تمرَّنْ
3‒1

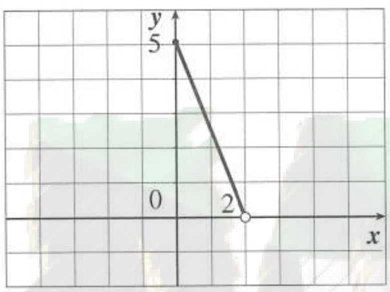
القيم القصوى (العظمى/الصغرى) للدوال

Extreme Values of Functions

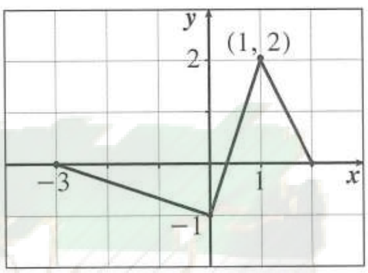
المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (2‒1)، أوجد النقاط التي توجد عندها قيم قصوى.

(1)

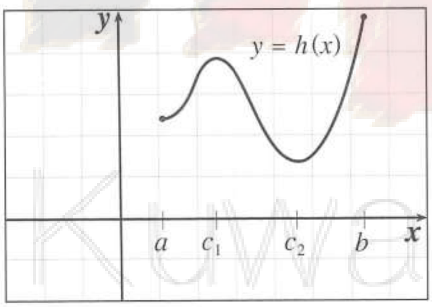


(2)

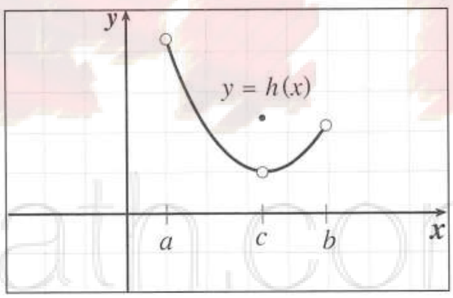


في التمارين (6‒3)، حدّد قيمة x التي قد تقع عندها إحدى القيم القصوى المطلقة للدوال الموضح بيانها فيما يلي وأيًّا منها يمكن تطبيق نظريّة القيم القصوى عليها.

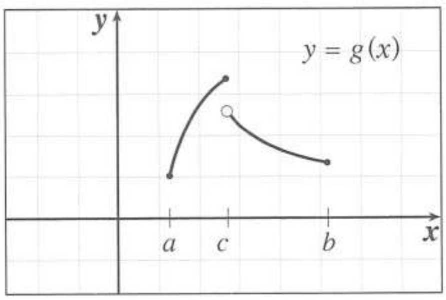
(3)



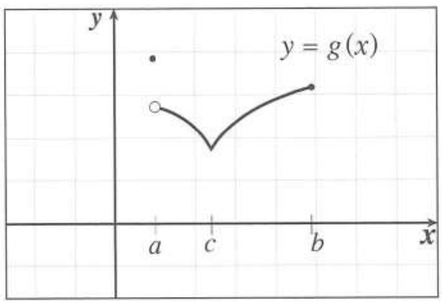
(4)



(5)



(6)



في التمارين (9‒7)، حدّد النقاط الحرجة.

(7) $y = x^2(x+2)$

(8) $y = x\sqrt{3-x}$

(9) $y = \begin{cases} 3 - x\ , & x < 0 \\ 3 + 2x - x^2\ , & x \geq 0 \end{cases}$

في التمارين (14–10)، أوجد القيم القصوى المطلقة لكلّ دالّة من الدوال التالية في الفترة المبينة.

(10) $y = 2x^2 - 8x + 9 \quad , \quad [0,4]$

(11) $f(x) = x^{\frac{3}{5}} \quad , \quad [-2,3]$

(12) $y = \dfrac{x}{x^2+1} \quad , \quad [-3,0]$

(13) $y = \sqrt{3+2x-x^2} \quad , \quad [-1,1]$

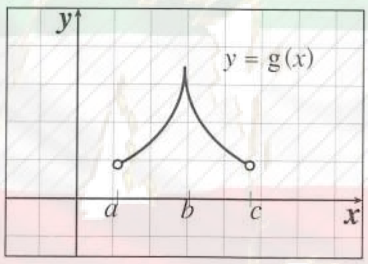
(14) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت f دالة متصلة على (a , b) فإن f لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة. (a) (b)

