الوحدة الرابعة

تطابق وتشابه المثلثات

Congruency and Similarity of Triangles

الفنون الجميلة
Fine Art

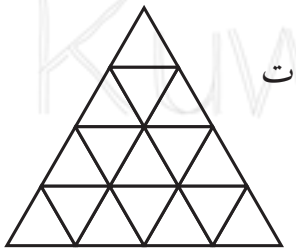
مشروع الوحدة :
(الفنان الصغير)

الفنون الجميلة هي أحد وأهمّ أنواع الفنون ، حيث تصف موهبة الإنسان ومقدرته على التعبير عن مكنونات نفسه وعقله وتجسيدها ، ليترجم بذلك جميع أحاسيسه وخواطره على شكل رسومات أو منحوتات أو أشعار أو أعمال يدوية وغيرها الكثير . وأغلب الفنّانين يستخدمون هندسة المثلّث في أعمالهم الفنّية .

خطة العمل :

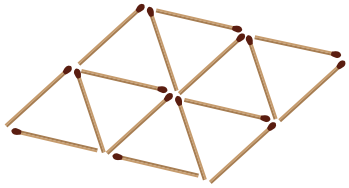
- رسم لوحة فنّية من الفسيفساء باستخدام نوع محدّد من المثلّثات .

خطوات تنفيذ المشروع :



باستخدام الأدوات الهندسية ، اصنع لوحة من الفسيفساء توظّف فيها المثلّثات التالية ومثلّثات من اختيارك (احرص على استخدام مثلّثات متطابقة أكثر)

- ارسم مثلّثًا فيه طول ضلعين وزاوية (٥ سم ، ٣ سم ، وقياس الزاوية المحدّدة بهما ١٢٠°)
- ارسم مثلّثًا متطابق الأضلاع طول ضلعه ٦ سم .
- ارسم مثلّثًا بمعلومية زاويتين وضلع واصل (٤٠° ، ٦٠° والضلع الواصل بينهما طوله ٧ سم)
- لوِّن المثلّثات بطريقة مميّزة للحصول على لوحة مميّزة .



علاقات وتواصل :

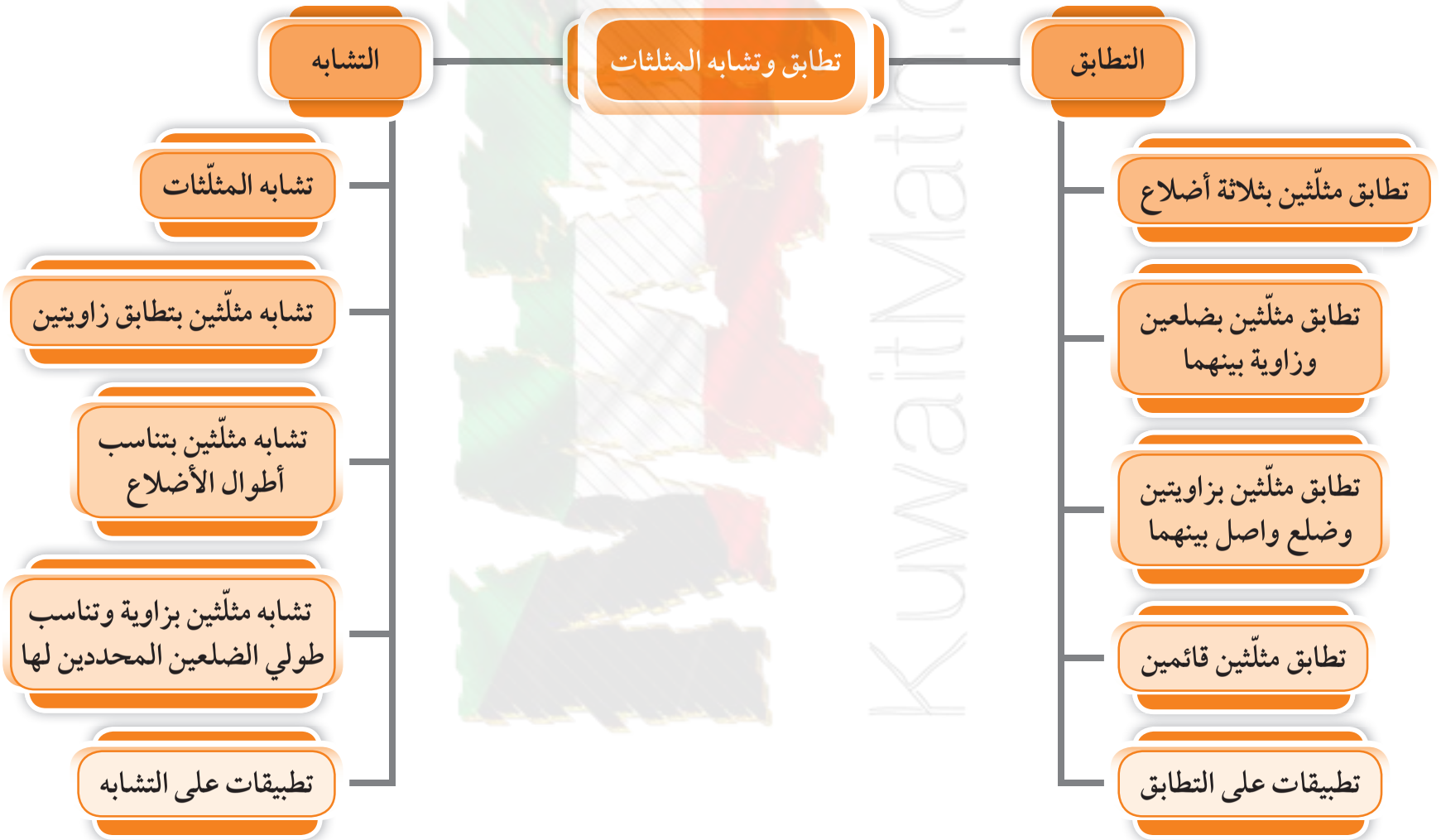
- كلّ مجموعة تعرض لوحتها .
- تتبادل المجموعات اللّوحات للاطّلاع عليها .

عرض العمل :

- تعرض كلّ مجموعة اللّوحة الفنّية .
- تحدّد عدد المثلّثات المتطابقة المستخدمة .

KuwaitMath.com

مخطَّط تنظيمي للوحدة الرابعة



KuwaitMath.com

١-٤ التطابق
Congruency

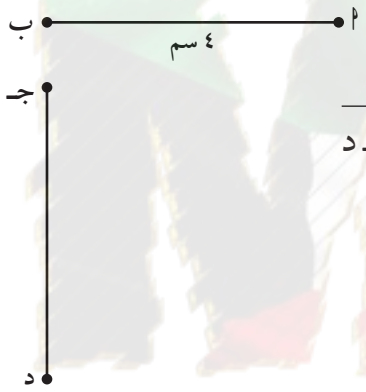
سوف تتعلّم: تطابق قطعتين مستقيمتين ، زاويتين ، مثلّثين .

تطابق قطعتين مستقيمتين

نشاط (١) :

استعن بالورق الشفاف لتتحقّق من تطابق القطعتين $\overline{أب}$ ، $\overline{جـد}$ ثمّ أكمل ما يلي :

حاول مطابقة $\overline{أب}$ على $\overline{جـد}$ بحيث



أ تنطبق على ..... ، ب تنطبق على .....

إذًا $\overline{أب}$ تطابق $\overline{جـد}$. ونرمز إلى ذلك بالرمز $\overline{أب} \cong \overline{جـد}$

العبارات والمفردات :
التطابق
Congruency
رمز التطابق ≅
Congruency sign ≅

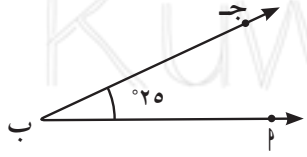
ملاحظة :
- إذا كان :
$\overline{أب} \cong \overline{جـد}$ تعني
$أب = جـد$.
- إذا كان :
$\hat{أ} \cong \hat{ب}$ تعني
$ن(\hat{أ}) = ن(\hat{ب})$.

تطابق زاويتين

نشاط (٢) :

استعن بالورق الشفاف لتتحقّق من تطابق $\hat{أ}$ جـ ، و $\hat{هـ}$ د

حاول مطابقة $\hat{أ}$ جـ مع و $\hat{هـ}$ د ثمّ أكمل ما يلي :

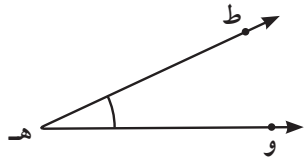


بحيث: تنطبق نقطة ب على نقطة .....

$\overleftarrow{ب أ}$ ≅ .....

$\overleftarrow{ب جـ}$ ≅ .....

إذًا $\hat{أ}$ جـ ≅ .....



فكّر وناقِش

١ متى تتطابق قطعتان مستقيمتان ؟

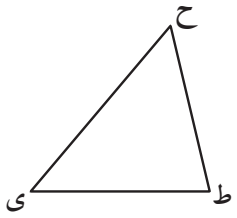
٢ متى تتطابق زاويتان ؟

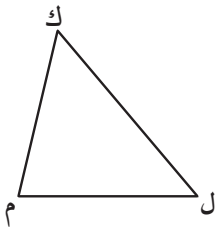
KuwaitMath.com

تطابق مثلّثين

نشاط (٣) :

اِستعِن بالورق الشفّاف لتتحقق من تطابق المثلّثين ك ل م ، ح ى ط ، ثمّ أكمِل :





Δ ك ل م ≅ Δ	$\hat{ك}$ ≅ .....
$\overline{ك ل}$ ≅	$\hat{ل}$ ≅ .....
$\overline{ل م}$ ≅	$\hat{م}$ ≅ .....
$\overline{ك م}$ ≅	

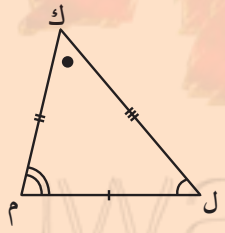
تذكر أنّ :
نراعي ترتيب الرموز عند كتابة عبارة التطابق .

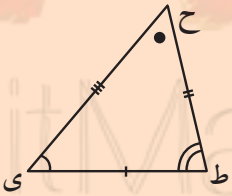
إذاً لأي مثلّثين :

المثلّث ك ل م ≅ المثلّث ح ى ط إذا وفقط إذا كانت :

١ أضلاعهما المتناظرة متطابقة .

٢ زواياهما المتناظرة متطابقة .

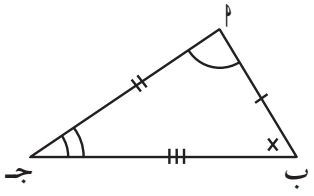




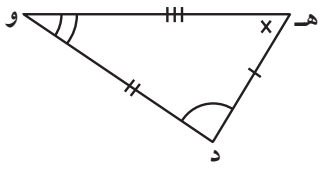
تذكّر أنّ :
للمثلّث ستّة عناصر ،
ثلاثة أضلاع ،
ثلاث زوايا .

تدرّب (١) :

في الشكل المقابل Δ أ ب جـ ، Δ د هـ و .



أكمِل ما يلي حسب الشروط المعطاة بالرسم :



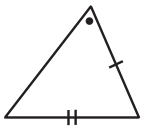
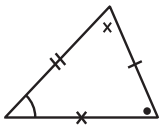
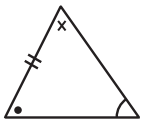
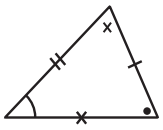
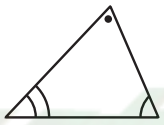
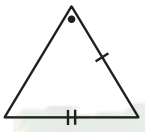
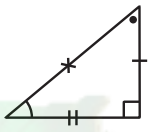
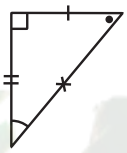
أ $\hat{أ}$ ≅	ب ..... ≅ $\hat{هـ}$
جـ $\hat{جـ}$ ≅	د ..... ≅ $\overline{د هـ}$
هـ $\overline{ب جـ}$ ≅	و $\overline{أ جـ}$ ≅ .....

نستنتج أنّ : المثلّث أ ب جـ ≅ .....

KuwaitMath.com

تمـــرَّنْ :

١ في الجدول التالي حدّد المثلّثين المتطابقين :

المثلّث / المجموعة	أ	ب	جـ	د	المثلّثان المتطابقان
١					.....
٢					.....

٢ في الشكل المقابل Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب
باستخدام الورق الشفاف ارسم Δ ل م ن المتطابقة مع Δ أ ب جـ
ثمّ حدّد العناصر المتطابقة فيهما.

.....

.....

.....

٣ إذا كان Δ أ ب جـ ≅ Δ س ص ع ، فحدّد العناصر المتطابقة فيهما .

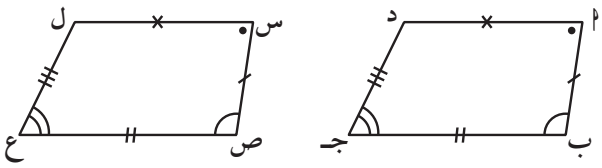
.....

.....

.....

KuwaitMath.com

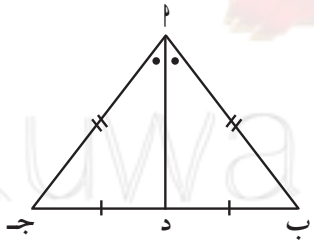
٤ في الشكل المقابل أ ب جـ د ، س ص ع ل شكلين رباعيين متطابقين



أكمِل ما يلي حسب الشروط المعطاة :

أ $\hat{أ}$ ≅	ب ..... ≅ $\hat{ص}$
جـ ..... ≅	د ..... ≅ .....
هـ $\overline{أب}$ ≅	و ..... ≅ .....
ز ..... ≅	ح ..... ≅ .....

٥ في الشكل المقابل : Δ أ ب جـ وبحسب الشروط المعطاة أكمل ما يلي :



أ $\overline{أب}$ ≅ .....

