تمرَّنْ
4–1

استكشاف النماذج الأسية
Exploring Exponential Models

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (5–1)، اذكر ما إذا كانت كل دالة تمثّل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا. ما النسبة المئوية لزيادة الدالة أو نقصانها؟

(1) $y = 1298(1.63)^x$ **(2)** $y = 0.65(1.3)^x$ **(3)** $f(x) = 2(0.65)^x$

(4) $f(t) = 0.8\left(\frac{1}{8}\right)^t$ **(5)** $y = 5(6)^x$

(6) الدراسات الاجتماعية: يعرض الجدول التالي معلومات عن عدد السكان في أكبر أربع مدن في العالم في سنة 1994.

الترتيب في سنة 1994	المدينة (الدولة)	عدد السكان في سنة 1994	متوسط معدل النمو السنوي (I)
1	طوكيو (اليابان)	26 518 000	1.4%
2	نيويورك (الولايات المتحدة)	16 271 000	0.3%
3	ساوباولو (البرازيل)	16 110 000	2.0%
4	مكسيكو (المكسيك)	15 525 000	0.7%

(a) لنفترض استمرار هذه المعدلات للنمو، اكتب معادلة تمثّل النمو المستقبلي لعدد السكان في كل مدينة.

(b) استخدم معادلاتك كي تتوقع عدد سكان كل مدينة في سنة 2004. هل تغير الترتيب؟

في التمرينين (8–7)، مثّل كل دالة بيانيًّا. بيّن ما إذا كانت الدالة تمثل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا محددًا العامل.

(7) $y = 100(0.5)^x$ **(8)** $f(x) = 2^x$

(9) السؤال المفتوح: اكتب مسألة حياتية تمثّل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا لكل دالة في التمرينين (7) و(8).

(10) الاقتصاد: افترض أنك تريد شراء سيارة ثمنها 500 4 دينار. من المتوقع أن تنخفض قيمتها بمعدل 20% سنويًّا، إذا أخذت قرضًا مدته أربع سنوات لشراء السيارة، فكم ستكون قيمة السيارة بعد أن تسدد القرض في أربع سنوات؟

في التمارين (14–11)، اكتب دالة أسيّة لتمثيل (نمذجة) كل موقف مما يلي. أوجد قيمة الدالة بعد خمس سنوات.

(11) تجمّع من الضفادع مؤلف من 250 ضفدعة، يتزايد بمعدل 22% سنويًّا.

(12) مجموعة طوابع ثمنها 35 دينارًا، يتزايد ثمنها بمعدل 7.5% سنويًّا.

(13) سيارة شحن صغيرة ثمنها 1 750 دينارًا تنخفض قيمتها بمعدل 11% سنويًّا.

(14) قطيع من الماعز عدده 115 يتناقص بمعدل 1.25% سنويًّا.

(15) لنفترض أنك تشتري سيارة جديدة، وتريد أن يكون لهذه السيارة أعلى قيمة بعد مرور خمس سنوات على شرائها، أي اختيار من الاختيارات الثلاثة الموضحة في الجدول التالي سوف تختار؟

السيارة	السعر الأساسي	قيمة الانخفاض المتوقع
1	4 275 دينارًا	10%
2	4 500 دينار	12%
3	4 850 دينارًا	15%

المجموعة B تمارين موضوعية

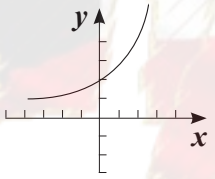
في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة $y = 3(2)^x$ تمثل تضاؤلًا أسيًّا. (a) (b)

(2) الدالة $y = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$ تمثل نموًا أسيًّا. (a) (b)

(3) عامل النمو للدالة $y = \frac{1}{3}(2)^{2x}$ هو 2 (a) (b)

(4) إذا كان بيان الدالة $y = b^x$ كما في الشكل المقابل فإن $b > 1$ (a) (b)



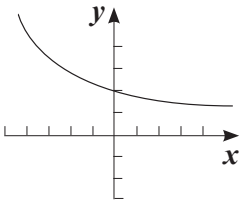
في التمارين (8–5)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) عامل النمو للدالة $y = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right)^x$ هو:

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{9}$ (c) 3 (d) 9

(6) ليكن بيان الدالة: $y = 2b^x$ كما في الشكل المقابل:

فإن b يمكن أن تساوي:



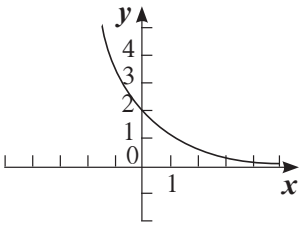
(a) -2 (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 2

(7) الدالة الأسية $y = ab^x$ تنمذج التزايد السكاني، إذا كان معدل التزايد السكاني في مدينة ما هو 2.5% فإن عامل النمو يساوي:

(a) 0.025 (b) 1.25 (c) 1.025 (d) 3.5

KuwaitMath.com

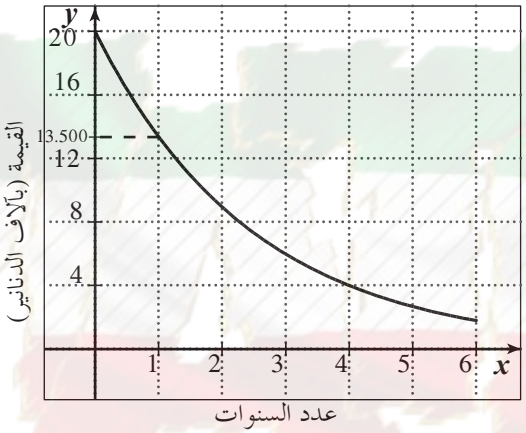
(8) أي من الدوال الأسية التالية يمكن أن يمثلها الرسم البياني المقابل:



(a) $y = \frac{1}{3}(2)^x$ (b) $y = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x$ (c) $y = -3(2)^x$ (d) $y = -2(3)^x$

في التمارين (11–9)، لديك قائمتان اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين من القائمة (1) للحصول على إجابة صحيحة.