(2) في الشكل التالي، للدالة g قيمة قصوى محليّة عند $x = c$. (a) (b)



(3) الدالة g : $g(x) = \sqrt{9-x^2}$ لها قيمة عظمى في مجالها. (a) (b)

(4) الدالة f : $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ لها قيمة عظمى في مجالها. (a) (b)

(5) الدالة h : $h(x) = |3x-5|$ لها قيمة حرجة عند $x = 5$. (a) (b)

في التمارين (9–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) لتكن $y = |x|$، فإن الدالة y:

(a) لها قيمة عظمى مطلقة فقط.

(b) لها قيمة صغرى مطلقة فقط.

(c) لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة.

(d) ليس لها قيمة صغرى مطلقة وليس لها قيمة عظمى مطلقة.

(7) عدد النقاط الحرجة للدالة: $y = 3x^3 - 9x - 4$ على الفترة $(0 , 2)$ هو:

(a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) 0

(8) الدالة k : $k(x) = |x^2 - 4|$ لها:

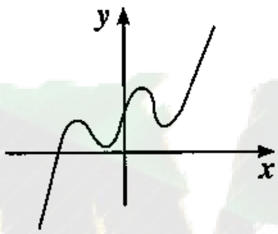
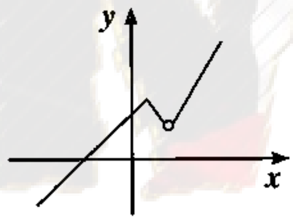
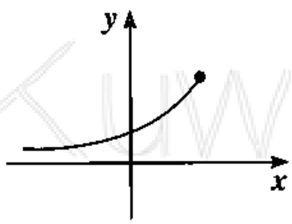
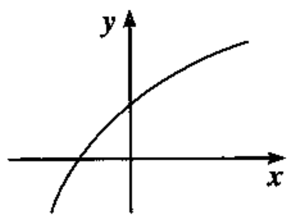
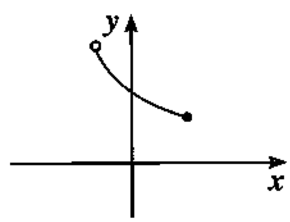
(a) قيمة عظمى مطلقة　　**(b)** قيمة صغرى مطلقة

(c) نقطتان حرجتان فقط　　**(d)** ليس أيّ مما سبق

(9) إذا كانت $f(x) = ax^2 - 25x$ لها قيمة قصوى محلية عند $x = \frac{5}{2}$، فإنّ a تساوي:

(a) 2　　**(b)** 3　　**(c)** 4　　**(d)** 5

في التمارين (10–12)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل عبارة في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

القائمة (1)	القائمة (2)
(10) لها قيمة عظمى مطلقة.	**(a)** 
(11) لها أكثر من قيمة قصوى محلية.	**(b)** 
	(c) 
(12) ليس لها قيم قصوى محلية أو مطلقة	**(d)** 
	(e) 

في التمارين (16–13)، اختر لكل جدول من القائمة (1) الرسم البياني الذي يناسبه في القائمة (2).

القائمة (1)

(13)

x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	أكبر من الصفر

(14)

x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	أصغر من الصفر

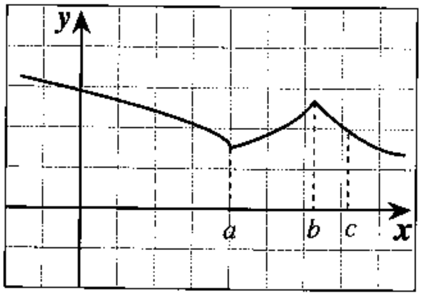
(15)

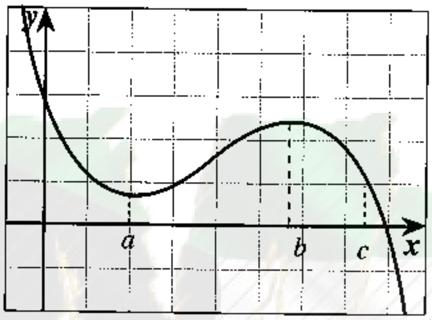
x	$f'(x)$
a	(غير موجودة)
b	0
c	أصغر من الصفر

