تمرَّنْ
7–1

الأعداد المركبة

Complex Numbers

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4–1)، بسّط كل عدد مستخدمًا الوحدة التخيلية i

(1) $\sqrt{-16}$

(2) $\sqrt{-15}$

(3) $3\sqrt{-9}$

(4) $-\frac{1}{2}\sqrt{-100}$

في التمارين (8–5)، اكتب كل عدد في الصورة الجبرية.

(5) $2+\sqrt{-3}$

(6) $\sqrt{-1}+2$

(7) $\frac{-\sqrt{-50}-2}{6}$

(8) $\frac{\sqrt{-8}+8}{2}$

في التمرينين (11–9)، حل المعادلات التالية:

(9) $2x+3yi=-14+9i$

(10) $3x+19i=16-8yi$

(11) $14i^2-3i=2x+(y+5)i$

(12) مثّل كلًّا مما يلي في المستوى المركب:

(a) $z_1=-2+3i$ **(b)** $z_2=-4$ **(c)** $z_3=-i$ **(d)** $z_4=2(2+i)$

(13) اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط التالية:

(a) $L(4,5)$ **(b)** $M(-4,-2)$ **(c)** $N(-2,6)$ **(d)** $P(0,-3)$

في التمارين (23–14)، بسّط كل تعبير مما يلي:

(14) $(2+4i)+(4-i)$

(15) $6-(8+3i)$

(16) $(4+\sqrt{-9})+(6-\sqrt{-49})$

(17) $(8-\sqrt{-1})-(-3+\sqrt{-16})$

(18) $(-2i)(5i)$

(19) $(4i)(-9i)^2$

(20) $-5(1+2i)+3i(3-4i)$

(21) $(-6-5i)(1+3i)$

(22) $(-2+\sqrt{-9})(6+\sqrt{-25})$

(23) $i(-6i)^3$

KuwaitMath.com

(24) إذا كان $z = \frac{1-i}{1+i}$ فأوجد: z^{27} , z^{12}

(25) إذا كان $z_2 = -3+4i$, $z_1 = 2+i$ فأوجد:

(a) $-\frac{1}{3}z_2$ **(b)** $z_1 . z_2$ **(c)** z_1^3 **(d)** $\overline{\overline{z}_1 . z_2}$

(e) $\overline{z}_1 - \overline{z}_2$ **(f)** $z_1 . \overline{z}_2$

(26) إذا كان $z = \frac{4i}{1-i\sqrt{3}}$ فأوجد: $\overline{z}$

(27) أوجد المعكوس الضربي لكل مما يلي:

(a) $-3-2i$ **(b)** $5i$ **(c)** $3i-4$

(28) إذا كان $z_2 = -\sqrt{3}+2i$, $z_1 = \sqrt{3}+i$ فأوجد: $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$, $\frac{z_1}{\overline{z}_2}$, $\frac{\overline{z}_1}{z_2}$

(29) تفكير ناقد: أوجد العلاقة بين y , x عندما يكون $(x+yi)^2$ عددًا تخيّليًا.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الصورة الجبرية للعدد: $3+\sqrt{-4}$ هي: $3+2i$ (a) (b)

(2) مرافق العدد المركب: $z = 3+4i$ هو: $\overline{z} = -3-4i$ (a) (b)

(3) المعكوس الجمعي للعدد المركب $z = 3-2i$ هو: $-z = 3+2i$ (a) (b)

(4) الصورة المبسّطة للتعبير: $(12+5i)-(2-i)$ هي: $10+6i$ (a) (b)

KuwaitMath.com

في التمارين (14–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) العدد: $32+\sqrt{-225}$ يكتب بالصورة الجبرية كما يلي:

(a) $-15+6i$ (b) $6+15i$ (c) $6-15i$ (d) $32+15i$

(6) حل المعادلة: $-10-6i=2x+3yi$ هو:

(a) $x=5\ ,\ y=-2$ (b) $x=-5\ ,\ y=-2$ (c) $x=-5\ ,\ y=2$ (d) $x=5\ ,\ y=2$

(7) إذا كان $z_1=2+5i$ ، $z_2=-3-i$ فإنّ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ تساوي:

(a) $\frac{1}{10}+\frac{17}{10}i$ (b) $\frac{-1}{10}-\frac{17}{10}i$ (c) $\frac{-1}{10}+\frac{17}{10}i$ (d) $\frac{1}{10}-\frac{17}{10}i$

(8) إذا كان: $x\,i^2+3\,y\,i=5+3\,i^5$: فإن $(x\ ,\ y)$ تساوي

(a) $(5,\ 1)$ (b) $(-5,\ -1)$ (c) $(5,\ -1)$ (d) $(-5,\ 1)$

(9) أبسط صورة للتعبير: $(3+\sqrt{-4})(4+\sqrt{-9})$ هي:

(a) $18+17i$ (b) $18+3\sqrt{-9}+4\sqrt{-4}$

(c) $6+17i$ (d) 18

(10) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=(1+2i)^2$ هي:

(a) $z=-3+4i$ (b) $z=5+4i$ (c) $z=-3$ (d) $z=5$

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=(2-i)^3$ هي:

(a) $z=14+13i$ (b) $z=14-13i$ (c) $z=2-11i$ (d) $z=2-13i$

(12) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=\frac{i}{i+2}$ هي:

(a) $z=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$ (b) $z=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

(c) $z=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$ (d) $z=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$

(13) إذا كان $z=i$ فإنّ z^{250} يساوي:

(a) $-i$ (b) i (c) 1 (d) -1

(14) ليكن $x\in\mathbb{Z}^+$ فإنّ مجموعة قيم x التي تجعل العدد $(5+i^x)$ عددًا حقيقيًّا هي:

(a) $\mathbb{Z}^+$ (b) $\{0,2,4,6,...\}$ (c) $\{1,3,5,...\}$ (d) $\{2,4,6,...\}$

KuwaitMath.com

تمرَّنْ
7–2

الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

Polar Coordinates and Trigonometric Form of a Complex Number

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أوجد:

(a) $|5+12i|$ **(b)** $|2-2i|$ **(c)** $|2i|$

في التمارين (7–2)، حول الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية:

(2) $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ **(3)** $\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$

(4) $\left(1.5, \frac{7\pi}{3}\right)$ **(5)** $(2, \pi)$

(6) $(2, 270^\circ)$ **(7)** $\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$

في التمارين (13–8)، أوجد الإحداثيات القطبية لكل من النقاط التالية:

(8) $(1, 1)$ **(9)** $(-2, 5)$

(10) $(-3, 0)$ **(11)** $(0, 4)$

(12) $(-2, -2\sqrt{3})$ **(13)** $(3\sqrt{3}, -3)$

في التمارين (21–14)، ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية مستخدمًا السعة الأساسية:

(14) $3i$ **(15)** $2 + 2i$

(16) $-2 + 2i\sqrt{3}$ **(17)** $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(18) $-2i$ **(19)** $\sqrt{3} + i$

(20) 8 **(21)** $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

في التمارين (28–22)، اكتب الأعداد التالية في الصورة المثلثية $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$:

(22) $5\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ **(23)** $8(\cos 30^\circ - i\sin(-150^\circ))$

(24) $-\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ **(25)** $2(\cos 45^\circ + i\sin 405^\circ)$

KuwaitMath.com

(26) $4\left(-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

(27) $5\left(\cos(-60°)+i\sin(-60°)\right)$

(28) $3\left(\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}\right)$

في التمارين (33–29)، ضع كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

(29) $2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

(30) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(31) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3}\right)$

(32) $7\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

(33) $\sqrt{3}(\cos 225°+i\sin 225°)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (6–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4,\frac{7\pi}{6}\right)$ هي: $A(-2\sqrt{3},2)$ (a) (b)

(2) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $B(\sqrt{2},135°)$ هي: $B(-1,1)$ (a) (b)

(3) الإحداثيات القطبية للنقطة: $M\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ هي: $M\left(1,\frac{5\pi}{4}\right)$ (a) (b)

(4) العدد المركب: $z=\sqrt{3}-i$ بصورة المثلثية هو: $z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ (a) (b)

