تمرّنْ
2–1

معدلات التغير وخطوط المماس

Rates of Change and Tangent Lines

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4–1)، أوجد ميل المماس في كلّ مما يلي عند النقاط المبينة:

(1) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $x = 2$

(2) $f(x) = x^2 - 4x$, $x = 1$

(3) $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$, $x = 2$

(4) $f(x) = 4 - x^2$, $x = 1$

(5) لتكن الدالة f: $f(x) = \frac{2}{x}$

(a) أوجد ميل المماس لمنحنى f عند $x = a$ حيث $a \neq 0$.

(b) تفكير ناقد. صف ماذا يحدث للمماس عند $x = a$ عندما تتغيّر a.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) ميل مماس منحنى الدالة f عند النقطة $(c \ , \ f(c))$ هو $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ (a) (b)

(2) السرعة المتوسطة لجسيم متحرك على خط مستقيم هي: $\overline{v} = \frac{d(t_1+h)-d(t_1)}{h}$ (a) (b)

(3) ميل مماس منحنى الدالة f: $f(x) = x^2$ عند $x = -2$ هو 4 (a) (b)

(4) ميل مماس منحنى الدالة f: $f(x) = |x|$ عند $x = -2$ هو 2 (a) (b)

(5) يكون مماس منحنى الدالة f: $f(x) = 4$ عند النقطة $(4 \ , \ -1)$ موازيًا لمحور السينات. (a) (b)

KuwaitMath.com

في التمرينين (7–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) ميل مماس منحنى الدالة f : $f(x) = 9 - x^2$ عند $x = 2$ هو:

(a) -5 (b) -4 (c) 4 (d) 5

(7) ليكن منحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 4x + 3$ فإن النقطة التي يكون مماس المنحنى عندها أفقيًّا هي:

(a) $(3\ ,\ 0)$ (b) $(1\ ,\ 0)$ (c) $(2\ ,\ -1)$ (d) $(-1\ ,\ 2)$

KuwaitMath.com

تمرّنْ
2–2

المشتقة

The Derivative

المجموعة A تمارين مقالية

(1) استخدم التعريف: $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ لإيجاد مشتقّة الدالّة f: $f(x)=\frac{3}{x}$ عند $x=3$

(2) استخدم التعريف: $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ لإيجاد مشتقّة الدالّة f: $f(x)=2x^3$ عند $x=1$

(3) بيّن أن الدالة f لها مشتقة لجهة اليمين ومشتقة لجهة اليسار عند $x=1$، لكن ليس لها مشتقة عند $x=1$

$$f(x)=\begin{cases}x^3 & , \quad x\le 1\\ x & , \quad x>1\end{cases}$$

(4) لتكن f: $f(x)=\begin{cases}x^2+2x & : \quad x\le 1\\ 4x-1 & : \quad x>1\end{cases}$

ابحث قابلية اشتقاق الدالة f عند $x=1$.

(5) لتكن الدالة f: $f(x)=|x-3|$.

بيّن أن الدالة f متصلة عند $x=3$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عندها.

(6) لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases}0 & : \quad x<0\\ 1 & : \quad x=0\\ 2 & : \quad x>0\end{cases}$.

بيّن أن الدالّة f غير قابلة للاشتقاق عند $x=0$.

(7) لتكن الدالة g: $g(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & , \quad x\le 0\\ 2x+1 & , \quad x>0\end{cases}$. أوجد $g'(0)$.

(8) لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases}x^2 & : \quad x\le 2\\ 4x-4 & : \quad x>2\end{cases}$. أوجد $f'(2)$.

(9) لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases}x^3 & , \quad x\le 1\\ 3x+k & , \quad x>1\end{cases}$. قابلة للاشتقاق عند $x=1$، فأوجد قيمة k.

(10) لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases}3-x & x<1\\ ax^2+bx & x\ge 1\end{cases}$ حيث a, b ثابتان.

