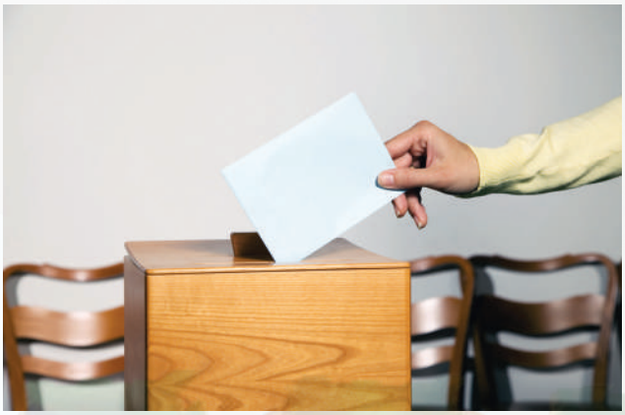
الوحدة العاشرة

العد والاحتمال
Counting and Probability

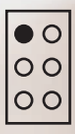
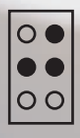
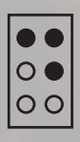


شعوب العالم

بعدما نالت المرأة الكويتية الحق في التصويت والترشح للانتخابات، وبعد ٤٤ عامًا من النضال من أجل الحصول على حقوقها السياسية، حملت الانتخابات النيابية في العام ٢٠٠٩ مفاجأة سارة إذ فازت أربع نساء بمقاعد برلمانية وأصبحن أعضاء في مجلس الأمة الكويتية.

الفنون والآداب

اخترع الضرير لويس برايل (١٨٠٩ - ١٨٥٢) نظامًا يتيح للمكفوفين القراءة والكتابة عن طريق اللمس. يمكن كتابة $٦^{٢} = ٦٤$ رمزًا بهذا النظام. تم تكييف طريقة بريل للكتابة في العديد من اللغات ومنها العربية:

أ 
ب
جـ 
د 

KuwaitMath.com

العلوم

بعد إجراء تجارب عدة على مجموعات متنوعة من الهررة كالهر السيامي والهر الفارسي، قام مربو الحيوانات بتطوير سلالة من الهررة لتحسين نوعيتها. وتتميز هذه السلالة بوبرها الطويل.

أفكار رياضية أساسية

يمكنك عد الطرائق الممكنة لوقوع حدث ما باستخدام الشجرة البيانية أو مبدأ العد.

التبديل أو الترتيب هو اختيار أشياء بترتيب ما. أما التوفيقة فهي اختيار أشياء من دون ترتيب.

الاحتمال أو الاحتمال النظري لحدث ما هو إمكانية وقوع هذا الحدث.

الاحتمال التجريبي هو عدد مرات وقوع الحدث مقسومًا على عدد التجارب. يحتسب الاحتمال الهندسي بالمقارنة بين المساحات والأطوال أو قياسات أخرى.

الاحتمال المشروط هو احتمال وقوع الحدث «ب» علمًا أن الحدث «أ» قد وقع قبله.

من الممكن أن تكون الأحداث مستقلة أو مرتبطة.

مشروع الوحدة

حل المسائل

افهم
خطط
حل
تحقق

ابتكر لعبة تتضمن تباديل أو توافيق. استخدم ما تعرفه عن الاحتمالات لتجعل اللعبة مسلية. قد ترغب في استخدام البطاقات وقطع النقود والدوارات والمكعبات المرقمة أو يمكنك اختيار أعداد أو أشياء موضوعة داخل قبعة. وربما ترغب في أن تكون اللعبة مخصصة لعدد معين من اللاعبين أو أن تكون لعبة فردية.

KuwaitMath.com

التحقق من معقولية الإجابة

في معظم الأحيان نستعين بآلات حاسبة لحل مسائل تتضمن أعدادًا كبيرة. لكن من السهل إدخال أعداد غير صحيحة أو إسقاط الأقواس أو رقم عند نقل الإجابة من شاشة الآلة الحاسبة. لذا، من المهم التأكد من معقولية الإجابة. ويساعد التقدير والتفكير السليم على القيام بذلك.

التركيز على حل المسائل

ينتمي أحمد إلى جمعية تنمية البيئة. إليك بعض المواقف التي واجهها. اذكر ما إذا كان تقدير كل إجابة قريبًا ما يكفي أو أصغر بكثير أو أكبر بكثير من الإجابة الفعلية ووضّح السبب:

١ تقاس مساحات الأدغال أو المناطق الشجرية بالكيلومترات المربعة. لنفترض أن مساحة منطقة مربعة تساوي ٤٠٠٠ م^{٢}، فما طول كل ضلع منها؟

الإجابة: ٦٣,٢٥ م

٢ يبلغ ارتفاع شجرة ٤٥ مترًا، وقطرها ٣,٦ أمتار. يمثل الجزء من الشجرة الذي يمكن استخدامه كخشب $\frac{٤}{٥}$ من حجمها الكلي. ما حجم خشب الشجرة القابل للاستخدام؟

الإجابة: ٣٦٦ م^{٣}

٣ تفيد بعض التقارير أن الغابات المطيرة تُزال بمعدل ٤٠ م^{٢} كل دقيقة. ما عدد الأمتار المربعة التي تزال بحسب هذا المعدل في شهر واحد؟

الإجابة: ١٧٢٨٠٠٠ م^{٢}

٤ يسمى الورق المعاد تدويره بمخلفات المستهلك ويكلف إنتاج ١٠٠٠ ورقة من الورق الذي يعاد تدويره بنسبة ١٠٠٪ ٣٥٠ فلسًا. ويكلف إنتاج ١٥٠٠ ورقة من الورق الذي يعاد تدويره بنسبة ٢٠٪ ٤٥٠ فلسًا. بكم تزيد كلفة إنتاج الورق المعاد تدويره ١٠٠٪ عن الورق الذي يعاد تدويره ٢٠٪؟

الإجابة: ٠,٠٥ فلوس

KuwaitMath.com

الوحدة العاشرة (٢)

العد
Counting

يشجعك آلاف المتفرجين في الملعب وملايين الأشخاص في أنحاء العالم.

تنطلق صفارة البداية، فتبدأ بشد عضلات جسمك كلّها، حتى إن رئتيك تحاولان بشدة استنشاق بعض الهواء وقبل أن تدرك ذلك، تجد نفسك وأنت تجتاز خط النهاية وتفوز بالبطولة. أنت الفائز في بطولة الألعاب الأولمبية أو دورة الألعاب الآسيوية. ستتعالى نغمات النشيد الوطني لبلدك أمام العالم بأسره عند منحك الميدالية الذهبية.

برأيك، ما الذي سيذكره الناس دومًا عن الألعاب الآسيوية أو الأولمبية؟

أهو الرياضي الذي لوى كاحله ومنع الفريق من ربح الميدالية الذهبية؟

أهو العداء الذي فاز ٤ مرات ولم يتأهل إلى هذه الدورة؟

من الممكن أن يُنتسى هؤلاء لكن الجميع سيتذكرون عطاءهم وشجاعتهم ومثابرتهم لنيل أفضل الميداليات ورفع اسم بلدهم.

١ في عام ١٩٩٢ اشتركت ٢٧٠٨ سيدات في الألعاب الأولمبية في ألعاب القوى، وارتفع هذا العدد في العام ١٩٩٦ إلى ٣٧٧٩. ما النسبة المئوية لهذه الزيادة؟

٢ في إحدى دورات الألعاب الأولمبية تمكن أحد اللاعبين (٦٤ كجم) من رفع ١٨٧ كجم. كم مرة يساوي ذلك وزنه؟

١٠-١

الشجرة البيانية ومبدأ العد
Tree Diagrams and The Counting Principle

سوف تتعلم

- استخدام الشجرة البيانية وتطبيق طرائق العد.

من الاستخدامات

- يستخدم تجار السيارات طرائق العد لتحديد أنواع السيارات المتوفرة لديهم وأعداد ها.

صلة الدرس قد يكون العدّ في بعض الحالات صعبًا. أنت تعلم كيف تستخدم الضرب لإيجاد عدد الوحدات المربعة في المستطيلات. يمكن استخدام طريقة مشابهة عند عدّ اختيارات عدة.

استكشف الشجرة البيانية

الطريق إلى المدرسة

١ ما وسائل المواصلات المختلفة التي يمكنك استخدامها للذهاب إلى المدرسة والعودة إلى المنزل؟

٢ لنفترض أنك تستطيع استخدام كل يوم وسيلة واحدة فحسب من بين الوسائل التي وجدتها للذهاب إلى المدرسة، فما عدد الطرائق المختلفة التي يمكنك استخدامها للذهاب إلى المدرسة؟

٣ لنفترض أنك تستطيع استخدام كل يوم وسيلة واحدة فحسب من بين الوسائل التي وجدتها للعودة إلى المنزل، فما عدد الطرائق التي يمكنك استخدامها للعودة إلى المنزل؟

٤ نظِّم قائمة أو اعمل رسمًا توضح فيه الوسائل التي يمكنك استخدامها للذهاب إلى المدرسة والعودة إلى المنزل، فكم عدد الوسائل الممكنة؟

تعلم الشجرة البيانية ومبدأ العد

يرغب خالد في الذهاب إلى الكويت لمشاهدة دورة الألعاب الرياضية، لكنه لم يجد خط طيران مباشرًا من بيروت. لكن لديه الخيار ليعاود الطيران من إحدى المدن التالية: دمشق وعمان والرياض ويمكنه أن يختار بين شركتي طيران: ا، ب. يمكنك إظهار الخيارات المتوفرة لدى خالد بعمل جدول.