يبيّن التمثيل البياني الأسي المقابل الانخفاض في قيمة سيارة خلال السنة الأولى.



القائمة (1)	القائمة (2)
(9) مقدار الانخفاض (بالآلاف)=	(a) -0.325
(10) نسبة الانخفاض =	(b) 0.675
(11) عامل الانخفاض =	(c) 0.325
	(d) -6.5

KuwaitMath.com

تمرَّنْ
4–2

الدوال الأسية وتمثيلها بيانيًّا
Exponential Functions and their Graphs

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4–1)، مثّل بيانيًّا كلًّا من الدوال الأسية التالية:

(1) $y = 4^x$ **(2)** $y = 6^x + 3$ **(3)** $y = 2^{-x}$ **(4)** $y = -3^{x+4}$

في التمارين (8–5)، مثّل بيانيًّا كلًّا من الدوال الأسية التالية مستخدمًا دالة المرجع:

(5) $y = (5)^x - 1$ **(6)** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$ **(7)** $y = (4)^{x-2} + 3$ **(8)** $y = -2(3)^{2x} + 1$

في التمارين (13–9)، استخدم آلتك الحاسبة لإيجاد ناتج كل مقدار مقرّبًا الناتج إلى أربعة أرقام عشرية.

(9) e^3 **(10)** $5e^6$ **(11)** $\left(\frac{5}{4}\right)e^{\frac{1}{2}}$

(12) $\frac{4}{e^6}$ **(13)** e^e

(14) أوجد قيمة a التي يصبح عندها الرسم البياني للدالة: $y = ab^x$ خطًّا أفقيًّا.

(15) **(a) الكيمياء:** تعطي العلاقة: $A = Pe^{-0.0001t}$ الكمية المتبقية «A» بالميكروجرام من مادة إشعاعية معينة بعد «t» سنة من التضاؤل؛ «P» هي الكمية الأولية للمادة المشعة. استخدم العلاقة لإكمال الجدول التالي:

الكمية الأولية من المادة (P)	السنوات (t)	الكمية المتبقية من المادة (A)
10 000	5	
7 500	5	
6 000	5	
5 000	5	
2 500	5	
2 000	5	

(b) قارن بين قيم كل من P , A. ماذا تلاحظ؟

(16) **علم المحيطات:** كلما غصنا في أعماق المحيط، قلت شدة أشعة الشمس. إذا كانت شدة أشعة الشمس على سطح المحيط هي y، فإن النسبة المئوية من y التي تصل إلى عمق x m تعطى بالعلاقة: $y = 20 \times (0.92)^x$

(يعد هذا النموذج مناسبًا للأعماق من 6 m إلى 180 m تحت مستوى سطح البحر).

(a) أوجد النسبة المئوية لأشعة الشمس الموجودة على عمق 15 m تحت مستوى سطح البحر.

(b) إذا كان أقصى عمق مسجل لرياضة الغطس هو 107 m تحت مستوى سطح البحر، فأوجد النسبة المئوية لأشعة الشمس عند هذا العمق.

KuwaitMath.com

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) جميع الدوال الأسية على الصورة: $y = ab^x \quad a \neq 0 \ , \ b > 0, \ b \neq 1$ متقاطعة. (a) (b)

(2) بيان الدالة $y = -2^x$ هو انعكاس في محور السينات لبيان الدالة $y = 2^x$ (a) (b)

(3) بيان الدالة $y = -(3)^x$ هو انعكاس في محور الصادات لبيان الدالة $y = -(3)^{-x}$ (a) (b)

(4) بيان الدالة $y = 3(5)^{x-2}$ هو انسحاب لبيان الدالة $y = 3(5)^x$ بمقدار وحدتين جهة اليمين. (a) (b)

(5) بيان الدالة $y = 3(2)^x$ يقطع جزءًا من محور الصادات قدره 3. (a) (b)

في البنود (12–6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) لتكن $y = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + 5$ فإن دالة المرجع لها يمكن أن تكون:

(a) $y = 3(2)^x$ (b) $y = 3(2)^{-x}$ (c) $y = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ (d) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

(7) باستخدام بيان الدالة $y = \frac{1}{3}(4)^x$ كدالة مرجع يمكن رسم بيان الدالة:

(a) $y = 3(4)^x$ (b) $y = 3(4)^{-x}$ (c) $y = \frac{1}{3}(2)^{2x} + 1$ (d) $y = \frac{1}{3}(2)^{3x}$

(8) قيمة α التي تجعل بيان الدالة $y = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{(\alpha+2)x} + 3$ خطًّا أفقيًّا هي:

(a) -3 (b) -2 (c) -8 (d) 0

(9) بيان الدالة: $f(x) = 3(5)^x - 1$ هو انعكاس في محور الصادات لبيان الدالة: $g(x) =$

(a) $3(5)^x + 1$ (b) $3(5)^{-x} - 1$ (c) $-3(5)^x + 1$ (d) $3(5)^{-x} + 1$

(10) يمكن رسم بيان الدالة $y = \frac{1}{2}(5)^{x+2} - 3$ باستخدام بيان الدالة $y = \frac{1}{2}(5)^x$ بانسحاب:

(a) وحدتين جهة اليسار و3 وحدات لأسفل (b) وحدتين جهة اليمين و3 وحدات لأسفل

(c) 3 وحدات جهة اليمين ووحدتين لأعلى (d) وحدتين جهة اليمين و3 وحدات لأعلى

(11) معادلة الدالة الأسية التي على الصورة $y = a(b)^x$ حيث الأساس يساوي 0.6 ويمر رسمها البياني بالنقطة $(2 \ , \ 1.8)$ هي:

(a) $y = 1.8(2)^x$ (b) $y = 0.2(1.8)^x$ (c) $y = 2(0.6)^x$ (d) $y = 5(0.6)^x$

(12) أي من الدوال التالية تنمذج بيانات الجدول المقابل:

x	0	1	2	3
y	4	5.2	6.76	8.79

(a) $y = x^2 + \frac{1}{2}x + 4$ (b) $y = 4(1.3)^x$ (c) $y = 1.6(4)^x$ (d) $y = 4(0.6)^x + 2.8$

KuwaitMath.com

تمرَّنْ
4–3

الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها بيانيًّا
Logarithmic Functions and their Graphs

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (8–1)، اكتب كل معادلة مما يلي في الصورة اللوغاريتمية:

(1) $4^2 = 16$ **(2)** $7^3 = 343$ **(3)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$ **(4)** $8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$

(5) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ **(6)** $10^{-2} = 0.01$ **(7)** $6^{\frac{3}{2}} = 6\sqrt{6}$ **(8)** $5^{-3} = \frac{1}{125}$

في التمارين (14–9)، اكتب كل معادلة مما يلي في الصورة الأسية:

(9) $\log_2 128 = 7$ **(10)** $\log_4 64 = 3$ **(11)** $\log 100 = 2$

(12) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ **(13)** $\log 0.0001 = -4$ **(14)** $\log_3 \frac{1}{243} = -5$

في التمارين (20–15)، أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يلي:

(15) $\log_2 4$ **(16)** $\log_2 8$ **(17)** $\log_8 8$

(18) $\log_2 2^5$ **(19)** $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$ **(20)** $\log 0.01$

في التمارين (23–21)، أوجد مجال التعريف لكل دالة مما يلي:

(21) $y = \log_6 (x+1)$ **(22)** $y = \log_8 (x) - 2$ **(23)** $y = \log (x^2 - 4)$

(24) يساوي تركيز أيون الهيدروجين $[H^+]$ في الليم (نوع من الليمون) حوالى 1.26×10^{-2}
أوجد رقمه الهيدروجيني (pH) علمًا أن $pH = -\log[H^+]$.

(25) يساوي الرقم الهيدروجيني لعصير خل التفاح (Cider Vinegar) حوالى 3.1
أوجد تركيز أيونه الهيدروجيني $[H^+]$.

في التمرينين (27–26)، مثّل بيانيًّا كل دالة لوغاريتمية معينًا المجال والمدى.

(26) $y = \log_3 (x)$ **(27)** $y = \log_3 (x-1) + 2$

(28) اشرح لماذا b لا تستطيع أن تأخذ قيمة 1 في الدالة: $y = \log_b (x)$

KuwaitMath.com

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت $y = 3^x$ فإن $x = \log y$ (a) (b)

(2) إذا كانت $\log_2(-y) = x$ فإن $y = 2^{-x}$ (a) (b)

(3) إذا كانت $4^x = 5$ فإن $2x = \log_2 5$. (a) (b)

(4) مجال الدالة $f(x) = \log(x^2)$ هو $\mathbb{R}$ (a) (b)

(5) بيان الدالة $y = \log_3 x$ هو انعكاس في المستقيم $y - x = 0$ لبيان الدالة $y = 3^x$ (a) (b)

في التمارين (11–6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) معكوس الدالة $y = \log_2 x$ هو:

(a) $y = \log_x 2$ (b) $y = x^2$ (c) $y = 2^x$ (d) $y = \log 2^x$

(7) مجال الدالة $y = \log|x - 1|$ هو:

(a) $\mathbb{R}$ (b) $\mathbb{R}^+$ (c) $(1, \infty)$ (d) $\mathbb{R}/\{1\}$

(8) مجال الدالة $y = \log(x^2 + 1)$ هو:

(a) $\mathbb{R}$ (b) $\mathbb{R}^+$ (c) $[1, \infty)$ (d) $(1, \infty)$

(9) باستخدام دالة المرجع $y = \log_5 x$ يمكن تمثيل الدالة:

(a) $y = \log(x - 1) - 1$ (b) $y = \log_5(5x)$

(c) $y = \log_5(x - 1) - 1$ (d) $y = \log_5(x^2 + 1)$

(10) يمكن رسم بيان الدالة $y = \log(x + 1) - 2$ معتبرًا دالة المرجع $y = \log x$ بانسحاب:

(a) وحدة إلى اليسار ووحدتين لأسفل (b) وحدة إلى اليمين ووحدتين لأسفل

(c) وحدتين إلى اليمين ووحدة لأعلى (d) وحدتين إلى اليسار ووحدة لأعلى

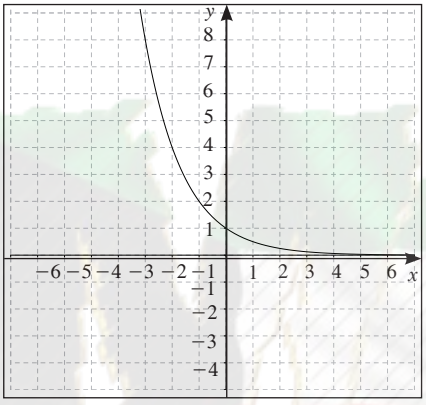
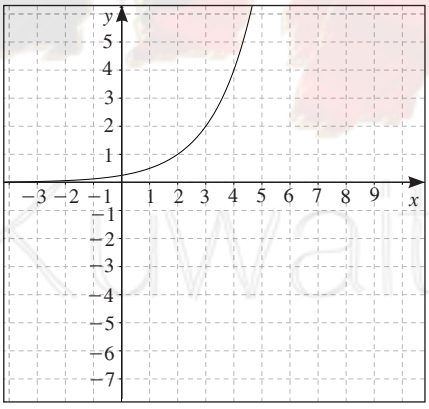
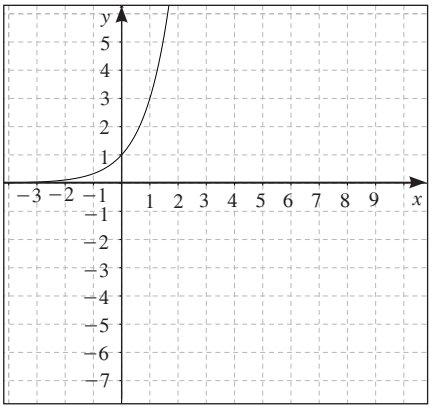
(11) يعطى الرقم الهيدروجيني (pH) بالعلاقة: $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$ إذا كان تركيز أيون الهيدروجيني $[\text{H}^+]$ في السبانخ هو 4×10^{-6} فإن الرقم الهيدروجيني للسبانخ هو:

(a) -6.6 (b) 6.6 (c) -5.4 (d) 5.4

KuwaitMath.com

في البنود (15–12)، لديك قائمتان اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

القائمة (1)	القائمة (2)
معكوس الدالة: **(12)** $y = -\log_{\frac{1}{4}} x$ هو **(13)** $y = -\log_4 x$ هو	**a** $y = 4^x$ **b** $y = \left(\frac{-1}{4}\right)^{-x}$ **c** $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ **d** $y = (-4)^{-x}$

القائمة (1)	القائمة (2)
بيان معكوس كل دالة مما يلي هو: **(14)** $y = \log_3(x)$ **(15)** $y = \log_2(4x)$	**a**  **b**  **c** 

KuwaitMath.com

تمرَّنْ
4–4

خواص اللوغاريتمات
Properties of Logarithms

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (8–1)، اكتب كل مقدار لوغاريتمي في صورة لوغاريتم واحد.

(1) $\log 7 + \log 2$

(2) $\frac{1}{2}\log_4 y - \log_4 x \ , \ (x > 0 \ , \ y > 0)$

(3) $4\log M - \log N \ , \ (M > 0 \ , \ N > 0)$

(4) $\log x + \log y + \log z \ , \ (x > 0, y > 0, z > 0)$

(5) $\log \frac{a}{4} + \log \frac{b}{3} - \log \frac{c}{2} \ , \ (a > 0, \ b > 0, \ c > 0)$

(6) $\log a + 3\log b \ , \ (a > 0, b > 0)$

(7) $\frac{1}{2}(\log_7 x + \log_7 y) - 3\log_7 a \ , \ (x > 0, y > 0, a > 0)$

(8) $7\log r - \log x + \log n \ , \ (r > 0, x > 0, n > 0)$

في التمارين (16–9)، أوجد مفكوك كل لوغاريتم مما يلي:

(9) $\log_5 \frac{y}{x} \ , \ (x > 0, y > 0)$

(10) $\log x^3 + y^5 \ , \ (x > 0, \ y > 0)$

(11) $\log_3 7(2x-3)^2 \ , \ \left(x > \frac{3}{2}\right)$

(12) $\log \frac{a^2 b^3}{c^4} \ , \ (a > 0, b > 0, c > 0)$

(13) $\log 3M^4 N^{-2} \ , \ (M > 0, N > 0)$

(14) $\log_4 5\sqrt{x} \ , \ (x > 0)$

(15) $\log\big(2(x+1)\big)^3 \ , \ (x > -1)$

(16) $\log \sqrt{\frac{2x}{y}} \ , \ (x > 0, y > 0)$

(17) السؤال المفتوح: استخدم خواص اللوغاريتمات لإعادة كتابة $\log 64$ بأربع طرائق مختلفة.

(18) الكتابة: اشرح لماذا $\log(5 \times 2) \neq \log 5 \times \log 2$

في التمارين (23–19)، استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة كل مقدار.

(19) $\log_2 4 - \log_2 16$

(20) $\log_5 5 - \log_5 125$

(21) $3\log_2 2 - \log_2 4$

(22) $\log 1 + \log 100$

(23) $\log 5 + \log 8 - 2\log 2$

KuwaitMath.com

في التمارين (28–24)، لنفترض أن $\log 6 \simeq 0.7782$, $\log 5 \simeq 0.6990$, $\log 4 \simeq 0.6021$. استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة كل مقدار. دون استخدام آلتك الحاسبة قرّب إجاباتك إلى أقرب جزء من ألف.