(a) إذا كانت f متصلة لكل قيم x، فما العلاقة بين a وb؟

(b) أوجد القيم الوحيدة لكل من a, b التي تجعل f متصلة وقابلة للاشتقاق.

KuwaitMath.com

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (6–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

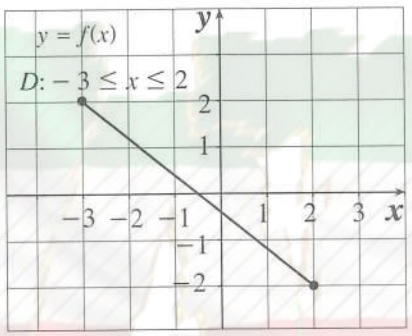
(1) إذا كانت f : $f(x) = 3x - 12$ فإن $f'(x) = 3$. (a) (b)

(2) الدالة f : $f(x) = x|x|$ غير قابلة للاشتقاق $\forall x \in \mathbb{R}$. (a) (b)

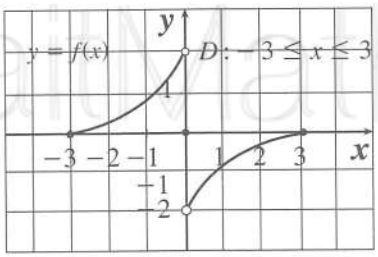
(3) إن الدالة f : $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4x - 5}$ غير قابلة للاشتقاق عندما x تساوي -1 فقط. (a) (b)

(4) الدالة f : $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & : \quad x < 4 \\ x^2 - 9 & : \quad x > 4 \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $x = 4$. (a) (b)

(5) إن الدالة f ذات الرسم البياني أدناه قابلة للاشتقاق على الفترة $[-3\ ,\ 2]$. (a) (b)



(6) إن الدالة f ذات الرسم البياني أدناه هي متصلة على الفترة $[-3\ ,\ 3]$ ولكن غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$ (a) (b)



في التمارين (12–7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) إن الدالة f : $f(x) = x + \sqrt{x^2} + 2$ ليست قابلة للاشتقاق عند $x = 0$ والسبب هو:

(a) ناب

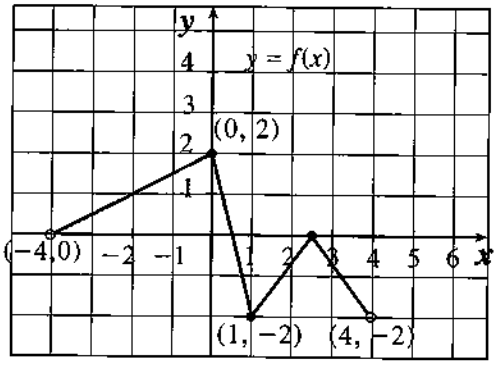
(b) ركن

(c) مماس عمودي

(d) غير متصلة

KuwaitMath.com

(8) تكون الدالة f ذات الرسم البياني أدناه غير قابلة للاشتقاق عند كل ... $= x$



(a) $0\ ,\ 1\ ,\ 2\frac{1}{2}$

(b) $-2\ ,\ +2$

(c) $-4\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 4$

(d) $1\ ,\ 4$

(9) الدالة f القابلة للاشتقاق عند $x = 3$ فيما يلي هي:

(a) $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$

(b) $\sqrt{3-x}$

(c) $\begin{cases} 3x-1 & : \quad x \leqslant 3 \\ 1 & : \quad x > 3 \end{cases}$

(d) $\sqrt[3]{x+2}$

(10) إذا كانت $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ فإن مجال f' هو:

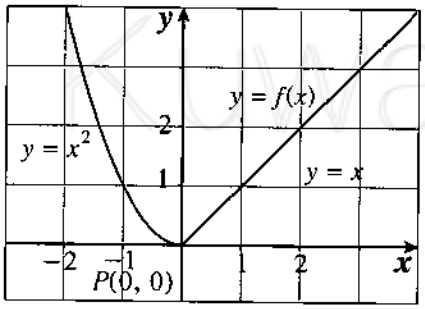
(a) $\mathbb{R} - \{-2\ ,\ 2\}$

(b) $\mathbb{R} - \{-2\}$

(c) $\mathbb{R} - \{2\}$

(d) $\mathbb{R} - (-2\ ,\ 2)$

(11) في الشكل المقابل، عند النقطة P :