مدينة الترانزيت	الشركة (ا)	الشركة (ب)
دمشق	✗	✗
عمان	✗	✗
الرياض	✗	✗

يمكنك عد خيارات في الجدول. ويمكنك اعتماد طرائق أخرى لإيجاد هذه المعلومات. ومن بين هذه الطرائق، استخدام مخطط الشجرة البيانية. يوضح مخطط الشجرة البيانية التالي فروعًا لكل خيار متوفر، ويمثل كل فرع من الشجرة ناتجًا ممكنًا.

المصطلحات الأساسية

- الشجرة البيانية
  Tree Diagram
- مبدأ العد
  Counting Principle

kuwaitmath.com

المدينة	شركة الطيران	الاختيار
دمشق	أ	عبر دمشق على متن الشركة أ
	ب	عبر دمشق على متن الشركة ب
عمان	أ	عبر عمان على متن الشركة أ
	ب	عبر عمان على متن الشركة ب
الرياض	أ	عبر الرياض على متن الشركة أ
	ب	عبر الرياض على متن الشركة ب

هل تعلم؟

في الكويت ٧ مطارات تشمل مطارين مدنيين. وتعتبر الخطوط الجوية الكويتية أكبر شركة طيران في الكويت، فقد سافر ٢٠٨٤٦٠٠ مسافر على متنها في عام ٢٠٠١.

مثال (١)

يستطيع أحمد أن يختار بين ٤ شركات طيران ليسافر من الكويت إلى السعودية، أن يعود على متن ٣ شركات طيران. ارسم شجرة بيانية. كم زوجًا مختلفًا من الرحلات يمكنه السفر والعودة على متنها؟

الحل:

يوجد ١٢ زوجًا مختلفًا من الرحلات للسفر إلى السعودية والعودة إلى الكويت.

حاول أن تحل

١ يختار سالم أثناء سفره إحدى الدرجات الثلاث: الدرجة الأولى، رجال الأعمال، الاقتصادية. سافر سالم من الكويت إلى بيروت وعاد إلى الكويت. ارسم شجرة بيانية. ما عدد الاختيارات المختلفة للسفر والعودة؟

فكرة مفيدة — لحل المسائل

استخدم مبدأ العد أوّلًا، ثم حلل لترى هل كان يلزم تنظيم قائمة أو صنع شجرة بيانية لملاحظة الخيارات الفردية.

لن تحتاج إلى تنظيم قائمة أو صنع شجرة بيانية. لا بد أنك لاحظت في المثال ١ أن عدد شركات الطيران هو:

٤ (في الذهاب) × ٣ (في العودة) = ١٢ خيارًا

مبدأ العد

إذا كان يمكن حدوث حدث ما بـ (م) طريقة ويمكن حدوث حدث آخر بـ (ن) طريقة، بالتالي يمكن لهذين الحدثين أن يحدثا معًا بـ (م × ن) طريقة.

ويصلح مبدأ العد كذلك لأكثر من موقفين.

مثال (٢)

يمكن تصميم بطاقة دعوة باستخدام ٤ نصوص مختلفة و٧ ألوان مختلفة و٥ هوامش مختلفة. ما عدد الاختيارات المختلفة المتوفرة لصنع البطاقة؟

الحل:

باستخدام مبدأ العد، لديك ٤ × ٧ × ٥ أي ١٤٠ خيارًا لتصميم بطاقة الدعوة.

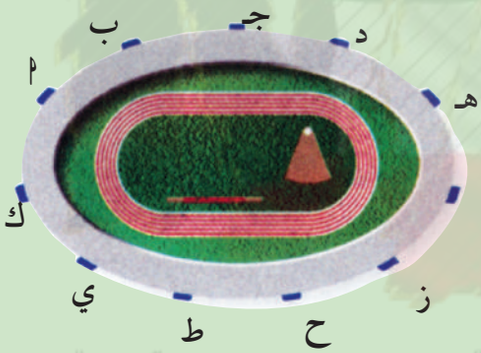
حاول أن تحل

٢ لدى أحد المحلات ١٠ أنواع من الورق المستخدم لتغليف الهدايا و١٢ لونًا من أشرطة الزينة و٣ أنواع من العقد. ما عدد الاختيارات المختلفة المتوفرة لتغليف الهدايا؟

تأكد من أنك فهمت المسألة قبل استخدام مبدأ العد.

مثال (٣)

يسع مدرج للألعاب الأولمبية ١٠٠ ٨٣ مقعد. تشير تذكرتك عليك الدخول عبر البوابات الشمالية. تقع البوابات أ، ب، جـ، د، هـ في الجهة الشمالية والبوابات و، ز، ح، ط، ي، ك في الجهة الجنوبية. بكم طريقة مختلفة يمكنك أن تدخل عبر بوابة شمالية، وتخرج عبر أي بوابة؟



الحل:

في المدرج ٥ بوابات شمالية و٦ بوابات جنوبية. تتوفر ٥ طرائق لدخول المدرج.

وتتوفر ٥ + ٦ = ١١ بوابة ممكنة للخروج منه.

باستخدام مبدأ العد، لدينا ٥ × ١١ = ٥٥ طريقة للدخول عبر بوابة شمالية والخروج من أي بوابة.

حاول أن تحل

٣ يستخدم العلماء الذين يجرون أبحاثًا عن الحيوانات بطاقة تعريف يضعونها حول عنق كل من الحيوانات لدراسة عاداتها تتضمن أحد أحرف الهجاء، وعددًا كليًّا أقل من مئة. كم شيفرة مختلفة ممكنة يمكن وضعها على كل بطاقة تعريف؟

تحقق من فهمك

١ أعط مثالًا على حالة يمكن استخدام مبدأ العد فيها، ومثالًا لا يمكن استخدام مبدأ العد فيه.

٢ لنفترض أنه لديك ٤ أنواع من صلصة الفطائر، وت نوع من الطبقات العلوية. كم عدد الفطائر المختلفة التي تتضمن نوعًا واحدًا من الصلصة ونوعًا واحدًا من الطبقة العلوية؟

٣ ما أوجه الشبه والاختلاف بين حالة تتضمن ٤ اختيارات يليها اختياران اثنان وبين الحالة المعاكسة، أي اختياران يليهما ٤ اختيارات؟ أعط مثالًا على ذلك.

KuwaitMath.com

المرشد لحلّ المسائل (١٠-١)

باختيارك كلمة واحدة من كلّ قائمة في ما يلي، كم جملة مختلفة يمكن تكوينها؟

الأداة	الاسم	الصفة
كان إن	الروبوت الرجل	قوي سريع بطيء كبير قصير

افهم

١ كم كلمة توجد في كل قائمة؟

(أ) الأداة ..... (ب) الاسم ..... (ج) الصفة .....

٢ كم كلمة تختارها من كلّ قائمة؟ .....

خطط

٣ كيف يمكنك استخدام مبدأ العد لإيجاد عدد الجمل؟ .....

.....

٤ اكتب تعبيرًا لإيجاد عدد الجمل. .....

حل

٥ بسط التعبير في البند رقم (٤). كم جملة يمكن تكوينها؟ .....

تحقق

٦ ما الطريقة الأخرى لإيجاد الإجابة؟ أيهما أسهل؟ فسّر إجابتك.

.....

حل مسألة أخرى

٧ يمكن طلب القميص المدرسي عن طريق اتحاد الطلاب، كم زيًّا مختلفًا يمكن تكوينه؟

اللون	الأكمام	المقاس	الطراز	التصميم
أزرق أصفر	قصيرة طويلة	صغير وسط كبير كبير جدًّا	قميص قطني قميص كنزة	الاسم الاسم والشعار

KuwaitMath.com

حل المسائل والتفكير المنطقي

١ **التواصل:** (أ) كم شخصًا مختلفًا يمكن تشكيله من كتاب الأقنعة؟

.....

(ب) كيف يمكنك تغيير المعطيات إذا أردت القول أنه:يمكن تشكيل ١٠٠٠ شخص مختلف؟

.....

.....

٢ في إحدى دورات كرة المضرب العالمية اشترى المنظمون ٥٤٠ صندوقًا. يحتوي كل صندوق على ٢٤ علبة وفي كل علبة ٣ كرات. ما عدد كرات التنس التي اشتراها المنظمون؟

.....

.....

٣ يتدرب ناصر يوميًا على لعبة كرة القدم.

يختار ثيابه وفق الجدول المقابل. كم زيًّا مختلفًا يمكن أن يرتدي ناصر للتدريب؟

قميص	بنطلون	جوارب
أخضر	أبيض	أخضر
أزرق	أسود	أبيض
أحمر		مخطط

.....

.....

٤ توجد ٤ طرقات تسمح للانتقال من المدينة أ إلى المدينة ب.

وتوجد ٣ طرقات للانتقال من المدينة ب إلى المدينة جـ.

(أ) ما عدد اختيارات الطرقات الممكنة للذهاب من أ إلى جـ؟

(ب) أقفلت إحدى الطرقات بين أ، ب للقيام ببعض الأشغال. ما عدد الاختيارات الممكنة للذهاب من أ إلى جـ؟

(جـ) أعيد فتح الطريق بين أ، ب وأقفلت بدلًا منها طريق بين ب، جـ.

ما عدد الاختيارات الممكنة للذهاب من أ إلى جـ؟

.....

.....

.....

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

KuwaitMath.com

١٠-٢

التباديل والترتيبات
Permutations and Arrangements

سوف تتعلم

- تطوير طرائق العد في حالات يكون فيها الترتيب هامًّا.

من الاستخدامات

- عند تحديد ترتيب المتبارين في فريق رياضي، على المدرب أن يدرك الترتيبات الممكنة التي يمكنه تشكيلها.