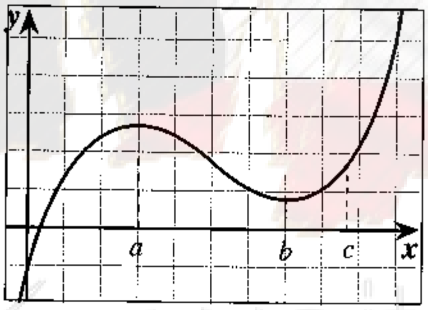
(16)

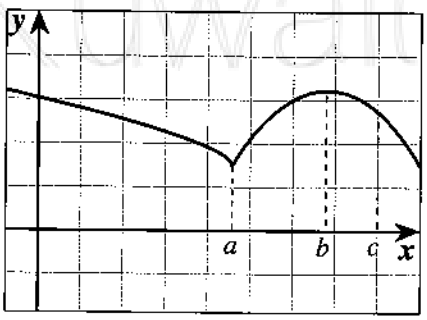
x	$f'(x)$
a	(غير موجودة)
b	(غير موجودة)
c	أصغر من الصفر

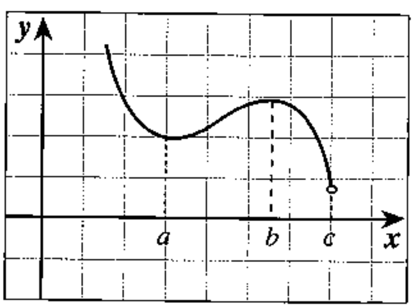
القائمة (2)

a


b


c


d


e


تمرَّنْ
3–2

تزايد وتناقص الدوال

Increasing and Decreasing Functions

المجموعة A تمارين مقالية

(1) بيّن أن الدالة f: $f(x) = x^2 + 2x - 1$ تحقّق شروط نظريّة القيمة المتوسطة على $[0, 1]$. ثمّ أوجد قيمة c التي تنبئ بها النظرية. فسّر إجابتك.

(2) بيّن أن الدالة f: $f(x) = x + \frac{1}{x}$ تحقّق شروط نظريّة القيمة المتوسطة على $\left[\frac{1}{2}\ ,\ 2\right]$. ثمّ أوجد قيمة c التي تنبئ بها النظرية. فسّر إجابتك.

في التمارين (3–7)، حدّد الفترات التي تكون فيها الدوال التالية متزايدة والفترات التي تكون فيها متناقصة.

(3) $f(x) = 5x - x^2$

(4) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24$

(5) $k(x) = \frac{1}{x^2}$

(6) $h(x) = \frac{-x}{x^2 + 4}$

(7) $f(x) = x^4 - 2x^2$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة g : $g(x) = x^2 - x - 3$ متزايدة على $\left(-\infty\ ,\ \frac{1}{2}\right)$ (a) (b)

(2) الدالة f: $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ متناقصة على كل من الفترة $(-\infty\ ,\ -\sqrt{5})$ والفترة $(\sqrt{5}\ ,\ \infty)$ (a) (b)

(3) الدالة f: $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على $[0, 1]$ (a) (b)

(4) الدالة f: $f(x) = x^3 + 1$ مطّردة على $\mathbb{R}$. (a) (b)

في التمارين (5–8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) تكون الدالة k : $k(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

(a) متزايدة على كل فترة من مجال تعريفها.

(b) متناقصة على كل فترة من مجال تعريفها.

(c) متناقصة على الفترة $(-\infty, -2)$ والفترة $(-2, 2)$ ومتزايدة على الفترة $(2\ ,\ \infty)$

(d) ليس أيّ مما سبق.

(6) الدالة R : $R(x) = |x|$

(a) متزايدة على مجال تعريفها.

(b) متناقصة على مجال تعريفها.

(c) متزايدة على الفترة $(0\ ,\ \infty)$ ومتناقصة على الفترة $(-\infty\ ,\ 0)$

(d) متناقصة على الفترة $(0\ ,\ \infty)$ ومتزايدة على الفترة $(-\infty\ ,\ 0)$

(7) إذا كانت f' : $f'(x) = -x^2$ ، فإنّ الدالة f :

(a) متزايدة على مجال تعريفها.

