تمرَّنْ
5–1

التكامل غير المحدد

Indefinite Integral

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أثبت أن: $F(x) = (3x+2)^5 + 7$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = 15(3x+2)^4$.

في التمرينين (3–2)، تحقّق من أن F هي مشتقّة عكسيّة للدالّة f حيث:

(2) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 10$

$f(x) = x^2 - 2x + 1$

(3) $F(x) = \sqrt{1+x^4}$

$f(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$

في التمارين (14–4)، احسب التكامل.

(4) $\int (x^5 - 6x + 3)dx$

(5) $\int (3 - 6x^2)dx$

(6) $\int \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$

(7) $\int \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)dx$

(8) $\int \frac{x^4 - 27x}{x^2 - 3x}dx$

(9) $\int (x-2)(2x+3)dx$

(10) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$

(11) $\int \frac{x-\sqrt{x}}{x}dx$

(12) $\int \frac{5+2x}{\sqrt{x}}dx$

(13) $\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

(14) $\int (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^3})dx$

(15) إذا كان $F(x) = \int (3x^2 - 5)dx$ وكان $F(2) = 3$، فأوجد $F(x)$.

(16) إذا كان $F(x) = \int (9x^2 - 4x + 5)dx$ وكان $F(-1) = 0$، فأوجد $F(x)$.

(17) هامش الدخل. افرض أنّ هامش الدخل عندما يباع x ألف وحدة هو:

$\frac{dr}{dx} = 3x^2 - 6x + 12$ (دينارًا لكل وحدة)

أوجد دالة الدخل $r(x)$ إذا كان $r(0) = 0$

(18) ألقيت كرة إلى الأعلى بسرعة ابتدائية 16 m/s من سطح برج ارتفاعه 115 m عن سطح الأرض.

(a) في أي زمن t سوف تصل الكرة إلى أعلى ارتفاع؟

(b) في أي زمن t سوف تصل الكرة إلى الأرض؟ (علمًا أن عجلة جاذبية الأرض $a(t) = 9.8\ \text{m/s}^2$).

KuwaitMath.com

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $F(x) = x^{-3}$ هي مشتقة العكسية للدالة: $f(x) = -3x^{-4}$ (a) (b)

(2) $\int (-x^{-3} + x - 1)dx = \frac{1}{2}x^{-2} + \frac{1}{2}x^2 - x + C$ (a) (b)

(3) $\int \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{x} + C$ (a) (b)

(4) إذا كانت: $f'(x) = \frac{1}{x^2} + x$, $f(2) = 1$، فإن $f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ (a) (b)

(5) إذا كانت: $F(x) = \int (3x^2 - 12x + 15)dx$, $F(0) = 400$، فإن $F(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 400$ (a) (b)

في التمارين (12–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\int \frac{4}{3}\sqrt[3]{t^2}\,dt =$

(a) $\frac{3t^{\frac{5}{3}}}{5} + C$ (b) $\frac{4t^{\frac{5}{3}}}{5} + C$

(c) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{t^5} + C$ (d) $4\sqrt[3]{t^5} + C$

(7) $\int \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx =$

(a) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x}(x^{\frac{4}{3}} + 5) + C$ (b) $\frac{3}{5}x^{\frac{2}{3}}(x^{-\frac{2}{3}} + 5) + C$

(c) $\frac{5}{3}\sqrt[3]{x}(x^{\frac{4}{3}} + 5) + C$ (d) $\frac{5}{3}x^{\frac{4}{3}}(x^{\frac{2}{3}} + 5) + C$

(8) إذا كان: $x = -1$, $y = -5$, $\frac{dy}{dx} = x^{-\frac{2}{3}}$ فإنّ y تساوي:

(a) $-\frac{x^2}{3} - \frac{14}{3}$ (b) $3x^{\frac{1}{3}} + 2$

(c) $3x^{\frac{1}{3}} - 2$ (d) $3x^{\frac{1}{3}}$

(9) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x}}dx =$

(a) $\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + C$ (b) $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} + C$

(c) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} + C$ (d) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{1}{2}} + C$

(10) $\int \sqrt{x}(2 + x^2)dx =$

(a) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$ (b) $\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$

(c) $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$ (d) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$

KuwaitMath.com

(11) $\int \frac{2+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}dx =$

a $x^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$

b $4x^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$

c $x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}} + C$

d $4x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}} + C$

(12) $\int \left(\frac{x^2-4x+4}{x-2}+2\right)^2 dx =$

a $x^2 + C$

b $2x + C$

c $\frac{x^2}{2} + 2x + C$

d $\frac{1}{3}x^3 + C$

KuwaitMath.com

تمرَّنْ
5–2

التكامل بالتعويض

Integration by Substitution

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (12–1)، استخدم التعويض المناسب لإيجاد التكامل.