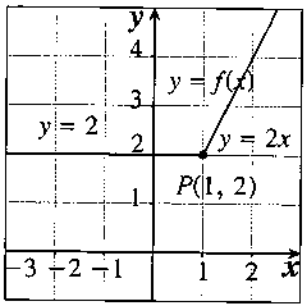
(a) المشتقة جهة اليسار موجبة.

(b) المشتقة جهة اليمين سالبة.

(c) الدالة قابلة للإشتقاق.

(d) ليس أيّ مما سبق.

(12) في الشكل المقابل، عند النقطة P :



(a) $f'_+(1) = 1$

(b) $f'_-(1) = 0$

(c) $f'_-(1) = 2$

(d) f قابلة للاشتقاق

KuwaitMath.com

تمرَّنْ
2–3

قواعد الاشتقاق

Rules of Differentiation

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4–1)، أوجد: $\frac{dy}{dx}$

(1) $y = \frac{x^3}{3} - x$

(2) $y = 2x + 1$

(3) $y = x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 15$

(4) $y = 4x^{-2} - 8x + 1$

في التمرينين (6–5)، أوجد $f'(x)$:

(5) $f(x) = (x^2 - 5x + 6)(x^3 + 2x^2 + 1)$

(6) $f(x) = (2x^5 + 4)(5 - x^2)$

(7) لتكن $y = \frac{x^2 + 3}{x}$، أوجد $\frac{dy}{dx}$:

(a) باستخدام قاعدة القسمة.

(b) بقسمة حدود البسط على المقام أوّلًا ثم إجراء الاشتقاق.

في التمرينين (9–8)، أوجد $\frac{dy}{dx}$:

(8) $y = \frac{x^2}{1 - x^3}$

(9) $y = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$

(10) بفرض أنّ u , v دالّتان في x وقابلتان للاشتقاق عند $x = 0$، وأنّ

$u(0) = 5$, $u'(0) = -3$, $v(0) = -1$, $v'(0) = 2$

أوجد قيم المشتقّات التالية عند $x = 0$

(a) $(uv)'$ **(b)** $\left(\frac{u}{v}\right)'$ **(c)** $\left(\frac{v}{u}\right)'$ **(d)** $(7v - 2u)'$

(11) أوجد معادلة المماس للمنحنى $y = x^3 + x$ عند النقطة $(2 , 1)$.

(12) أوجد الأجزاء المقطوعة من محوري السينات والصادات بواسطة مماس منحنى الدالة $y = x^3$ عند النقطة $(-2 , -8)$.

(13) أوجد معادلة المماس ومعادلة العمودي (الناظم) لمنحنى الدالة $y = \frac{8}{4 + x^2}$ عند النقطة $(2 , 1)$.

(14) لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x - \frac{4}{x} & : \quad x \geq 2 \\ x^2 - 4 & : \quad x < 2 \end{cases}$. أوجد $f'(x)$ وعيّن مجالها.

KuwaitMath.com

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت $y = -x^2 + 3$ فإن $\frac{dy}{dx} = -2$ (a) (b)

(2) إذا كانت $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{3} + x$ فإن $\frac{dy}{dx} = x^2 + \frac{2}{3}x + 1$ (a) (b)

(3) إذا كانت $y = \frac{2x+5}{3x-2}$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{12x+11}{(3x-2)^2}$ (a) (b)

(4) إذا كانت $y = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^3}$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x^4}$ (a) (b)

في التمارين (16–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) إذا كانت $y = 1 - x + x^2 - x^3$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $-1 + 2x - 3x^2$ (b) $2 - 3x$ (c) $-6x + 2$ (d) $1 - x$

