّ

١ أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ: $\frac{\text{س} - ٢}{٨\text{س}} \times \frac{-٨\text{س} - ١٦}{\text{س}^{٢} - ٤}$.

يُمكِنُ أيضًا ضربُ حدوديّةٍ نسبيّةٍ في حدوديّةٍ. يُعطى الناتجُ بالصورةِ التحليليّةِ.

مثالٌ (٢)

أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ: $\frac{٣\text{ص} + ٢}{٢\text{ص} + ٤} \times (\text{ص}^{٢} + ٥\text{ص} + ٦)$.

الحلُّ: $\frac{٣\text{ص} + ٢}{٢\text{ص} + ٤} \times (\text{ص}^{٢} + ٥\text{ص} + ٦)$

$= \frac{٣\text{ص} + ٢}{٢(\text{ص} + ٢)} \times \frac{(\text{ص} + ٢)(\text{ص} + ٣)}{١}$ حلِّلْ إلى عواملَ

$= \frac{٣\text{ص} + ٢}{٢(\text{ص} + ٢)} \times \frac{(\text{ص} + ٢)(\text{ص} + ٣)}{١}$ اقسمْ على العاملِ (ص + ٢)
شرطَ أنّ ص ≠ −٢

$= \frac{(٣\text{ص} + ٢)(\text{ص} + ٣)}{٢}$

حاوِلْ أن تحلَّ

٢ أوجِدِ الناتجَ في كلٍّ ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

(أ) $\frac{٣}{\text{ص}}(\text{ص}^{٣} - \text{ص})$

(ب) $\frac{٢\text{ف}}{\text{ف} + ٣}(\text{ف}^{٢} - ٢\text{ف} - ١٥)$

(جـ) $(\text{م} - ١)\frac{(٤\text{م} + ٨)}{\text{م}^{٢} - ١}$

تذكَّرْ

المعكوسُ الضربيُّ للحدوديّةِ أ هو $\frac{١}{\text{أ}}$، أ ≠ ٠

ثانيًا: قسمةُ الحدوديّاتِ النسبيّةِ

عندَ قسمةِ حدوديّةٍ نسبيّةٍ على حدوديّةٍ، نضربُ الحدوديّةَ النسبيّةَ في المعكوسِ الضربيِّ للحدوديّةِ.

KuwaitMath.com

تذكَّرْ

$\frac{أ}{ب} \div \frac{جـ}{د} = \frac{أ}{ب} \times \frac{د}{جـ}$ ،

حيث ب ≠ ٠، جـ ≠ ٠، د ≠ ٠.

مثالٌ (٣)

أوجِدْ ناتجَ قسمةِ $\frac{س^{٢} + ٣س + ٢}{٤س}$ على (٥س^{٢} + ٥س) في أبسطِ صورةٍ، س ≠ ٠

الحلُّ: $\frac{س^{٢} + ٣س + ٢}{٤س} \div (٥س^{٢} + ٥س)$

$= \frac{س^{٢} + ٣س + ٢}{٤س} \times \frac{١}{٥س^{٢} + ٥س}$ اضربْ في المعكوسِ الضربيِّ لـ (٥س^{٢} + ٥س)

$= \frac{(س + ١)(س + ٢)}{٤س} \times \frac{١}{٥س \times (س + ١)}$ حلِّلْ

$= \frac{(س + ١)(س + ٢)}{٤س} \times \frac{١}{٥س \times (س + ١)}$ اقسِمْ على العاملِ (س + ١)

شرطَ أنّ س ≠ −١، س ≠ ٠

$= \frac{س + ٢}{٢٠س^{٢}}$

حاوِلْ أن تحلَّ

٣ أوجِدْ ناتجَ قسمةِ $\frac{ص + ٣}{ص + ٢}$ على (ص + ٢) في أبسطِ صورةٍ.