(1) $\int (2x-3)\sqrt{x^2-3x+5}\,dx$

(2) $\int (4x-5)^8\,dx$

(3) $\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\,dx$

(4) $\int (x^2-1)\sqrt{x^3-3x+5}\,dx$

(5) $\int (x^2-2x)(x^3-3x^2+4)^5\,dx$

(6) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{4+x^3}}dx$

(7) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}$

(8) $\int x(3x+2)^6\,dx$

(9) $\int \frac{x}{\sqrt{1+3x}}dx$

(10) $\int x^2\sqrt{x-1}\,dx$

(11) $\int x^3\sqrt{x^2-2}\,dx$

(12) $\int x^5\sqrt[3]{x^3+1}\,dx$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int x(x^2-1)^{10}dx = \frac{1}{18}(x^2-1)^9 + C$ (a) (b)

(2) $\int (x+1)\sqrt[3]{x^2+2x+3}\,dx = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^4} + C$ (a) (b)

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2}} = 2\sqrt{3x-2} + C$ (a) (b)

(4) $\int (2x^2-1)(2x^3-3x+4)^5dx = \frac{1}{18}(2x^3-3x+4)^6 + C$ (a) (b)

(5) $\int x\sqrt[3]{x+2}\,dx = \frac{3}{7}(x+2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{2}(x+2)^{\frac{4}{3}} + C$ (a) (b)

في التمارين (12–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\int x(x^2+2)^7dx =$

(a) $\frac{1}{16}(x^2+2)^8 + C$

(b) $\frac{1}{4}(x^2+2)^8 + C$

(c) $\frac{1}{12}(x^2+2)^6 + C$

(d) $\frac{1}{3}(x^2+2)^6 + C$

KuwaitMath.com

(7) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}dx =$

a $\frac{1}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}}+C$ **b** $\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+C$

c $\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}}+C$ **d** $\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}+C$

(8) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}} =$

a $\frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{2}{3}}+C$ **b** $\frac{2}{3}(3x+1)^{\frac{2}{3}}+C$

c $2(3x+1)^{\frac{2}{3}}+C$ **d** $\frac{1}{2}(3x+1)^{\frac{2}{3}}+C$

(9) $\int \frac{(2+\sqrt{x})^{12}}{\sqrt{x}}dx =$

a $\frac{13}{2}(2+\sqrt{x})^{13}+C$ **b** $\frac{2}{13}(2+\sqrt{x})^{13}+C$

c $\frac{1}{26}(2+\sqrt{x})^{13}+C$ **d** $\frac{1}{22}(2+\sqrt{x})^{11}+C$

(10) $\int \frac{(x+1)}{\sqrt[3]{x^2+2x+3}}dx =$

a $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2}+C$ **b** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2}+C$

c $3\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2}+C$ **d** $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2+2x+3}+C$

(11) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx =$

a $\frac{3}{2}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+C$ **b** $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-\frac{1}{2}\sqrt{x+1}+C$

c $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+C$ **d** $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}+2\sqrt{x+1}+C$

(12) إذا $F(x)=\int (x+1)(2x^2+4x-1)dx$ ، $F(-2)=\frac{9}{8}$، فإن: $F(x)$ تساوي:

a $\frac{1}{8}(2x^2+4x-1)^2+\frac{5}{4}$ **b** $\frac{1}{8}(2x^2+4x-1)^2+1$

c $\frac{1}{4}(2x^2+4x-1)^2+1$ **d** $4(2x^2+4x-1)^2-1$

KuwaitMath.com

تمرَّنْ
5–3

تكامل الدوال المثلثية

Integral of Trigonometric Functions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (14–1)، أوجد قيمة التكامل.