ب ..... ≅ $\overline{جـ د}$

جـ ..... (ضلع مشترك)

د ب $\hat{أ}$ د ≅ .....

هـ ..... ≅ $\hat{جـ}$

و $\hat{أ د}$ ب ≅ ..... (.....)

KuwaitMath.com

٤-٢ الحالة الأولى : تطابق مثلّثين بثلاثة أضلاع
Congruent Triangles with SSS

العبارات والمفردات :
رمز التطابق (≅)
Congruency Symbol (≅)
ضلع : (ض) **Side : S**
زاوية (ز) **Angle : A**
تطابق مثلّثين بثلاثة أضلاع
Congruency Triangles with 3 Corresponding Sides .

سوف تتعلّم : تطابق مثلّثين بثلاثة أضلاع .

في شهر فبراير ، تتزيّن دولة الكويت بأعلامها الجميلة ذات الأشكال المتنوّعة .
في الصورة المقابِلة أحد هذه الأشكال .

نشاط

المجموعة الأولى	المجموعة الثانية
مثلث أ ب جـ	مثلث د هـ و
أ ب = ٧ سم	د هـ = ٦ سم
ب جـ = ٦ سم	هـ و = ٥ سم
أ جـ = ٥ سم	د و = ٧ سم

١ كل مجموعة ترسم المثلث المطلوب منها .
٢ يطابق أعضاء المجموعة المثلثات التي تم رسمها .
٣ تطابق المجموعة الأولى مع المجموعة الثانية المثلثات المرسومة .
ماذا تلاحظ ؟ .....

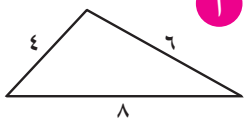
معلومات مفيدة :
يستخدم مصمِّمو الواجهات الزجاجية الملوَّنة المثلّثات المتطابقة في الإنشاءات .

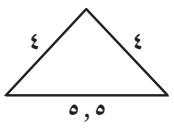
اللوازم :
- ورق شفّاف
- مسطرة
- فرجار

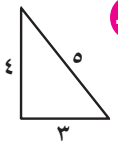
يتطابق المثلّثان إذا تطابق كلّ ضلع في المثلّث الأوّل مع نظيره في المثلّث الثاني .
يُعبَّر عن ذلك بحالة (ضلع ، ضلع ، ضلع) ويرمز إليها (ض . ض . ض)

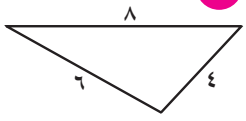
تدرّب (١) :

عيِّن المثلّثات المتطابقة في ما يلي :

أ


ب


جـ


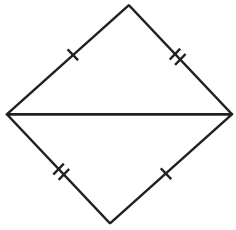
د


.....

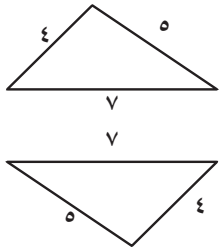
تدرّب (٢) :

هل المثلّثان في كلّ من الأشكال التالية متطابقان ؟ ولماذا ؟

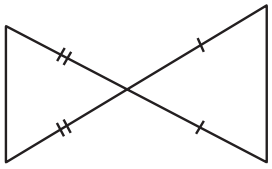
أ



ب



جـ



اعتبر أن الأضلاع لها نفس وحدة الطول أينما وجد .

.....

.....

.....

.....

.....

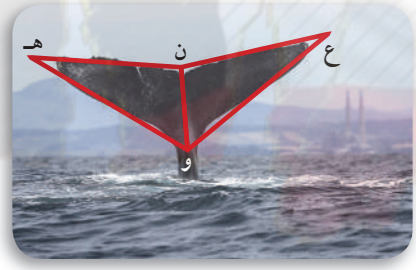
.....

مثال :

يبدو ذيل الحوت القاتل على شكل مثلّثين بينهما ضلع مشترَك إذا عُلِم أنّ :

ع ن ≅ هـ ن ، ع و ≅ هـ و ، ق (ع̂) = ٥٠°

فأثبِت أنّ Δ ع ن و ≅ Δ هـ ن و ، ثمّ أوجد ق (هـ̂)



الحلّ :

المعطيات :

ع ن ≅ هـ ن ، ع و ≅ هـ و ، ق (ع̂) = ٥٠°

المطلوب :

(١) إثبات أنّ : Δ ع ن و ≅ Δ هـ ن و ، (٢) إيجاد ق (هـ̂)

ملاحظة :

∴ تعني إذًا

∵ تعني بما أن

البرهان :

Δ ع ن و ، Δ هـ ن و فيهما :

(١) ع ن ≅ هـ ن (معطى)

(٢) ع و = هـ و (معطى)

(٣) ن و (ضلع مشترَك)

⟸ بحالة (ض . ض . ض)

∴ Δ ع ن و ≅ Δ هـ ن و

وينتج أنّ ق (هـ̂) = ق (ع̂) = ٥٠°

لاحِظ أنّ : عند إثبات تطابق مثلّثين نحتاج إلى إثبات تطابق ثلاثة عناصر مثل (ض . ض . ض) ونستنتج بعد ذلك تطابق الثلاثة عناصر الباقية (الزوايا الثلاث).

KuwaitMath.com

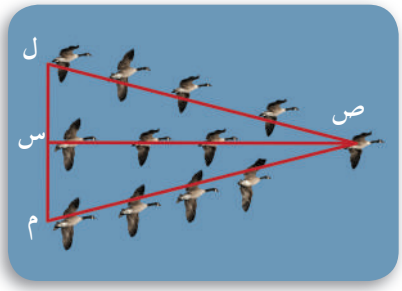
تدرّب (٣) :

يطير سرب من الإوزّ مشكِّلًا الرسم الذي في الصورة المجاورة .

إذا عُلِم أنّ : $\overline{ص م} \cong \overline{ص ل}$ ، س منتصف $\overline{م ل}$

فأثبت أنّ : (١) Δ ص م س $\cong \Delta$ ص ل س

(٢) $\overline{ص س}$ ينصف (ل $\hat{ص}$ م)



المعطيات :

(١) $\overline{ص م} \cong$ .....

(٢) ..... منتصف .....

المطلوب :

إثبات أنّ : (١) Δ ص م س $\cong \Delta$ ص ل س

(٢) $\overline{ص س}$ منصف (ل $\hat{ص}$ م)

البرهان :

Δ ..... ، Δ ..... فيهما :

(١) $\overline{ص م} \cong$ ..... (معطى)

(٢) $\overline{ل س} \cong$ ..... . (..... منتصف .....)

(٣) ..... (ضلع مشترَك)

∴ Δ ..... $\cong$ ..... بحالة (..... ، ..... ، .....)

وينتج من التطابق أنّ ق (م $\hat{ص}$ س) = ق (.....)

∴ $\overline{ص س}$ ينصف (ل $\hat{ص}$ م)

فكِّر وناقِش

هل كلّ المثلّثات المتطابقة الأضلاع متطابقة ؟ فسِّر ذلك .

KuwaitMath.com

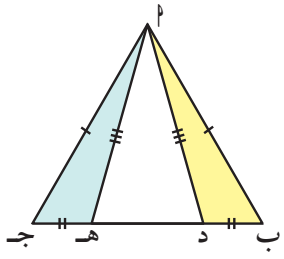
تمـــرَّنْ :

١ في الشكل المقابل :

$\overline{أب} \cong \overline{أجـ}$ ، $\overline{أد} \cong \overline{أهـ}$ ، $\overline{بد} \cong \overline{جـهـ}$

أثبت أنّ : (١) Δ أبد $\cong \Delta$ أجـهـ

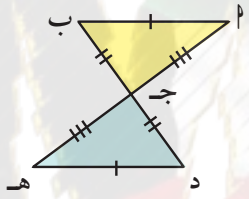
(٢) $\hat{ب أ د} \cong \hat{جـ أ هـ}$



٢ في الشكل المقابل :

$\overline{أب} \cong \overline{هـد}$ ، $\overline{دجـ} \cong \overline{بجـ}$ ، $\overline{أجـ} \cong \overline{هـجـ}$

أثبت أنّ : Δ أبجـ $\cong \Delta$ هـدجـ



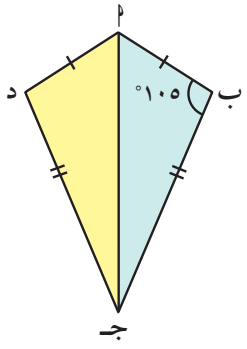
٣ الشكل المقابل أبجـد شكل رباعي فيه

أب = أد ، بجـ = دجـ ، ق($\hat{أ ب جـ}$) = ١٠٥°

أثبت أنّ : (١) Δ أبجـ $\cong \Delta$ أدجـ

(٢) ق($\hat{أ د جـ}$) = ١٠٥°

(٣) $\overline{أجـ}$ منصف ($\hat{ب أ د}$)



KuwaitMath.com

٤-٣ الحالة الثانية : تطابق مثلّثين بضلعين والزاوية المحدَّدة بهما
Congruency Triangles with SAS

سوف تتعلّم: تطابق مثلّثين بضلعين والزاوية المحدَّدة بهما .

المعلومات المفيدة:
يستخدم النجّارون الكثير من المثلّثات المتطابقة في تنفيذ الديكور .

اللوازم :
- ورق شفّاف
- مسطرة
- منقلة
- فرجار

نشاط

تمثّل المباني الحديثة جزءًا مهمًّا من الفنّ المعماري ، ويتمّ تصميم بعض واجهات المباني على شكل مثلّثات متطابقة كما في الصورة المجاوِرة .

المثلّث	طول الضلع الأوّل	قياس الزاوية	طول الضلع الثاني
∆ أ ب جـ	أ ب = ٧ سم	ق ($\hat{ب}$) = ٨٠°	ب جـ = ٩ سم
∆ س ص ع	س ص = ٨ سم	ق ($\hat{ص}$) = ١٤٠°	ص ع = ٦ سم

١ كلّ مجموعة تقوم برسم المثلّثين في الجدول أعلاه .

٢ على كلّ مجموعتين العمل معًا لمطابقة المثلّثات في ما بينها ، ماذا تلاحِظ ؟

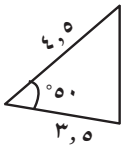
يتطابق المثلّثان إذا تطابق ضلعان والزاوية المحدَّدة بهما في أحد المثلّثين مع نظائرها في المثلّث الآخر . يُعبَّر عن ذلك (ضلع ، زاوية ، ضلع) ويرمز إليها (ض . ز . ض)

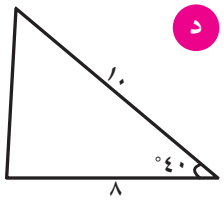
تدرّب (١) :

عيِّن المثلّثات المتطابقة في ما يلي :

أ

ب

جـ


د


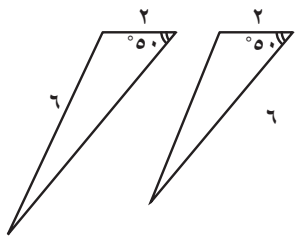
هـ

KuwaitMath.com

تدرّب (٢) :

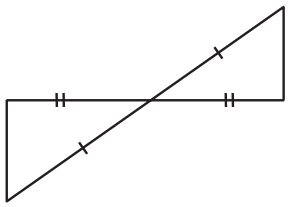
هل المثلّثان في الأشكال التالية متطابقان ؟

أ



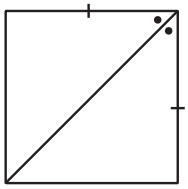
.....

ب



.....

جـ



.....

مثال :

يبدو جناحا الطائرة الشراعية في الصورة المجاوِرة أنّهما مثلّثان متطابقان .

إذا كان $\overline{أب} \cong \overline{أجـ}$ ، $\overline{أو}$ منصِّف زاوية الرأس ب $\hat{أ}$ جـ ،

فهل المعطَيات في الرسم كافية ليصبح المثلّثان متطابقين . أثبِت صحّة ذلك .

الحلّ :

المعطيات :

(١) $\overline{أب} \cong \overline{أجـ}$ ، (٢) $\overline{أو}$ منصِّف (ب $\hat{أ}$ جـ)

المطلوب :

إثبات أنّ : Δ ب أ و $\cong \Delta$ جـ أ و

البرهان :

Δ ب أ و ، Δ جـ أ و فيهما :

(١) $\overline{أب} \cong \overline{أجـ}$ (معطى)

(٢) ق (ب $\hat{أ}$ و) = ق (جـ $\hat{أ}$ و) ($\overline{أو}$ منصِّف زاوية الرأس (ب $\hat{أ}$ جـ))

(٣) $\overline{أو}$ (ضلع مشترَك)

∴ Δ ب أ و $\cong \Delta$ جـ أ و حالة (ض . ز . ض)

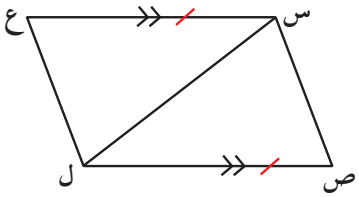
∴ نعم المعطَيات كافية لإثبات الحالة .

KuwaitMath.com

تذكَّرْ أنّ :

- // رمز التوازي
- إذا توازى مستقيمان وقطعهما قاطع ، فإنّ :
  - الزوايا المتبادلة متطابقة .
  - الزوايا المتناظرة متطابقة .
  - الزوايا الداخلة متكاملة .

تدرّب (٣) :



في الشكل المقابل

$\overline{س ع} \cong \overline{ص ل}$ ، $\overline{س ع}$ // $\overline{ص ل}$.

أثبت أنّ : (١) Δ ل س ع $\cong$ Δ س ل ص

(٢) س ص = ع ل

المعطيات :

(١) ..... $\cong$ ..... ، (٢) ..... // .....