فكرةٌ مفيدةٌ — لحلِّ المسائلِ

عندَ قسمةِ حدوديّةٍ نسبيّةٍ على أخرى، أبدأُ أوّلًا بضربِ الحدوديّةِ النسبيّةِ الأولى في المعكوسِ الضربيِّ للحدوديّةِ النسبيّةِ الثانيةِ.

عندَ قسمةِ حدوديّةٍ نسبيّةٍ على أخرى، انتبهْ للقيمِ التي يكونُ الناتجُ عندَها غيرَ معرفٍ حتّى تتمكّنَ من وضعِ الشرطِ.

مثالٌ (٤)

أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ: $\frac{ب^{٢} + ٧ب + ١٠}{ب - ٦} \div \frac{ب + ٥}{ب^{٢} - ٣٦}$

الحلُّ: $\frac{ب^{٢} + ٧ب + ١٠}{ب - ٦} \div \frac{ب + ٥}{ب^{٢} - ٣٦}$

$= \frac{ب^{٢} + ٧ب + ١٠}{ب - ٦} \times \frac{ب^{٢} - ٣٦}{ب + ٥}$ الضربُ في المعكوسِ الضربيِّ للحدوديّةِ $\frac{ب + ٥}{ب^{٢} - ٣٦}$

$= \frac{(ب + ٥)(ب + ٢)}{ب - ٦} \times \frac{(ب - ٦)(ب + ٦)}{ب + ٥}$ حلِّلْ

$= \frac{(ب + ٥)(ب + ٢)}{(ب - ٦)} \times \frac{(ب - ٦)(ب + ٦)}{(ب + ٥)}$ بسِّطْ مع العواملِ (ب + ٥)، (ب − ٦)

$= (ب + ٢)(ب + ٦)$ شرطَ أنّ ب ≠ −٥، ب ≠ ٦

Kuwaitvalley.com

حاوِلْ أن تحلَّ

٤ أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ: $\frac{٥م + ١٠}{٢م - ٢٠} \div \frac{٧م + ١٤}{١٤م - ٢٠}$.

تحقَّقْ من فهمِك

١ أوجِدْ كلَّ ناتجٍ في أبسطِ صورةٍ:

(أ) $\frac{٦س + ٣}{س + ٦} \times \frac{س^٢ + ٩س + ١٨}{٢س + ١}$

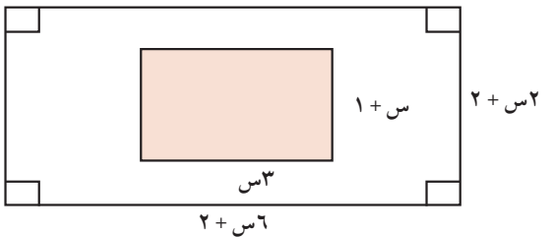
(ب) $\frac{٢ص + ٤}{ص^٢ + ١١ص + ١٨} \div \frac{ص + ١}{ص^٢ + ١٤ص + ٤٥}$

٢ اشرحْ كيف تضربُ أو تقسمُ حدوديّتين نسبيّتين.

KuwaitMath.com

المرشدُ لحلِّ المسائلِ (٣-١٠)

يُبيِّنُ الشكلُ المقابلُ مستطيلين. اكتبْ نسبةَ مساحةِ المستطيلِ المظلَّلِ إلى مساحةِ المستطيلِ الأكبرِ في صورةِ حدوديّةٍ نسبيّةٍ وبسِّطْها.



افهمْ

١ ما المطلوبُ إليك إيجادُه؟

.....

٢ ماذا تعني: نسبةُ مساحةِ المستطيلِ المظلَّلِ إلى مساحةِ المستطيلِ الأكبرِ؟

.....

خطِّطْ

٣ ما قانونُ مساحةِ المستطيلِ؟ .....

.....

٤ ما الصورةُ التي ستكتبُ النسبةَ بها (م١، م٢ تُمثِّلان مساحتي المستطيلين)؟ .....

(أ) م١ إلى م٢ (ب) م١ : م٢ (جـ) $\frac{م_١}{م_٢}$

حُلَّ

٥ ما مساحةُ المستطيلِ المظلَّلِ؟ .....