(b) متناقصة على مجال تعريفها.

(c) متزايدة على الفترة $(-\infty, 0)$ فقط

(d) متناقصة على الفترة $(0\ ,\ \infty)$ فقط

(8) إذا كانت f' : $f'(x) = -3x$ ، فإنّ الدالة f:

(a) متزايدة على الفترة $(0, \infty)$

(b) متناقصة على الفترة $(-\infty, 0]$

(c) متزايدة على مجال تعريفها.

(d) متزايدة على الفترة $(-\infty, 0)$ ومتناقصة على الفترة $(0\ ,\ \infty)$

تمرَّنْ
3–3

ربط المشتقّة الأولى f' والمشتقّة الثانية f'' بمنحنى الدالة f

Connecting f' and f'' with the Graph of f

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (6–1)، أوجد النقاط الحرجة والقيم القصوى المحليّة وعيّن فترات التزايد وفترات التناقص لكل دالة مما يلي:

(1) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

(2) $g(x) = -2x^3 + 6x^2 - 3$

(3) $h(x) = -x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 1$

(4) $g(x) = \frac{3}{2}x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 6x + \frac{9}{2}$

(5) $h(x) = 2 - |x - 1|$

(6) $f(x) = \frac{x}{x - 2}$

في التمرينين (8–7)، استخدم مشتقّة الدالّة $y = f(x)$ لإيجاد قيم x التي تكون عندها f لها:

(a) قيمة عظمى محليّة **(b)** قيمة صغرى محليّة **(c)** نقطة انعطاف

(7) $y' = (x - 1)^2(x - 2)$

(8) $y' = (x - 1)^2(x - 2)(x - 4)$

(9) **تفكير ناقد.** إذا كانت الدالّة f قابلة للاشتقاق، $f'(c) = 0$ حيث $x = c$ تنتمي لمجال f، هل f يجب أن يكون لها نقاط عظمى أو صغرى محلّيّة عند $x = c$؟ اشرح.

في التمرينين (11–10)، أوجد فترات التقعر ونقاط الانعطاف لكل من الدوال التالية:

(10) $f(x) = 3x^2 - 2x^3$

(11) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 5$

(12) بيّن أن منحنى الدالة f : $f(x) = 1 - x^4$ ليس له نقاط انعطاف.

(13) أوجد قيمة كل من الثوابت a, b, c لمنحنى الدالة f: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ الذي يمر بنقطة الأصل وله نقطة حرجة (16 , 4).

(14) أوجد قيمة كل من الثوابت a, b بحيث يكون للدالة f: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ نقطة حرجة عند $x = 2$ ونقطة انعطاف عند $x = \frac{1}{2}$.

في التمرينين (16–15)، استخدم اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للدالة:

(15) $f(x) = x^2 - 6x + 11$

(16) $f(x) = x^4 - 18x^2$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (6–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة $y = x^3 - 3x^2 + 5$ على الفترة $(3\ ,\ 0)$ مقعّرة لأسفل. (a) (b)

(2) الدالة $y = \frac{x}{x-1}$ على $(0\ ,\ -\infty)$ مقعّرة لأعلى. (a) (b)

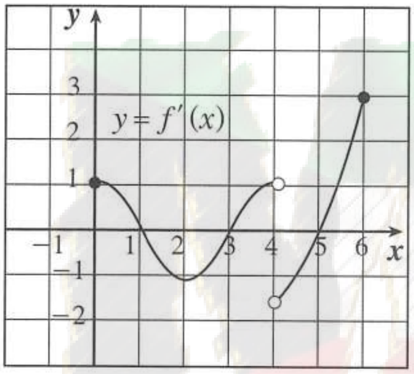
(3) إذا كانت $f''(c) = 0$، فإنّ لمنحنى الدالة f نقطة انعطاف هي $(c\ ,\ f(c))$. (a) (b)

(4) إذا كان لمنحنى الدالة f نقطة انعطاف هي $(c\ ,\ f(c))$ فإن $f''(c) = 0$. (a) (b)

(5) يمكن أن تكون النقطة الحرجة نقطة انعطاف. (a) (b)

(6) منحنى الدالة $y = -3x^8$ مقعّرة للأعلى. (a) (b)

في التمارين (12–7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.