(1) $\int (\sec x \tan x + \sin x)\,dx$

(2) $\int (\csc x \cot x + \sec^2 x)\,dx$

(3) $\int \left(\frac{-1}{x^2} + 5\sin 3x\right)dx$

(4) $\int \sin^4 x \cos x\,dx$

(5) $\int \cos^5 x \sin x\,dx$

(6) $\int x^2 \sin(x^3+1)\,dx$

(7) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$

(8) $\int \sec^3 x \tan x\,dx$

(9) $\int \csc^3 x \cot x\,dx$

(10) $\int \sqrt{\cot x}\csc^2 x\,dx$

(11) $\int \sqrt{\tan x}\sec^2 x\,dx$

(12) $\int \sqrt{1+\sin x}\cos x\,dx$

(13) $\int \frac{dx}{(\sin^2 x)\sqrt{1+\cot x}}$

(14) $\int \frac{dx}{(\cos^2 x)\sqrt{1+\tan x}}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$ (a) (b)

(2) $\int \csc^2 x\,dx = \cot x + C$ (a) (b)

(3) $\left(F'(x) = \sec^2 x\ ,\ F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1\right) \Longrightarrow F(x) = \tan x + 2$ (a) (b)

(4) $(F'(x) = \cos x + \sin x\ ,\ F(\pi) = 1) \Longrightarrow F(x) = \sin x - \cos x$ (a) (b)

(5) $(F'(x) = \sec(x)\tan(x)\ ,\ F(0) = 4) \Longrightarrow F(x) = \sec x + 3$ (a) (b)

في التمارين (12–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) الصورة العامة للمشتقة العكسية للدالة f حيث $f(x) = 8 + \csc x \cot x$ هي:

(a) $F(x) = 8x + \csc x + C$

(b) $F(x) = 8x - \cot x + C$

(c) $F(x) = 8x - \csc x + C$

(d) $F(x) = 8x + \cot x + C$

KuwaitMath.com

(7) $\int \csc(5x)\cot(5x)\,dx =$

(a) $\frac{1}{5}\csc(5x)+C$ (b) $\csc(5x)+C$

(c) $\frac{1}{5}\cot(5x)+C$ (d) $-\frac{1}{5}\csc(5x)+C$

(8) $\int \sqrt[3]{\cot x}\,\csc^2 x\,dx =$

(a) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\cot x)^4}+C$ (b) $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\cot x)^4}+C$

(c) $-\frac{3}{4}\sqrt[4]{(\cot x)^3}+C$ (d) $3\sqrt[3]{(\cot x)^4}+C$

(9) إذاكانت $y(\theta=0)=-3$, $\frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$ فإنّ y تساوي:

(a) $-\cos\theta$ (b) $2-\cos\theta$

(c) $-2-\cos\theta$ (d) $4-\cos\theta$

(10) $\int \sec^5 x\tan x\,dx =$

(a) $\frac{5}{3}\sec^5 x+C$ (b) $\frac{1}{5}\sec^6 x+C$

(c) $\frac{1}{5}\sec^5 x+C$ (d) $-\frac{5}{3}\sec^5 x+C$

(11) $\int \frac{\csc^2 x}{\sqrt[3]{2+\cot x}}dx =$

(a) $\frac{3}{2}(2+\cot x)^{\frac{2}{3}}+C$ (b) $-\frac{3}{2}(2+\cot x)^{\frac{2}{3}}+C$

(c) $-2\sqrt{2+\cot x}+C$ (d) $\frac{4}{3}(2+\cot x)^{\frac{4}{3}}+C$

(12) $\int \frac{\sin(4x)}{\cos^5(4x)}dx =$

(a) $-\frac{1}{16}\cos^{-4}(4x)+C$ (b) $\frac{1}{16}\cos^{-4}(4x)+C$

(c) $-\cos^{-4}(4x)+C$ (d) $\cos^{-4}(4x)+C$

KuwaitMath.com

تمرَّنْ
5–4

الدوالّ الأسيّة واللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Functions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (15–1)، أوجد $\frac{dy}{dx}$.