٦ ما مساحةُ المستطيلِ الأكبرِ؟ .....

٧ اكتبِ النسبةَ في صورةِ حدوديّةٍ نسبيّةٍ. .....

.....

٨ بسِّطِ الحدوديّةَ التي حصلْتَ عليها. .....

.....

تحقَّقْ

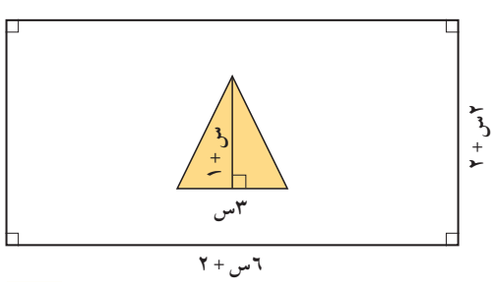
٩ عوِّضْ عن س بـ ١٠ في كلٍّ من ٥، ٦، ٨. هل إجابةُ $\frac{\text{الفقرةِ ٥}}{\text{الفقرةِ ٦}}$ تُساوي إجابةَ الفقرةِ ٨؟

.....

حُلَّ مسألةً أخرى

١٠ اكتبْ نسبةَ مساحةِ المثلّثِ إلى مساحةِ المستطيلِ في صورةِ حدوديّةٍ نسبيّةٍ وبسِّطْها. .....

.....



حلُّ المسائلِ والتفكيرُ المنطقيُّ

١ لأيِّ قيمٍ للمتغيِّرِ س تكونُ الحدوديّةُ $\frac{٢س^{٢} - ٥س - ١٢}{٦س} \div \frac{-٣س - ١٢}{س^{٢} - ١٦}$ غيرَ معرَّفةٍ؟

.....

٢ **تحليلُ الخطأِ**: في حلِّ القسمةِ التاليةِ، ما الخطأُ الذي اقترفَه الطالبُ؟

$$\frac{٣س}{س + ٢} \div \frac{(س + ٢)^{٢}}{س - ٤} = ٣س \div \frac{س + ٢}{س - ٤}$$

$$= ٣س \times \frac{س - ٤}{س + ٢}$$

$$= \frac{٣س(س - ٤)}{س + ٢}$$

.....

.....

٣ أيٌّ ممّا يلي لا يُمكِنُ أن يكونَ الخطوةَ الأولى في ضربِ الحدوديّتين:

$$\frac{ص^{٢} - ٢ص - ٣}{ص + ٣} \times \frac{٢ص + ٦}{٢ص + ٢}$$

.....

(أ) ضربُ البسطين.

(ب) إيجادُ المعكوسِ الضربيِّ لـ $\frac{٢ص + ٦}{٢ص + ٢}$.

(جـ) تحليلُ كلِّ حدوديّةٍ إلى عواملَ.

(د) ضربُ المقامين.

٤ أيٌّ ممّا يلي مساوٍ لـ: $\frac{ر^{٢} - ١}{ر} \div (٢ر^{٢} - ٢)$:

.....

(أ) $\frac{ر^{٢} - ١}{ر} \times \frac{١}{٢} (ر^{٢} - ١)$

(ب) $\frac{ر^{٢} - ١}{ر} \times \frac{٢}{ر^{٢} - ١}$

(جـ) $\frac{ر^{٢} - ١}{ر} \times \left(\frac{١}{٢ر^{٢} - ٢}\right)$

(د) $\frac{ر^{٢} - ١}{ر} \times \frac{١}{٢ر^{٢} - ١}$

إستراتيجيّاتُ حلِّ المسائلِ

- ابحثْ عن النمطِ.
- نظِّمْ قائمةً.
- كوِّنْ جدولًا.
- خمِّنْ وتحقَّقْ.
- اعملْ بطريقةٍ عكسيّةٍ.
- استخدِمِ التفكيرَ المنطقيَّ.
- ارسمْ تمثيلًا بيانيًّا.
- حُلَّ مسألةً أبسطَ.