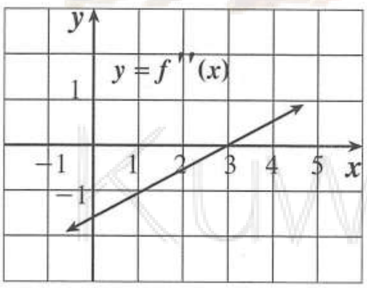
(7) إذا كان الشكل المقابل يمثل بيان دالة المشتقة (f') فإن الدالة f تكون:

(a) متزايدة على كل من $(5\ ,\ 4)\ ,\ (3\ ,\ 1)$.

(b) متناقصة على كل من $(5\ ,\ 4)\ ,\ (3\ ,\ 1)$.

(c) لها قيمة صغرى محلية عند $x = 3$ فقط.

(d) لها نقطة انعطاف عند كل من $x = 2\ ,\ x = 4$.



(8) إذا كانت f دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة والشكل المقابل يوضح بيان f'' فإن منحنى f مقعرًا للأسفل في الفترة:

(a) $(-\infty\ ,\ 3)$ (b) $(3\ ,\ \infty)$

(c) $(-1\ ,\ 4]$ (d) $(3\ ,\ 5)$

(9) أي من منحنيات الدوال التالية يكون مقعرًا لأسفل في $(1\ ,\ -1)$:

(a) $f(x) = x^2$ (b) $f(x) = x|x|$ (c) $f(x) = -x^3$ (d) $f(x) = -x^2$

(10) إذا كانت f دالة كثيرة حدود، $(c\ ,\ f(c))$ نقطة انعطاف لها فإن:

(a) $f''(c) = 0$ (b) $f'(c) = 0$ (c) $f(c) = 0$ (d) $f''(c)$ غير موجودة

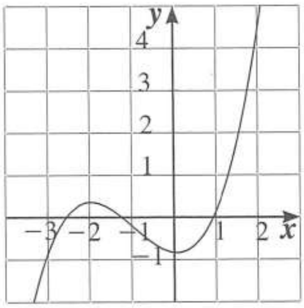
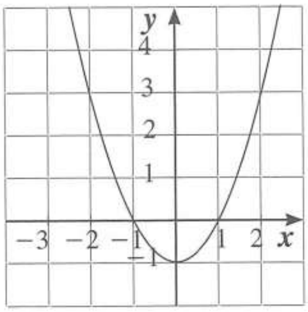
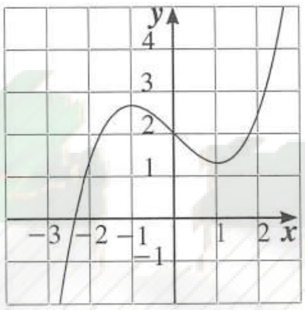
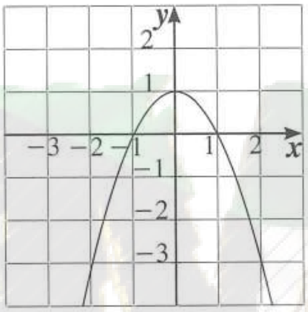
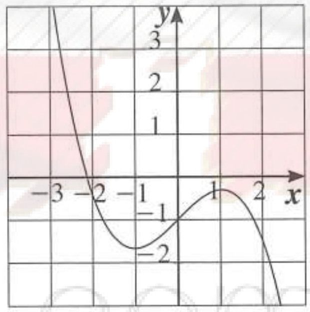
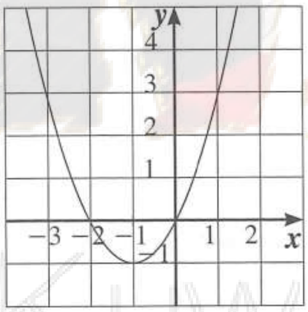
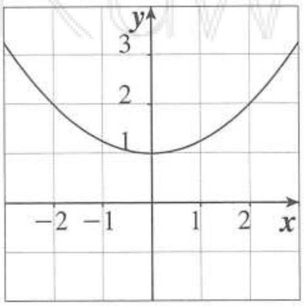
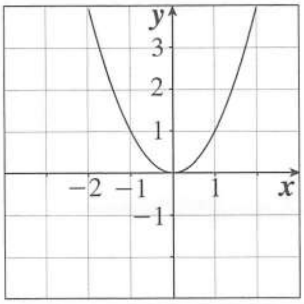
(11) أي من الدوال التالية ليس لها نقطة انعطاف:

(a) $f(x) = x^3 + 5x$ (b) $f(x) = 4x^2 - 2x^4$ (c) $f(x) = x^3$ (d) $f(x) = (x-2)^4$

(12) للدالة f : $f(x) = (x^2 - 3)^2$ نقاط انعطاف عددها:

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

في التمارين (15–13)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.
المنحنيات في التمارين (15) ,(14) ,(13) تمثل الدوال والمنحنيات a, b, c, d, e تمثل دوال المشتقة.

القائمة (1) منحنى الدالة	القائمة (2) منحنى دالة المشتقة
(13) 	a 
(14) 	b 
(15) 	c 
	d 
	e 

رسم بيان دوال كثيرات الحدود

Graph of Polynomial Functions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (2—1)، استخدم جدول دراسة إشارة f' لتحديد مجال f ورسم بيان تقريبي لمنحنى الدالة f.

(1)

$-\infty \quad 2 \quad \infty$

الفترات	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
إشارة f'	$- -$	$+ +$
سلوك f	↘	↗

علمًا بأن: $f(2) = -2$

(2)

$-\infty \quad -3 \quad 0 \quad 5 \quad \infty$

الفترات	$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, 5)$	$(5, \infty)$
إشارة f'	$- -$	$+ +$	$+ +$	$- -$
سلوك f	↘	↗	↗	↘

علمًا بأن: $f(-3) = 0$ و $f(0) = 2$ و $f(5) = 4$

في التمارين (6—3)، ادرس تغير كل من الدوال التالية وارسم بيانها.

(3) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 7$

(4) $g(x) = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2 + 5$

(5) $h(x) = 8x^2 - x^4 - 8$

(6) $f(x) = -x^3 - 3x$

(7) لتكن الدالة f : $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 1$ لكل عدد حقيقي x وليكن (C) منحنى هذه الدالة.

(a) ضع جدول التغير لـ f.

(b) لتكن A النقطة على (C) التي إحداثيها السيني 1.

أوجد معادلة مستقيم المماس l في A على منحنى الدالة.

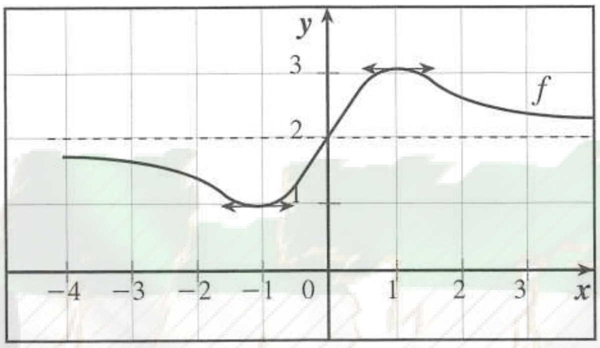
(c) ارسم l و (C).

(8) f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ حيث a, b, c, d أعداد حقيقية.

استخدم جدول التغير التالي لإيجاد قيم a, b, c, d حيث $f(-2) = 5$ ، $f(0) = 1$

x	$-\infty$		-2		0		∞
إشارة f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
سلوك f	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

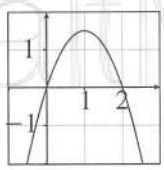
(9) كوّن جدولًا لدراسة إشارة f' من بيان الدالة f الممثلة بالرسم أدناه.



المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

لتكن $f : f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2$ و(C) منحناها.