(1) $y = 7^x$ **(2)** $y = 5^{\sqrt{x+1}}$ **(3)** $y = 8^{\tan x}$

(4) $y = 2e^x$ **(5)** $y = e^{-x}$ **(6)** $y = 3e^{\frac{x}{5}}$

(7) $y = e^{x^2-x+1}$ **(8)** $y = e^{2\sqrt{x}+3}$ **(9)** $y = e^{\csc x}$

(10) $y = e^{x^4-5}$ **(11)** $y = \ln(x^3)$ **(12)** $y = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$

(13) $y = \ln(x+2)$ **(14)** $y = \ln(2-\cos x)$ **(15)** $y = \ln(\ln x)$

في التمارين (27–16)، أوجد التكامل غير المحدد في كل مما يلي:

(16) $\int e^{0.1x}\,dx$ **(17)** $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\,dx$

(18) $\int (2x+1)e^{x^2+x+4}\,dx$ **(19)** $\int (x^2-2)e^{x^3-6x}\,dx$

(20) $\int \left(e^{0.5x} + \frac{0.5}{x}\right)dx$ **(21)** $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

(22) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}\,dx$ **(23)** $\int \frac{x^3-x}{x^4-2x^2}\,dx$

(24) $\int \frac{x^2+1}{x}\,dx$ **(25)** $\int \frac{2}{3x+1}\,dx$

(26) $\int (2\tan x - \csc^2 x)\,dx$ **(27)** $\int (\cot x + x^2)\,dx$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (6–1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت: $y = 4^{x-2}$ فإن: $\frac{dy}{dx} = 4x$ (a) (b)

(2) إذا كانت: $f(x) = e^{x^2}$ فإن: $f'(x) = 2xe^{2x}$ (a) (b)

(3) إذا كانت: $g(x) = \ln(2x+2)$ فإن: $g'(x) = \frac{1}{2x+2}$ (a) (b)

(4) إذا كانت: $y = x\ln x - x$ فإن: $y' = \ln x$ (a) (b)

(5) $\int \frac{1}{2x}\,dx = \frac{\ln x}{2} + C$ (a) (b)

(6) $\int \frac{1}{3x+1}\,dx = \ln(3x+1) + C$ (a) (b)

KuwaitMath.com

في التمارين (14–7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) إذا كانت $y = e^{-5x}$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) e^{-5x} (b) $-e^{-5x}$

(c) $-5e^{-5x}$ (d) $5e^{-5x}$

(8) إذا كانت $y = x^2e^x - x\,e^x$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $e^x(x^2 + x - 1)$ (b) $e^x(x^2 - x)$

(c) $2x\,e^x - e^x$ (d) $e^x(x^2 + 2x + 1)$

(9) إذا كانت $y = (\ln x)^2$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $\frac{\ln x}{x}$ (b) $\frac{2\ln x}{x}$

(c) $\frac{x\ln x}{2}$ (d) $\frac{2\ln^2 x}{x}$

(10) إذا كانت $y = \ln\left(\frac{10}{x}\right)$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $-\frac{10}{x}$ (b) $\frac{10}{x}$

(c) $\frac{1}{x}$ (d) $-\frac{1}{x}$

(11) إذا كانت $y = \ln(x^2 + 1)$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $\frac{x}{x^2 + 1}$ (b) $\frac{2}{x^2 + 1}$

(c) $\frac{2x}{x^2 + 1}$ (d) $-\frac{2x}{x^2 + 1}$

(12) $\int \frac{2x}{x^2 + 1}\,dx =$

(a) $2\ln(x^2 + 1) + C$ (b) $\ln(x^2 + 1) + C$

(c) $\frac{x^2}{x^2 + 1} + C$ (d) $\frac{x}{\frac{1}{3}x^2 + 1} + C$

(13) $\int \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,dx =$

(a) $\frac{e^x - e^{-x}}{2} + C$ (b) $\frac{e^x + e^{-x}}{2} + C$

(c) $\frac{e^{-x} - e^x}{2} + C$ (d) $\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} + C$

(14) $\int \frac{e^x}{e^x - 4}\,dx =$

(a) $-\frac{1}{2}(e^x - 4) + C$ (b) $\ln|e^x - 4| + C$

(c) $-\ln|e^x - 4| + C$ (d) $\frac{1}{2}\ln|e^x - 4| + C$

KuwaitMath.com

تمرَّنْ
5–5

التكامل بالتجزيء

Integration by Parts

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (14–1)، أوجد التكامل.