المطلوب :

إثبات أنّ : (١) Δ س ل ص $\cong$ Δ ل س ع ، (٢) س ص = ع ل

البرهان :

Δ ..... ، Δ ..... فيهما :

(١) $\overline{س ع} \cong$ ..... (معطى)

(٢) ق (ل $\hat{س}$ ع) = ق (.....) (.....)

(٣) ..... (ضلع مشترَك)

∴ أنّ Δ ..... $\cong$ Δ ..... بحالة (..... . ...)

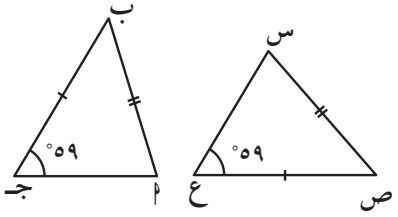
وينتج من التطابق أنّ س ص = ...

فكِّر وناقِش

قال أحمد إنّ Δ س ص ع $\cong$ Δ أ ب جـ بحالة (ض . ز . ض)

وقال خالد إنّ المعلومات غير كافية لبيان أنّ المثلّثين متطابقان .

أيّهما على صواب ؟ فسِّر ذلك .

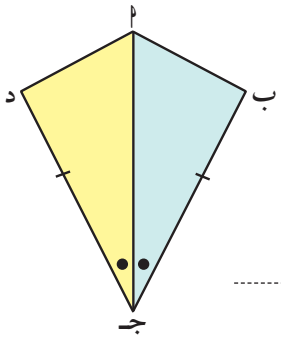


KuwaitMath.com

تمـــرَّنْ :

١ في الشكل المجاور :

ق (أ جـ ب) = ق (أ جـ د) ، $\overline{ب جـ} \cong \overline{د جـ}$



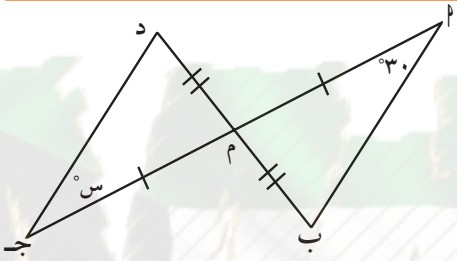
أ أثبِت أنّ: Δ أ ب جـ ≅ Δ أ د جـ .

ب برهِن أنّ أ$\hat{ب}$ جـ ≅ أ$\hat{د}$ جـ .

.....

.....

٢ من خلال المعطَيات على الشكل المقابِل .



أ أثبِت أنّ: Δ أ م ب ≅ Δ جـ م د .

ب أوجِد قيمة س .

.....

.....

٣ في الشكل المقابِل :

س ص ع ل مستطيل ، هـ منتصف $\overline{س ص}$

أثبِت أنّ : هـ ل = هـ ع

.....

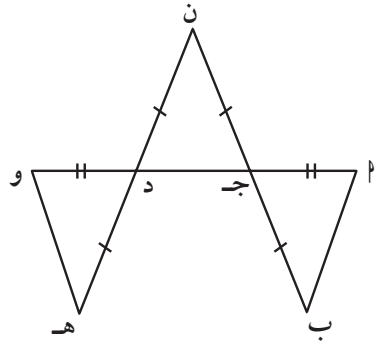
.....

٤ في الشكل المجاور :

جـ منتصف $\overline{ن ب}$ ، د منتصف $\overline{ن هـ}$

$\overline{ن جـ} \cong \overline{ن د}$ ، $\overline{أ جـ} \cong \overline{و د}$

طول $\overline{ب أ}$ = ١٢ سم



أ أثبِت أنّ: Δ أ ب جـ ≅ Δ و هـ د .

ب أوجِد طول $\overline{هـ و}$.

.....

.....

.....

KuwaitMath.com

٤-٤ الحالة الثالثة : تطابق مثلّثين بزاويتين وضلع واصل بين رأسيهما
Congruent Triangle with ASA

سوف تتعلّم: تطابق مثلّثين بتطابق زاويتين وضلع واصل بين رأسيهما .

نشاط (١) :

أُرسُم المثلّثات التالية وفقًا للمعلومات المعطاة في الجدول الموضَّح :

	المثلّث	طول الضلع	قياس الزاوية (١)	قياس الزاوية (٢)
١	∆ أ ب جـ	أ ب = ٦ سم	ق ($\hat{أ}$) = ٦٠°	ق ($\hat{ب}$) = ٧٠°
٢	∆ س ص ع	س ص = ٧ سم	ق ($\hat{س}$) = ٦٠°	ق ($\hat{ص}$) = ٧٠°
٣	∆ ل م ن	ل م = ٦ سم	ق ($\hat{ل}$) = ٦٠°	ق ($\hat{م}$) = ٧٠°

اللوازم :
- ورق شفّاف
- أدوات هندسية

١ أيّ المثلّثات المرسومة متطابقة ؟ .....

٢ حدِّد الشروط المتوفّرة في المثلّثات المتطابقة ؟

.....

.....

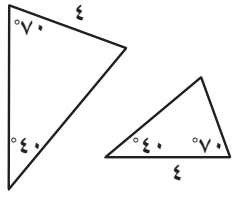
تذكّر أنّ :
المثلّثين يتطابقان بحالة
(١) (ض . ض . ض)
(٢) (ض . ز . ض)

يتطابق المثلّثان إذا تطابقت زاويتان والضلع الواصل بين رأسيهما في أحد المثلّثين مع نظائرهما في المثلّث الآخر ، ويُعبَّر عن ذلك بحالة (زاوية ، ضلع ، زاوية) ويرمز إليها (ز . ض . ز) .

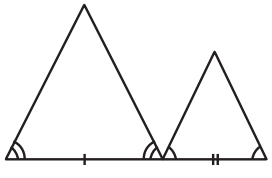
تدرّب (١) :

هل المثلّثان في كلّ من أ ، ب ، جـ متطابقان ؟ فسِّر ذلك .

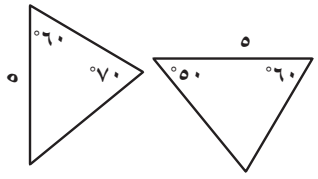
أ



ب



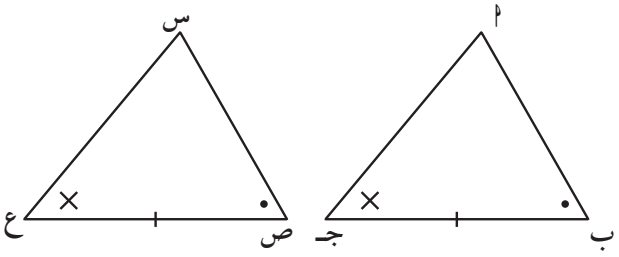
جـ



.....

تدرّب (٢) :

من المعطَيات الموضَّحة في الرسم ، أكمِل كلًّا ممّا يلي :



في Δ أ ب جـ ، Δ .....

(١) ق ($\hat{ب}$) = ...

(٢) ..... = ق ($\hat{ع}$)

(٣) ب جـ = ...

∴ يتطابق المثلثان بحالة (..... ، ..... ، .....)

ينتج من التطابق أن ق ($\hat{أ}$) = ... ، $\overline{س ص}$ ≅ ..... ، $\overline{أ جـ}$ ≅ .....

تذكَّرْ أنّ :

- الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة .
- عندما يتوازى مستقيمان فإنّ:

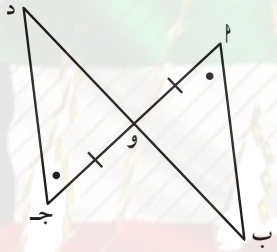
– كلّ زاويتين متبادلتين متطابقتان .

– كلّ زاويتين متناظرتين متطابقتان .

تدرّب (٣) :

في الشكل المقابِل :

أثبِت أنّ : Δ أ ب و ≅ Δ جـ د و



المعطَيات :

(١) $\overline{أ و}$ ≅ .....

(٢) $\hat{أ}$ ≅ .....

المطلوب :

إثبات أنّ : Δ أ ب و ≅ Δ .....

البرهان :

في Δ ..... ، Δ ..... فيهما :

(١) ق ($\hat{أ}$) = ... (.....)

(٢) أ و = ... (.....)

(٣) ق (أ $\hat{و}$ ب) = ... (.....)

∴ يتطابق Δ أ ب و ، Δ جـ د و بحالة (..... ، ..... ، .....)

KuwaitMath.com

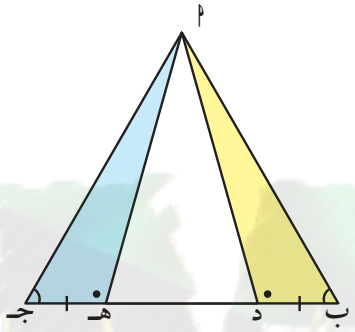
فكِّر وناقِش

إذا تطابقت ثلاث زوايا في أحد المثلّثين مع نظائرها في المثلّث الآخر ،
فهل يتطابق المثلّثان ؟
أُرسُم مثلّثين لدعم إجابتك .

تذكَّرْ أنّ :
في Δ متطابق الضلعين
زاويتا القاعدة متطابقة .

تدرّب (٤) :

في الشكل المقابِل :



أثبت أنّ :

(١) Δ أ ب د ≅ Δ أ جـ هـ

(٢) أ ب = أ جـ

المعطَيات : (١) $\overline{ب د}$ ≅ ..... ،

(٢) ق (أ $\hat{د}$ ب) = ق (.....) ، (٣) ق ($\hat{ب}$) = ق (.....)

المطلوب :

إثبات أنّ :

(١) Δ أ ب د ≅ Δ ..... ، (٢) أ ب ≅ أ جـ

البرهان :

Δ أ ب د ، Δ ..... فيهما :

(١) $\overline{ب د}$ ≅ ..... (معطى)

(٢) ق (أ $\hat{د}$ ب) = ق (.....) (.....)

(٣) ق ($\hat{ب}$) = ق (.....) (.....)

∴ يتطابق المثلثان بحالة (..... ، ..... ، .....)

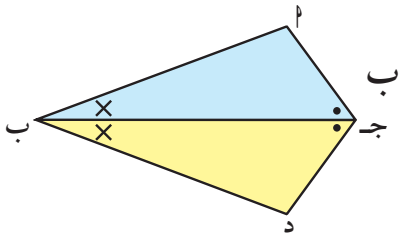
∴ ينتج أن أ ب ≅ .....

فكِّر وناقِش

هل يتطابق ضلعان في مثلث إذا تطابقت زوايا القاعدة منه ؟ فسر إجابتك .

KuwaitMath.com

تمـــرَّنْ :



١ في الشكل المقابِل ليكن جـ ب منصِّف الزاويتين جـ ، ب

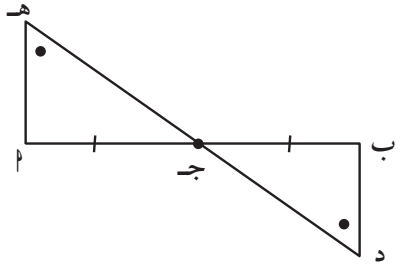
(١) أثبت أنَّ Δ أ جـ ب ≅ Δ د جـ ب .

(٢) برهِن أنَّ أ جـ = د جـ .

٢ أ ب جـ د متوازي أضلاع . وظِّف حالة التطابق (زاويتان وضلع واصل بين رأسيهما) لإثبات تطابق Δ أ ب جـ ، Δ جـ د أ .

KuwaitMath.com

تذكر أنّ :
إذا تطابقت زاويتان في مثلث مع نظائرهما في المثلث الآخر ، فإن الزاوية الثالثة فيهما تكون متطابقة. (لأن مجموع قياسات زوايا المثلث تساوي ١٨٠°)



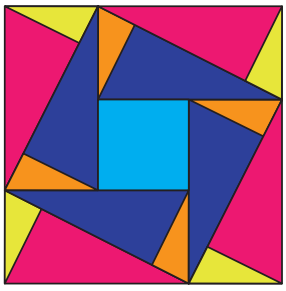
٣ في الشكل المقابل جـ منتصف أ ب ،
ق (د̂) = ق (هـ̂)

أثبِت أنّ : (١) Δ ب د جـ ≅ Δ أ هـ جـ

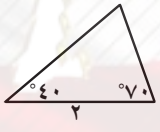
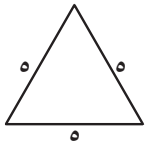
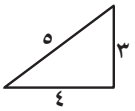
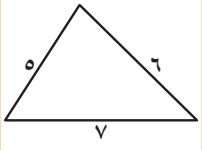
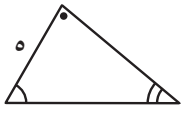
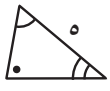
(٢) أ هـ ≅ ب د .

٤-٥ تطبيقات على تطابق المثلّثات
Congruent Triangles

نشاط :



أراد مبارك عمل لوحة فنّية باستخدام المثلّثات . وبعد أن اكتملت اللوحة بلصق مثلّثات معيَّنة وأثناء النقل ، سقطت بعض المثلّثات ، فحاول رسم مثلّثات تطابق المثلّثات المفقودة من اللوحة . **ساعِد مبارك على الوصول إلى المثلّثات التي يحتاج إليها بإكمال الجدول .**

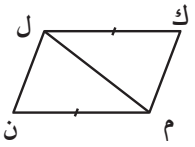
القطعة المثلثة المفقودة	الأنواع ١	٢	٣	رقم القطعة المتطابقة مع حالة التطابق
أ				رقم (.....) (..... . ...)
ب				رقم (.....) (..... . ...)
جـ				رقم (.....) (..... . ...)
د				رقم (.....) (..... . ...)

KuwaitMath.com

تدرّب (١) :

ما المعلومة الإضافية التي تحتاج إليها لإثبات أنّ المثلّثين في الأشكال التالية متطابقان ؟

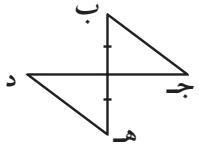
أ



.....