(24) $\log 20$ **(25)** $\log 16$ **(26)** $\log 1.25$

(27) $\log 125$ **(28)** $\log \frac{1}{36}$

(29) العلوم: يستطيع الإنسان سماع مدى واسع من شدة الصوت، وهذا ما يوضحه الجدول التالي. شدة الصوت هي قياس كمية الطاقة الناتجة عن مصدر الصوت، ويعتمد مستوى شدة الصوت على شدة الصوت، وعلى المسافة بين مصدر الصوت والشخص الذي يسمعه. ويعرف مستوى شدة الصوت المقاس بالديسيبل (dB) بالمعادلة التالية: مستوى شدة الصوت $= 10 \log \frac{I}{I_0}$، حيث I شدة الصوت، I_0 شدة الصوت بالكاد مسموع.

أكمل الجدول التالي:

نوع الصوت	الشدة W/m^2	مستوى شدة الصوت (ديسيبل dB)
صوت عالٍ	1	120
صوت آلة ثقب	10^{-2}	
صوت شارع مزدحم	10^{-5}	
صوت محادثة	10^{-6}	
صوت همس	10^{-10}	
حفيف أوراق الأشجار	10^{-11}	
صوت بالكاد مسموع	10^{-12}	0

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (6–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\log(x-1)^2 = 2\log|x-1|$ (a) (b)

(2) $\log \frac{1}{x^2} = -2\log x, x > 0$ (a) (b)

(3) $\log\left(\frac{\sqrt{m}}{n}\right) = \frac{1}{2}\log m - \log n,\ m > 0, n > 0$ (a) (b)

(4) $\log_2 16 - \log_2 2 = \log_2 8$ (a) (b)

(5) $\log(x-y) = \frac{\log x}{\log y},\ x, y \in \mathbb{R}^+/\{1\}$ (a) (b)

(6) $\log_6 4 + \log_6 9 = 2$ (a) (b)

KuwaitMath.com

في التمارين (13–7)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(7) المقدار $2\log_4 8 + \log_5 125$ يساوي:

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 15

(8) إذا كان $\log 5 = y$, $\log 3 = x$ فإن $\log 45$ تساوي:

(a) $x+y$ (b) $2x+y$ (c) $2y+x$ (d) x^2y

(9) $\log_2 x + \log_2 2x + \log_2 \frac{1}{x^2}, x > 0$ يساوي:

(a) 1 (b) 2 (c) x (d) $2x$

(10) إذا كان $\log 3 = n, \log 2 = m$ فإن المقدار $m+n-1$ يساوي:

(a) $\log 0.06$ (b) $\log 0.6$ (c) $\log 6$ (d) $\log 60$

(11) عندما $n = 2$, $m = 3$ فإن المقدار الأكبر قيمة فيما يلي هو:

(a) $\log n^2 - \log m^3$ (b) $\log m^2 - \log n^2$ (c) $3\log n - 2\log m$ (d) $2\log m - 3\log n$

(12) مفكوك المقدار $\log\left(\sqrt[3]{\frac{8}{x^3}}\right)$ هو:

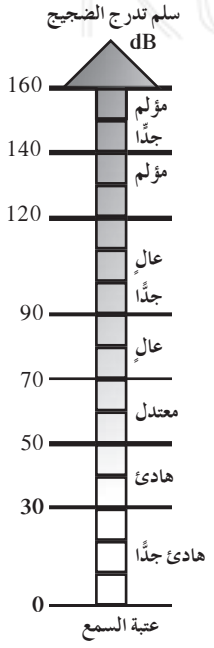
(a) $3\log\frac{8}{x^3}$ (b) $\frac{1}{3}(\log(8-x^3))$ (c) $\log 2 - \log x$ (d) $\log 2 - 3\log x$

(13) إذا كان مستوى شدة صوت صفارة إنذار (L) تساوي 140 dB والتي تقاس بالعلاقة: $L = 10\log\frac{I}{10^{-12}}$ فإن شدة صوتها I تساوي:

(a) 1 (b) 1000 (c) 10 (d) 100

في التمرينين (15–14)، لديك قائمتان اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

استخدم العلاقة: $L = 10\log\frac{I}{10^{-12}}$ والشكل المقابل.



القائمة (1)	القائمة (2)
إذا كانت شدة صوت ما (I) هي:	(a) هادئة
(14) 10^{-5} فإن قوته تكون:	(b) مؤلمة
(15) 1.65×10^{-2} فإن قوته تكون:	(c) عالية
	(d) عالية جدًّا

KuwaitMath.com

تمرَّنْ
4–5

المعادلات الأسية واللوغاريتيمية
Exponential and Logarithmic Equations

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (8–1)، حلّ كل معادلة مما يلي. اختبر صحة كل حل:

(1) $9^{2y} = 66$ **(2)** $12^{y-2} = 20$ **(3)** $5 - 3^{x} = -40$ **(4)** $25^{2x+1} = 144$

(5) $3x^{\frac{3}{2}} = 27, x > 0$ **(6)** $2 + 8r^{\frac{5}{3}} = 26$ **(7)** $\sqrt[7]{n^2} - 12 = 5$ **(8)** $-3 + 2\sqrt[4]{x^3} = 33$

في التمارين (13–9)، استخدم قاعدة تغيير الأساس لإيجاد قيمة كل لوغاريتم مما يلي:

(9) $\log_2 7$ **(10)** $\log_3 33$ **(11)** $\log_{21} 0.085$

(12) $\log_5 510$ **(13)** $\log_4 1.116$

(14) باعتبار المعادلة: $2^{\frac{x}{3}} = 80$

(a) حلّ المعادلة بأخذ اللوغاريتم بأساس 2 لكل طرف.

(b) حلّ المعادلة بأخذ اللوغاريتم بأساس 10 لكل طرف.