KuwaitMath.com

اختبارُ الوَحدةِ الثالثةِ

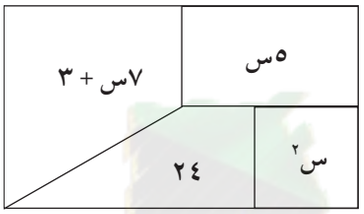
١ حلِّلْ كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا.

(أ) ٤س^{٢} – ٢٥ (ب) ١٨ س^{٢} – ٣٢ (جـ) (س + ٤)^{٢} – (٤س + ٧)^{٢}

٢ حلِّلْ كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا.

(أ) س^{٢} + ٩س + ١٨ (ب) ص^{٢} + ص – ٢٠ (جـ) س^{٢} – ١٤ س – ٣٢

٣ في الشكلِ مستطيلٌ مقسَّمٌ إلى مناطقَ مساحاتُها معلومةٌ.



أوجِدِ المساحةَ الكلّيّةَ للمستطيلِ، ثمّ حلِّلْ هذه المساحةَ إلى عواملَ.

٤ حلِّلْ كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا.

(أ) ٨ص^{٢} – ١٠ص – ٣ (ب) ٥ك^{٢} – ٢ك – ٧

(جـ) ٢٥س^{٢} – ١٠س – ١٥

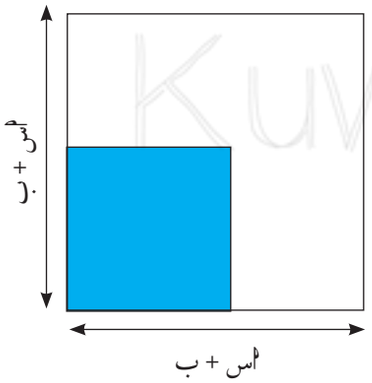
٥ تُبيِّنُ الصورةُ مربّعين، مساحةُ المربّعِ الصغيرِ المظلَّلِ تُساوي: ٤س^{٢} + ١٦س + ١٦ ومساحةُ القسمِ غيرِ المظلَّلِ من المربّعِ الكبيرِ تُساوي: ٥س^{٢} + ١٤س + ٩.

ما قيمُ ا، ب؟ علمًا أنّ ا، ب عددان موجَبان.

٦ حلِّلْ كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا.

(أ) ٨س^{٣} – ٢٧ (ب) ٢٧ س^{٣} + ٨

(جـ) ٢٥٠ س^{٣} – ١٢٨



(د) لدينا مكعّبان يبلغُ طولُ الضلعِ الأوّلِ ٤س ويبلغُ طولُ الضلعِ الثاني ٥ص.

أوجِدِ الفرقَ بينَ حجمِ المكعّبين بالتحليلِ إلى عواملَ علمًا أنّ ٤س > ٥ص.

٧ أوجِدْ مجموعةَ حلِّ كلٍّ ممّا يلي في ح:

(أ) ٨ س^{٢} – ٥٠ = ٠ (ب) (س + ٤)^{٢} = ٩ (جـ) س^{٢} – ٦س + ٥ = ٠

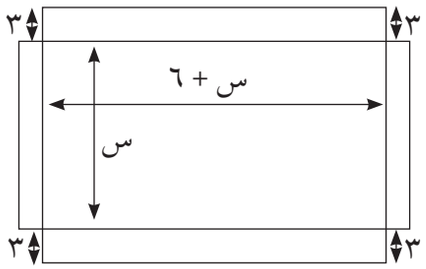
(د) –س^{٢} + ٧س – ٦ = ٠ (هـ) ٥س^{٢} + ٣س – ٣٦ = ٠ (و) ٤س^{٢} + ٢٠ = ١٠س + ٣س^{٢} – ٤

KuwaitMath.com

تابع: اختبارُ الوَحدةِ الثالثةِ

٨ لدينا صندوقٌ مفتوحٌ من الأعلى. يزيدُ طولُه عن عرضِه ٦ سم ويبلغُ ارتفاعُه ٣سم. صُنِعَ هذا الصندوقُ من مادّةٍ كرتونيّةٍ مستطيلةِ الشكلِ مساحتُها ٩١سم^{٢}.