.....

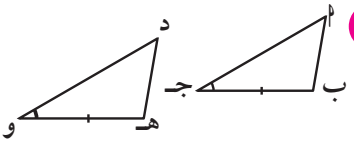
ب



.....

.....

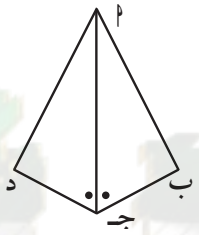
جـ



.....

.....

د



.....

.....

هـ

.....

.....

تدرّب (٢) :

شكّلت الطائرات في العرض الذي أُقيم للطائرات النفّاثة سربًا على شكل مثلّثين .

إذا عُلِم أنّ $\overline{\text{ع هـ}} \cong \overline{\text{ع ن}}$ ، د منتصف $\overline{\text{هـ ن}}$.

أثبت أنّ : Δ ع د هـ $\cong \Delta$ ع د ن

المعطَيات :

$\overline{\text{ع هـ}} \cong$ ..... ، د منتصف .....

المطلوب :

إثبات أنّ Δ ع د هـ $\cong \Delta$ .....

البرهان :

Δ ع د هـ ، Δ ..... فيهما :

(١) $\overline{\text{ع هـ}} \cong$ ..... (.....)

(٢) ..... (ضلع مشترك)

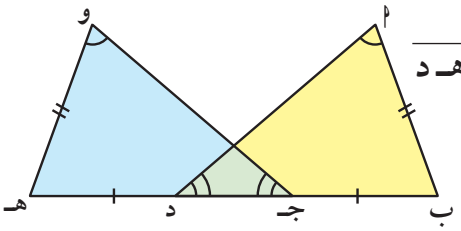
(٣) $\overline{\text{هـ د}} \cong$ ..... . (.....)

∴ نستنتج أنّ Δ ..... $\cong \Delta$ .....

⟸ بحالة (..... . ...)

KuwaitMath.com

تدرّب (٣) :



في الشكل المقابِل : $\overline{أب} \cong \overline{وهـ}$ ، $\overline{ب جـ} \cong \overline{هـ د}$

ق ($\hat{أ}$) = ق ($\hat{و}$) ، ق ($\hat{و جـ هـ}$) = ق ($\hat{أ د ب}$)

أثبِت أنّ : $\overline{أ د} \cong \overline{و جـ}$

المعطَيات :

.....

.....

المطلوب : إثبات أنّ : ..... ≅ .....

البرهان :

Δ ..... ، Δ ..... فيهما :

.....

.....

.....

.....

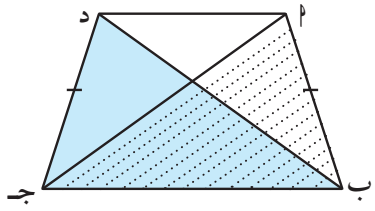
.....

مُلاحَظَةٌ:
خاصية المساواة :
لكل أ ، ب ، جـ ≠ ٠
إذا كان أ = ب
فإن : أ + جـ = ب + جـ

KuwaitMath.com

تمـــرَّنْ :

١ أ ب جـ د شبه منحرف متطابق الضلعين .
أثبِت أنّ : Δ أ ب جـ ≅ Δ د جـ ب
(عَلمًا بأنّ قطري شبه المنحرف المتطابق الضلعين متطابقان)



.....

.....

.....

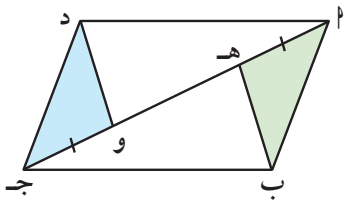
.....

.....

٢ في الشكل المقابِل :

أ ب جـ د متوازي أضلاع ، $\overline{\text{أ جـ}}$ قطر فيه ،

أ هـ = جـ و . أثبِت أنّ ب هـ = د و



.....

.....

.....

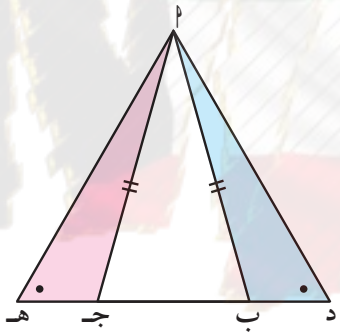
.....

.....

٣ في الشكل المقابِل :

أ ب = أ جـ ، ق(أ $\hat{\text{د}}$ ب) = ق(أ $\hat{\text{هـ}}$ جـ)

أثبِت أنّ : المثلّثين أ ب د ، أ جـ هـ متطابقان .



مُلاحَظَةٌ:
مكملات الزويا المتطابقة تكون متطابقة .

المعطَيات : (١) $\overline{\text{أ ب}}$ ≅ .....

(٢) .....

المطلوب : إثبات أنّ : ..... ≅ .....

البرهان : .....

.....

.....

.....

.....

KuwaitMath.com

٦-٤ تطابق مثلّثين قائمي الزاوية بضلع ووتر
Congruency of Two Right Triangles (HL)

سوف تتعلّم: تطابق مثلّثين قائمي الزاوية بتطابق وتر وأحد ضلعي القائمة .

العبارات والمفردات :
زاوية قائمة **Right Angle**
مثلّث قائم الزاوية **Right-Angled Triangle**
وتر **Hypotenuse**
ضلع الزاوية القائمة **Leg**

نشاط :

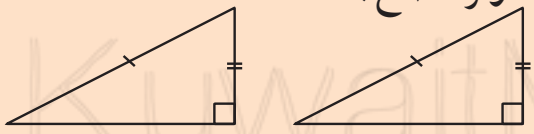
ارسم المثلثين القائمي الزاوية الآتيين وفقًا للمعلومات المعطاة في الجدول التالي :
ثمّ أجِب عن الأسئلة التالية :

المثلث	طول ضلع القائمة	طول الوتر
س ص ع	س ص = ٣ سم	س ع = ٥ سم
أ ب جـ	أ ب = ٤ سم	أ جـ = ٥ سم

١ هل يتطابق المثلثان المرسومان ؟ .....

٢ حدد الشروط المتوفرة في المثلثين المتطابقين . .....

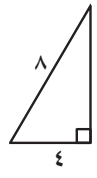
يتطابق مثلّثان قائما الزاوية إذا تطابق وتر وضلع في أحدهما مع نظائرهما في المثلّث الآخر ويعبر عن ذلك بحالة (زاوية قائمة ، وتر ، ضلع)
ويرمز إليها (◺ . و . ض)

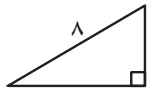


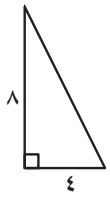
تذكَّرْ أنّ :
لأيّ مثلّث أ ب جـ قائم الزاوية في ب
يكون $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب جـ}$ ضلعا القائمة ، $\overline{أ جـ}$ وتر المثلث .

تدرّب (١) :

أكمل ما يلي لتصبح العبارة صحيحة :

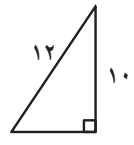
(١)


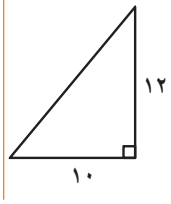
(٢)


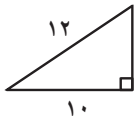
(٣)


أ المثلّث (١) ≅ المثلّث .....
المثلّث (١) ≇ المثلّث .....

مُلاحَظَةٌ:
≇ تعني لا يتطابق

(١)


(٢)


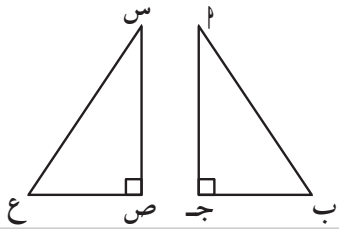
(٣)


ب المثلّث (١) ≅ المثلّث .....
المثلّث (١) ≇ المثلّث .....

KuwaitMath.com

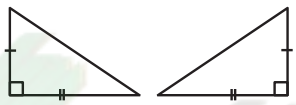
فكِّر وناقِش

أمامك مثلّثان ، ما الحدّ الأدنى من المعلومات التي يمكن استخدامها لإثبات أن المثلّثين متطابقان ؟



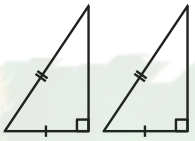
تدرّب (٢) :

في كلّ من الأشكال التالية المثلّثان متطابقان ، حدِّد حالة التطابق :

أ 

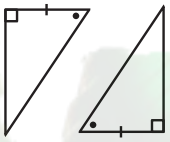
.....

.....

ب 

.....

.....

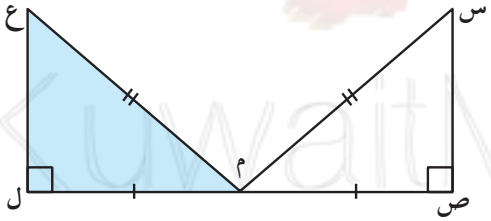
جـ 

.....

.....

تدرّب (٣) :

في الشكل المقابِل :



برهِن أنّ Δ س ص م ≅ Δ ع ل م

أكمِل ما يلي :

المعطَيات : (ص̂) ، (ل̂) زوايا .....

س م ≅ .....

ص م ≅ .....

المطلوب : إثبات أنّ Δ س ص م ≅ Δ ع ل م

البرهان :

Δ س ص م ، Δ ع ل م فيهما :

(١) ق (ص̂) = ... = ٩٠° (معطى)

(٢) س م ≅ ..... (معطى)

(٣) ..... ≅ ل م (معطى)

∴ نستنتج أنّ Δ س ص م ..... Δ ع ل م

⟸ وحالة التطابق هي (..... . ...)

KuwaitMath.com

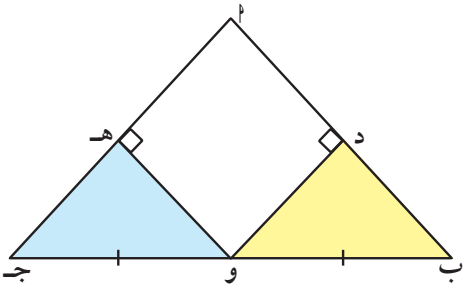
مثال :

في الشكل المقابل :

أ د و هـ مربع ، ب و = جـ و

أثبت أنّ (١) ب̂ ≅ جـ̂

(٢) Δ أ ب جـ متطابق الضلعين



> **تذكَّرْ أنّ :**
> من خواص المربّع
> • زواياه الأربع قوائم
> • أضلاعه الأربعة متطابقة .

الحل :

المعطيات : أ د و هـ مربّع ، ب و = جـ و

المطلوب : إثبات أنّ ب̂ ≅ جـ̂

البرهان : Δ د ب و ، Δ هـ جـ و فيهما :

(١) ب و = جـ و (معطى)

(٢) د و = هـ و (من خواص المربع)

(٣) ق (و د̂ ب) = ق (و هـ̂ جـ) = ٩٠° ⟸

ق (و د̂ ب) = ٩٠° بالتجاور مع (أ د̂ و)

ق (جـ هـ̂ و) = ٩٠° بالتجاور مع (أ هـ̂ و)

∴ Δ د ب و ≅ Δ هـ جـ و وحالة تطابقهما هي (∠ . و . ض)

> **مُلاحَظَةٌ:**
> في أي مثلث إذا تطابقت زاويتا القاعدة تطابق الضلعان المقابلان لهما .

وينتج من التطابق أن : ب̂ ≅ جـ̂ ..... (١)

∴ Δ أ ب جـ فيه :

ق (ب̂) = ق (جـ̂) (زاويتا القاعدة متطابقة)

∴ Δ أ ب جـ متطابق الضلعين ..... (٢)

تعميم : زاويتي القاعدة في مثلث متطابقتان ⟺ المثلث متطابق الضلعين

KuwaitMath.com

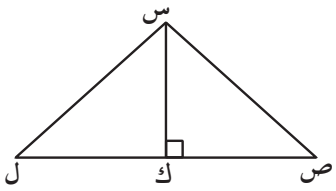
تذكَّرْ أنّ :

– في المثلّث المتطابق الضلعين، القطعة المستقيمة المرسومة من رأس المثلّث والعمودية على القاعدة تنصّفها.

– من خواصّ المستطيل

- زواياه الأربع قوائم
- كلّ ضلعين متقابلين متطابقان
- القطران متطابقان . وينصف كلّ منهما الآخر .

فكِّر وناقِش



في Δ س ص ل ، $\overline{\text{س ك}} \perp \overline{\text{ص ل}}$

ما الحدّ الأدنى من المعلومات التي يمكن استخدامها لإثبات أن المثلّثين س ص ك ، س ل ك متطابقان .

تدرّب (٤) :

في الشكل المقابل مخطط لحديقة على شكل مستطيل ، يراد زراعة حوضين من الأزهار على شكل مثلثين . أثبت أنّ حوضي الزهور متطابقة موظفًا المعطيات الموجودة على الرسم .

أكمِل كلًّا ممّا يلي :

المعطيات : أ ب جـ د ..... ، ..... ≅ .....

المطلوب : إثبات أن ..... ≅ .....

البرهان : Δ أ ب هـ ، Δ جـ د و فيهما :

(١) ق ($\hat{\text{أ}}$) = ق (.....) = ٩٠° من خواصّ ..... (زواياه الأربع .....)

(٢) $\overline{\text{أ ب}}$ ≅ ..... من خواصّ ..... (كلّ ضلعين متقابلين .....)

(٣) $\overline{\text{ب هـ}}$ ≅ ..... (معطى)

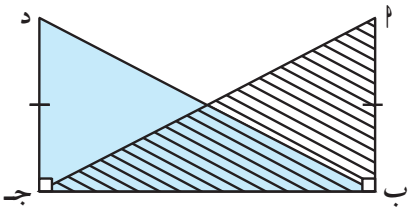
Δ أ ب هـ ..... Δ جـ د و بحالة (..... . ...)

