

المتطابقات المثلثية

The Trigonometric Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-9)، استخدم المتطابقات الأساسية في تبسيط كل من المقادير التالية:

(1) $\csc x - \csc x \cos^2 x$

(2) $\frac{\tan^2 x}{\sec^2 x}$

(3) $\frac{1 + \tan^2 x}{\csc^2 x}$

(4) $\cos x \csc x + \sin x \sec x$

(5) $\frac{\sin x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x}$

(6) $\frac{1 + \tan x}{1 + \cot x}$

(7) $\frac{1}{1 - \sin x} + \frac{1}{1 + \sin x}$

(8) $\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

(9) $\frac{\tan x \csc x}{\cos^2 x}$

في التمارين (10-16)، بسّط المقادير إلى 1 أو -1

(10) $\frac{1}{\cot^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}$

(11) $\frac{1}{\csc^2 x} + \frac{1}{\sec^2 x}$

(12) $\frac{\tan x \times \cos x}{\sin x}$

(13) $\cot(-x) \tan(-x)$

(14) $\sec^2(-x) - \tan^2 x$

(15) $\sin^2(-x) + \cos^2(-x)$

(16) $\frac{\sec^2 x - \tan^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

في التمارين (17-19)، استخدم التحليل إلى عوامل في كل مما يلي:

(17) $\sin^2 c + \sin^2 c \tan^2 c$

(18) $1 - 2 \sin x + (1 - \cos^2 x)$

(19) $\cos x - 2 \sin^2 x + 1$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الصورة المبسّطة للمقدار: $E(x) = \frac{\sin^2 x + \tan^2 x + \cos^2 x}{\sec x}$ هي: $E(x) = \sec x$ (a) (b)

(2) الصورة المبسّطة للمقدار: $E(x) = (\sec^2 x + \csc^2 x) - (\tan^2 x + \cot^2 x)$ هي: $E(x) = 2$ (a) (b)

(3) المقدار: $E(x) = \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x}$ هو: $E(x) = 1 + \sin x$ (a) (b)

(4) المقدار: $E(x) = \frac{(\cos x + \sin x)^2 - 2 \sin x \cos x}{\cos^2 x}$ هو: $E(x) = \sec^2 x$ (a) (b)

(5) المقدار: $E(x) = \csc x - \cos x \cot x$ هو: $E(x) = \cos x$ (a) (b)

إثبات صحة متطابقات مثلثية

Confirming Trigonometric Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-14)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

$$(1) (\cos x)(\tan x + \sin x \cot x) = \sin x + \cos^2 x$$

$$(2) (\sin x)(\cot x + \cos x \tan x) = \cos x + \sin^2 x$$

$$(3) (1 - \tan x)^2 = \sec^2 x - 2 \tan x$$

$$(4) \tan x + \cot x = \sec x \csc x$$

$$(5) \tan x + \cot x + 2 = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cos x}$$

$$(6) \frac{1}{1 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x} = 2 \csc^2 x$$

$$(7) \frac{\tan^2 x}{\sec x + 1} = \frac{1 - \cos x}{\cos x}$$

$$(8) \cot^2 x - \cos^2 x = \cos^2 x \cot^2 x$$

$$(9) \cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$(10) \frac{\tan x}{\sec x - 1} = \frac{\sec x + 1}{\tan x}$$

$$(11) \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{2 \sin^2 x - 1}{1 + 2 \sin x \cos x}$$

$$(12) \frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2(1 + \cos x)}{\sin x}$$

$$(13) \sin^2 x \cos^3 x = (\sin^2 x - \sin^4 x)(\cos x)$$

$$(14) \sin^3 x \cos^3 x = (\sin^3 x - \sin^5 x)(\cos x)$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-4)، ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

- (a) (b)

$$(1) 3 \sin x = \sin(3x) \text{ تمثل متطابقة.}$$

(a) (b)

(2) $\cos 2x = \sin^2 x - \cos^2 x$ تمثل متطابقة.