(6) إذا كانت $f(x) = 5x^3 - 3x^5$ فإن $f'(x)$ تساوي:

(a) $20x + 60x^3$ (b) $15x^2 - 15x^4$ (c) $30x - 30x^4$ (d) $30x - 60x^3$

(7) إذا كانت $y = \frac{x^2 + 5x - 1}{x^2}$ فإن $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1}$ تساوي:

(a) $\frac{-7}{2}$ (b) -3 (c) 3 (d) $\frac{7}{2}$

(8) ميل مماس منحنى $y = x^2 + 5x$ عند $x = 3$ يساوي:

(a) 24 (b) $-\frac{5}{2}$ (c) 11 (d) 8

(9) ميل مماس منحنى الدالة f: $f(x) = \frac{2}{x}$ عند $x = -2$ هو:

(a) -1 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

(10) ميل مماس منحنى الدالة f: $f(x) = \frac{-1}{x-1}$ عند $x = 0$ هو:

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) 2

(11) للدالة f: $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ مماس رأسي معادلته:

(a) $x = 0$ (b) $y = 0$ (c) $x = 1$ (d) $y = 1$

KuwaitMath.com

(12) ميل الناظم لمنحنى الدالة $y = x^3 - 3x + 1$ عند النقطة $(3\ ,\ 2)$ هي:

(a) 9 (b) 3 (c) $-\frac{1}{3}$ (d) $\frac{-1}{9}$

(13) النقاط على منحنى الدالة $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ التي يكون المماس عندها موازيًا لمحور السينات هي:

(a) $(-1\ ,\ 27)$ (b) $(2\ ,\ 0)$

(c) $(2,0)\ ,\ (-1,27)$ (d) $(-1,27)\ ,\ (0,20)$

(14) لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & : \ x \geqslant 1 \\ 4x - 1 & : \ x < 1 \end{cases}$ فإن مجال f' هو:

(a) $\{1\}$ (b) $\mathbb{R} - \{1\}$

(c) $[1\ ,\ \infty)$ (d) $\mathbb{R}$

(15) إن معادلة المماس لمنحنى الدالة f : $f(x) = 2x^2 - 13x + 2$ عند $x = 3$ هي:

(a) $y = x - 16$ (b) $y = -x + 16$

(c) $y = -x - 13$ (d) $y = -x - 16$

(16) إذا كانت $f(2) = 3$ ، $f'(2) = 5$ عند النقطة P على منحنى الدالة f فإن:

(a) معادلة خط المماس: $y = 5x + 7$

(b) معادلة الخط العمودي (الناظم): $y = -\frac{1}{5}x + 7$

(c) معادلة الخط العمودي (الناظم): $y = -\frac{1}{5}x + \frac{17}{5}$

(d) معادلة خط المماس: $y = 5x + 3$

KuwaitMath.com

تمرّنْ
2–4

مشتقّات الدوال المثلّثيّة

Derivatives of Trigonometric Functions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4–1)، أوجد $\frac{dy}{dx}$

(1) $y = 2\sin x - \tan x$

(2) $y = 4 - x^2 \sin x$

(3) $y = \frac{\cot x}{1 + \cot x}$

(4) $y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

(5) أوجد مشتقة الدالة $y = \frac{\tan x}{x}$ عند $x = \frac{\pi}{4}$.

(6) أثبت أن منحنى كل من الدالتين $y = \frac{1}{\cos x}$, $y = \cos x$ له مماس أفقيّ عند $x = 0$

(7) لتكن: $y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sin x} + \cot x$، أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة عند $P\left(\frac{\pi}{4} , 4\right)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت $y = 1 + x - \cos x$ فإن $\frac{dy}{dx} = 1 + \sin x$ (a) (b)

(2) إذا كانت $y = \frac{4}{\cos x}$ فإن $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{\cos^2 x}$ (a) (b)