بعدَ اقتطاعِ أجزاءٍ مربّعةٍ متطابقةٍ من كلِّ زاويةٍ طولُ ضلعِها ٣سم، ما أبعادُ هذا الصندوقِ؟



٩ أوجِدْ مجموعةَ حلِّ كلٍّ ممّا يلي في ح، ومثِّلِ الحلَّ على خطِّ الأعدادِ.

(أ) ٣س ≤ ٧

(ب) ٢س − ٥ ≥ ٣

(جـ) ٤ − ٣س ≤ ٥

(د) ٦ + ٢س ≤ ٨

(هـ) |س + ٣| − ٢ ≥ ٥

(و) |٢س − ٧| ≤ ١

(ز) |٢س − ١| < ٤

(حـ) |٥ − س| + ١ < ٣

١٠ ضَعْ في أبسطِ صورةٍ:

(أ) $\frac{٦س^{٣}}{١٢س - ١٨س^{٢}}$

(ب) $\frac{٤ص^{٢} - ٣٦ص + ٨١}{٤ص^{٢} - ٢ص - ٧٢}$

١١ أوجِدِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ:

(أ) $\frac{٢س}{س - ٥} + \frac{٣س}{س + ٢}$

(ب) $\frac{٤ص + ٥}{٢ص + ١} - \frac{٥ص}{٣ص - ٤}$

(جـ) $\frac{٤د - ٥}{٦د} + \frac{٧د + ٢}{٢د - ٣}$

(د) $\frac{٥م + ١}{٤م} - \frac{٣م - ٤}{م + ٢}$

١٢ أوجِدْ حجمَ الصندوقِ التالي علمًا أنّ طولَ قاعدتِه $\frac{س^{٢} - س - ٦}{س^{٢} + س - ٢}$، وعرضَها $\frac{س^{٣}}{س^{٢} + س - ١٢}$، وارتفاعَ الصندوقِ $\frac{٢س + ٤}{س}$. ثمّ ضَعِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ.

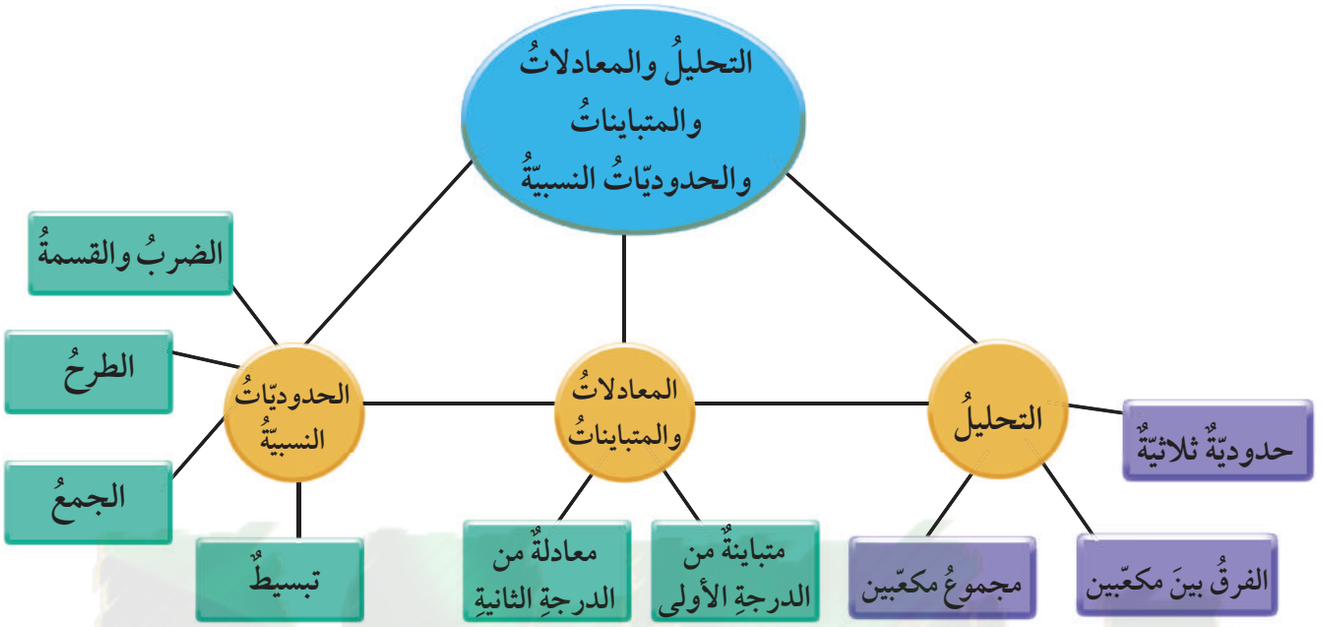
١٣ اقسمْ ثمّ ضَعِ الناتجَ في أبسطِ صورةٍ.