(c) قارن بين إجاباتك في الفقرتين (a), (b). أي طريقة تفضلها؟ ولماذا؟

في التمارين (20–15)، حل كل معادلة لوغاريتمية مما يلي:

(15) $\log 6x - 3 = -4$ **(16)** $\log x - \log 3 = 8$

(17) $\log_2(3x - 5) = 1$ **(18)** $\log(2x) + \log(x - 3) = \log 8$

(19) $\log(3x) - \log(x + 20) = -\log 2$ **(20)** $\log_{(2x-1)} 49 = 2$

(21) $\log_{(5x-3)} 64 = \log 4$

(22) الأحياء البرية: لنفرض أن فصيلة معينة من الحيوانات البرية المعرضة لخطر الانقراض تتناقص أعدادها بمعدل 3.5% سنويًّا وقد أحصيت 80 حيوانًا من هذه الفصيلة في موطنها الذي تقوم بدراسته.

(a) توقع عدد حيوانات هذه الفصيلة الذي سيبقى بعد 10 سنوات.

(b) بعد كم سنة سوف يتناقص عدد حيوانات هذه الفصيلة لأول مرة إلى أقل من 15 حيوانًا، بالمعدل نفسه؟

KuwaitMath.com

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة $9^x = 3$ هو $x = \frac{1}{2}$ (a) (b)

(2) حل المعادلة $2\log x = -1$ هو $x = 10^{-0.5}$ (a) (b)

(3) إذا كان $\log(x+6) = 0$ فإن $x = -5$ (a) (b)

(4) حل المعادلة $14^{9x} = 146$ هو $x = \frac{\log 146}{\log 14}$ (a) (b)

(5) حل المعادلة $3\log x - \log 6 + \log 2.4 = 9$ هو 5×10^4 (a) (b)

في التمارين (14–6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان $(1.5)^x = 356$ فإنّ:

(a) $x \approx 15$ (b) $x \approx 14.5$ (c) $x \approx 15.3$ (d) $x \approx 16.3$

(7) حل المعادلة $10^x + 8 = 1008$ هو:

(a) $x = 6$ (b) $x \approx 3.5$ (c) $x = 3$ (d) $x = 2$

(8) إذا كان $2^{x^2} = 512$ فإنّ:

(a) $x = 3$ (b) $x = 9$ (c) $x = 3\ ,\ x = -3$ (d) $x = -9$

(9) إذا كان $2\log x = -2$ فإنّ:

(a) $x = 10^{-1}$ (b) $x = 10^{0.5}$ (c) $x = 10^{-2}$ (d) $x = 10^{-0.5}$

(10) مجموعة حل المعادلة: $\log(x^2+2) = \log(5x-4)$ هي:

(a) $\{2\}$ (b) $\{3\}$ (c) $\{2,3\}$ (d) $\{-2,-3\}$

(11) مجموعة حل المعادلة: $\log_2(x^2-x) = 1$ هي:

(a) $\{-1\}$ (b) $\{1,2\}$ (c) $\{-1,2\}$ (d) $\{-1,-2\}$

(12) حل المعادلة $\log x + \log(x+21) = 2$ هو:

(a) 4 (b) $-25\ ,\ 4$ (c) 25 (d) $4\ ,\ 25$

(13) يكون $x = 3$ حلًا للمعادلة:

(a) $\log_3(6-x^2) = 1$ (b) $\log_x 9 = \frac{2}{3}$ (c) $\log_3(x^2+1) = 2$ (d) $\log_3 x^3 + \log_3 x = 4$

(14) حل المعادلة $\log_x 81 - \log_x 9 = 2$ هو:

(a) -3 (b) $\frac{1}{3}$ (c) 3 (d) 9

KuwaitMath.com

تمرَّنْ
4–6

اللوغاريتم الطبيعي
Natural Logarithm

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (8–1)، اكتب كل تعبير مما يلي كلوغاريتم طبيعي واحد:

(1) $3\ln 5$

(2) $\ln 24 - \ln 6$

(3) $\ln 3 - 5\ln 3$

(4) $5\ln m + 3\ln n \ , \ (m > 0 \ , \ n > 0)$

(5) $2\ln 8 - 3\ln 4$

(6) 7

(7) $\ln a - 2\ln b + \frac{1}{2}\ln c \ , \ (a > 0, \ b > 0, \ c > 0)$

(8) $\frac{1}{3}(\ln x + \ln y) - 4\ln c, (x > 0, \ y > 0, \ c > 0)$

(9) أوجد قيمة y في: $y = 15 + 3\ln 7.2$

(10) أوجد قيمة y في: $y = 0.05 - 10\ln x, x = 0.09$

في التمرينين (12–11)، استخدم العلاقة: $V = -0.0098t + C\ lnR$، حيث R نسبة كتلة الصاروخ، t زمن اشتعاله، C سرعة انطلاق البخار، V سرعة الصاروخ.

(11) أوجد أقصى سرعة لصاروخ نسبة كتلته 20 وسرعة انطلاق بخاره 2.7 km/s وزمن اشتعاله 30 s

(12) أوجد نسبة كتلة صاروخ سرعة انطلاق بخاره 3.15 km/s وزمن اشتعاله 50 s وله أقصى سرعة 6.9 km

في التمارين (18–13)، استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل كل معادلة مما يلي:

(13) $3e^{2x} = 12$

(14) $e^{x+1} = 30$

(15) $e^{\frac{x}{9}} - 8 = 6$

(16) $4e^{x+2} = 32$

(17) $2e^{3x-2} + 4 = 16$

(18) $2e^{2x} = e^{x} + 6$

في التمارين (28–19)، حلّ كل معادلة مما يلي:

(19) $\ln 3x = 6$

(20) $\ln(4x - 1) = 36$

(21) $\ln(x-1)^2 = 3$

(22) $\ln\left(\frac{x-1}{2}\right) = 4$

(23) $2\ln 2x^2 = 1$

(24) $\ln x - 3\ln 3 = 3$

(25) $\frac{1}{2}\ln x + \ln 2 - \ln 3 = 3$

(26) $1.1 + \ln x^2 = 6$

(27) $\ln(2x - 1) = 0$

(28) $\ln(5x-3)^{\frac{1}{3}} = 2$

(29) التفكير الناقد: هل يمكن كتابة $\ln 5 + \log_2 10$ على شكل لوغاريتم واحد؟ اشرح.