المصطلحات الأساسية

- ◄ ترتيب Arrangement
- ◄ تبديل Permutation
- ◄ مضروب Factorial

◄ صلة الدرس لقد سبق أن تعلمت عن الأشجار البيانية ومبدأ العد. ستوسع في هذا الدرس هذين المفهومين حول مواقف عد يكون الترتيب فيها مهمًّا.►

استكشف التباديل

الوقوف في الصف **الأدوات المستخدمة:** بطاقات تأشير لكل مجموعة مدون عليها ما يلي: أ، ب، جـ، د.

على كل طالب في المجموعة أن يأخذ بطاقة واحدة: أ أو ب أو جـ أو د.

١ إذا اصطف الطالب الذي يحمل البطاقة أ بمفرده، فبكم طريقة يمكنه أن يصطف؟

٢ إذا اصطف الطالبان اللذان يحملان البطاقتين أ، ب، فبكم طريقة يمكنهما أن يصطفا؟

٣ إذا أضيف الطالب الذي يحمل البطاقة جـ، فبكم طريقة يمكن لـ ٣ طلاب أن يصطفوا؟ كيف تربط ذلك بعدد الطرائق الممكنة التي يمكن لطالبين أن يصطفا بها؟

٤ أضف الطالب الذي يحمل البطاقة د. بكم طريقة يمكن لـ ٤ طلاب أن يصطفوا؟ كيف تربط ذلك بعدد الطرائق الممكنة التي يمكن لـ ٣ طلاب أن يصطفوا بها؟

٥ خمّن عدد الطرائق المختلفة التي يمكن أن يقف فيها ٥ طلاب في صف واحد.

تعلم التباديل والترتيبات

عند معاينة الاختيارات المتوفرة المختلفة، غالبًا ما تمعن النظر في **الترتيب** الذي وضع فيه الأشخاص أو الحروف أو الأعداد أو الأشياء الأخرى. **التبديل** هو ترتيب يكون فيه موقع الأشياء مهمًّا. التبديل أ ب جـ مختلف عن التبديل جـ ب أ ويمكن أن يساعد مبدأ العد على تحديد عدد الاختيارات أو التباديل.

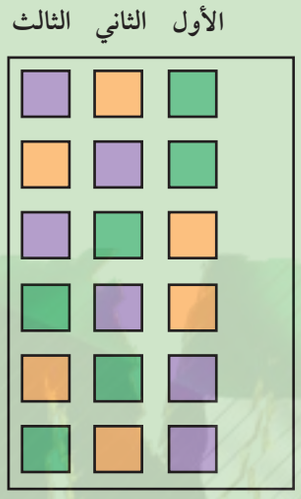
مثال (١)

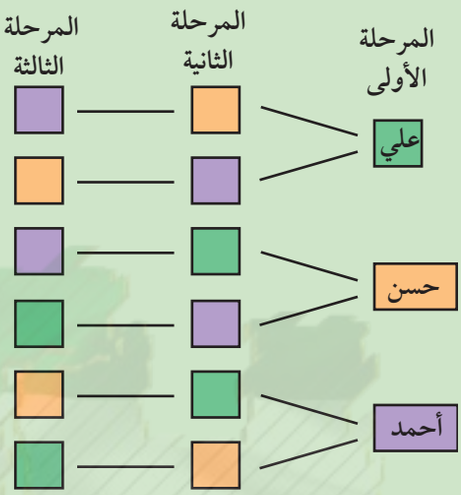
في سباق التتابع ٤ × ١٠٠ م رجال، يتألف أحد الفرق من: علي وحسن وأحمد ومصطفى. قرّر المدرب أن يركض مصطفى في المرحلة الأخيرة. بكم ترتيب مختلف يمكنه اختيار علي وحسن وأحمد لعدو المراحل الثلاث الأولى في سباق التتابع؟

الحل:

بالنسبة إلى العداء الأول هناك ثلاث إمكانيات. عند اختياره يبقى خياران أمام العداء الثاني. عند تحديد الخيار يبقى خيار واحد أمام العداء الثالث.

الطرائق الممكنة





باستخدام مبدأ العد، عدد الاختيارات الكلي = ٣ × ٢ × ١ = ٦ طرائق.

يمكن للمدرب استخدام ٦ طرائق ممكنة مختلفة لترتيب العدائين الثلاثة.

حاول أن تحل

١ يمكن للسباحين أن يتباروا في ٨ خطوط في سباق الـ ٢٠٠م فراشة. كم عدد الطرائق المختلفة التي يمكن بها ترتيب السباحين في الخطوط المختلفة؟

تستخدم الصورة الأسية لكتابة حاصل الضرب عندما تكون العوامل كلها متساوية: ٣ × ٣ × ٣ × ٣ = $٣^{٤}$.

أما المضروب فيستخدم لكتابة حاصل الضرب عندما تكون العوامل أعدادًا صحيحة (موجبة) متتالية تنتهي بالعدد ١ .

يكتب مضروب ٤ على شكل ٤! ويعني ٤ × ٣ × ٢ × ١ .

ن! = ن (ن−١) (ن−٢) .... × ٢ × ١ .حيث ن عدد صحيح موجب

مضروب الصفر يساوي ١ ٠! = ١

مثال (٢)

اختير ٨ أشخاص لحمل الشعلة الأولمبية عبر المدينة. بكم طريقة مختلفة يمكن ترتيب حاملي الشعلة؟

الحل:

اختر ٨ أشخاص، وأوجد الطرائق المختلفة التي يمكن تنظيمهم بها:

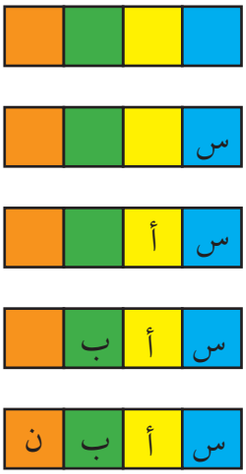
٨ ! = ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٤٠ ٣٢٠

لدينا ٤٠ ٣٢٠ طريقة مختلفة لترتيب حاملي الشعلة.

KuwaitMath.com

تحتاج أحيانًا إلى اختيار أشياء بترتيب معيّن، كاختيار أسماء أول ثلاثة جمال في سباق الهجن أو اعتماد عدد سري يسمح بفتح المحفظة. **عندما يكون ترتيب الأشياء مهمًا دون تكرار يدعى الاختيار تبديلًا.**

كتبت عزة أحرف كلمة "السبعون" كل حرف على بطاقة. أرادت معرفة عدد الكلمات الممكن كتابتها باستخدام ٤ أحرف فقط من السبعة المكونة لكلمة "السبعون". لذلك أخذت ورقة وقسمتها إلى ٤ أقسام.



اختارت حرفًا من ٧ ووضعته في الخانة الأولى، وليكن س. ثم اختارت حرفًا من الأحرف ٦ المتبقية للخانة الثانية، وليكن أ.

بقي مع عزة ٥ بطاقات. اختارت حرفًا منها للخانة الثالثة، وليكن ب.

أخيرًا اختارت حرفًا من ٤ للخانة الباقية، وليكن ن. هكذا اكتملت الكلمة.

تم اختيار الحرف الأول من بين ٧ أحرف. هناك ٦ اختيارات ممكنة للحرف الثاني

أي ٧ × ٦ اختيارات لأول حرفين كذلك هناك ٥ اختيارات ممكنة للحرف الثالث

و٤ اختيارات للحرف الرابع أي ٧ × ٦ × ٥ × ٤ = ٨٤٠ اختيارًا.

ويمكن كتابتها على الصورة $\frac{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٣ \times ٢ \times ١} = \frac{!٧}{!٣} = \frac{!٧}{!(٤ - ٧)}$

وبصورة عامة يعطى اختيار م عنصر من بين ن عنصر مختلف (م ⩽ ن) ومن دون تكرار أي عنصر منها ، حيث ترتيب العناصر مهم بالقانون: $ل^{ن}_{م} = \frac{!ن}{!(ن - م)}$

فمثلًا نكتب: $ل^{٧}_{٤} = \frac{!٧}{!(٤ - ٧)}$

مثال (٣)

من المثال (٢)، بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار ٣ من حاملي الشعلة وترتيبهم للمرور وراء بعضهم أمام المنصة الرسمية؟

الحل:

هناك ٨ من حاملي الشعلة، علينا اختيار ٣ منهم. ترتيب حاملي الشعلة مهم ولا يمر أحدهم مرتين. إذًا الاختيار تبديل.

لإيجاد عدد الطرائق نستخدم القانون $ل^{ن}_{م} = \frac{!ن}{!(ن - م)}$

$ل^{٨}_{٣} = \frac{!٨}{!(٣ - ٨)} = ٣٣٦$

لاحظ أن:

$ل^{٨}_{٣} = ٨ \times ٧ \times ٦$

حاول أن تحل

٢ (أ) احسب ٤!

(ب) احسب (٧ – ٣)!