(1) $\int x\cos(3x)\,dx$

(2) $\int x\sin(5x)\,dx$

(3) $\int x\,e^{x-3}\,dx$

(4) $\int (x-5)e^{x-5}\,dx$

(5) $\int \ln\sqrt[4]{x}\,dx$

(6) $\int \ln(2x-1)\,dx$

(7) $\int (2x+1)\ln(x+1)\,dx$

(8) $\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$

(9) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

(10) $\int x^2\ln x^2\,dx$

(11) $\int (x^2-2x)\cos x\,dx$

(12) $\int (x^2+3x)\sin x\,dx$

(13) $\int x^2\,e^{x+1}\,dx$

(14) $\int x^2\,e^{2x-3}\,dx$

(15) $\int (\ln(x))^2\,dx$

(16) $\int e^{2x}\sin x\,dx$

(17) $\int \sin(\ln x)\,dx$

KuwaitMath.com

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int x\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos 2x + C$ (a) (b)

(2) $\int x\sin(\pi x)\,dx = -\frac{x}{\pi}\cos(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x) + C$ (a) (b)

(3) $\int x\,e^{6x}\,dx = \frac{1}{6}x\,e^{6x} - \frac{1}{36}e^{6x} + C$ (a) (b)

(4) $\int x\,e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} + e^{-x} + C$ (a) (b)

(5) $\int x\sec^2 x\,dx = x\tan x - \ln|\sec x| + C$ (a) (b)

في التمارين (11–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\int (2x+1)\sin x\,dx$

(a) $(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$

(b) $-(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$

(c) $-(x+1)\cos x - 2\sin x + C$

(d) $(2x+1)\cos x - \sin x + C$

(7) $\int x^2 \ln(x)\,dx =$

(a) $\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{3} + C$

(b) $\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$

(c) $\frac{1}{3}x^3\ln(x) + \frac{x^3}{9} + C$

(d) $-\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$

في التمرينين (9–8)، إذا كان $\int (2x+1)\ln x\,dx = uv - \int vdu$ فإن:

(8) $uv =$

(a) $(2x+1)\ln x$

(b) $2x\ln x$

(c) $\frac{2x+1}{2}\ln x$

(d) $x(x+1)\ln x$

(9) $\int vdu =$

(a) $\frac{1}{2}x\ln x + C$

(b) $\frac{1}{2}x^2 + x + C$

(c) $(2x+1)\ln x + C$

(d) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$

في التمرينين (11–10)، إذا كان $\int (3x-1)e^{3x+2}\,dx = uv - \int vdu$ فإن:

(10) $uv =$

(a) $(3x-1)e^{3x+2}$

(b) $\frac{1}{3}(3x-1)e^{3x+2}$

(c) $(3x-1)e^{x+2}$

(d) $\frac{1}{3}(x-1)e^{3x+2}$

(11) $\int vdu =$

(a) $-\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$

(b) $-e^{3x+2} + C$

(c) $\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$

(d) $e^{3x+2} + C$

KuwaitMath.com

تمرَّنْ
5–6

التكامل باستخدام الكسور الجزئية

Integration Using Partial Fractions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4–1)، أوجد الكسور الجزئيّة لكل دالة f مما يلي ثم أوجد $\int f(x)dx$.

(1) $f(x) = \dfrac{2}{(x-5)(x-3)}$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x}$

(3) $f(x) = \dfrac{-x+10}{x^2+x-12}$

(4) $f(x) = \dfrac{12}{x^3+2x^2-3x}$

في التمارين (11–5)، أوجد:

(5) $\int \dfrac{x+17}{2x^2+5x-3}\,dx$

(6) $\int \dfrac{-6x+25}{x^3-6x^2+9x}\,dx$

(7) $\int \dfrac{3x^2-4x+3}{x^3-3x^2}\,dx$

(8) $\int \dfrac{x^2+3x+2}{(x-3)^2}\,dx$

(9) $\int \dfrac{2x^2+x+3}{x^2-1}\,dx$

(10) $\int \dfrac{x^3-2}{x^2+x}\,dx$

(11) $\int \dfrac{x^4-2x^3+x^2+2x-1}{x^2-2x+1}dx$

(12) لنأخذ: $f(x) = \dfrac{2x^4-5x^3-7x^2+32x-28}{x^3-2x^2-4x+8}$

(a) اكتب $f(x)$ على صورة $q(x)+\dfrac{r(x)}{h(x)}$، حيث درجة $r(x)$ أصغر من درجة $h(x)$.

(b) أوجد الكسور الجزئيّة للحدودية النسبية $\dfrac{r(x)}{h(x)}$.