(30) تعطي العلاقة: $b = 40\ e^{\frac{-n}{300}}$ القوة الخارجة (b) بالواط (W) لقمر صناعي بعد n يوم، فما مدة تشغيل القمر الصناعي إذا كانت القوة الخارجة 15 W؟

KuwaitMath.com

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\log_4(ln\,e^4) = 1$ (a) (b)

(2) $4ln8 + ln10 = 4ln80$ (a) (b)

(3) $lne^2 = 2$ (a) (b)

(4) حل المعادلة: $lnx = -2$ هو e^2 (a) (b)

(5) حل المعادلة: $e^{\frac{x}{5}} + 4 = 7$ هو $5ln3$ (a) (b)

في التمارين (14–6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) $3\,ln\,4 - 5\,ln\,2$ على شكل لوغاريتم واحد تكتب:

(a) $ln(-18)$ (b) $ln\left(\frac{6}{5}\right)$ (c) $ln\,2$ (d) $ln\,32$

(7) e^{ln10} تساوي:

(a) 10 (b) e^{10} (c) 0 (d) $\frac{1}{10}$

(8) حل المعادلة $ln(2m+3) = 8$ هو:

(a) $e^8 - 3$ (b) $\frac{e^8}{2} - 3$ (c) $\frac{e^8 - 3}{2}$ (d) $e^4 - 3$

(9) حل المعادلة $ln4r^2 = 3$ هو:

(a) $\frac{e^{\frac{3}{2}}}{2}$ (b) $\frac{e^{\frac{3}{2}}}{2}, \frac{-e^{\frac{3}{2}}}{2}$ (c) $\frac{e^{-\frac{3}{2}}}{2}$ (d) $e^{\frac{3}{2}}, -e^{\frac{3}{2}}$

(10) حل المعادلة $e^{2x} = 10$ هو:

(a) $x = \frac{ln\,10}{2}$ (b) $ln\,5$ (c) $\frac{5}{e}$ (d) $2\,ln\,10$

(11) $\{e^2\}$ هي مجموعة حل المعادلة:

(a) $lnx = 2$ (b) $lnx^2 = 2$ (c) $lnx^2 = 4$ (d) $lnx = 4$

(12) حل المعادلة $e^{x+1} = 13$ هو:

(a) $x = ln\,13 + 1$ (b) $x = ln\,13 - 1$ (c) $x = ln\,13$ (d) $x = ln\,12$

(13) حل المعادلة $ln(x-2)^2 = 6$ هو:

(a) $2 + e^3$ (b) $2 - e^3$ (c) $2 \pm e^3$ (d) $2 \pm e^6$

(14) حل المعادلة $e^{\frac{x}{2}+1} + 3 = 8$ هو:

(a) $x = 2\,ln\,5 - 1$ (b) $x = 2\,ln\,5 - 2$ (c) $x = 2\,ln\,4$ (d) $x = \frac{1}{2}(ln\,5 - 1)$

KuwaitMath.com

اختبار الوحدة الرابعة

في التمارين (4–1)، ارسم كلًّا من الدوال التالية:

(1) $y = -3(0.25)^x$ **(2)** $f(x) = \frac{1}{2}(6)^{-x}$ **(3)** $y = 0.1(10)^{x-2}$ **(4)** $f(x) = (2)^{x+1} + 3$

(5) الكتابة: وضّح كيف يمكنك تحديد ما إذا كانت الدالة الأسية تمثّل نموًّا أسيًّا أم تضاؤلًا أسيًّا. اعرض مثالًا لكل منها.

في التمارين (8–6)، اكتب معادلة تصف الدالة الأسية التي على الصورة: $y = ab^x$، بمعلومية الأساس المعطى والتي يمر رسمها البياني بالنقطة المعطاة.

(6) الأساس 3، النقطة $(2, 3)$

(7) الأساس 4، النقطة $(-1, 1)$

(8) الأساس 2، النقطة $(0, 3)$

(9) علم الزلازل: كم مرة يكون زلزال قوته 5.2 بمقياس ريختر أقوى من زلزال قوته 3 علمًا بأن الطاقة المنطلقة تساوي $E \times 30^x$، x هي درجة قوة الزلزال بمقياس ريختر.

(10) ارسم بيان الدالة $y = \log_8 x$ ثم استخدمها كدالة مرجع لرسم بيان كل من الدوال اللوغاريتمية التالية:

(a) $y = \log_8(x + 2)$ **(b)** $y = \log_8 x - 1$ **(c)** $y = \log_8(x + 2) - 1$

في التمارين (14–11)، أوجد مفكوك كل من اللوغاريتمات التالية:

(11) $\log_4 r^2 n \ , (r > 0 \ , \ n > 0)$ **(12)** $\log_2 (x + 1)^2 \ , (x > -1)$

(13) $\log_7 \frac{a}{b} \ , (a > 0 \ , \ b > 0)$ **(14)** $\log 3x^3 y^2 \ , (x > 0 \ , \ y > 0)$

في التمارين (18–15)، استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد ناتج كل من المقادير التالية:

(15) $\log_3 27 - \log_3 9$ **(16)** $2\log_2 64 - \log_2 2$

(17) $-\log_4 \frac{1}{16} - \log_4 64$ **(18)** $2\log 5 + \log 40$

(19) سؤال مفتوح: اكتب مقدارين لوغاريتميين. أي منهما له القيمة الأكبر؟ اشرح.