(جـ) تجري محطة إذاعية مسابقة أفضل شاعر. يتم تسمية الشعراء العشرة الأفضل، وعلى المستمعين تحديد الترتيب الصحيح للشعراء الخمسة الأفضل ليتمكنوا من الربح. بكم طريقة مختلفة يمكن لأحد المستمعين اختيار ٥ شعراء من القائمة التي تضم الشعراء العشرة وترتيبها؟

KuwaitMath.com

مثال (٤)

لنفترض أنه عليك اختيار من بين مجموعة من ١٠ سيارات، بعض السيارات التي ستشارك في الاستعراض وترتيبها.
كم ترتيبًا يمكنك تشكيله إذا اخترت:
(أ) ٤ سيارات؟
(ب) ٥ سيارات؟
(جـ) ٧ سيارات؟

الحل:

الطريقة الأولى: استخدام القانون.

$$\text{(أ) } {}^{١٠}ل_{٤} = \frac{!١٠}{!(٤ - ١٠)} = \frac{!١٠}{!٦} = ٥٠٤٠$$

$$\text{(ب) } {}^{١٠}ل_{٥} = \frac{!١٠}{!(٥ - ١٠)} = \frac{!١٠}{!٥} = ٣٠٢٤٠$$

$$\text{(جـ) } {}^{١٠}ل_{٧} = \frac{!١٠}{!(٧ - ١٠)} = \frac{!١٠}{!٣} = ٦٠٤٨٠٠$$

الطريقة الثانية: استخدام الآلة الحاسبة.

تتضمن عادة الآلات الحاسبة العلمية مفتاح المضروب [!].

(أ) إذا تم اختيار ٤ سيارات، بالتالي، لم يتم اختيار ٦ سيارات: [١٠] [!] [÷] [٦] [!] [=] [٥٠٤٠]

لدينا ٥٠٤٠ طريقة لاختيار ٤ سيارات وترتيبها.

(ب) إذا تم اختيار ٥ سيارات بالتالي، لم يتم اختيار ٥ سيارات:

[١٠] [!] [÷] [٥] [!] [=] [٣٠٢٤٠]

لدينا ٣٠٢٤٠ طريقة لاختيار ٥ سيارات وترتيبها.

(جـ) إذا تم اختيار ٧ سيارات، بالتالي، لم يتم اختيار ٣ سيارات:

[١٠] [!] [÷] [٣] [!] [=] [٦٠٤٨٠٠]

لدينا ٦٠٤ ٨٠٠ طريقة لاختيار ٧ سيارات وترتيبها.

حاول أن تحل

٣ (أ) ما عدد الطرائق المختلفة الممكنة لاختيار ٧ طلاب من ٩ طلاب وترتيبهم للإشراف على صالة الأنشطة؟

(ب) يفتح الباب إذا ضغطت على ٤ مفاتيح مختلفة بالترتيب الصحيح من بين ٧ مفاتيح مختلفة. بكم طريقة مختلفة يمكنك القيام بذلك؟

(جـ) إذا كان عليك اختيار ٣ طلاب وترتيبهم من بين ٥ طلاب لمشروع الفصل، فما عدد الترتيبات المختلفة التي يمكنك تشكيلها ؟

ما عدد الترتيبات الممكنة إذا كان عليك اختيار ٤ طلاب؟ و٥ طلاب؟

تحقق من فهمك

١ وضح ما الذي تعنيه ٥!.

٢ ما أوجه الاختلاف بين عدد الطرائق الممكنة لاختيار ٢٠ شخصًا من بين ٤٠ وترتيبهم، وعدد الطرائق الممكنة لترتيب ٤٠ شخصًا؟

KuwaitMath.com

المرشد لحلّ المسائل (١٠-٢)

حلُّ المسائلِ
افهمْ
خطِّطْ
حُلَّ
تحقَّقْ

عند الأستاذ أحمد ١٠ مجموعات في حصة الرياضيات. غدًا الاثنين ستقوم ثلاث مجموعات منها بتسليم تقارير مشاريعها. بكم طريقة مختلفة يمكن للأستاذ أحمد اختيار هذه المجموعات وترتيبها؟

افهم

١ كم مجموعة في الفصل؟ .....

٢ كم مجموعة ستسلم التقارير يوم الاثنين؟ .....

٣ ما المطلوب إليك إيجاده؟ .....

خطط

٤ كم مجموعة لن تسلّم التقارير يوم الاثنين؟ .....

.....

٥ استخدم المضروب لكتابة عدد طرائق ترتيب:
(أ) المجموعات كلّها. .....
(ب) المجموعات غير المختارة. .....

٦ استخدم المضروب لكتابة تعبير يوضح عدد الطرائق المختلفة التي يمكن أن يستخدمها أحمد لاختيار المجموعات وترتيبها.

.....

حل

٧ بكم طريقة مختلفة يستطيع أحمد اختيار المجموعات وترتيبها؟ .....

.....

٨ اكتب جملة تعطي الإجابة النهائية. .....

تحقق

٩ أعد كتابة التعبير في السؤال رقم ٦ باستخدام العوامل بدلًا من المضروب. .....

.....

حل مسألة أخرى

١٠ عند الأستاذة صبا ٧ مجموعات في حصة الرياضيات. يوم الاثنين القادم ستقوم ٤ مجموعات منها بتسليم تقارير مشاريعها. بكم طريقة مختلفة يمكن للأستاذة صبا اختيار هذه المجموعات وترتيبها؟

.....

.....

KuwaitMath.com

٣-١٠

التوافيق والمجموعات
Combinations and Groups

سوف تتعلم

- كيفية تحديد الخيارات غير المرتبطة بترتيب على أنها توافيق، وتطبيق طرائق العد في حالات يكون فيها الترتيب غير مهم.

من الاستخدامات

- عند اختيار أعضاء اللجان في المجلس نستخدم التوافيق حيث يكون الترتيب غير مهم عند الاختيار.

◄ صلة الدرس لقد سبق أن تعلمت عن الخيارات التي يكون الترتيب فيها مهمًّا. ستتعلم في هذا الدرس أن الترتيب في التوافيق قد لا يكون مهمًّا في حالات عدة. ►

استكشف التوافيق

ما الفرق الذي يحدثه ذلك؟

في دورة الألعاب الأولمبية الصيفية للعام ٢٠٠٨، شارك كل من العداء (أ) و(ب) و(ج) و(د) في سباق العدو ٤ × ٤٠٠ متر تتابع للرجال.

١ بكم طريقة يمكن اختيار العداء الأول لبدء السباق والعداء الرابع لينهي السباق؟

٢ اذكر الترتيبات المختلفة للعداء الأول والعداء الرابع. هل الترتيب مهم في هذه الاختيارات؟

٣ طلبت محطة تلفزيونية أن يظهر عداءين معًا في مقابلة. ما عدد الاختيارات المختلفة التي يمكن تشكيلها باستخدام عداءين من الفريق؟ نظّم قائمة.

٤ ما أوجه الاختلاف بين اختيار عضوين من الفريق للمقابلة واختيار العداء الأول والعداء الرابع؟

تعلم التوافيق والمجموعات

لنفترض أن مدرستك تجري انتخابات لاتحاد الطلاب وأن المرشحين هم: كامل وخالد وفهد ونادر. ينتخب الحائز على أكبر عدد من الأصوات رئيسًا للاتحاد وينتخب الشخص الذي يليه نائبًا له. ما عدد النواتج الممكنة للانتخاب؟

في هذه الحالة يكون الترتيب مهمًّا، لذلك لدينا ٤ × ٣ = ١٢ ناتجًا ممكنًا.

المصطلحات الأساسية

◄ التوافيق
Combination

لنفترض أن الطالبين اللذين نالا أكبر عدد من الأصوات أصبحا عضوين في اتحاد الطلاب، بصرف النظر عن أي منهما نال أكبر عدد من الأصوات. كيف يؤثر ذلك على النتائج؟

الرئيس	نائب الرئيس
كامل	خالد
كامل	فهد
كامل	نادر
خالد	كامل
خالد	فهد
خالد	نادر
فهد	كامل
فهد	خالد
فهد	نادر
نادر	كامل
نادر	خالد
نادر	فهد

أعضاء الاتحاد	
كامل	خالد
كامل	فهد
كامل	نادر
~~خالد~~	~~كامل~~
خالد	فهد
خالد	نادر
~~فهد~~	~~كامل~~
~~فهد~~	~~خالد~~
فهد	نادر
~~نادر~~	~~كامل~~
~~نادر~~	~~خالد~~
~~نادر~~	~~فهد~~

الناتج خالد/ كامل هو نفسه كامل/ خالد، لذا يمكن حذفه. والناتج فهد/ كامل هو نفسه كامل/ فهد، لذا يمكن حذفه وهكذا . بالتالي ينخفض عدد النواتج من ١٢ إلى ٦.

عندما لا يكون الترتيب مهمًّا، ينخفض عدد النواتج. تسمى المجموعة المختارة التي تضم عددًا من الأشياء، بغض النظر عن ترتيبها، **توفيقة** من الأشياء.

مثال (١)

يريد ٥ طلاب (أحمد، خالد، نادر، جابر، حمد) تأليف فريق يضم طالبين لكتابة مقالات صحفية. لإجراء القرعة، تكتب أسماء المرشحين كلها على بطاقات وتخلط لإجراء سحب اسمين معًا. ما عدد التوافيق المختلفة التي يمكن تشكيلها من طالبين اثنين؟

الحل:

نظِّم قائمة:

أحمد، خالد	خالد، نادر	نادر، جابر	جابر، حمد
أحمد، نادر	خالد، جابر	نادر، حمد	
أحمد، جابر	خالد، حمد		
أحمد، حمد			

يمكن تشكيل ١٠ توافيق ممكنة لاختيار طالبين من بين ٥ طلاب.

KuwaitMath.com

حاول أن تحل

١ من مثال (١) إذا تقرر تشكيل الفريق من ٣ طلاب لكتابة المقالات الصحفية، ما عدد التوافيق الممكنة في هذه الحالة؟

في بعض الحالات لا يكون ترتيب العناصر مهمًّا. كاختيار ٣ طلاب ممثلين للصف أو اختيار ٤ كتب مطالعة لقراءتها خلال العطلة الصيفية.