(c) أوجد $\int f(x)dx$.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int \dfrac{4dx}{(x+3)(x+7)} = \ln|x+3|+\ln|x+7|+C$ (a) (b)

(2) $\int \dfrac{-6dx}{x^2+3x} = -2\ln|x+3|+2\ln|x|+C$ (a) (b)

(3) الدالة: $f(x) = \dfrac{4x-11}{2x^2-x-3}$ على صورة كسور جزئية هي: $f(x) = \dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{2x-3}$ (a) (b)

(4) للحدودية النسبية: $\dfrac{x^2-x+2}{x^3-2x^2+x}$ ثلاثة كسور جزئية. (a) (b)

KuwaitMath.com

في التمارين (10–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) $\int \frac{6}{x^2-9}dx =$

(a) $\ln|x+3|-\ln|x-3|+C$ (b) $\ln(x-3)-\ln(x+3)+C$

(c) $\ln|x+3|+\ln|x-3|+C$ (d) $\ln|x-3|-\ln|x+3|+C$

(6) $\int \frac{7x-7}{x^2-3x-10}dx =$

(a) $4\ln|x+2|+3\ln|x-5|+C$ (b) $3\ln|x+2|+2\ln|x-5|+C$

(c) $4\ln|x-5|+3\ln|x+2|+C$ (d) $4\ln|x-5|-3\ln|x+2|+C$

(7) الدالة النسبية: $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$ على صورة كسور جزئية هي $f(x)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}$ (b) $\frac{1}{2(x-2)}+\frac{1}{2(x+2)}$

(c) $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$ (d) $\frac{1}{2(x-2)}-\frac{1}{2(x+2)}$

(8) $\int \frac{2x^2-4x+3}{x^2-1}dx =$

(a) $2+2\ln|x-1|-\frac{9}{2}\ln|x+1|+C$ (b) $\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{9}{2}\ln|x+1|+C$

(c) $2x+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{9}{2}\ln|x+1|+C$ (d) $x+\frac{1}{2}\ln|x-1|-9\ln|x+1|+C$

(9) $\int \frac{3x^2+2x}{x^2-4}dx =$

(a) $4\ln|x-2|-2\ln|x+2|+C$ (b) $3x+2\ln|x-2|-2\ln|x-2|+C$

(c) $3x+4\ln|x-2|-2\ln|x+2|+C$ (d) $3x+4\ln|x-2|+2\ln|x+2|+C$

(10) $\int \frac{x^3+2}{x^2-x}dx =$

(a) $\frac{x^2}{2}+3\ln|x-1|+2\ln|x|+C$ (b) $\frac{x^2}{2}-x+3\ln|x-1|+2\ln|x|+C$

(c) $\frac{x^2}{2}-3\ln|x-1|+2\ln|x|+C$ (d) $\frac{x^2}{2}+x+3\ln|x-1|-2\ln|x|+C$

KuwaitMath.com

تمرَّنْ
5–7

التكامل المحدد

Definite Integral

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (7–1)، أوجد:

(1) $\int_{-1}^{1} 3x(x-4)\,dx$ **(2)** $\int_{0}^{2} (x+1)^2\,dx$ **(3)** $\int_{0}^{4} \frac{x^2-1}{x+1}\,dx$

(4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos 3x\,dx$ **(5)** $\int_{1}^{4} \frac{8-x^4}{2x^2}\,dx$ **(6)** $\int_{0}^{1} x\sqrt{x}\,dx$

(7) $\int_{1}^{2} \left(3e^x + \frac{5}{x}\right) dx$

في التمارين (10–8)، أوجد:

(8) $\int_{-1}^{3} |x-2|\,dx$ **(9)** $\int_{-1}^{1} |x^3|\,dx$ **(10)** $\int_{-2}^{3} (x|x|+3)\,dx$

في التمارين (13–11)، دون حساب قيمة التكامل أثبت أن:

(11) $\int_{-4}^{2} (x^2+2x-8)\,dx \le 0$ **(12)** $\int_{-1}^{0} (x^3-5x^2-6x)\,dx \ge 0$

(13) $\int_{0}^{1} (x^2-3x+7)\,dx \ge \int_{0}^{1} (4x-5)\,dx$

في التمارين (15–14)، استعن برسم بيان الدوال لإيجاد:

(14) $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx$ **(15)** $\int_{-5}^{0} -\sqrt{25-x^2}\,dx$

في التمارين (19–16)، استخدم التعويض المناسب لحساب التكامل.