(a) (b)

(3) $\sec x - \cos x = \tan x \sin x$ تمثل متطابقة.

(a) (b)

(4) الصورة المبسطة للمقدار: $\sqrt{\frac{\csc x}{\sin^3 x} - \frac{\cot x}{\sin^3 x}}$ هي: $\frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin x}$

في التمارين (5-10)، ظلّ رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(5) المقدار: $\frac{\sec^2 x - 1}{\sin x}$ متطابق مع المقدار:

(a) $\sin x \tan x$

(b) $\sin x \sec^2 x$

(c) $\cos x \sec^2 x$

(d) $\sin x \csc x$

(6) المقدار: $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2$ متطابق مع المقدار:

(a) $-4 \sin x \cos x$

(b) 2

(c) -2

(d) $4 \sin x \cos x$

(7) المقدار: $\frac{1}{\tan x} + \tan x$ متطابق مع المقدار:

(a) $\sec x \csc x$

(b) $\sec x \sin x$

(c) $\sec x \cos x$

(d) $\sin x \cos x$

(8) المقدار: $\tan^2 x - \sin^2 x$ متطابق مع المقدار:

(a) $\tan^2 x$

(b) $\cot^2 x$

(c) $\tan^2 x \sin^2 x$

(d) $\cot^2 x \cos^2 x$

(9) المقدار: $\frac{\sin x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x} + 1$ متطابق مع المقدار:

(a) 1

(b) -1

(c) 2

(d) -2

(10) المقدار: $\frac{\cos^2 x - 1}{\cos x}$ متطابق مع المقدار:

(a) $-\tan x \sin x$

(b) $-\tan x$

(c) $\tan x \sin x$

(d) $\tan x$

حل معادلات مثلثية

Solving Trigonometric Equations

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-7)، حل كلاً من المعادلات التالية:

(1) $\sin x = \frac{-1}{2}$

(2) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $2 \cos x = -1$

(4) $\sqrt{3} \tan a = 1$

(5) $2 \cos x \sin x - \cos x = 0$

(6) $\tan^2 x = 3$

(7) $4 \cos^2 x - 4 \cos x + 1 = 0$

في التمارين (8-10)، أوجد جميع حلول المعادلة على الفترة $[0, 2\pi)$

(8) $\sin 2x = 1$

(9) $2 \cos 3x = 1$

(10) $\tan 2x = 1$

في التمارين (11-12)، حلّ المعادلات التالية:

(11) $\sin^2 x - 2 \sin x = 0$

(12) $2 \sin^2 x + 3 \sin x = 2$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة $\sin x = \frac{1}{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(2) حل المعادلة $\cos x = \sqrt{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(3) حل المعادلة $\tan x = -\sqrt{3}$ هو: $x = +\frac{5\pi}{6} + k\pi$ ، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(4) حلول المعادلة $\sin x \tan^2 x = \sin x$ على الفترة $(0, \pi)$ هي: $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{4}$. (a) (b)

(5) حلول المعادلة $2 \sin^2 x = 1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي: $\frac{5\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{4}$. (a) (b)

في التمارين (11-6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان $\sin x + \cos x = 0$ فإن x تقع في الربع:

- (a) الأول (b) الأول أو الثالث
(c) الثالث (d) الثاني أو الرابع

(7) حلول المعادلة: $2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

- (a) $-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ (b) $\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$
(c) $\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$ (d) $\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

(8) حلول المعادلة: $2\sqrt{2} \sin x \cos x - \sqrt{2} \cos x - 2 \sin x = -1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

- (a) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}$
(c) $\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}$

(9) عدد حلول المعادلة: $2 \cos 4x = 1$ حيث $x \in [0, \frac{\pi}{8})$ هو:

- (a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 3

(10) حلول المعادلة: $3 \tan 2y = \sqrt{3}$ هي:

- (a) $\frac{\pi}{6} + k\pi$ ، حيث k عدد صحيح.
(b) $\frac{\pi}{12} + 2k\pi$ ، حيث k عدد صحيح.
(c) $\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ ، حيث k عدد صحيح.
(d) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ، حيث k عدد صحيح.