(3) ميل المماس لمنحنى الدالة $y = \sin x + 3$ عند $x = \pi$ هو 1 (a) (b)

(4) إن منحنى الدالة $y = \tan x$ ومنحنى الدالة $y = \cot x$ ليست لهما مماسات أفقية. (a) (b)

في التمارين (9–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) إذا كانت $y = \frac{1}{x} + 5\sin x$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $-\frac{1}{x^2} - 5\cos x$

(b) $\frac{1}{x^2} + 5\cos x$

(c) $-\frac{1}{x^2} + 5\cos x$

(d) $\frac{1}{x^2} - 5\cos x$

(6) إذا كانت $f(x) = 3x + x\tan x$ فإن $f'(0)$ يساوي:

(a) -3 (b) 0 (c) 1 (d) 3

KuwaitMath.com

(7) إذا كانت $y = \frac{x}{1+\cos x}$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $-\frac{x\sin x}{(1+\cos x)^2}$

(b) $\frac{1+\cos x - x\sin x}{(1+\cos x)^2}$

(c) $\frac{1+\cos x - x\sin x}{1+\cos^2 x}$

(d) $\frac{1+\cos x + x\sin x}{(1+\cos x)^2}$

(8) معادلة المستقيم العمودي على المماس لبيان الدالة $y = 2\cos x$ عند النقطة $\left(\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\right)$ هي:

(a) $y = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$

(b) $y = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$

(c) $y = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$

(d) $y = -\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$

(9) إذا كانت $y = \frac{1}{\sin x}$ فإن y' تساوي:

(a) $\cot x \cdot \csc x$

(b) $\cos x$

(c) $-\cot x \cdot \csc x$

(d) $-\cos x$

KuwaitMath.com

تمرّنْ
2–5

قاعدة السلسلة

Chain Rule

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (3–1)، أوجد $(f \circ g)'(x)$.

(1) $f(x) = 2x + 1$ ، $g(x) = 3x^2$

(2) $f(x) = \frac{x-1}{x}$ ، $g(x) = x^2 + 1$

(3) $f(x) = 5x^2 - 1$ ، $g(x) = x^{15}$

في التمارين (6–4)، أوجد $(f \circ g)'$ عند القيم المعطاة لـ x.

(4) $f(x) = x^5 + 1$ ، $g(x) = \sqrt{x}$ ، $x = 1$

(5) $f(x) = x + \frac{1}{\cos^2 x}$ ، $g(x) = \pi x$ ، $x = \frac{1}{4}$

(6) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ ، $g(x) = 10x^2 + x + 1$ ، $x = 0$

(7) أوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

(a) $y = \cos u$ ، $u = 6x + 2$

(b) $y = 5u^3 + 4$ ، $u = 3x^2 + 1$

(8) أوجد $\frac{ds}{dt}$، حيث $s = \sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{4}t\right)$

في التمارين (15–9)، أوجد $\frac{dy}{dx}$.

(9) $y = \tan(2x - x^3)$

(10) $y = \sin(3x + 1)$

(11) $y = (\tan x + \sec x)^2$

(12) $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$

(13) $y = (1 - 6x)^{\frac{2}{3}}$

(14) $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(15) $y = \sin^2(3x - 2)$

في التمرينين (17–16)، أوجد:

(a) معادلة المماس على منحنى الدالة.

(b) معادلة الخط العموديّ على المماس في النقاط المعطاة على منحنى كل دالة مما يلي.