وينتج أن الحوضان متطابقان .

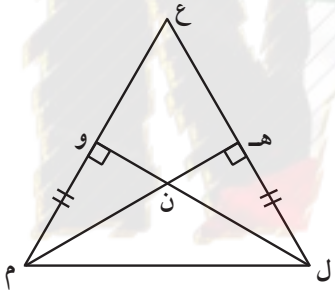
KuwaitMath.com

تمـــرَّنْ :

١ في الشكل المقابل : $\overline{أب} \perp \overline{بجـ}$ ،
$\overline{دجـ} \perp \overline{بجـ}$. أجـ = بد ،
أثبِت أنّ : $\hat{ب أ}$ جـ ≅ $\hat{جـ د}$ ب .

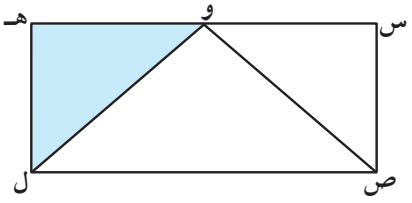


٢ في الشكل المقابل :
أثبِت أنّ : **أ** Δ ل و م ≅ Δ م هـ ل
ب ع ل = ع م

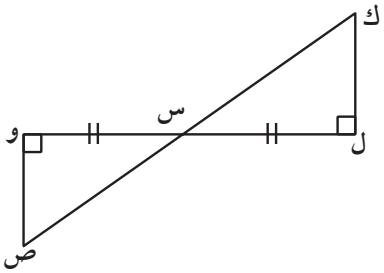


KuwaitMath.com

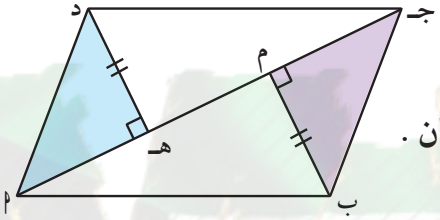
٣ في الشكل المقابل :
س ص ل هـ مستطيل ، و ص ل مثلّث متطابق الضلعين . وظف التطابق لإثبات أنّ :
و منتصف $\overline{سهـ}$.



٤ في الشكل المقابل :
برهِن أنّ Δ ك ل س ≅ Δ ص و س .

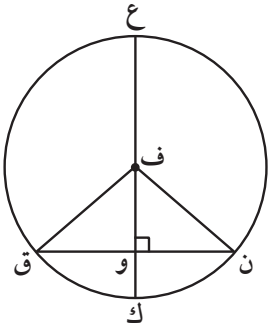


٥ صمم عبد الكريم لوحة من الفسيفساء كما في الشكل المقابل ،
وأراد إثبات أن : Δ جـ م ب ، Δ أ هـ د متطابقان .
ساعده في إثبات ذلك.
(علمًا بأن الشكل جـ ب أ د متوازي أضلاع)



KuwaitMath.com

٦ دائرة مركزها ف ، ع ك ⊥ ن ق ،
وظف التطابق لاثبات أنّ :
و منتصف ن ق .



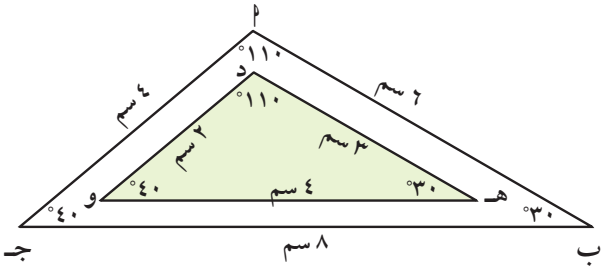
٧-٤ تشابه المثلّثات
Similarity of Triangles

سوف تتعلّم: تشابه المثلّثات .

العبارات والمفردات :
التشابه
Similarity
رمز التشابه ~
Symbol of Similarity ~

نشاط :

في الشكل المقابل المثلّثان ا ب جـ ، د هـ و لهما الشكل نفسه ولكن ليس بالضرورة القياسات نفسها.



من المعلومات على الرسم أكمل ما يلي :

١ ق(ا̂) = ق(.....) ، ق(ب̂) = ق(.....) ، ق(.....) = ق(و̂)

∴ الزوايا المتناظرة .....

٢ $\frac{\text{ا ب}}{\text{د هـ}} = \frac{٦}{\text{.....}} = \frac{\text{.....}}{٢}$ ، $\frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{٨}{\text{.....}} = \frac{٢}{\text{.....}}$ ، $\frac{\text{ا جـ}}{\text{د و}} = \frac{\text{.....}}{٢} = \frac{\text{.....}}{١}$

∴ الأضلاع المتناظرة .....

∴ Δ ا ب جـ يشابه Δ د هـ و وترمز لذلك Δ ا ب جـ ~ Δ د هـ و

معلومات مفيدة :
للتشابه أهمّية كبيرة في كثير من تصاميم المباني والأجهزة والاستحقاقات الحياتية المتنوّعة .

تذكر أنّ :
يتشابه المضلعان إذا وفقط إذا كانت :
- زواياهما المتناظرة متطابقة .
- أطوال أضلاعها المتناظرة متناسبة .

Δ ا ب جـ ~ Δ د هـ و ⟺

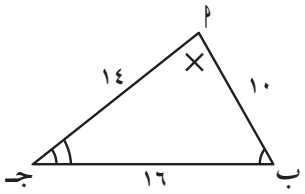
الزوايا المتناظرة المتطابقة	الأضلاع المتناظرة متناسبة
ق(ا̂) = ق(د̂) ق(ب̂) = ق(هـ̂) ق(جـ̂) = ق(و̂)	$\frac{\text{ا ب}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{ا جـ}}{\text{د و}}$ (نسبة التشابه)

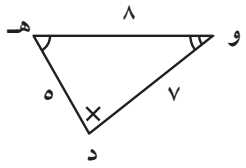
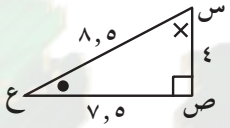
ملاحظة : **نراعي ترتيب رؤوس المثلثين عند كتابة عبارة التشابه .**

KuwaitMath.com

تدرّب (١) :

في الجدول التالي حدِّد أيًّا من المثلّثات يشابه Δ ا ب جـ مع ذكر السبب .



م	المثلّث	يشابه أو لا يشابه	السبب
أ			الزوايا المتناظرة ..... و أطوال الأضلاع المتناظرة .....
ب			....

مثال :

في الشكل المقابِل : Δ ا ب جـ ~ Δ د هـ و :

أ اذكر الزوايا المتناظرة المتطابقة .

ب اُكتب نسبة التشابه .

جـ أوجِد طول $\overline{\text{ا جـ}}$ ؟

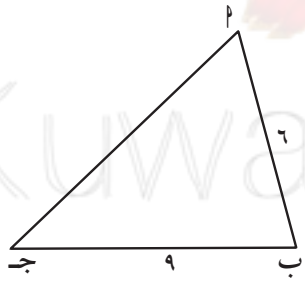
تذكَّرْ أنّ :
مجموع قياسات زوايا المثلّث يساوي ١٨٠°

الحلّ :

∵ Δ ا ب جـ ~ Δ د هـ و :

أ ∴ الزوايا المتناظرة والمتطابقة هي :

$\hat{ا} \cong \hat{د}$ ، $\hat{ب} \cong \hat{هـ}$ ، $\hat{جـ} \cong \hat{و}$



ب أطوال الأضلاع المتناظرة المتناسبة هي :

$\frac{\text{ا ب}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{ا جـ}}{\text{د و}} \Longleftarrow$ نسبة التشابه $= \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

ملاحظة :
لتحديد الأضلاع المتناظرة ، يمكن ترتيب أطوال الأضلاع تصاعديًّا أو تنازليًّا في كلّ من المثلّثين .

جـ $\frac{٦}{٤} = \frac{٩}{٦} = \frac{\text{ا جـ}}{٨}$

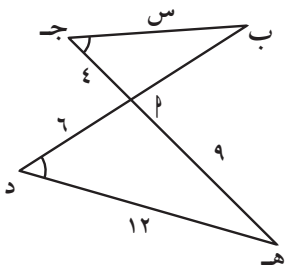
$\frac{٦}{٤} = \frac{\text{ا جـ}}{٨}$

$\text{ا جـ} = \frac{٦ \times ٨}{٤}$

$\text{ا جـ} = ١٢$

KuwaitMath.com

تدرّب (٢) :



في الشكل المقابِل : Δ أ ب جـ ~ Δ أ هـ د . أوجد قيمة س ؟

المعطَيات : .....

المطلوب : .....

البرهان : .....

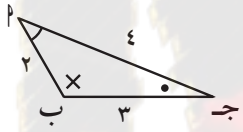
.....

.....

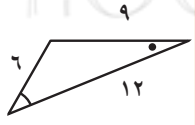
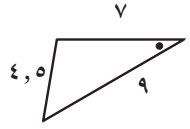
.....

تذكر أنّ :
إذا تطابقت زاويتان في مثلث مع نظائرهما في المثلث الآخر ، فإن الزاوية الثالثة فيهما تكون متطابقة. (لأن مجموع قياسات زوايا المثلث تساوي ١٨٠°)

تمـــرَّنْ :

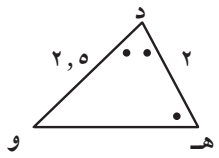


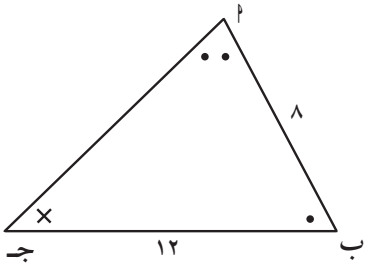
١ في الجدول التالي حدِّد أيًّا من المثلّثات يشابه Δ أ ب جـ مع ذكر السبب .

م	المثلّث	يشابه أو لا يشابه	السبب
أ			....
ب			....

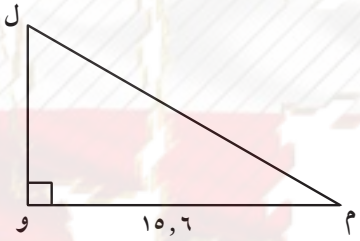
KuwaitMath.com

٢ في الشكل المقابِل : Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ و .
أُحسب طول كلّ من $\overline{أجـ}$ ، $\overline{هـو}$.





٣ في الشكل أدناه :



Δ ل م و ~ Δ ص ع هـ . أُحسب طول كلٍّ من $\overline{لم}$ ، $\overline{لو}$ ، ق($\hat{ل}$) .

Kuwaitian.com

٤-٨ تشابه مثلّثين بتطابق زاويتين
Similarity of 2 Triangles with 2 Congruent angles

سوف تتعلّم: تشابه مثلّثين بتطابق زاويتين فقط .

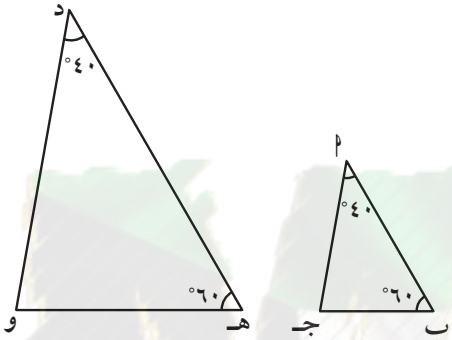
في دراستنا لتشابه المثلثات استخدمنا العلاقة بين ٣ زوايا و ٣ أضلاع . نبحث الآن عن عدد أقلّ من الشروط لتشابه مثلّثين ، تُسمّى هذه الشروط حالات تشابه مثلّثين .

نشاط :

في الشكل المقابل :

Δ أ ب جـ فيه ق($\hat{أ}$) = ٤٠° ، ق($\hat{ب}$) = ٦٠° ،

Δ د هـ و فيه ق($\hat{د}$) = ٤٠° ، ق($\hat{هـ}$) = ٦٠°



لمعرفة أطوال أضلاع المثلّثين نستخدم المسطرة وفرجار القياس لإكمال الجدول التالي :

المثلّث	قياسات الزوايا	أطوال الأضلاع
Δ أ ب جـ	ق($\hat{أ}$) = ٤٠° ، ق($\hat{ب}$) = ٦٠° ، ق($\hat{جـ}$) = ...	أ ب = ... ، ب جـ = ١,٥ ، أ جـ = ...
Δ د هـ و	ق($\hat{د}$) = ٤٠° ، ق($\hat{هـ}$) = ٦٠° ، ق($\hat{و}$) = ...	د هـ = ... ، هـ و = ٣ ، د و = ...
النتائج	ق($\hat{أ}$) = ق(.....) ق($\hat{ب}$) = ق(.....) ق($\hat{جـ}$) = ق(.....)	$\frac{أ ب}{د هـ}$ = ... = $\frac{ب جـ}{هـ و}$ = ... $\frac{أ جـ}{د و}$ = ...

ما العلاقة بين الزوايا المتناظرة ؟ ..... ، الأضلاع المتناظرة ؟ .....

هل المثلّثان متشابهان ؟ .....

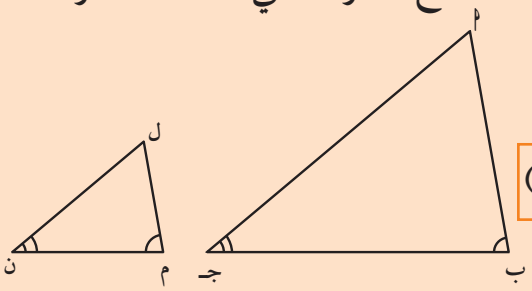
معلومات مفيدة :
يستخدم المهندسون حالات تشابه المثلثات للمساعدة في إيجاد ارتفاع مبنى وكذلك معرفة عمق المياه عند نقطة محددة .

اللوازم :
- مسطرة
- فرجار قياس .