(11) مجموعة حل المعادلة $3 \tan(3x) = \sqrt{3}$ على الفترة $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ هي:

- (a) $\{\frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}\}$
(b) $\{\frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\}$
(c) $\{\frac{-5\pi}{18}, \frac{\pi}{18}\}$
(d) $\{\frac{-5\pi}{18}, \frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\}$

متطابقات المجموع والفرق

Sum and Difference Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-3)، استخدم متطابقات المجموع والفرق في إيجاد القيمة الدقيقة.

(1) $\sin 15^\circ$

(2) $\tan 135^\circ$

(3) $\cos 75^\circ$

(4) إذا كان $\sin \gamma = \frac{4}{5}$ ، $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$

$\cos \beta = \frac{-8}{17}$ ، $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

(a) أو جد: $\sin(\beta + \gamma)$

(b) أو جد: $\cos(\beta - \gamma)$

(c) أو جد: $\tan(\gamma + \beta)$

في التمارين (5-10)، اكتب المقدار على صورة جيب أو جيب التمام أو ظل الزاوية.

(5) $\sin 42^\circ \cos 17^\circ - \cos 42^\circ \sin 17^\circ$

(6) $\sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{5}$

(7) $\frac{\tan 19^\circ + \tan 47^\circ}{1 - \tan 19^\circ \tan 47^\circ}$

(8) $\cos \frac{\pi}{7} \cos x + \sin \frac{\pi}{7} \sin x$

(9) $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x$

(10) $\frac{\tan 2y + \tan 3x}{1 - \tan 2y \tan 3x}$

(11) اختصر: $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(a) (b)

$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ (1)

(a) (b)

$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ (2)

(3) $\cos(h + \frac{\pi}{2}) = -\cos h$

(a) (b)

(4) $\tan^2 \frac{\pi}{12} + \tan^2 \frac{5\pi}{12} = 14$

(a) (b)

في التمارين (11-5)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) $\tan \frac{7\pi}{12}$ تساوي:

(a) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}}$

(b) $\sqrt{2} + \sqrt{6}$

(c) $2 + \sqrt{3}$

(d) $-2 - \sqrt{3}$

(6) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$

(b) $\frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$

(d) $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x$

(7) $\tan\left(h + \frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

(a) $1 + \tan h$

(b) $\frac{1 - \tan h}{1 + \tan h}$

(c) $\frac{1 + \tan h}{1 - \tan h}$

(d) $1 - \tan h$

(8) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

(a) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$

(b) $\sqrt{2}(\cos x + \sin x)$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos x + \sin x)$

(d) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)$

(9) $\cos 94^\circ \cos 18^\circ + \sin 94^\circ \sin 18^\circ$ تساوي:

(a) $\cos 112^\circ$

(b) $\cos 76^\circ$

(c) $\sin 112^\circ$

(d) $\sin 76^\circ$

(10) $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{3}$ تساوي:

(a) $\cos \frac{4\pi}{21}$

(b) $\sin \frac{4\pi}{21}$

(c) $\cos \frac{10\pi}{21}$

(d) $\sin \frac{10\pi}{21}$

(11) $\frac{\tan \frac{\pi}{5} - \tan \frac{\pi}{3}}{1 + \tan \frac{\pi}{5} \tan \frac{\pi}{3}}$ تساوي:

(a) $\tan \frac{2\pi}{15}$

(b) $\tan \frac{8\pi}{15}$

(c) $\tan\left(-\frac{8\pi}{15}\right)$

(d) $\tan\left(-\frac{2\pi}{15}\right)$

متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

Double–Angle and Half–Angle Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-4)، اكتب المقدار بدلالة $\sin x$ أو $\cos x$.