(16) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ ، $(2\ ,\ 3)$ عند

(17) $g(x) = (x^3 + 1)^8$ ، $(0\ ,\ 1)$ عند

KuwaitMath.com

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت $y = \cos(\sqrt{3}x)$ فإن $\frac{dy}{dx} = \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x)$ (a) (b)

(2) إذا كانت $y = 5\cot\left(\frac{2}{x}\right)$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{10}{x^2}\csc^2\left(\frac{2}{x}\right)$ (a) (b)

(3) إذا كانت $y = (x+\sqrt{x})^{-2}$ فإن $\frac{dy}{dx} = -2(x+\sqrt{x})^{-1}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ (a) (b)

(4) إذا كانت $s = \cos\left(\frac{\pi}{2}-3t\right)$ فإن $\frac{ds}{dt} = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}-3t\right)$ (a) (b)

في التمارين (9–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) إذا كانت $y = \sin^{-5}x - \cos^3 x$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $5\sin^{-6}x\cos x - 3\cos^2 x\sin x$

(b) $5\sin^{-6}x\cos x + 3\cos^2 x\sin x$

(c) $-5\sin^{-6}x\cos x - 3\cos^2 x\sin x$

(d) $-5\sin^{-6}x\cos x + 3\cos^2 x\sin x$

(6) إذا كانت $y = \frac{3}{\sqrt{2x+1}}$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $3(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$

(b) $-3(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$

(c) $-3(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$

(d) $3(2x+1)^{-1}$

(7) إذا كانت $s = \frac{4}{3\pi}\sin 3t + \frac{4}{5\pi}\cos 5t$ فإن $\frac{ds}{dt}$ تساوي:

(a) $\frac{4}{\pi}\sin 3t - \frac{4}{\pi}\cos 5t$

(b) $\frac{4}{\pi}\cos 3t + \frac{4}{\pi}\sin 5t$

(c) $\frac{4}{\pi}\cos 3t - \frac{4}{\pi}\sin 3t$

(d) $\frac{4}{\pi}\cos 3t - \frac{4}{\pi}\sin 5t$

(8) إذا كانت $r = \tan(2-\theta)$ فإن $\frac{dr}{d\theta}$ تساوي:

(a) $\sec^2(2-\theta)$

(b) $-\sec^2(2-\theta)$

(c) $\sec^2(\theta+2)$

(d) $\sec(2-\theta)$

(9) إذا كانت $f(u) = \cot\frac{\pi u}{10}$ و $u = g(x) = 5\sqrt{x}$ فإن $(f\circ g)'(x)$ عند $x = +1$ تساوي:

(a) $\frac{3\pi}{4}$

(b) $\frac{\pi}{4}$

(c) $-\frac{\pi}{4}$

(d) $-\frac{3\pi}{4}$

KuwaitMath.com

تمرّنْ
2–6

المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني

Higher Order Derivatives And Implicit Differentiation

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (6–1)، أوجد: $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، $\frac{d^3y}{dx^3}$

(1) $y = 2x^4 - x^3 + x^2 - 3x$

(2) $y = -x^5 + 2x^3 - 4x + 1$

(3) $y = \frac{3}{x-2}$

(4) $y = \sin 2x$

(5) $y = \cos 4x$

(6) $y = \sin^2 x$

في التمارين (9–7)، أوجد: $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$

(7) $y^2 = x^2 + 4x + 2$

(8) $y^2 - 4y = x - 3$

(9) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$

في التمارين (12–10)، أوجد معادلة المماس ومعادلة الخطّ العموديّ على المماس على منحنى الدالة عند كل نقطة معطاة على هذا المنحنى.

(10) $x^2 + 2xy - y^2 = 7 \quad , \quad (2\ ,\ 3)$

(11) $6x^2 + 3xy - 2y^3 - 7y - 6 = 0 \quad , \quad (-1\ ,\ 0)$

(12) $2xy + \pi \sin y = 2\pi \quad , \quad \left(1\ ,\ \frac{\pi}{2}\right)$

(13) أوجد A , B في: $y = A\sin x + B\cos x$ حيث $y'' - y = \sin x$.

(14) أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y = \frac{\cos x}{1 + \tan x}$ واكتب معادلة المماس على منحنى الدالة عند $A(0\ ,\ 1)$.