KuwaitMath.com

نظرية (١) :

يتشابه المثلّثان إذا تطابقت زاويتان في أحدهما مع نظائرهما في المثلّث الآخر .



أ ب جـ ، ل م ن مثلّثان فيهما :

ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{م}$) ، ق ($\hat{جـ}$) = ق ($\hat{ن}$)

$\Updownarrow$

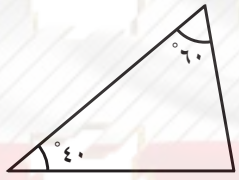
∴ Δ أ ب جـ ~ Δ ل م ن

ومنها نستنتج أن $\frac{أ ب}{ل م} = \frac{ب جـ}{م ن} = \frac{أ جـ}{ل ن}$

تدرّب (١) :

حدِّد المثلّثات المتشابهة في ما يلي حسب الشروط المعطاة .

أ



.....

ب

.....

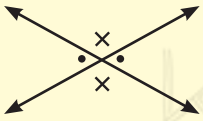
جـ

.....

د

.....

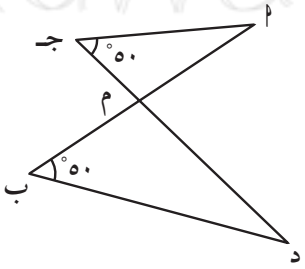
تذكَّرْ أنّ :



الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان .

تدرّب (٢) :

في الشكل : ق ($\hat{جـ}$) = ق ($\hat{ب}$) = ٥٠°



أثبت أنّ : Δ أ م جـ ~ Δ د م ب .

المعطَيات : ق ($\hat{جـ}$) = ٥٠° ، ق ($\hat{ب}$) = ...

المطلوب : إثبات أنّ Δ أ م جـ ~ Δ .....

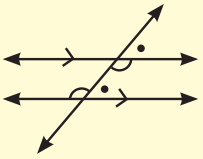
البرهان : Δ أ م جـ ، Δ د م ب فيهما :

(١) ق ($\hat{جـ}$) = ق (.....) (معطى)

(٢) ق ($\hat{أ م جـ}$) = ق (.....) (.....)

∴ Δ أ م جـ ..... Δ د م ب

تذكَّرْ أنّ :



إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإنّ الزوايا:
(١) المتناظرة متطابقة
(٢) المتبادلة متطابقة
(٣) المتحالفة متكاملة

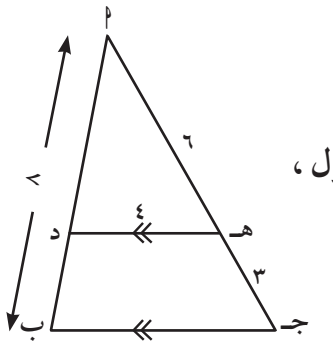
مثال :

في الشكل المقابل :

$\overline{دهـ}$ // $\overline{ب جـ}$ ، أهـ = ٦ وحدة طول ، هـ جـ = ٣ وحدة طول ،

أب = ٨ وحدة طول ، هـ د = ٤ وحدة طول

أوجد طول كلّ من : $\overline{أد}$ ، $\overline{دب}$



الحلّ :

المعطَيات : $\overline{دهـ}$ // $\overline{ب جـ}$ ، أهـ = ٦ ، هـ جـ = ٣ ، أب = ٨ ، هـ د = ٤

المطلوب : إيجاد طول $\overline{أد}$ ، $\overline{دب}$

البرهان : Δ أهـد ، Δ أجـب فيهما :

(١) ق(أ) = ق(أ) (زاوية مشتركة)

(٢) ق(أهـ̂د) = ق(أجـ̂ب) (بالتناظر والتوازي)

من (١) و (٢) ينتج أنّ Δ أهـد ~ Δ أجـب

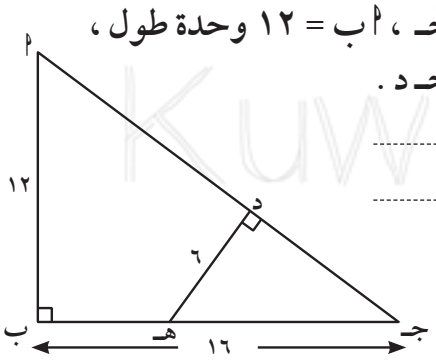
$\therefore \frac{أهـ}{أجـ} = \frac{هـد}{جـب} = \frac{أد}{أب}$ ، $\frac{٦}{٩} = \frac{٤}{جـب} = \frac{أد}{٨}$

$\therefore أد = \frac{٨ \times ٦^{٢}}{٩_{٣}} = \frac{١٦}{٣} = ٥\frac{١}{٣}$ ، $\therefore دب = ٨ - ٥\frac{١}{٣} = ٢\frac{٢}{٣}$

تدرّب (٤) :

في الشكل المقابل : Δ أب جـ قائم في ب ، $\overline{هـد} \perp \overline{أجـ}$ ، أب = ١٢ وحدة طول ،

ب جـ = ١٦ وحدة طول ، هـ د = ٦ وحدة طول ، أوجِد جـ د .



المعطَيات : .....

.....

المطلوب : .....

البرهان : Δ أجـب ، Δ هـ جـ د فيهما :

(١) ق(جـ̂) ..... (.....)

(٢) ق(.....) = ق(أب̂ جـ) (.....)

$\Leftarrow$ ∴ Δ أجـب ~ Δ هـ جـ د

وينتج ..... أطوال الأضلاع المتناظرة .

$\therefore \frac{أجـ}{هـ جـ} = \frac{جـب}{.....} = \frac{.....}{هـ د}$

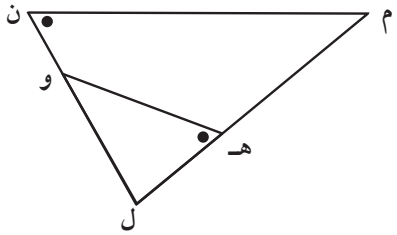
$\frac{أجـ}{هـ جـ} = \frac{١٦}{جـ د} = \frac{١٢}{٦}$

١٢ جـ د = ٦ × ١٦ ، ∴ جـ د = ...

KuwaitMath.com

تمـــرَّنْ :

١ في الشكل المقابِل : أثبت أنّ المثلّثين
ل هـ و ، ل ن م متشابهان .



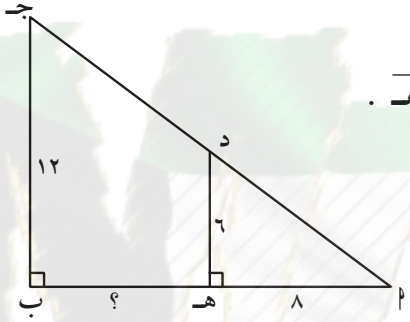
.....

.....

.....

.....

٢ في الشكل المقابِل : أثبت أنّ المثلّثين
أ ب جـ ، أ هـ د متشابهان . ثمّ أوجِد طول ب هـ .



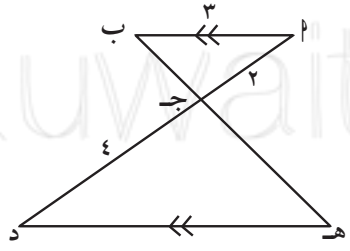
.....

.....

.....

.....

٣ في الشكل :
أ ب // هـ د ، أ جـ = ٢ وحدة طول ،
أ ب = ٣ وحدة طول ، جـ د = ٤ وحدة طول
أثبت أنّ : Δ أ جـ ب ~ Δ د جـ هـ
ثمَّ أوجِد هـ د .



.....

.....

.....

.....

KuwaitMath.com

٩-٤ تشابه مثلّثين بتناسب أطوال الأضلاع المتناظرة
Similarity of 2 Triangles with Proportional Sides

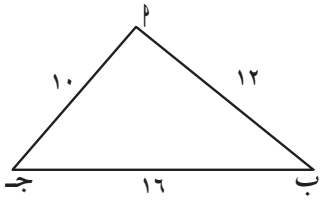
سوف تتعلّم: تشابه مثلّثين بتناسب أطوال أضلاعهما المتناظرة .

معلومات مفيدة :
يستخدم صانعوا المراكب الشراعية تشابه المثلثات في صناعة الأشرعة ، لأهميتها في عملية الإبحار وقدرتها على زيادة سرعة القارب .

اللوازم :
- منقلة

نشاط :

في الشكل المقابِل :



Δ أ ب جـ فيه :

أ ب = ١٢ ، ب جـ = ١٦ ، أ جـ = ١٠

Δ د هـ و فيه :

د هـ = ٦ ، هـ و = ٨ ، د و = ٥

من الرسم المقابل أكمل الجدول التالي :

المثلّث	أطوال الأضلاع	النتائج
Δ أ ب جـ	أ ب = ... ، ب جـ = ... ، أ جـ = ...	$\frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}}$ = ... = ... $\frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ د}}$ = ... = ... $\frac{\text{أ جـ}}{\text{د و}}$ = ... = ...
Δ د هـ و	د هـ = ... ، هـ و = ... ، د و = ...	

١ ∴ الأضلاع المتناظرة .....

أكمل الجدول التالي باستخدام المنقلة :

المثلّث	أطوال الأضلاع	النتائج
Δ أ ب جـ	ق ($\hat{أ}$) = ... ، ق ($\hat{ب}$) = ... ، ق ($\hat{جـ}$) = ...	ق ($\hat{أ}$) = ق (.....) ، ق ($\hat{ب}$) = ق (.....) ، ق ($\hat{جـ}$) = ق (.....)
Δ د هـ و	ق ($\hat{د}$) = ... ، ق ($\hat{هـ}$) = ... ، ق ($\hat{و}$) = ...	

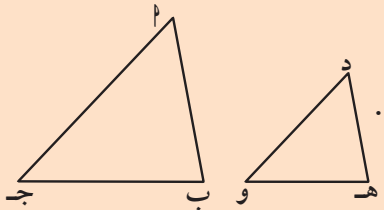
٢ ∴ الزوايا المتناظرة .....

هل Δ أ ب جـ ، Δ د هـ و متشابهان ؟ فسر ذلك .

KuwaitMath.com

نظرية (٢) :

يتشابه مثلّثان إذا تناسبت أطوال أضلاعهما المتناظرة .



Δ د هـ و ، Δ أ ب جـ فيهما :

$$\frac{\text{د هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{هـ و}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{د و}}{\text{أ جـ}} \iff \Delta \text{ د هـ و} \sim \Delta \text{ أ ب جـ}$$

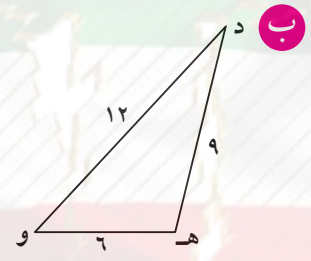
و منها نستنتج أن الزوايا المتناظرة متطابقة .

تدرّب (١) :

حدِّد أزواج المثلّثات المتشابهة فيما يلي :

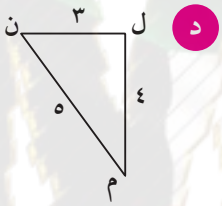
أ

ب



جـ

د

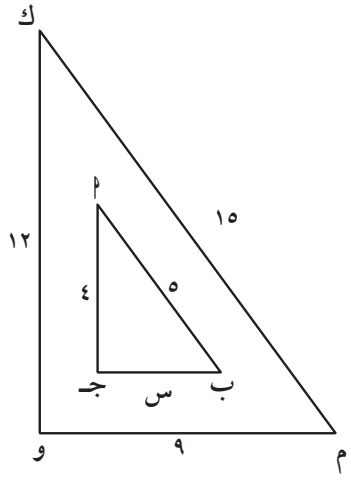


تدرّب (٢) :

في الشكل المقابل وبحسب المعطيات ، أوجِد قيمة س التي تجعل المثلثان متشابهان .

قيمة س التي تجعل المثلثان أ ب جـ ، ك م و متشابهان .

تحقق شرط تناسب الأضلاع المتناظرة .



$$\therefore \frac{\text{أ ب}}{\text{ك م}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{م و}} = \frac{\text{أ}}{\text{ك و}}$$

$$\frac{\text{٥}}{\text{.....}} = \frac{\text{س}}{\text{.....}} = \frac{\text{.....}}{\text{١٢}}$$

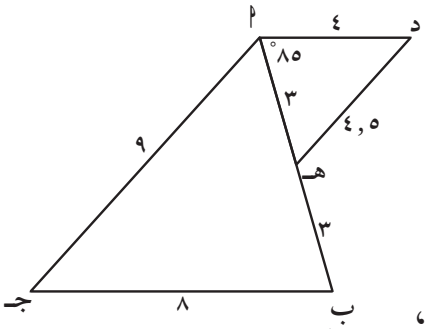
$$\text{س} = \frac{\text{٥} \times \text{.....}}{\text{.....}}$$

$$\therefore \text{س} = \text{.....}$$

KuwaitMath.com

تدرّب (٣) :

في الشكل المقابل وحسب المعطيات المدونة عليه :



أ أثبِت أنّ : Δ أ د هـ ~ Δ ب جـ أ

ب أوجد قياس (أ$\hat{ب}$ جـ)

المعطَيات : هـ د = ... ، د أ = ... ، هـ أ = ... ،

أ جـ = ... ، جـ ب = ... أ ب = ... ، ق (أ$\hat{}$) = ...

المطلوب : إثبات أنّ Δ أ د هـ ~ Δ .....

البرهان : Δ أ د هـ ، Δ ..... فيهما :

(١) $\frac{\text{أ د}}{\text{ب جـ}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

(٢) $\frac{\text{د هـ}}{\text{.....}} = \frac{٤,٥}{\text{.....}} = \frac{\text{.....}}{\text{.....}}$

(٣) $\frac{\text{.....}}{\text{.....}} = \frac{\text{.....}}{\text{.....}} = \frac{\text{.....}}{\text{.....}}$

⟸ الأضلاع المتناظرة متناسبة

∴ Δ أ د هـ ~ Δ .....