(أ) $\frac{س^{٢} + ٣س + ٢}{س^{٢} - ٤س + ٣} \div \frac{س + ٢}{س - ٣}$

(ب) $\frac{ص^{٢} + ٥ص + ٦}{ص - ٣} \div \frac{ص^{٢} - ٢ص - ٣}{ص^{٢} + ٣ص + ٢}$

KuwaitMath.com

مخطّطٌ تنظيميٌّ للوَحدةِ الثالثةِ



الوَحدةُ الثالثةُ (أ): التحليلُ

- يتعرّفُ الطالبُ تحليلَ الفرقِ بينَ مربّعين $أ^{٢} - ب^{٢} = (أ - ب)(أ + ب)$.
- يتعرّفُ تحليلَ حدوديّةٍ ثلاثيّةٍ على صورةِ $س^{٢} + ب س + جـ$ وتحليلَ حدوديّةٍ ثلاثيّةٍ على صورةِ $أ^{٢}س^{٢} + ب س + حـ$.
- يُحلِّلُ إلى عواملَ أوّليّةٍ الفرقَ بينَ مكعّبين ومجموعِهما.

$$(أ^{٣} - ب^{٣}) = (أ - ب)(أ^{٢} + أ ب + ب^{٢})$$

$$(أ^{٣} + ب^{٣}) = (أ + ب)(أ^{٢} - أ ب + ب^{٢})$$

KuwaitMath.com

الوَحدةُ الثالثةُ (ب): المعادلاتُ والمتباينـاتُ

- يحلُّ معادلةً من الدرجةِ الثانيةِ في متغيِّرٍ واحدٍ بالتحليلِ $(س + أ)(س + ب) = ٠$، مجموعةُ الحلِّ $= \{-أ، -ب\}$
- يحلُّ متباينةً من الدرجةِ الأولى في متغيِّرٍ واحدٍ، ويجدُ مجموعةَ الحلِّ: $س > أ$ مجموعةُ الحلِّ $(-\infty، أ)$ أو $س \geq أ$ مجموعةُ الحلِّ $[أ، \infty)$.

الوَحدةُ الثالثةُ (جـ): الحدوديّاتُ النسبيّةُ

- يتعرّفُ الحدوديّاتِ النسبيّةَ ويُبسِّطُها.
- يجمعُ الحدوديّاتِ النسبيّةَ ويطرحُها من مقاماتٍ مشترَكةٍ ومقاماتٍ مختلِفةٍ ويُبسِّطُ إذا أمكنَ.
- يضربُ الحدوديّاتِ النسبيّةَ ويقسمُها على مقاماتٍ مشترَكةٍ ومقاماتٍ مختلِفةٍ ويُبسِّطُ إذا أمكنَ.