(15) إذا كانت $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

فأثبت أن: $4x^2 f''(x) - 3\, f(x) = 0$

(16) إذا كانت $f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$

فأثبت أن: $(1 - x^2)f'''(x) - 6xf''(x) - 6f'(x) = 0$

KuwaitMath.com

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (3–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كان: $y = \frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$ فإن: $\frac{d^2y}{dx^2} = -2x$ (a) (b)

(2) إذا كان: $y = \frac{-3x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 4x$ فإن: $\frac{d^3y}{dx^3} = -18x$ (a) (b)

(3) معادلة المماس لمنحنى: $x^2 - y^2 - x^2y = 7$ عند النقطة $(2\ ,\ -1)$ هي: $y = 4x - 9$ (a) (b)

في التمارين (7–4)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(4) إذا كانت: $f(x) = (1+6x)^{\frac{2}{3}}$ فإن: $f''(x)$ تساوي:

(a) $\frac{8}{27}(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$ (b) $8(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$

(c) $-8(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$ (d) $-64(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$

(5) إذا كانت: $f(x) = \frac{2x+1}{3x+2}$ فإن: $f^{(4)}(x)$ تساوي:

(a) $24(3x+2)^{-5}$ (b) $-24(3x+2)^{-5}$

(c) $648(3x+2)^{-5}$ (d) $-648(3x+2)^{-5}$

(6) ميل الخطّ العمودي على المماس (الناظم) عند النقطة $A(3\ ,\ 2)$ على منحنى: $x^2 - y^2 - 2xy = -7$ هو:

(a) -5 (b) $-\frac{1}{5}$

(c) $\frac{1}{5}$ (d) 5

(7) ميل المماس عند النقطة $A(1\ ,\ 1)$ على منحنى: $x^2 - 3y^2 + 2xy = 0$ هي:

(a) -1 (b) 0

(c) 1 (d) 2

KuwaitMath.com

اختبار الوحدة الثانية

في التمارين (9–1)، أوجد مشتقّات الدوالّ.

(1) $y = x^5 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x$

(2) $y = 3 - 7x^3 + 3x^7$

(3) $y = 2\sin x \cos x$

(4) $y = \frac{2x+1}{2x-1}$

(5) $s = \cos(1 - 2t)$

(6) $s = \cot\frac{2}{t}$

(7) $y = \sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

(8) $y = x\sqrt{2x+1}$

(9) $y = \frac{x^2}{\sin(5x)}$

في التمرينين (11–10)، أوجد عند النقطة المبيّنة معادلة:

(a) المماس لمنحنى الدالة.

(b) الخطّ العموديّ على المماس (الناظم).

(10) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ ، $x = 3$

(11) $y = 4 + \cot x - \frac{2}{\sin x}$ ، $x = \frac{\pi}{2}$

(12) لتكن f: $f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & , \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$

بيّن أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 1$

في التمارين (16–13)، أوجد: $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، $\frac{d^3y}{dx^3}$

(13) $y = 3x^4 - 5x^2 + 2x$

(14) $y = \sin 3x$

(15) $y = \cos^2 2x$

(16) $y = (3x - 5)(x^2 - x)$

في التمرينين (18–17)، أوجد: $\frac{dy}{dx}$

(17) $x^2 - 3y^2 + y = 4$

(18) $x^2 + xy^2 + 2x - 3y = 0$

(19) أوجد معادلة المماس ومعادلة الخطّ العمودي على المماس (الناظم) على منحنى الدالة: $x^2 + 2xy = 3$ عند النقطة $A(1\ ,\ 1)$ على هذا المنحنى.

KuwaitMath.com

تمارين إثرائية

(1) أوجد ميل المماس على منحنى الدالة f: $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ عند نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات.

(2) يتحرك جسيم على خط مستقيم بمعادلة: $S(t) = t^3 - 3t^2$ حيث t الوقت بالثواني (s) وS بالأمتار (m).
أوجد السرعة المتجهة لهذا الجسيم والعجلة عند $t = 2$.

(3) أوجد $\frac{dy}{dx}$، حيث $y = \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$

(4) أوجد ميل المماس على منحنى الدالة: $x = y^2 - 4y$ عند نقطة تقاطع المنحنى مع محور الصادات.