- (1) $\sin 2x + \cos x$
- (2) $\sin 2x + \cos 2x$
- (3) $\cos 3x$
- (4) $\cos 4x$

في التمارين (5-7)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

- (5) $2 \csc 2x = \csc^2 x \tan x$
- (6) $\sin 3x = (\sin x)(4 \cos^2 x - 1)$
- (7) $\cos 4x = 1 - 8 \sin^2 x \cos^2 x$

في التمارين (8-10)، استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد كل من:

- (8) $\sin 15^\circ$
- (9) $\tan 195^\circ$
- (10) $\cos 75^\circ$

(11) اختصر كلاً من التعابير التالية:

(a) $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$

(b) $\frac{1 - \cos x}{\sin x}$

(c) $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

(12) إذا كانت $\sin x = -\frac{12}{13}$ ، $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ فأوجد $\sin \frac{x}{2}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x$

(a) (b)

(2) $\sin 4x = -4 \cos x \sin^3 x + 4 \cos^3 x \sin x$

(a) (b)

(3) $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$

(a) (b)

(4) $\cos 6x = 2 \cos^2 3x - 1$

(a) (b)

(5) $\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$

(a) (b)

في التمارين (6-8)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) $2 \cos^2 \frac{x}{2}$ تساوي:

(a) $\frac{1 + \cos x}{2}$

(b) $1 + \cos x$

(c) $1 + \cos 2x$

(d) $\frac{1 - \cos 2x}{2}$

(7) $\cos \frac{\pi}{8}$ تساوي:

(a) $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$

(b) $\sqrt{2} - 1$

(c) $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$

(d) $\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}$

(8) إذا كان: $\cos \theta = \frac{-7}{25}$, $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ فإن $\cos \frac{\theta}{2}$ يساوي:

(a) $\frac{2}{5}$

(b) $\frac{-2}{5}$

(c) $\frac{-3}{5}$

(d) $\frac{3}{5}$

اختبار الوحدة التاسعة

في التمارين (1-3)، حوّل المقادير إلى \sin و \cos . اكتب إجابتك على صورة كسر واحد.

- (1) $\tan x + \cot x$
- (2) $\sin x \cot x - \cos x \tan x$
- (3) $\frac{\sec y}{\cos y} - \frac{\sin y}{\csc y \cos^2 y}$

في التمارين (4-8)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

- (4) $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} = 2 \sec x$
- (5) $\frac{1 - 3 \cos x - 4 \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - 4 \cos x}{1 - \cos x}$
- (6) $\sqrt{1 - \cos x} \times \sqrt{1 + \cos x} = \sin x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$
- (7) $\frac{2 \sin x \times \cos x}{1 + \cos^2 x - \sin^2 x} = \tan x$
- (8) $\frac{1 + 2 \sin x \times \cos x}{\sin x + \cos x} = \sin x + \cos x$

في التمارين (9-13)، استخدم متطابقات المجموع والفرق في إيجاد القيمة الدقيقة.

- (9) $\tan \frac{5\pi}{12}$
- (10) $\sin \frac{-\pi}{12}$
- (11) $\cos(x - y) - \cos(x + y)$
- (12) $\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
- (13) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

(14) (a) أوجد ناتج: $\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}$

(b) أوجد القيمة الصحيحة لكل مما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة:

- (1) $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$
- (2) $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

(15) أوجد قيمة $\sin 2x$ ، إذا كان $\sin x - \cos x = \frac{1}{5}$

(16) أوجد: $\cos 2x$ ، إذا كان $\cos x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

تمارين إثرائية

في التمرينين (1-2)، حدّد ما إذا كانت الدالتان r ، f متساويتين. إذا كانتا كذلك فاذكر سببًا مقنعًا. وإذا لم تكونا كذلك، فأوجد قيمة x التي تجعل $r(x) \neq f(x)$.