في حاول أن تحل ١ ، اختيار ٣ طلاب لكتابة المقالات الصحفية لا يحتاج إلى ترتيب. أي أن ترتيب ٣ طلاب (٣!) نعتبرهم اختيارًا واحدًا إذا لم يكن الترتيب مهمًّا.

إذًا نقسم عدد التباديل على ٣! لمعرفة عدد المجموعات من ٣ طلاب

أي $\frac{{}^{٥}ل_{٣}}{٣!} = \frac{٥!}{(٥-٣)!\ ٣!} = ١٠$

وبصورة عامة اختيار م عنصر من بين ن عنصر مختلف (م ⩽ ن) دون تكرار أي منها، وحيث ترتيب العناصر غير مهم يسمى توفيقًا ويعطى بالقانون:

$$\binom{ن}{م} = {}^{ن}ق_{م} = \frac{ن!}{م!\ (ن-م)!}$$

ويقرأ (ن فوق م).

إذًا $\binom{٥}{٣} = {}^{٥}ق_{٣} = \frac{٥!}{(٥-٣)!\ ٣!}$

فكرة مفيدة لحل المسائل

إذا كان مجموع الأعداد في المقام لا يساوي العدد الذي يمثل البسط فهذا دليل على أن ثمة خطأ ما.
(فمثلًا $\frac{٥!}{٣! \times ٢!}$ نلاحظ ٥ = ٢ + ٣)

قانون:

$$\binom{ن}{ن} = \binom{ن}{صفر} = ١ \quad ، \quad \binom{ن}{١} = ن$$

تفسير

$\binom{ن}{ن} = ١$: يمكن اختيار «ن» عنصر من بين «ن» عنصر مع إهمال الترتيب بطريقة واحدة.

$\binom{ن}{صفر} = ١$: يمكن اختيار «صفر» عنصر من بين «ن» عنصر بطريقة واحدة.

$\binom{ن}{١} = ن$: يمكن اختيار عنصر واحد من بين «ن» عنصر بِـ «ن» طريقة مختلفة.

KuwaitMath.com

مثال (٢)

في الألعاب الأولمبية لعام ٢٠٠٨، اختير ٣ لاعبي جمباز من كل منتخب من فرق الدول المشاركة، وكان منتخب الكويت يضم ٦ لاعبين، بكم طريقة يمكن تكوين فريق من ٣ لاعبين كويتيين؟

الحل:

بما أن الترتيب غير مهم في عملية الاختيار، فعدد طرائق تكوين الفريق يعطى بقانون التوافيق:

$$(\begin{matrix}٦\\٣\end{matrix}) = {}^{٦}ن_{٣} = \frac{!٦}{!٣ \times !٣} = ٢٠$$

وباستخدام الآلة الحاسبة:

$$\frac{!٦}{!٣ \times !٣} = ٦ \; !\; \div \; (\; ٣ \; !\;) \times ٣ \; !\;) = ٢٠$$

لدينا ٢٠ طريقة لاختيار فريق من ٣ أعضاء من بين لاعبي منتخب الكويت.

حاول أن تحل

٢ كم فريقًا من ٤ لاعبين يمكن تشكيله من مجموعة من ٦ لاعبين؟

مثال (٣)

في أحد المعارض ٢٠ لوحة فنية، بكم طريقة يمكن اختيار مجموعة من ؟

(أ) ٣ لوحات (ب) ١٧ لوحة

اكتب إجابتك على شكل مضروب. ماذا تلاحظ؟

الحل:

(أ) عدد الطرائق لاختيار ٣ لوحات هو $\begin{pmatrix}٢٠\\٣\end{pmatrix} = \frac{!٢٠}{!١٧ \times !٣} = ١١٤٠$

(ب) عدد الطرائق لاختيار ١٧ لوحة هو $\begin{pmatrix}٢٠\\١٧\end{pmatrix} = \frac{!٢٠}{!٣ \times !١٧} = ١١٤٠$

اختيار ١٧ لوحة هو نفسه اختيار ٣ لوحات. فعدد الطرائق في الحالتين هو نفسه.

KuwaitMath.com

تحقق من فهمك

١ فيم تختلف التوافيق عن التباديل؟ لماذا توجد توافيق أقل من التراتيب عند الاختيار من مجموعة ما؟

٢ كيف يرتبط اختيار ٢ من ٧ باختيار ٥ من ٧؟ ولماذا؟

٣ أوجد ${}^{٤}ن$ ، ${}^{٤}ن$. ماذا تلاحظ؟

بكم طريقة ممكنة يمكنك اختيار ٣ كتب من بين مجموع الكتب: كتاب تاريخ أو قصة قصيرة أو كتاب جغرافيا أو كتاب رياضيات أو مجلّة ثقافية؟

افهم

١ حوّط عدد الكتب التي ستختارها.

٢ ضع خطًّا تحت الكتب التي يمكن اختيارها.

٣ هل المطلوب منك هو كيفية تجميع الكتب أم عدد الطرائق الممكن بها التجميع؟

خطط

٤ اكتب كلًّا مما يلي مستخدمًا المضروب.

(أ) عدد طرائق اختيار العناصر كلّها وترتيبها.

(ب) عدد طرائق ترتيب العناصر المختارة.

(جـ) عدد طرائق ترتيب العناصر غير المختارة.

٥ أيّ من الصيغ التالية يبين عدد طرق اختيار الكتب؟

(أ) $\frac{!٥}{!٣}$

(ب) $\frac{!٥}{!٣ \times !٢}$

(جـ) $\frac{!٣ \times !٢}{!٥}$

(د) $\frac{!٣}{!٢}$

حل

٦ بكم طريقة يمكنك اختيار ٣ كتب من المجموعة؟

KuwaitMath.com

تحقق

٧ تحقق من إجابتك بتنظيم قائمة تضم أنواع الكتب التي يمكن اختيارها، وارمز إليها بالأحرف التالية: أ، ب، ج، د، هـ .

حل مسألة أخرى

٨ بكم طريقة يمكنك صنع فطيرة من اللحم تعلوها ٤ طبقات من النكهات المختلفة، علمًا أن الطبقات المتوفرة هي: الطماطم والجبن والبصل والمخلّل والخسّ، والصلصة والتوابل؟

حل المسائل والتفكير المنطقي

١ **التفكير الناقد:** بكم طريقة يمكنك تقديم وجبة خفيفة لفريق من ١٠ سباحين إذا كان لديك ١٢ وجبة خفيفة مختلفة، و بحيث يأخذ كل سباح وجبة واحدة؟

.....

.....

٢ **اختر إستراتيجية:** بكم طريقة يمكن اختيار مجموعة مكونة من صفر إلى ١٢ شيئًا من بين ١٢ شيئًا؟

.....

.....

٣ **التفكير الرياضي:** بكم طريقة يمكنك أن تختار ٣ لاعبين من بين ١٠ لاعبين لفريق كرة السلة، ثمّ اختيار ٣ لاعبين من بين اللاعبين السبعة الباقين لفريق آخر؟

.....

.....

٤ تريد اختيار مجموعة من بين ١٠ طلاب. ما عدد طلاب المجموعة التي ستختارها بحيث تكون عدد الخيارات أكبر ما يمكن؟

.....

KuwaitMath.com

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

الفرصة والاحتمال
Chance and Probability

يوم ميلاد سعيد

كم يوم مولد للفرد الواحد؟ لكل فرد يوم مولد واحد فحسب. أما الأيام الأخرى من السنوات المتتالية التي نحتفل فيها بأيام المولد فهي الذكرى السنوية لذلك اليوم.

ومما لا شك فيه أن العديد من الأشخاص يتشاركون يوم المولد نفسه. إذا كان يوم مولدك يقع في ١١ نوفمبر / تشرين الثاني، فإنه يتوافق مع تاريخ استقلال دولة الكويت. وإذا كان يقع في ٢٦ فبراير / شباط، فإنه يتوافق مع تاريخ التحرير.

اليوم الذي يحتفل فيه أفراد مختلفون بأيام مولدهم يمتلئ أحيانًا بالتطابقات.

هل ولدت بمفردك أو شاركك أخ أو أخت يوم مولدك؟ عند ولادتك من الممكن أن يكون لديك:

- فرصة واحدة من ٨٠ أن تكون توأمًا (لأخ أو أخت لك)
- فرصة واحدة من ٤٠٠ ٦ أن تكون توأمًا (لزوج من إخوتك)
- فرصة واحدة من ٠٠٠ ٥١٢ أن تكون توأمًا (لثلاثة إخوة آخرين لك)
- فرصة واحدة من ٠٠٠ ٩٦٠ ٤٠ أن تكون توأمًا (لأربعة إخوة آخرين لك)

١ هل تشارك أحد المشاهير يوم مولدك؟

٢ تحتفل دولة الكويت بذكرى الاستقلال والعيد الوطني في ٢٥ فبراير. هل هذا التاريخ يصادف في اليوم نفسه من كل عام؟ ولماذا؟

٣ أي مما يلي له فرصة أكبر للحدوث، أن تولد كتوأم ثنائي أم كتوأم خماسي؟

١٠-٤

الاحتمال
Probability

سوف تتعلم

- حساب الاحتمال.

من الاستخدامات

- يستخدم الاحتمال لتوقع المكان الذي سيحدث فيه الإعصار.

المصطلحات الأساسية

- تجربة Experiment
- نواتج Outcomes
- فضاء العينة Sample Space
- حدث Event
- احتمال Probability

صلة الدرس لقد سبق أن استخدمت طرائق لعد النواتج الممكنة. ستتعلم في هذا الدرس حساب فرصة حدوث ناتج ما.