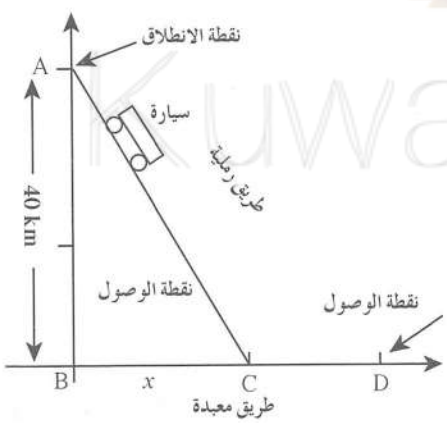
(5) أوجد $\frac{dy}{dx}$، حيث $y = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}$ و $u = \sqrt[3]{x^2 + 2}$.

(6) أوجد معادلة المماس ومعادلة الخطّ العمودي على منحنى الدالة: $x \sin 2y = y \cos 2x$ عند النقطة $A\left(\frac{\pi}{4} , \frac{\pi}{2}\right)$ على هذا المنحنى.

(7) **اكتب للتعلم.** هل هناك قيمة للثابت b تجعل الدالة التالية: $g(x) = \begin{cases} x + b , & x < 0 \\ \cos x , & x \geq 0 \end{cases}$ متصلة وقابلة للاشتقاق عند $x = 0$؟ أعط أسبابًا لإجابتك.

(8) استخدم المتطابقة $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ لإيجاد مشتقّة $\sin 2x$، ثم استخدم المتطابقة $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ للتعبير عن هذه المشتقة بدلالة $\cos 2x$.

(9) يشارك أحد المتبارين في سباق السيارات على الرمال في الصحراء، حيث A هي نقطة الانطلاق وتبعد 40 km عن النقطة B، ونقطة الوصول هي على الطريق المعبدة عند D.



يستطيع هذا المتباري قيادة سيارته بمعدل سرعة 45 km على الرمال وبمعدل سرعة 75 km على الطريق المعبدة (انظر الصورة)، وسوف ينال الجائزة الكبيرة إذا وصل إلى الموقع D الذي يبعد 50 km عن الموقع B في وقت لا يتجاوز 85 دقيقة. المطلوب مساعدة هذا المتباري على تحليل هذه المسألة وإيجاد أقل وقت ممكن لهذه الرحلة.

هل سيربح الجائزة؟

KuwaitMath.com

(10) استخدم الاشتقاق الضمني لتجد $\frac{dy}{dx}$ من $x^2 + 5xy + y^5 = 8$

(11) استخدم الاشتقاق الضمني لتجد ميل المماس عند النقطة $(-4\ ,\ 1)$ على منحنى: $2xy - 3x - 4y = 5$ واكتب معادلة للخط العمودي على المماس على المنحنى عند النقطة المعطاة.

(12) أثبتت إحدى الدراسات في إحدى الضواحي الصناعية أن متوسط الانبعاث اليومي لأول أكسيد الكربون يمكن نمذجته بالقانون: $C(P) = \sqrt{0.5p^2 + 17}$ جزء من مليون، حيث p هو عدد السكان بالآلاف، ويقدر عدد السكان انطلاقًا من هذه السنة بدلالة t سنة بالقانون: $p(t) = 0.1t^2 + 3.1$ بآلاف الأشخاص.

(a) ما معدل تغير أول أكسيد الكربون مع الوقت t بعد 3 سنوات بدءًا من الآن؟ فسّر.

(b) إذا تزايد عدد السكان مع الوقت إلى 8 000، فما معدل تغير أول أكسيد الكربون مع الوقت t في السنوات القادمة بدءًا من الآن؟ فسّر.

(13) **إيجاد المماسات.** أوجد معادلات جميع المماسات لمنحنى الدالة $f(x) = 9 - x^2$ التي تمرّ بالنقطة $(12\ ,\ 1)$

KuwaitMath.com