(5) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ هي: $z=1-i$ (a) (b)

(6) السعة الأساسية للعدد $z=\cos 30°+i\cos 240°$ هي $330°$ (a) (b)

في التمارين (13–7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4,\frac{5\pi}{3}\right)$ هي:

(a) $A(2,2\sqrt{3})$ (b) $A(-2,2\sqrt{3})$ (c) $A(-2,-2\sqrt{3})$ (d) $A(2,-2\sqrt{3})$

(8) الإحداثيات القطبية للنقطة: $B\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ هي:

(a) $B\left(1,\frac{-\pi}{4}\right)$ (b) $B\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ (c) $B\left(1,\frac{3\pi}{4}\right)$ (d) $B\left(1,\frac{-3\pi}{4}\right)$

KuwaitMath.com

(9) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = 2 - 2\sqrt{3}\,i$ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$ هي:

(a) $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ (b) $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

(c) $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ (d) $z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

(10) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = \frac{-4}{1-i}$ حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$ هي:

(a) $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ (b) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

(c) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ (d) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$ هي:

(a) $z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ (b) $z = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

(c) $z = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ (d) $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

(12) $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ فإنّ قيمة $(i^{2n+2} + i^{2n+8})$ تساوي:

(a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) i^{-2n}

(13) $(6 - 2i + 3i^5)^2$ تساوي:

(a) $35 - 12i$ (b) $35 + 12i$ (c) $81 - 12i$ (d) $81 + 12i$

KuwaitMath.com

تمرَّنْ
7–3

حل معادلات

Solving Equations

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4–1)، أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلات التالية:

(1) $3z - 1 + i = 5 - 2i$

(2) $z + 2\overline{z} = 4 + i$

(3) $5z - 4 + 2i = 3z + 1 - 4i$

(4) $z + 3(1 + i)z - 8(2 - i) = 0$

في التمارين (9–5)، أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلات التالية:

(5) $16x^2 + 64 = 0$

(6) $x^2 - 5x + 7 = 0$

(7) $x^2 + 6x + 25 = 0$

(8) $z^2 - 2z + 4 = 0$

(9) $z + \frac{4}{z} = 2$

(10) لتكن المعادلة $z^2 + z + 2 = 0$ ، بدون حل المعادلة، أثبت أن $\frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}$ هو جذر للمعادلة ثم أوجد الجذر الثاني.

(11) أوجد الجذرين التربيعيّين للعدد المركب: $z = -3 + 4i$

(12) أوجد الجذرين التربيعيّين للعدد المركب: $z = 5 + 12i$

(13) أوجد الجذرين التربيعيّين للعدد المركب: $z = -7 - 24i$

(14) حل المعادلة: $(2 + i)z^2 = 22 - 19i$

KuwaitMath.com

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (6–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة: $\overline{z} + 2 = 5 - i$ هو: $z = 3 + i$ (a) (b)

(2) حل المعادلة: $2z + \overline{z} - 3 - 5i = 0$ هو: $z = 1 - 5i$ (a) (b)

(3) مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 4z + 5 = 0$ هي: $\{-2 - i, 2 + i\}$ (a) (b)

(4) الجذران التربيعيان للعدد -1 هما: $1, -1$ (a) (b)

(5) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z = 16 + 30i$ هما: $z_1 = 5 + 3i,\ z_2 = -5 - 3i$ (a) (b)

(6) إذا كان z_1, z_2 جذران تربيعيان للعدد z فإن $z_1 + z_2 = 0$ (a) (b)

في التمارين (10–7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) حل المعادلة: $2z - 5 + 6i = -3\overline{z}$ هو:

(a) $z = 1 + 6i$ (b) $z = -1 + 6i$ (c) $z = 1 - 6i$ (d) $z = -1 - 6i$

(8) مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 4z + 20 = 0$ هي:

(a) $\{2 - 4i, -2 - 4i\}$ (b) $\{-2 + 4i, -2 - 4i\}$

(c) $\{2 - 4i, -2 + 4i\}$ (d) $\{2 - 4i, 2 + 4i\}$

(9) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z = 33 - 56i$ هما:

(a) $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = 7 + 4i \end{cases}$ (b) $\begin{cases} z_1 = 7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$

(c) $\begin{cases} z_1 = 7 + 4i \\ z_2 = 7 - 4i \end{cases}$ (d) $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$

(10) حل المعادلة $(3 - 4i)z = 5 - 2i$ هو:

(a) $\frac{5}{3} + \frac{1}{2}i$ (b) $\frac{5}{3} - \frac{1}{2}i$ (c) $\frac{23}{25} + \frac{14}{25}i$ (d) $\frac{23}{25} - \frac{14}{25}i$

KuwaitMath.com

اختبار الوحدة السابعة

في التمارين (4–1)، بسّط كلًّا من التعابير التالية:

(1) $4\sqrt{-9}-2$

(2) $(4-i)+(5-9i)$

(3) $(-3+2i)-(6+i)$

(4) $(2+3i)(8-5i)$

(5) أوجد المعكوس الجمعي والمعكوس الضربي للعدد $3-7i$

(6) أوجد القيمة المطلقة للعدد $7-2i$

(7) أوجد كلًّا مما يلي:

(a) $-3i^{77}$ **(b)** i^{50} **(c)** $(-2+3i)^2$

(8) أوجد مجموعة حلّ المعادلة: $2x^2+10=0$

(9) اكتب الكسر $\frac{1+3i}{3+2i}$ في الصورة الجبرية، ثم حوّلها إلى صورة المثلثية.

(10) أوجد مجموعة حل المعادلة: $\frac{z+1}{z-1}=2i$

(11) أوجد مرافق العدد $\frac{3-i}{1+i}$

(12) حل المعادلة: $2z^2-6z+5=0$

(13) اكتب الأعداد المركبة التالية في صورة المثلثية:

(a) $\frac{1}{2}$ **(b)** $-3i$ **(c)** $2\sqrt{3}+6i$

(14) اكتب العدد $-3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ في الصورة المثلثية مستخدمًا السعة الأساسية.

(15) اكتب العدد $\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ في الصورة الجبرية.

(16) أوجد الجذرين التربيعيين للعدد $-8+6i$

(17) (a) أثبت أن $-2+\frac{3}{2}i$ هو أحد جذري المعادلة: $4z^2+16z+25=0$

(b) أوجد الجذر الآخر.

KuwaitMath.com

تمارين إثرائية

(1) أثبت أن النقاط الممثلة للأعداد:

i، $-i$، $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$، $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$، $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ تنتمي إلى دائرة واحدة.

(2) اكتب العدد $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$ في صورة المثلثية.

(3) أثبت أن النقاط A, B, C, D الممثلة للأعداد المركبة $z_A = 1$، $z_B = 1\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$،

$z_C = \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$، $z_D = 2$ تشكل معينًا.

(4) اكتب العدد $z = \sin\alpha - i\cos\alpha$ في الصورة المثلثية مستخدمًا السعة الأساسية.

(5) أثبت أن $(1+i)^8$ هو عدد حقيقي موجب.

(6) إذا كان $|z| = 1$، أثبت أن $\overline{z} = \frac{1}{z}$

(7) (a) أثبت أن $1+i$ هو أحد أصفار $f(z) = z^3+(-2+3i)z^2+(13-i)z-6-10i$

(b) استخدم القسمة التركيبية لتوجد ناتج قسمة $f(z)$ على $z = 1+i$

(8) أوجد مجموعة النقاط M الممثلة للعدد المركب z بحيث تكون سعته الأساسية تساوي $\frac{\pi}{3}$

(9) (a) أثبت أن: $1+i$، $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ هما جذران للمعادلة: (1) $z^4-z^3+z^2+2=0$

(b) أوجد مجموعة حل المعادلة (1).

(c) أثبت أن $f(z) = z^4-z^3+z^2+2$ يمكن أن تكتب على شكل كثيرتي حدود من الدرجة الثانية مضروبَتين في بعضهما بعضًا.

(10) (a) أثبت أن -1 هو أحد أصفار $f(z) = z^2+2(3-i)z+5-2i$

(b) أوجد الصفر الثاني.

KuwaitMath.com