استكشف الاحتمال

إنه أمر مؤكد

١ ارسم خط أعداد يشبه الخط الموضح أدناه:

صفر ٠,١ ٠,٢ ٠,٣ ٠,٤ ٠,٥ ٠,٦ ٠,٧ ٠,٨ ٠,٩ ١

سم على خط الأعداد النقاط التي تبين فرصة حدوث الأحداث التالية، علمًا أن الصفر يدل على أن الحدث مستحيل وأن الـ ١ يدل على أن الحدث مؤكد.

(أ) الحصول على ٦ عند رمي مكعب مرقم مرة واحدة.

(ب) الحصول على كتابة عند رمي قطعة نقود معدنية مرة واحدة.

(جـ) اختيار زوج من الجوارب من درج يحوي زوجين من الجوارب وذلك من دون النظر داخله.

(د) سحب بطاقة تتضمن حرفًا من مجموعة ١٠ بطاقات تتضمن أول ١٠ أحرف من حروف الهجاء العربية.

(هـ) الحصول على عدد أكبر من ٦ عند رمي مكعب مرقم مرة واحدة.

(و) الحصول على كتابة أو صورة عند رمي قطعة نقود معدنية مرة واحدة.

٢ علل كيفية تصنيفك للأحداث وتمثيلها على خط الأعداد، وهل وضع كل شخص في مجموعتك النقاط بالترتيب نفسه؟

٣ صف الأحداث التي استطعت وضعها في صفر أو في ١.

تعلم الاحتمال

نفرض أنك ترمي قطعة نقود معدنية عشوائيًّا **للتجربة**. يمكن أن تظهر قطعة النقود الصورة أو الكتابة فهما نتيجتان متساويتان في الفرص أو **نواتج** ممكنة.

تمثل مجموعة النواتج الممكنة كلها في تجربة ما **فضاء العينة**. وغالبًا ما نهتم بفرصة حدوث **حدث** معين، ويسمى ذلك **احتمال** الحدث.

يمكن كتابة الاحتمال على شكل كسر عشري أو كسر أو نسبة أو نسبة مئوية.

$$\text{ل (الحدث)} = \frac{\text{عدد النواتج في الحدث}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$$

أمثلة

١ يلعب فهد وخالد لعبة باستخدام مكعب مرقم. إذا رمى فهد المكعب المرقم وحصل على ٣ أو أكثر يفوز في اللعبة.

ما النواتج في فضاء العينة؟ ما النواتج المحققة للحدث «٣ أو أكثر»؟ ما احتمال الحدث «٣ أو أكثر»؟

تذكر:
عندما نقول مكعبًا مرقمًا نعني مكعبًا مرقمًا: من ١ – ٦

الحل:

فضاء العينة: ٦ نواتج ← ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦

الحدث «٣ أو أكثر»: ٤ نواتج ← ٣، ٤، ٥، ٦

احتمال حصول فهد على «٣ أو أكثر» في رميته $\frac{٤}{٦}$ أو $\frac{٢}{٣}$.

٢ تحاول أسيل تخمين يوم مولد صديقتها إسراء. ما احتمال أن تخمن الشهر الصحيح في محاولتها الأولى؟ (لنفترض أن الاحتمالات متساوية ليوم مولد أي شخص في أي شهر).

الحل:

في السنة ١٢ شهرًا بالتالي يساوي عدد نواتج فضاء العينة ١٢. يمكن أن يكون فيه مولد إسراء في خلال شهر واحد فقط وبالتالي يساوي عدد نواتج الحدث ١.

$$\text{ل (تخمين الشهر الصحيح)} = \frac{١}{١٢}$$

حاول أن تحل

١ ما النواتج في فضاء العينة في كل مما يلي؟ وما احتمال الحدث؟

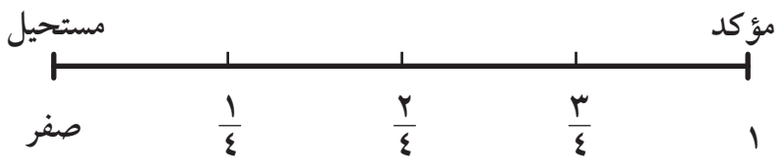
(أ) إذا رمى أحمد مكعبًا مرقمًا وحصل على ٥ أو أكثر، يفوز في اللعبة.

(ب) عند اختيار سمكة واحدة من سلة تحوي أربع سمكات وهي (زبيدي، نقرور، صبور، هامور) والحصول على سمكة زبيدي.

يكتب احتمال وقوع حدث ما دائمًا على شكل عدد بين الصفر وواحد.

إذا كان عدد النواتج في الحدث يساوي الصفر فإن الحدث يسمى **«الحدث المستحيل»** واحتماله يساوي صفرًا.

إذا كان عدد النواتج في الحدث يساوي عدد النواتج في فضاء العينة فإن الحدث يسمى **«الحدث المؤكد»** واحتماله يساوي يساوي ١.



KuwaitMath.com

مثال (٣)

لنفترض أنك أدرت الدوارة إلى اليسار، ما احتمال أن يتوقف مؤشرها عند اللون:

(أ) الأحمر (ب) الأحمر أو الأزرق

(جـ) الأخضر (د) غير الأحمر

الحل:

(أ) ل (أحمر) = $\frac{٢}{٥}$

(ب) ل (أحمر أو أزرق) = ١ (مؤكد)

(جـ) ل (أخضر) = صفر (مستحيل)

(د) ل (غير الأحمر) = $\frac{٣}{٥}$

يمكنك أن تلاحظ أن احتمال الحصول على اللون الأحمر زائد احتمال الحصول على لون غير اللون الأحمر هو ١ .

مجموع احتمال وقوع حدث واحتمال عدم وقوعه يساوي ١ .

حاول أن تحل

٢ عند رمي مكعب مرقم من ١ – ٦ مرة واحدة، أوجد احتمال الحصول على:

(أ) عدد أولي (ب) عدد غير أولي

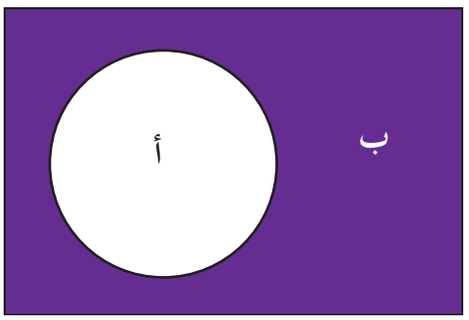
(جـ) عدد أكبر من ٥ (د) عدد أصغر من ٧

(هـ) كسر بين ١ و٢

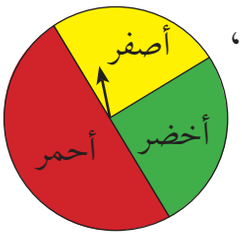
تحقق من فهمك

١ اذكر الفرق بين فضاء العينة والحدث. هل يمكن أن يكون الحدث يساوي فضاء العينة؟

٢ في الشكل أدناه، إذا كان الحدثان أ، ب يمثلان الإمكانيات كلها في فضاء عينة، ما الذي تعرفه عن ل (ب)؟ ولماذا؟



حلُّ المسائلِ
افهمْ
خطِّطْ
حُلَّ
تحقَّقْ



إذا كانت مساحة كل من القطاعين الأخضر والأصفر من الدوّارة تساوي $\frac{١}{٤}$ مساحة الدوّارة، فما احتمال عدم توقف مؤشر الدوّارة عند اللون الأخضر؟

افهم

١ كم قطاعًا في الدوّارة؟ .....

٢ أيّ القطاعات لها المساحة نفسها؟ .....

٣ أيّ كسر من المساحة يمثل اللون الأحمر؟ .....

خطط

٤ كيف تجعل مساحة القطاع الأحمر مساوية لمساحة القطاع الأخضر؟ .....

.....

٥ كيف يمكن أن توجد احتمال الحدث: .....

(أ) ل (الحدث) = $\frac{\text{عدد نواتج الحدث}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$ ؟ (ب) ل (الحدث) = $\frac{\text{عدد الأحداث}}{\text{عدد الأحداث في فضاء العينة}}$ ؟

٦ اذكر نواتج الحدث متساوية الفرص.

.....

٧ اذكر النواتج كلها التي ليست خضراء.

.....

KuwaitMath.com

حل

٨ اكتب احتمال عدم توقف مؤشر الدوارة عند اللون الأخضر على شكل كسر. .....

.....

تحقق

٩ كيف يمكنك استخدام الطرح لإيجاد الإجابة؟ .....

.....

حل مسألة أخرى

١٠ إذا كانت مساحة كل من القطاعات البيضاء والسوداء يساوي $\frac{١}{٥}$ مساحة الدوّارة، فما احتمال عدم توقف مؤشر الدوارة عند اللون الأسود؟

.....

.....

حل المسائل والتفكير المنطقي

١ في أحد الاختبارات تختار غدير إجابتها عشوائيًّا (دون التدقيق في السؤال). ما احتمال أن تختار الإجابة الصحيحة:

(أ) في سؤال اختيار من متعدد مع أربع إجابات؟

.....

.....

(ب) في سؤال صح أو خطأ؟

.....

.....

التفكير الناقد: أجب مستخدمًا: «دائمًا»، «أحيانًا»، «مستحيل».

٢ يساوي احتمال الحدث المؤكد ١ .....

٣ يساوي احتمال الحدث المستحيل ١ .....

٤ **المجلة**: وضّح لم احتمال وقوع حدث لا يمكن أن يكون أكبر من ١ . أعطِ مثالًا على حدث احتمال وقوعه يساوي ١ .

.....

.....