في التمارين (30–20)، حل كلًّا من المعادلات التالية:

(20) $x^{\frac{3}{4}} = 81$ **(21)** $3k^{\frac{3}{2}} = 24$ **(22)** $\log 4x = 3$

(23) $2\log x = -4$ **(24)** $\log 2x + \log x = 1$ **(25)** $\log x - \log(x - 1) = 1$

KuwaitMath.com

(26) $\log_x(3x+4)=2$ **(27)** $ln(x-2)+ln\ x=1$ **(28)** $ln(x+1)+ln(x-1)=4$

(29) $ln\,x+ln(2x-1)=7$ **(30)** $3\,ln\,x-ln\,2=4$

(31) لنفترض أن ثمن آلة تستخدم في صناعة سلعة ما لها عامل تضاؤل سنوي قيمته 0.75. إذا بلغ ثمن الآلة 10 000 دينار بعد 5 سنوات من الاستخدام، فما قيمتها الأساسية؟

(32) **الدراسات الاجتماعية:** عام 1991 كان عدد سكان كاراتشي في باكستان حوالى 8 ملايين نسمة، وكان عامل النمو السنوي في هذا الوقت 1.039.

(a) ما عدد السكان المتوقع في عام 2010؟

(b) ما معدل الزيادة السنوية المتوقع؟

(c) متى يصل عدد السكان إلى 10 ملايين نسمة؟

(33) **سكان العالم:** بلغ عدد سكان العالم في عام 1994 حوالى 5.63 بلايين نسمة، ويقال إنه ينمو بمعدل 2% سنويًّا.

(a) اكتب معادلة أسية لوصف هذا النمو.

(b) صف نمو عدد السكان كل 35 سنة.

(c) صف نمو عدد السكان في نصف المدة الزمنية المحددة في الجزء (b).

KuwaitMath.com

تمارين إثرائية

(1) أوجد مجموعة حل المعادلة: $(e^x - 1)e^x = 3e^x - 3$

(2) أوجد مجموعة حل المعادلة: $3(e^x)^2 - e^x - 4 = 0$

(3) أوجد مجموعة حل المعادلة: $ln\sqrt{3x-1} + ln\sqrt{x-1} = ln\sqrt{x-2}$

(4) هل صحيح أن: $a^{ln\,b} = b^{ln\,a},\ a > 0,\ b > 0$؟

(5) أثبت أن: $\frac{4e^{2x}}{e^{2x}+3} = \frac{4}{1+3e^{-2x}}$

(6) حلّ المعادلة: $e^x + 2e^{-x} = 3$

(7) أوجد مجموعة حل المعادلة: $2(ln\,x)^2 - 5\,ln\,x - 3 = 0$

(8) **الصناعات:** لنفرض أنك تعمل في مصنع للمكانس الكهربائية، وقد ساهمت في صنع تصميم مستخدمًا مكونات جديدة تعمل على تخفيض شدة صوت طراز معين من $10^{-4}\,w/m^2$ إلى $6.31 \times 10^{-6}\,w/m^2$، ما النسبة المئوية لانخفاض الصوت الذي حققه استخدام هذه المكونات الجديدة؟

(استخدم $I_0 = 10^{-12}\,w/m^2$).

(9) إذا كان كل من الدالتين: $y = b^x, y = \log_b x$، معكوس للأخرى، استخدم الخاصية $\log_b b^x = x$ وبرهان الخطوة الواحدة لخاصية ناتج الضرب في اللوغاريتمات، لمساعدتك على برهنة كل من خاصية القسمة وخاصية القوى.

(10) باعتبار المعادلة: $a^x = b$

(a) حلّ المعادلة باستخدام اللوغاريتم للأساس 10

(b) حلّ المعادلة باستخدام اللوغاريتم للأساس a

(c) استخدم نتائجك في الفقرتين (a), (b) لتحقق قاعدة تغيير الأساس.

(11) **الهندسة:** تأخذ بعض قطرات المطر شكلًا كرويًّا. لنفرض أن نصف قطر قطرة مطر متساقطة يتناقص بمقدار 0.02 mm نتيجة التبخر، إذا كان حجم قطرة المطر الآن $7\,mm^3$، فما طول نصف القطر الأصلي لقطرة المطر؟

(12) تصف الدالة: $f(x) = 1.31\,e^{0.548x}$، التزايد الأسي لعدد مستخدمي الشبكة الدولية للمعلومات (الإنترنت) بالمليون من عام 1990 إلى عام 1995. لنفرض أن x تمثّل الزمن بالسنوات منذ عام 1990.

(a) ما أول عام كان عدد مستخدمي الإنترنت فيه 13 مليون مستخدم؟

(b) ما المدة المستغرقة لتضاعف عدد مستخدمي الإنترنت منذ عام 1990؟

(c) حلّ المعادلة: $f(x) = 1.31\,e^{0.548x}$ في x

(d) **الكتابة:** اشرح كيف يمكنك استخدام معادلتك من الفقرة (c) لتتحقق من إجاباتك عن الفقرتين (a), (b). ما الناتج الذي حصلت عليه؟

KuwaitMath.com