(1) $f(x) = \sqrt{x^2}$ ، $r(x) = x$

(2) $f(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ ، $r(x) = \sin x$

في التمارين (3-5)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

(3) $\frac{\tan x}{1 - \cot x} + \frac{\cot x}{1 - \tan x} = 1 + \sec x \csc x$

(4) $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} + \frac{1}{2 \cos^2 x - 1} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$

(5) $\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}} - \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x} = 0$ ، $0 < x < \frac{\pi}{2}$

(6) لتكن: $\tan x = \frac{\sin y - \cos y}{\sin y + \cos y}$

(a) أثبت أن: $2 \cos^2 x = (\sin y + \cos y)^2$

(b) أثبت أن: $2 \sin^2 x = (\sin y - \cos y)^2$

في التمارين (7-10)، حلّ كلّاً من المعادلات التالية:

(7) $\cos x = \cos \frac{\pi}{4}$

(8) $\sin^2 x - \frac{1}{2} = 0$

(9) $2 \sin^2 x + 3 \sin x - 5 = 0$

(10) $4 \cos^2 x - 2(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cos x + \sqrt{6} = 0$

(11) أوجد حلول المعادلة التالية: $2 \sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0$ على الفترة $[0, 2\pi)$

(12) حلّ المعادلة: $\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0$

(13) استخدم متطابقات المجموع والفرق لإيجاد القيمة الدقيقة لـ: $\tan \frac{11\pi}{12}$

(14) أوجد قيمة $\cos(x+y) \times \cos(x-y)$ بدلالة $\cos x$ ، $\cos y$

(15) (a) أثبت أن: $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(b) مستندًا إلى النتيجة في (a)،

أثبت أن: $\cos x - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin x = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(x + 30^\circ)$

(16) أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x} = 4 \cos 2x$

(17) (a) أوجد قيمة $\cos(x+y+z)$ بدلالة: $\cos x$ ، $\cos y$ ، $\cos z$ ، $\sin x$ ، $\sin y$ ، $\sin z$

(b) استنتج قيمة $\cos 3x$ بدلالة $\cos x$ فقط (مساعدة: $x = y = z$).

(18) أوجد قيمة x إذا كان $\cos x = 1 + \sqrt{3} \sin x$

(19) حلّ المعادلة: $2 \cos x \tan x + \tan x - 2 \cos x - 1 = 0$

(20) حلّ المعادلة: $2 \cos^2 2x + \cos 2x = 1$

(21) لتكن: $y(x) = \frac{\sin^2 x + \sin x \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$ ، حيث $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ، $x \neq \frac{\pi}{4}$

أوجد قيمة $\tan x$ إذا كانت $y = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

(مساعدة: اكتب $y(x)$ بدلالة $\tan x$)

(22) (a) أثبت أن: $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

(b) اختصر: $\frac{1}{\tan x} - \frac{2}{\tan 2x}$

(23) أثبت صحة المتطابقة: $1 - \sin x + \cos x = 2 \cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right)$

(24) (a) أوجد قيمة $\cos 2x$ ، إذا كان $\cos x = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ ، $0 < x < \pi$

(b) أوجد قيمة $\cos 4x$

(c) أوجد قيمة x

(25) أوجد قيمة $\sin 18^\circ$ ، $\sin 9^\circ$ ، $\sin 36^\circ$ ، $\cos 18^\circ$ ، إذا كان $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$

(26) مثلث متطابق الضلعين فيه $AB = AC$ ، $m(\widehat{A}) = 2\alpha$ ، حيث $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

M منتصف \overline{BC} ، D الإسقاط العمودي للنقطة C على \overline{AB}

(a) أوجد BM باستخدام $\sin \alpha$ وبيّن أن $a = 2b \sin \alpha$

(b) استنتج $m(\widehat{DCB})$

(c) أوجد CD باستخدام $\cos \alpha$

(d) استنتج أن مساحة المثلث ABC هي $b^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

(e) أثبت أن مساحة ΔABC هي $\frac{1}{2} b^2 \sin(2\alpha)$

(f) أثبت أن: $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