KuwaitMath.com

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

٥-١٠

الاحتمال التجريبي والاحتمال الهندسي
Experimental and Geometric Probability

سوف تتعلم

- استخدام التجارب لإيجاد الاحتمالات.

من الاستخدامات

- يستخدم صانعو الأطعمة اختبارات السوق والاحتمال لتحديد ما إذا كان المنتج سيلقى رواجًا.

◄ صلة الدرس لقد سبق أن تعلمت كيف تحسب الاحتمالات. سترى في هذا الدرس ما إذا كان الحدث الممكن وقوعه يحدث فعلًا. ►

استكشف الاحتمال التجريبي

رمي النقود المعدنية **الأدوات المستخدمة:** قطع نقود معدنية.

١ أثناء عملك مع الطلاب في مجموعتك، حدد من منهم يحين موعد يوم مولده أخيرًا، فمثلًا ولد الطلاب في مجموعة الأيام ١٢ و٣ و٢٤ و١٩ ويعتبر يوم ٢٤ التاريخ الأخير لأيام المولد. نسمي هذا العدد (ن).

٢ سوف ترمي قطعة نقود معدنية (ن) مرة (٢٤ مرة للمثال السابق). اذكر عدد المرات التي تتوقع أن تحصل فيها على صورة.

٣ ارم قطعة نقود (ن) مرة. سجّل عدد مرات الحصول على الصورة. هل هذا هو العدد الذي توقعته؟

٤ اقسم عدد مرات الحصول على الصورة على عدد مرات رمي قطعة النقود. قرب النتيجة إلى أقرب واحد من مائة معتبرًا أنه الاحتمال.

٥ ما الاحتمال الأكبر الذي حصلت عليه مجموعة؟ وما الاحتمال الأصغر ؟

٦ اكتب النتائج باستخدام علامات العد (عدد الصور الكلي وعدد الرميات الكلي). اقسم لإيجاد احتمال طلاب الفصل كلهم. هل هو قريب من توقعك؟

تعلم الاحتمال التجريبي، الاحتمال الهندسي

أحيانًا قد يكون من السهل حساب الاحتمال الفعلي أو **الاحتمال النظري** لحدث ما. عندما ترمي مكعبًا مرقمًا، يكون احتمال ظهور كل وجه $\frac{١}{٦}$. لكن في حالات أخرى، قد تحتاج إلى تقدير الاحتمال عبر بيانات استطلاع ما أو البيانات التجريبية. ويسمى الاحتمال المحتسب وفق هذه الطريقة **الاحتمال التجريبي** .

تتمثل الطريقة الفضلى لإدراك مفهوم الاحتمال التجريبي باستخدامه في حالة يكون فيها الاحتمال النظري معلومًا، والمقارنة بينهما.

تسمى كل مرة تقوم فيها بتجربة **محاولة** .

المصطلحات الأساسية

- ◄ احتمال نظري
  Theoretical Probability
- ◄ احتمال تجريبي
  Experimental Probability
- ◄ محاولة
  Trial
- ◄ احتمال هندسي
  Geometric Probability

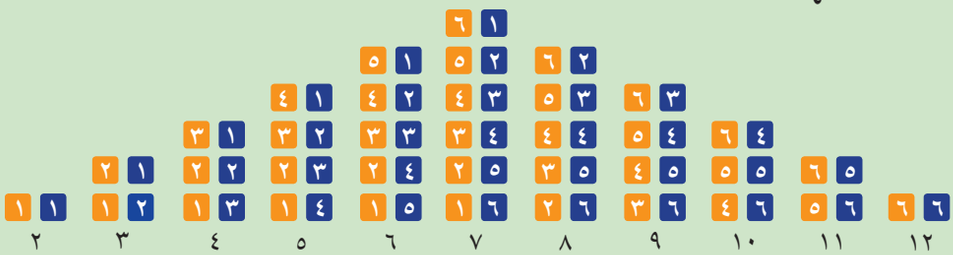
KuwaitMath.com

مثال (١)

(أ) ما الاحتمال النظري للحصول على المجاميع الممكنة عند رمي مكعبين مرقمين؟

الحل:

باستخدام مبدأ العد، تبين أن عدد النواتج الممكنة ٦ × ٦ = ٣٦. يمكن رسم مخطط أو تنظيم قائمة لملاحظة المجاميع الممكنة كلها.



الاحتمالات النظرية											
المجموع	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
عدد المرات	١	٢	٣	٤	٥	٦	٥	٤	٣	٢	١
الاحتمال	$\frac{١}{٣٦}$	$\frac{١}{١٨}$	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{١}{١٨}$	$\frac{١}{٣٦}$
النسبة المئوية	٪٢,٨	٪٥,٦	٪٨,٣	٪١١,١	٪١٣,٩	٪١٦,٧	٪١٣,٩	٪١١,١	٪٨,٣	٪٥,٦	٪٢,٨

(ب) لإيجاد الاحتمالات التجريبية، ارمِ مكعبين مرقمين ٥٠ مرة، وسجل المجاميع التي حصلت عليها.

الحل:

حصل أحد الطلاب على النتائج التالية:

الاحتمالات التجريبية											
المجموع	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
عدد المرات	٢	٤	٣	٥	٧	٨	٩	٥	٤	٣	صفر
الاحتمال	$\frac{١}{١٨}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٧}{٣٦}$	$\frac{٢}{٩}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{صفر}{٣٦}$
النسبة المئوية	٪٤	٪٨	٪٦	٪١٠	٪١٤	٪١٦	٪١٨	٪١٠	٪٨	٪٦	صفر٪

(جـ) قارن بين النسب المئوية للنتائج التجريبية هذه والنسب المئوية النظرية للمجاميع من ٢ إلى ١٢.

الحل:

تتقارب النسب المئوية للاحتمالات التجريبية والنظرية، وكان من الممكن أن تتقارب النتائج إلى حد أكبر لو أجرى الطالب عددًا أكبر من المحاولات.

حاول أن تحل

١ (أ) عند رمي قطعتي نقود معدنيتين متمايزتين، ما الاحتمال النظري للحصول على صورتين؟ وصورة واحدة فقط؟ وعدم الحصول على صورة؟

(ب) لإيجاد الاحتمال التجريبي، ارمِ قطعتي نقود معدنيتين ٥٠ مرة، سجّل عدد مرات حدوث كل نتيجة.

(جـ) قارن بين النسب المئوية للنتائج التجريبية التي حصلت عليها، والنسب المئوية النظرية.

يمكن اعتماد طريقة أخرى لتحديد الاحتمال، وذلك باستخدام نماذج هندسية والمقارنة بين المساحات أو الأطوال أو قياسات أخرى، وهذا ما يعرف بـ الاحتمال الهندسي.

مثال (٢)

وضعت هدية صغيرة عشوائيًّا في قالب حلوى. فرص تواجد الهدية في أي جزء من قالب الحلوى متكافئة. ما احتمال أن تتواجد الهدية تحت الأطراف الحمراء؟

الحل:

مساحة المستطيل الكبير = ٩١ سم × ٦١ سم = ٥ ٥٥١ سم^{٢}.

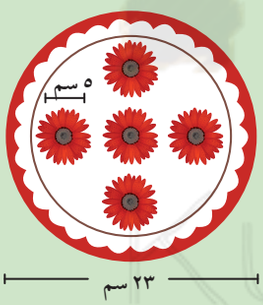
مساحة المستطيل الداخلي = ٧٦ سم × ٤٦ سم = ٣ ٤٩٦ سم^{٢}.

مساحةالأطراف الحمراء = ٥ ٥٥١ – ٣ ٤٩٦ = ٢ ٠٥٥ سم^{٢}.

احتمال أن تكون الهدية تحت جزء من الأطراف الحمراء يساوي $\frac{٢\,٠٥٥}{٥\,٥٥١}$.

٢ ٠٥٥ ÷ ٥ ٥٥١ = ٠,٣٧٠ أي ٣٧٪.

حاول أن تحل



٢ وضعت هدية صغيرة عشوائيًّا في قالب حلوى. فرص تواجدها في أي جزء من قالب الحلوى متكافئة. ما احتمال أن تكون الهدية تحت إحدى الزهور؟

تحقق من فهمك

١ اذكر الفرق بين الاحتمال النظري والاحتمال التجريبي. هل الاحتمالات التي يذكرها الأطباء نظرية أم تجريبية؟ هل الاحتمال الهندسي نظري أم تجريبي؟

٢ قال فهد إن الاحتمال التجريبي يمكن أن يكون أكبر من ١، هل هذا صحيح؟ وإذا كان كذلك، فأعطِ مثالًا.

٣ لنفترض أن المدقق في جودة المنتجات أجرى اختبارًا على ٢٠ صندوق شمع. وجد شموعًا معيبة في ١ منها، واعتبر أن المعمل قد فشل في الاختبار. هل هذا عادل؟

معيار الجودة

إذا تخطت النسبة المئوية للعيوب ٦٪، فإن المنتج يفشل في الاختبار.

المرشد لحلّ المسائل (١٠-٥)

قام خالد باستطلاع طلاب فصله حول يوم مولد كل منهم. ثم نظّم البيانات في مخطط الساق والأوراق المبين إلى اليسار.

(أ) ما احتمال أن يكون أحد الطلاب قد ولد بتاريخ ١٧؟

(ب) ما احتمال أن يكون أحد الطلاب قد ولد بعد تاريخ ٢٩؟

(جـ) ما احتمال أن يكون أحد الطلاب قد ولد بتاريخ ٤؟

الساق	الأوراق
٠	١٣ ٥٧٧ ٨٨٩
١	١ ١٣٥ ٦٧٧ ٧٨٩
٢	٠٠١ ٢٢٣ ٤٦٦ ٧٨٩
٣	٠٠١

افهم

١ ماذا تمثل كل إجابة؟ .....