(16) $\int_{0}^{3} \frac{dx}{(1+x)^2}$ **(17)** $\int_{e}^{6} \frac{dx}{x\ln x}$

(18) $\int_{1}^{e} \frac{\ln^6 x}{x}dx$ **(19)** $\int_{-1}^{3} \frac{x\,dx}{x^2+1}$

في التمارين (23–20)، أوجد:

(20) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$ **(21)** $\int_{0}^{\pi} x\cos 3x\,dx$

(22) $\int_{1}^{3} x^3\ln x\,dx$ **(23)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx$

في التمارين (26–24)، أوجد:

(24) $\int_{-1}^{1} \frac{4}{x^2-4}\,dx$ **(25)** $\int_{-2}^{0} \frac{5x-1}{x^2+2x-3}\,dx$ **(26)** $\int_{1}^{3} \frac{x^2}{(x+1)^2}\,dx$

KuwaitMath.com

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (7–1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}$ (a) (b)

(2) $\int_{-3}^{-2} (|x| + x + 5)dx = -2$ (a) (b)

(3) $\int_{-1}^{1} (|x|)^3 dx = -\frac{1}{2}$ (a) (b)

(4) $\int_0^1 12(3x-2)^3 dx = -15$ (a) (b)

(5) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,dx = 1$ (a) (b)

(6) $\int_2^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx - \int_5^2 f(x)dx = 0$ (a) (b)

(7) $\int_2^4 f(x)dx + \int_4^2 g(x)dx = 0$ (a) (b)

في التمارين (12–8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(8) إذا كان: $\int_3^{-1} g(x)dx = 2$, $\int_{-1}^{3} f(x)dx = 4$ فإن $\int_{-1}^{3} (2f(x) + 3g(x) + 1)dx$ تساوي:

(a) 18 (b) -6 (c) 6 (d) 12

(9) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{2}\,dx =$

(a) 2 (b) $2\sqrt{2}$ (c) 4 (d) 8

(10) $\int_{-1}^{1} (1 - |x|)dx =$

(a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

(11) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)dx =$

(a) 4 (b) 2 (c) 0 (d) π

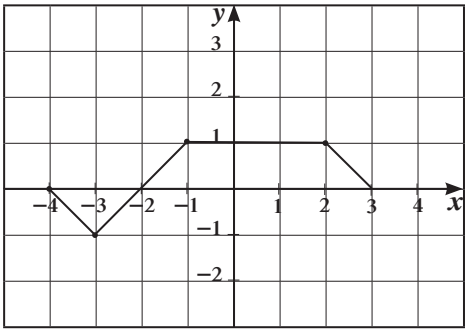
(12) لتكن: $f(x) = x^2 + 5$ فإن: $\int_{-a}^{a} f(x)dx > 0$ لكل قيم a تنتمي إلى:

(a) $\mathbb{R} - \mathbb{R}^-$ (b) $\mathbb{R} - \mathbb{R}^+$ (c) $\mathbb{R}^-$ (d) $\mathbb{R}^+$

KuwaitMath.com

في التمارين (15–13)، لديك قائمتان، اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين من القائمة (1) لتحصل على عبارة صحيحة.

إذا كان بيان الدالة f كما في الشكل المقابل، فإن:



(1)	(2)
(13) $\int_{-4}^{3} f(x)\,dx$ يساوي:	(a) 6
(14) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات هي:	(b) 5
(15) $\int_{-4}^{-1} \left(f(x)+\frac{1}{6}\right)dx$ يساوي:	(c) 0
	(d) 3

KuwaitMath.com

اختبار الوحدة الخامسة

(1) أثبت أن: $F(x)=\frac{1}{3}\sqrt{(2x^2+6x+5)^3}+8$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x)=(2x+3)\sqrt{2x^2+6x+5}$.

(2) إذا كان: $F(x)=\int(3x^2-2x)dx$ وكان: $F(2)=6$، فأوجد $F(x)$.