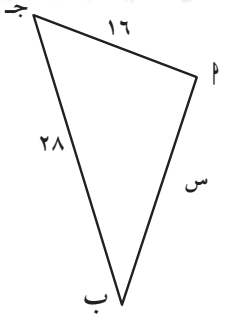
ق (أ$\hat{ب}$ جـ) = ... = ٨٥°

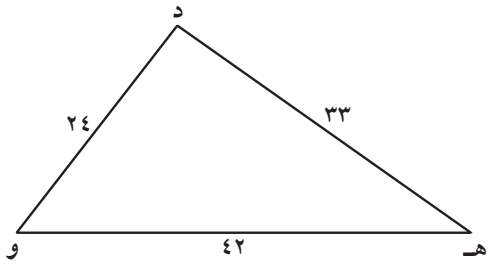
فكِّر وناقِش

هل كل المثلثات المتطابقة متشابهة؟ وهل العكس صحيح؟

تمـــرَّنْ :

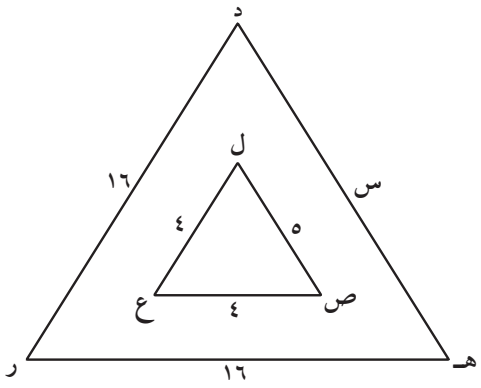
١ إذا علمت أنّ Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ و ، فأوجِد قيمة س .





KuwaitMath.com

٢ في الشكل المقابل وبحسب المعطيات ، أوجِد قيمة س التي تجعل المثلثان متشابهان .



.....

.....

.....

.....

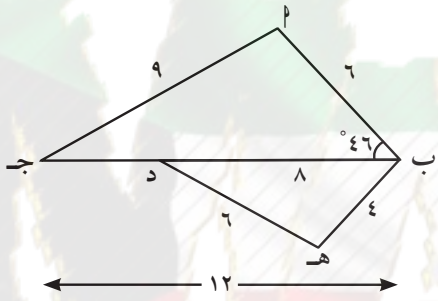
.....

٣ في الشكل المقابل :

إذا كان أ ب = ٦ ، ب جـ = ١٢ ،

أ جـ = ٩ ، ق (أ $\hat{ب}$ جـ) = ٤٦°

هـ ب = ٤ ، ب د = ٨ ، هـ د = ٦



أ أثبِت أنّ Δ أ ب جـ ~ Δ هـ ب د .

.....

.....

.....

.....

ب أوجد ق (هـ $\hat{ب}$ د) .

.....

.....

.....

.....

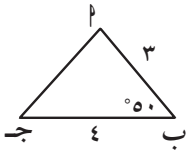
KuwaitMath.com

٤-١٠ تشابه مثلّثين بتطابق زاوية وتناسب طولي الضلعين المحددين لها

Similarity of 2 Triangles with a pair of Congruent angles and 2 pairs of Proportional Sides

سوف تتعلّم: تشابه مثلّثين بتطابق زاوية في كلٍّ منهما وتناسب طولي الضلعين المحددين لهما .

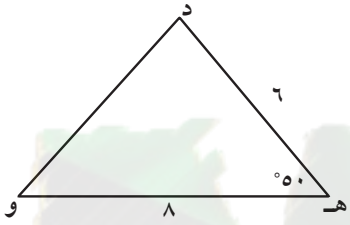
نشاط :



في الشكل المقابِل :

Δ أ ب جـ فيه : أ ب = ٣ ، ب جـ = ٤ ، ق ($\hat{ب}$) = ٥٠° ،

Δ د هـ و فيه : د هـ = ٦ ، هـ و = ٨ ، ق ($\hat{هـ}$) = ٥٠°



أكمِل الجدول التالي :

المثلّث	أطوال الأضلاع	تناسب الأضلاع
Δ أ ب جـ	أ ب = ... ، ب جـ = ٤	$\frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{\text{.....}}$
Δ د هـ و	د هـ = ٦ ، هـ و = ...	$\frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{.....}}{\text{.....}} = \frac{\text{.....}}{\text{.....}}$

∵ ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{هـ}$) = ٥٠°

اللوازم :
- منقلة

باستخدام الأدوات الهندسية (المنقلة) . أكمِل الجدول التالي :

المثلّث	قياسات الزوايا	الزوايا المتناظرة
Δ أ ب جـ	ق ($\hat{أ}$) = ...	ق ($\hat{أ}$) = ق (.....)
Δ د هـ و	ق ($\hat{د}$) = ...	الزوايا المتناظرة .....

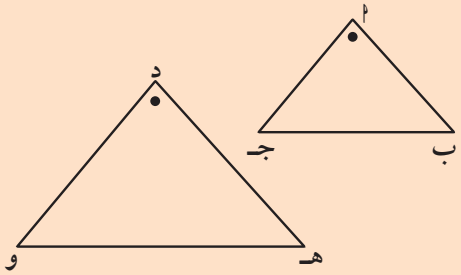
من الحالة الأولى (تشابه مثلثين بتطابق زاويتين في كلّ منهما) .

ينتج أنّ : Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ و

نظرية (٣) :

يتشابه المثلّثان إذا طابقت زاوية في أحدهما زاوية في المثلّث الآخر وتناسب طولا ضلعي هاتين الزاويتين .

أ ب جـ ، د هـ و مثلّثان فيهما :



$$ق(\hat{أ}) = ق(\hat{د})$$

$$\frac{أ ب}{د هـ} = \frac{أ جـ}{د و}$$

$$\Delta أ ب جـ \sim \Delta د هـ و$$

وينتج أن : $ق(\hat{ب}) = ق(\hat{هـ})$ ،

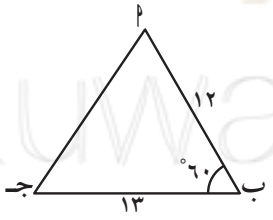
$ق(\hat{جـ}) = ق(\hat{و})$ ،

$\frac{ب جـ}{هـ و}$ يساوي نسبة التشابه .

ملاحظة : نستطيع من النشاط السابق إثبات التشابه من تناسب أطوال الأضلاع .

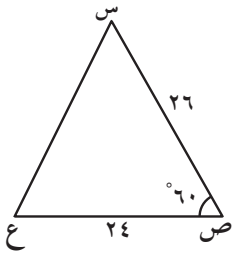
تدرّب (١) :

أيّ من المثلّثات أدناه متشابهة مع Δ أ ب جـ ؟

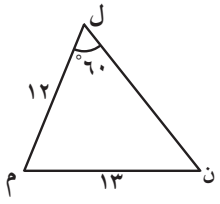


أ

ب

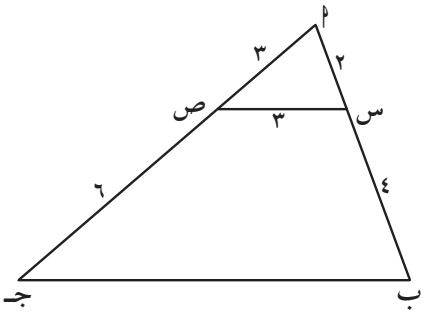


جـ



KuwaitMath.com

تدرّب (٢) :



في الشكل المقابل : أ س = ٢ ، س ب = ٤ ،

أ ص = ٣ ، ص جـ = ٦

أ أثبِت أنّ : Δ أ س ص يشابه Δ أ ب جـ

ب أوجِد طول $\overline{ب جـ}$.

المعطَيات : أ س = ٢ ، س ب = ٤ ، أ ص = ٣ ، ص جـ = ٦

المطلوب : أ إثبات أنّ ..... | ب .....

البرهان : Δ أ س ص ، Δ أ ب جـ فيهما :

(١) ..... مشتركة

(٢) $\frac{\text{أ س}}{.....} = \frac{٢}{.....} = ...$

(٣) $\frac{\text{أ ص}}{\text{أ جـ}} = \frac{.....}{٩} = ...$

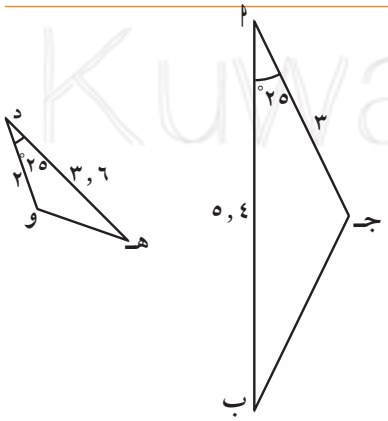
⟸ الأضلاع المتناظرة .....

∴ Δ أ س ص ~ Δ أ ب جـ

ينتج أن:

$\frac{\text{س ص}}{\text{ب جـ}} = \frac{١}{٣}$ ، $\frac{.....}{\text{ب جـ}} = \frac{١}{٣}$ ، ب جـ = ٣ × ..... = ...

تدرّب (٣) :



هل المثلّثان في الشكل المقابِل متشابهان ؟

المعطَيات :

ق ($\hat{أ}$) = ٢٥° ، أ جـ = ٣ ، أ ب = ٥,٤

ق ($\hat{د}$) = ... ، د و = ... ، د هـ = ...

المطلوب :

أثبِت أنّ المثلّثان متشابهان .

البرهان :

ق ($\hat{أ}$) = ق (.....) = ... °

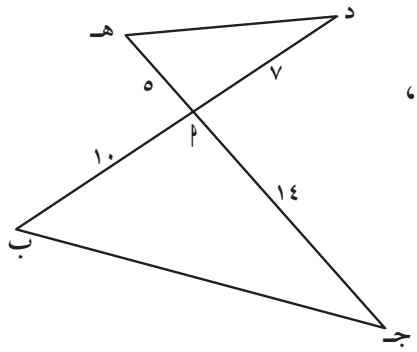
$\frac{\text{أ ب}}{.....} = \frac{.....}{٣,٦} = \frac{.....}{.....}$ ، $\frac{٣}{.....} = \frac{.....}{\text{د و}}$

∴ .....

.....

تمـــرَّنْ :

١ في الشكل المقابل وبحسب المعلومات المعطاة ،
أثبِت أنّ : Δ أ د هـ يشابه Δ أ جـ ب



.....

.....

.....

.....

٢ في الشكل المقابل : أثبِت أنّ : Δ ل هـ و ~ Δ ل ن م .

.....

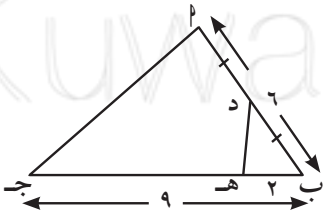
.....

.....

.....

.....

٣ أ ب جـ مثلّث فيه أ ب = ٦ ، ب جـ = ٩
د منتصف $\overline{أ ب}$ ، هـ ∈ $\overline{ب جـ}$ بحيث ب هـ = ٢
أثبِت أنّ Δ د ب هـ ~ Δ جـ ب أ .



.....

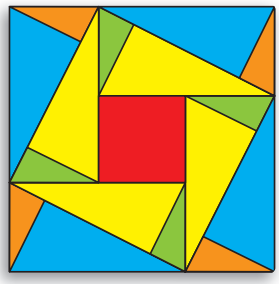
.....

.....

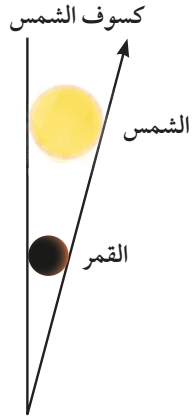
.....

KuwaitMath.com

٤-١١ تطبيقات على تشابه المثلّثات
Applications on the Similarity of Triangles



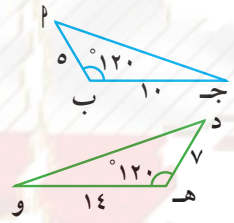
- في بعض الحالات يصعب قياس مسافة أو ارتفاع معيَّن مباشرة . في هذه الحالة يمكن استخدام تشابه المثلّثات لإيجاد هذا القياس بطريقة غير مباشرة .
- وأيضًا من تصاميم المباني أو إيجاد بعد فلكي عن مركز الأرض عند مراقبة كسوف الشمس .



تدرّب (١) :

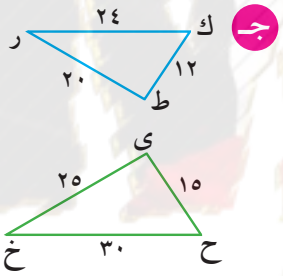
حدِّد ما إذا كانت أزواج المثلّثات التالية متشابهة وفقًا للمعطيات الموضحة في كل شكل ، ثم اكتب عبارة التشابه والنظرية المستخدمة .

أ



ب

جـ



معلومات مفيدة :

يُقال إنّ الفيلسوف الإغريقي أرسطو هو أوّل من قاس ارتفاع الأهرامات في مصر باستعمال خصائص الشكل .
يبيّن النسبة الثابتة بين ارتفاعي جسمين وطولي ظليهما في الوقت نفسه .

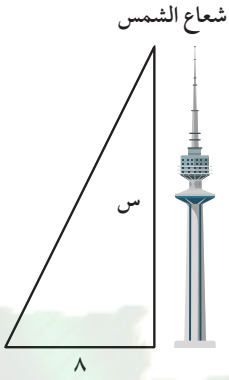
تذكَّرْ أنّ :

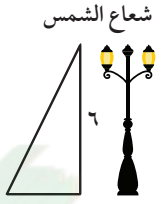
البعد بين المستقيمات المتوازية ثابت ، فهما لا يتقاطعان مهما امتدّا .