خطط

٢ ما عدد نواتج فضاء العينة؟ .....

٣ اكتب عدد الطلاب الذين ولدوا في كل من التواريخ المذكورة. .....

(أ) يوم ١٧ (ب) يوم ٣٠ أو ٣١ (جـ) يوم ٤

٤ كم طالبًا لم يولد في تاريخ ٤؟ .....

حل

٥ اكتب احتمال أن يكون أحد الطلاب قد ولد في كل من التواريخ المذكورة: .....

(أ) يوم ١٧ (ب) بعد يوم ٢٩ (جـ) يوم ٤

تحقق

٦ اكتب كلّ احتمال في السؤال رقم ٥ على شكل نسبة مئوية. .....

(أ) يوم ١٧ (ب) بعد يوم ٢٩ (جـ) يوم ٤

حل مسألة أخرى

٧ أضف يومي مولد آخرين: التاسع، والتاسع والعشرين إلى مخطط الساق والأوراق السابق. ثم أجب عن الأسئلة التالية:

(أ) ما احتمال أن يكون أحد الطلاب قد ولد بتاريخ ٢٥؟ .....

(ب) ما احتمال أن يكون أحد الطلاب قد ولد بعد تاريخ ١٦؟ .....

(جـ) ما احتمال ألا يكون أحد الطلاب قد ولد بتاريخ ١٠؟ .....

KuwaitMath.com

حل المسائل والتفكير المنطقي

١ التحضير للاختبار: قدّر احتمال أن يكون أحد الأشخاص قد ولد في شهر مايو.

(أ) ٨,٥٪ (ب) ١٢٪ (ج) $\frac{١١}{١٢}$ (د) ١,٦٠٪

.....

٢ التواصل: أعطي ٦٠٠ مريض من أصل ١٠٠٠ دواء جديدًا. أما العدد المتبقي منهم فأعطي له دواء ليس له أي تأثير. من الأشخاص الذين أخذوا الدواء الفعلي، تحسنت حالة ٣٠٠ منهم مقارنة بـ ٥٠ شخصًا من الذين أخذوا الدواء الآخر. هل يمكنك القول أن الدواء فعال؟ ولماذا؟

معيار فعالية الدواء
يعتبر الدواء فعالًا إذا كانت نتائجه إيجابية بنسبة لا تقل عن ٩٠ ٪ خلال فترة ١٠ أشهر.
FDA Regulations

.....

.....

٣ وضعت أمينة ٥ كرات حمراء اللون، و٣ كرات خضراء اللون في كيس. دون النظر في داخله، سحبت أمينة كرة منه، دونت لونها على ورقة ثم أعادتها إلى الكيس. كررت العملية ٥٠ مرة وحصلت على ٢٩ كرة حمراء. قارن بين الاحتمال النظري والاحتمال التجريبي لسحب كرة حمراء.

.....

.....

٤ التفكير الناقد: إذا كان الاحتمال النظري لوقوع حدث ما يساوي ١، فهل يمكن للاحتمال التجريبي أن يكون أصغر من ١؟

.....

.....

KuwaitMath.com

إستراتيجيات حل المسائل

- ابحث عن النمط.
- نظم قائمة.
- اعمل جدولًا.
- خمن وتحقق.
- اعمل بطريقة عكسية.
- استخدم التفكير المنطقي.
- ارسم تمثيلًا بيانيًّا.
- حل مسألة أبسط.

اختبار الوحدة العاشرة

١ هل يمكن أن تمثل النسبة $\frac{٥}{٤}$ احتمالًا؟ فسِّر.

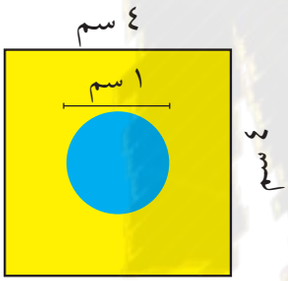
٢ تلعب مها وصديقتها لعبة بمكعب مرقم، تربح مها إذا دحرجت المكعب وحصلت على عدد أكبر من ٤.
ما احتمال أن تفوز صديقتها باللعبة؟

٣ في عبوة بذور لعدة أنواع من الأزهار وهي ٥٠ بذرة أقحوان، ٨٠ بذرة دوار الشمس، ١٠٠ بذرة زهرة سوسن، و٤٠ بذرة قرنفل، أوجد احتمال أن تختار عشوائيًّا بذرة قرنفل.

٤ في مسابقة، كانت الجوائز ١٠٠ دينار، ٧٥ دينارًا، ٢٥ دينارًا، ٢٥ دينارًا، ٢٥ دينارًا، ٢٥ دينارًا.

(أ) إذا اخترت جائزة عشوائيًّا، فما احتمال أن تفوز بـ٧٥ دينارًا؟

(ب) إذا منحت جائزة الـ ١٠٠ دينار فعلًا، فما فرصتك في الفوز بـ ٧٥ دينارًا؟



٥ بكم طريقة يمكننا أن نرتب ١٠ كتب على أحد رفوف المكتبة؟

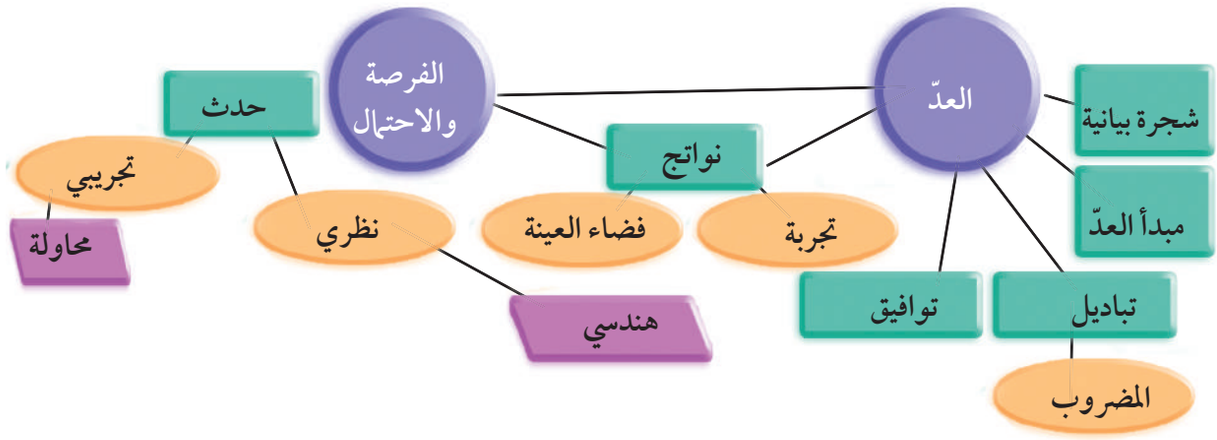
٦ بكم طريقة يمكننا أن نختار ٣ أنواع من السكاكر من أصل ١٠ أنواع؟

٧ أوجد احتمال أن يصيب أحمد الهدف الدائري من الرسم المقابل.

٨ يحتوي صندوق على ٣ كرات: واحدة زرقاء، واحدة حمراء، واحدة خضراء. ارسم شجرة بيانية للنواتج الممكنة إذا أردنا أن نسحب كرتين واحدة تلو الأخرى دون إعادة الكرة الأولى.

KuwaitMath.com

مخطط تنظيمي للوحدة العاشرة



ملخص الوحدة العاشرة (أ) : العدّ

- ينص مبدأ العد على أنه إذا كان يمكن وقوع حدث ما بـ م طريقة، ويمكن لحدث آخر أن يقع بـ (ن) طريقة، فإن هذين الحدثين يمكن أن يقعا معًا بـ م × ن طريقة. يمكنك أيضًا استخدام جدول أو شجرة بيانية كي تعدّ.
- يستخدم اصطلاح المضروب لكتابة حاصل ضرب أعداد صحيحة متتالية. ٤! يساوي مضروب ٤ ويعني ٤ × ٣ × ٢ × ١. يعرّف صفر ! على أنه يساوي ١.
- التبديل أو الترتيب هو اختيار مرتب من الأشياء. يمكنك استخدام مبدأ العد أو المضروب لحساب التباديل.
- التوفيق هو اختيار من الأشياء غير المرتبة. عدد التوافيق يساوي عدد التباديل مقسومًا على عدد الطرائق الممكنة لترتيب الأشياء المختارة.

KuwaitMath.com

ملخص الوحدة العاشرة (ب): الفرصة والاحتمال

- فضاء العينة هو مجموعة النواتج الممكنة كلها أو نواتج تجربة ما. والحدث هو ناتج أو مجموعة من النواتج.
- الاحتمال أو الاحتمال النظري لحدث ما هو : ل (حدث) = $\frac{\text{عدد النواتج في الحدث}}{\text{عدد نواتج فضاء العينة}}$.
- يساوي مجموع احتمال وقوع حدث ما واحتمال عدم وقوعه ١ .
- يحسب الاحتمال التجريبي باستخدام بيانات استبيان أو تجارب معينة. ويساوي عدد مرات وقوع الحدث مقسومًا على عدد المحاولات.
- يحسب الاحتمال الهندسي باستخدام النماذج الهندسية وبالمقارنة بين المساحات أو الأطوال أو أي مقاييس أخرى.

KuwaitMath.com

KuwaitMath.com

أودع في مكتبة الوزارة تحت رقم (٩٧) بتاريخ ٣١/ ٥/ ٢٠١٥م

شركة مطابع الرسالة - الكويت