في التمارين (3–20)، أوجد:

(3) $\int(x+2)\sqrt{x^2+4x+7}\,dx$

(4) $\int\frac{2x-1}{(x^2-x+7)^5}\,dx$

(5) $\int x^2\sqrt[3]{x-3}\,dx$

(6) $\int x^3\sqrt{x^2-8}\,dx$

(7) $\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$

(8) $\int\frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx$

(9) $\int\sin x\sqrt[3]{\cos^2 x}\,dx$

(10) $\int\sec^7 x\tan x\,dx$

(11) $\int\left(e^{3x}+\frac{4}{2x-1}\right)dx$

(12) $\int\frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\,dx$

(13) $\int\frac{x^2-4x}{x^3-6x^2+1}\,dx$

(14) $\int\frac{e^{2x}+x}{e^{2x}+x^2+3}\,dx$

(15) $\int(x^2-4)\cos x\,dx$

(16) $\int\ln(3x+2)\,dx$

(17) $\int 3x\,e^{2x+1}\,dx$

(18) $\int x^2e^{2x-1}\,dx$

(19) $\int\frac{x^2-3x}{x^2-3x-28}\,dx$

(20) $\int\frac{x^4+2x^2+6x}{x^3+4x^2+4x}\,dx$

في التمارين (21–26)، أوجد:

(21) $\int_1^e\frac{1}{x}\,dx$

(22) $\int_{-1}^1 2x\sin(1-x^2)\,dx$

(23) $\int_0^5|2x-5|\,dx$

(24) $\int_{-6}^0-\sqrt{36-x^2}\,dx$

(25) $\int_3^5\frac{x^2-3}{x^2-3x+2}\,dx$

(26) $\int_1^3\frac{x^3-2x^2+2}{x^3+6x^2+9x}\,dx$

في التمارين (27–29)، دون حساب قيمة التكامل أثبت أن:

(27) $\int_2^5(-x^2+7x+8)\,dx\geq 0$

(28) $\int_{-4}^{-2}(x^2+7x+10)\,dx\leq 0$

(29) $\int_{-5}^{-4}(x^2+13x+9)dx\leq\int_{-5}^{-4}(5x-6)dx$

KuwaitMath.com

تمارين إثرائية

في التمرينين (2–1)، ارسم بيانيًّا الدالة على الفترة المعطاة، ثمّ أوجد:

(a) تكامل الدالّة على الفترة.

(b) المساحة للمنطقة بين المنحنى ومحور السينات.

(1) $y = -x^2 + 5x - 4 \ , \ [0,2]$

(2) $y = x^2 - 4x \ , \ [0,5]$

في التمرينين (4–3)، أوجد قيمة y.

(3) $\frac{dy}{dx} = x^2 \ln x$

(4) $\frac{dy}{d\theta} = \csc\theta \cot\theta$

(5) أوجد المشتقة العكسية لِـ y باستخدام القيمة الابتدائية: $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - 6x \ , \ y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 4$

(6) تكلفة الطباعة. يتكلّف طبع 25 نسخة من إحدى الأوراق 50 دينارًا، ولطبع x نسخة تعطى التكلفة الحديّة بالعلاقة $\frac{dc}{dx} = \frac{2}{\sqrt{x}}$ دينارًا كويتيًّا لكلّ نسخة.
أوجد التكلفة الكلّيّة لطبع 2 500 نسخة.

في التمرينين (8–7)، أوجد التكامل:

(7) $\int x^3 e^x \, dx$

(8) $\int x^3 \ln x \, dx$

(9) استخدم الكسور الجزئية لتوجد التكاملات التالية:

(a) $\int \frac{x-2}{2x^2 - 5x + 3} \, dx$

(b) $\int \frac{x^2 - 9}{(2x+1)(x^2 + 10x + 25)} \, dx$

(c) $\int \frac{x^4 + 3x^2 - 7}{(x-1)(x^2 + 5x - 6)} \, dx$

في التمرينين (11–10) استعن برسم بيان الدوال لايجاد:

(10) $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2} \, dx$

(11) $\int_{-4}^{4} \left(\frac{1}{\pi} - x\right)\sqrt{16 - x^2} \, dx$

في التمارين (14–12)، أوجد التكامل المحدد.

(12) $\int_0^2 \frac{2x+3}{x^2 + 5x + 4} \, dx$

(13) $\int_1^3 \frac{x^3 - 6x^2 + 3}{x^3 - 6x^2 + 9x} \, dx$

(14) $\int_3^5 x^3 \sqrt{x^2 - 4} \, dx$

في التمرينين (16–15)، دون حساب قيمة التكامل أثبت أن:

(15) $\int_0^2 (-x^2 + 9x - 18) \, dx \leq 0$

(16) $\int_{-1}^{2} (x^2 + 13x + 15) \, dx \geq \int_{-1}^{2} (3x - 6) \, dx$

KuwaitMath.com