KuwaitMath.com

تدرّب (٢) :

قاس وليد طول ظلّ بناية فوجده ٨ وحدة طول ، وفي الوقت نفسه قاس طول ظلّ عمود إنارة قريب من البناية فوجده ٢ وحدة طول ، إذا كان إرتفاع عمود الإنارة ٦ وحدة طول ، فما ارتفاع البناية ؟





بما أنّ عمود الإنارة والبناية يشكلان مع الأرض زاوية قائمة ، وأشعة الشمس متوازية لذا فهي تشكل زوايا متطابقة مع الأرض ، إذًا يكون المثلثان في الرسم متشابهين .

$$\frac{\text{طول ظل البناية}}{\text{طول ظل العمود}} = \frac{\text{ارتفاع البناية}}{\text{ارتفاع عمود الإنارة}}$$

اكتب تناسبًا

$$\frac{\text{.....}}{\text{.....}} = \frac{\text{.....}}{\text{.....}}$$

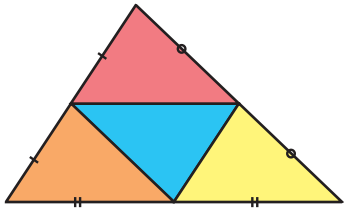
عوّض

س = ... = ...

ارتفاع البناية = ... وحدة طول

فكّر وناقِش

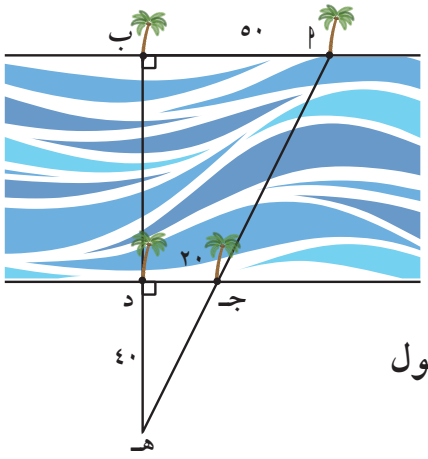
١ في الشكل المقابل :
تمّ تقسيم المثلّث الكبير إلى مثلّثات صغيرة .
كيف يمكن إثبات أنّ المثلّثات الصغيرة متشابهة مع المثلّث الكبير .



٢ هل كلّ المثلّثات المتطابقة الضلعين تكون متشابهة .

KuwaitMath.com

تمـــرَّنْ :



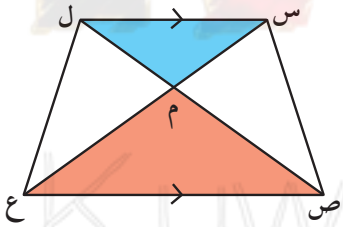
١ أ ، ب شجرتان على شاطئ قناة ، البعد بينهما ٥٠ وحدة طول .
جـ ، د شجرتان على الشاطئ الآخر المقابل والموازي للشاطئ الأوّل والبعد بينهما ٢٠ وحدة طول . كما في الشكل المقابِل
بحيث كان $\overleftarrow{هـ د} \perp \overline{جـ د}$ ، هـ د = ٤٠ وحدة طول
استخدم التشابه لإيجاد عرض القناة د ب .

.....

.....

.....

٢ في الشكل المقابِل : س ص ع ل شبه منحرف فيه $\overline{س ل} \,//\, \overline{ص ع}$
إذا كان س ل = ٤ ، ص ع = ٦ ،
ل م = ٢ فأثبِت أنّ : Δ س ل م ~ Δ ع ص م ،
ثمّ أوجِد طول $\overline{ص ل}$.



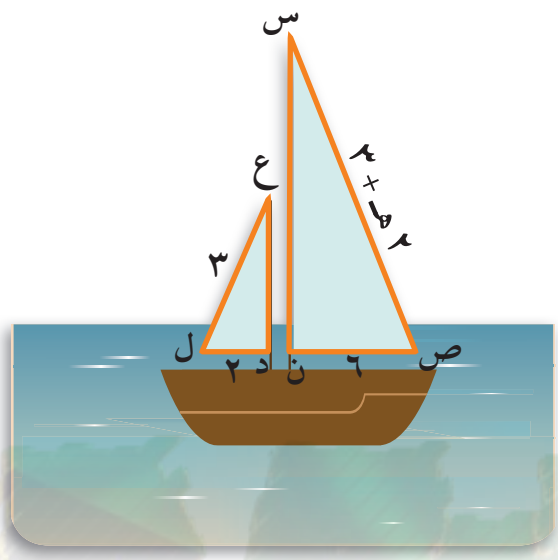
KuwaitMath.com

.....

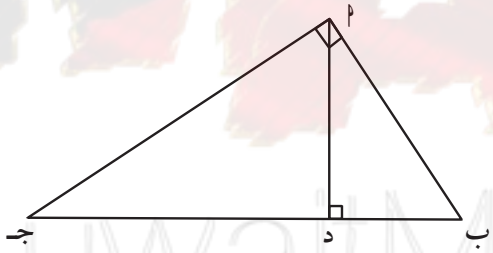
.....

.....

٣ في الشكل المقابل شراعي المركب س ص ن ، ع ل د مثلثين متشابهين.
أوجد قيمة هـ ، ثم أوجد طول $\overline{\text{س ص}}$.



٤ في الشكل المقابِل: أثبِت أنّ Δ ا ب جـ ~ Δ د ب ا .

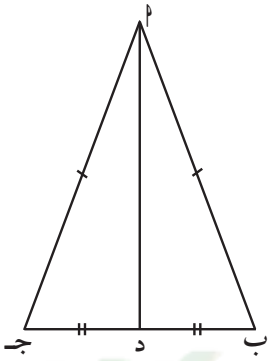


KuwaitMath.com

٤-١٢ مراجعة الوحدة الرابعة
Revision Unit Four

١ أكمِل كلًّا ممّا يلي :

لإثبات تطابق Δ أ ب د ، Δ أ جـ د بثلاثة أضلاع فإنّ :



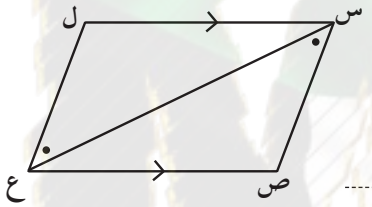
أ $\overline{أ ب} \cong$ .....

ب $\overline{أ د} \cong$ ..... (ضلع .....)

جـ ..... $\cong \overline{ب د}$

---

٢ في الشكل المقابِل أثبِت أنّ :



أ Δ س ص ع $\cong$ Δ ع ل س ، **ب** ق ($\hat{ص}$) = ق ($\hat{ل}$)

أ .....

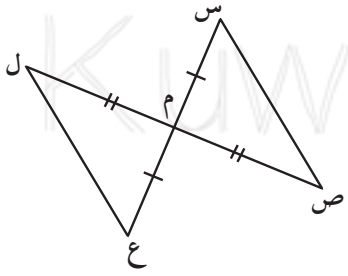
.....

.....

ب .....

---

٣ في الشكل المقابِل: أثبِت أنّ Δ س م ص $\cong$ Δ ع م ل



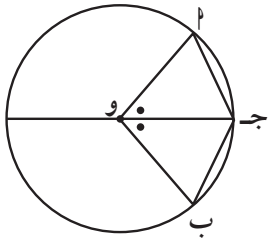
.....

.....

.....

---

٤ في الشكل المقابِل : دائرة مركزها و ، أثبِت أنّ أ جـ = ب جـ .



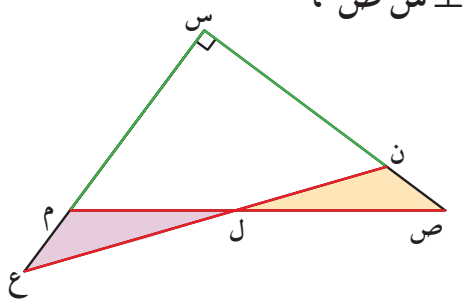
.....

.....

.....

Kuwaitvan.com

٥ في الشكل المقابِل : إذا كان س ن = س م ، ن ع = ص م ، $\overline{س ع} \perp \overline{س ص}$ ،
فأثبِت أنّ Δ س ص م ≅ Δ س ع ن .

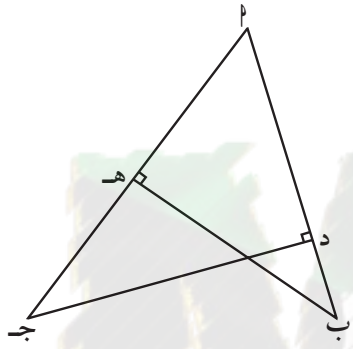


.....

.....

.....

٦ في الشكل المقابل : أثبِت أنّ : Δ أ د جـ يشابه Δ أ هـ ب



.....

.....

.....

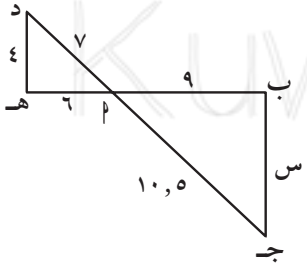
.....

٧ في الشكلِ المقابل :

أ أثبِت أنّ المثلّثين متشابهان .

.....

.....



.....

.....

ب أوجِد قيمة س .

.....

.....

.....

جـ أوجد محيط Δ أ ب جـ .

.....

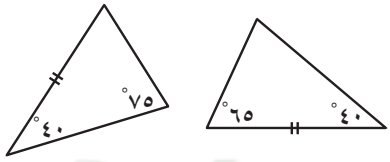
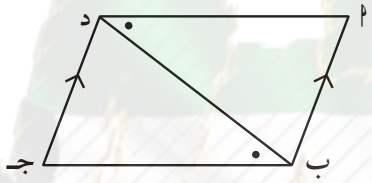
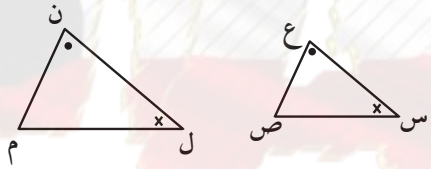
.....

.....

KuwaitMath.com

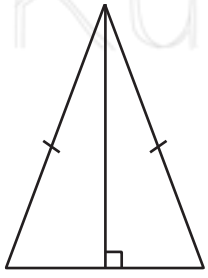
اختبار الوحدة الرابعة

أوّلًا : في البنود (١ – ٤) ظلِّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ يتشابه المثلّثان إذا تناسب طولا ضلعين في أحدهما مع نظائرهما في الآخر .	(أ)	(ب)
٢ المثلّثان في الشكل المقابِل متطابقان 	(أ)	(ب)
٣ في الشكل المقابِل : $\overline{أب} \cong \overline{جـد}$ 	(أ)	(ب)
٤ Δ س ص ع ، Δ ل م ن متشابهان 	(أ)	(ب)

ثانيًا : لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة .

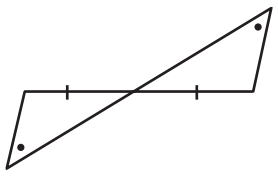
٥ في الشكل المقابِل : يتطابق المثلّثان وحالة تطابقهما هي :



(أ) (ض . ض . ض) فقط
(ب) (ض . ز . ض) فقط
(جـ) (ز . ض . ز) فقط
(د) كل حالات التطابق

---

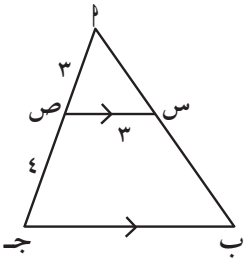
٦ في الشكل المقابِل : يتطابق المثلّثان وحالة تطابقهما هي :



(أ) (ض . ض . ض)
(ب) (ض . ز . ض)
(جـ) (ز . ض . ز)
(د) ($\angle$. و . ض)

KuwaitMath.com

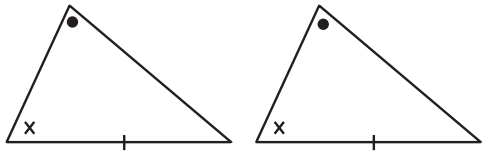
٧ إذا كان $\overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$ فإنّ ب جـ يساوي :

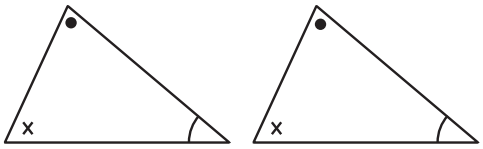


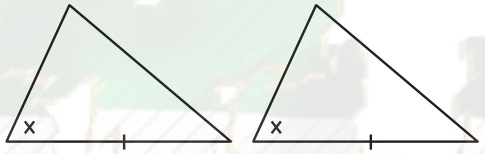
(أ) ٣ وحدة طول
(ب) ٤ وحدة طول
(جـ) ٧ وحدة طول
(د) ١٢ وحدة طول

---

٨ المثلّثان المتطابقان في ما يلي هما :

(أ)


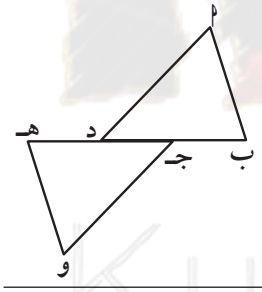
(ب)


(جـ)


(د)

---

٩ في الشكل المقابِل ، إذا كان Δ أ ب د ≅ Δ و هـ جـ فإنّ :



(أ) ب جـ = د هـ
(ب) $(\hat{أ}) \cong (\hat{هـ})$
(جـ) ب جـ = جـ د
(د) ق (أ $\hat{د}$ جـ) = ق (جـ $\hat{هـ}$ و)

---

١٠ إذا كان قياسا زاويتين في أحد مثلّثين متشابهين هما ٣٢° ، ٥٤° فإنّ قياسي زاويتين في المثلّث الآخر هما :

(أ) ٣٢° ، ٩٥°
(ب) ٨٤° ، ٥٤°
(جـ) ٣٢° ، ٨٤°
(د) ٩٤° ، ٥٤°

KuwaitMath.com