(1) يمر المنحنى (C) بنقطة الأصل. (a) (b)

(2) الشكل المجاور يمثّل منحنى الدالة f'. (a) (b)

(3) المماس عند النقطة التي إحداثيها السيني يساوي 2 موازٍ لمحور السينات. (a) (b)

(4) 4 هي قيمة عظمى محلية. (a) (b)

(5) المنحنى (C) مقعر لأعلى على الفترة $(-\infty , 1)$. (a) (b)

في التمارين (11−6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

في التمارين (8−6)، الدالة f دالة كثيرة حدود جدول تغيرها:

x	$-\infty$		-1		5		∞
$f(x)$	∞	$\searrow$	-5	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

(6) العبارة الصحيحة فيما يلي هي:

a $f(-2) > f(0)$ **b** $f(0) < f(6)$

c $f(-9) > f(-2)$ **d** $f(-1) > f(8)$

(7) للمعادلة $f(x) = 0$:

a حل واحد **b** حلّان

c ثلاثة حلول **d** لا حل لها.

(8) جدول تغير الدالة f يوضّح أن:

a -5 قيمة صغرى مطلقة.

b 3 قيمة عظمى مطلقة.

c -5 قيمة صغرى محلية، 3 قيمة عظمى محلية.

d -1 قيمة صغرى محلية، 5 قيمة عظمى محلية.

(9) لتكن الدالة f : $f(x) = -x^2 + 7x + 1$

a لمنحنى f قيمة عظمى محلية.

b لمنحنى f نقطة انعطاف.

c منحنى f مقعر لأعلى.

d لمنحنى f قيمة صغرى محلية.

(10) لتكن f : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ , \ a \neq 0$. لمنحنى f دائمًا:

a قيمة عظمى محلية وقيمة صغرى محلية.

b نقطة انعطاف.

c تقعُّر لأسفل ثم تقعُّر لأعلى.

d لا تمر بنقطة الأصل.

(11) الدالة f كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة:

(a) لمنحنى f دائمًا نقطتي انعطاف.

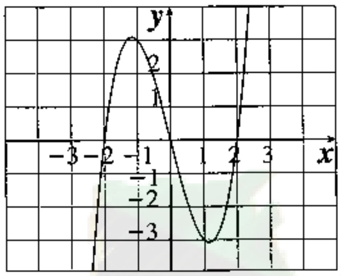
(b) لمنحنى f أكثر من قيمة عظمى محلية.

(c) منحنى f يقطع دائمًا محور السينات.

(d) قد لا يكون لمنحنى f قيمة صغرى محلية.

في التمارين (14–12)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

الشكل المقابل يمثّل بيان الدالة f .



القائمة (1)	القائمة (2)
(12) $f'(x) = 0$	**(a)** $(-\infty , 0)$
(13) $f'(x) > 0$ في	**(b)** $(-\infty , -1)$, $(1 , \infty)$
(14) $f''(x) < 0$ في	**(c)** $-2 , 0 , 2$
	(d) $-1 , 1$
	(e) $(0 , \infty)$

تطبيقات على القيم القصوى

Applications on Extreme Value

المجموعة A تمارين مقالية

(1) مجموع عددين غير سالبين هو 20، أوجد العددين إذا كان:

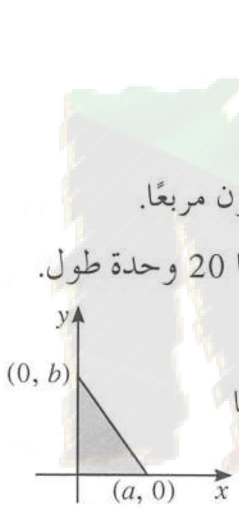
(a) مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن.

(b) أحد العددين مضافًا إليه الجذر التربيعيّ للآخر أكبر ما يمكن.

(2) ما أكبر مساحة ممكنة لمثلّث قائم الزاوية وطول وتره يساوي 6 cm؟ وما أبعاده؟

(3) أثبت أنّ من بين المستطيلات التي محيطها 8 m، واحدًا منها يعطي أكبر مساحة ويكون مربعًا.

(4) يراد التخطيط لغلق ركن في الربع الأوّل من المستوى الإحداثي بقطعة مستقيمة طولها 20 وحدة طول.



نبدأ العمل لغلق الركن من نقطة $(a, 0)$ إلى نقطة $(0, b)$.

أثبت أنّ مساحة المثلّث الذي تحدّه القطعة المستقيمة يكون أكبر ما يمكن عندما $a = b$.

(5) مزرعة على شكل قطعة مستطيلة من الأرض تقع على حافة نهر مستقيم. يراد وضع سياج على الجوانب الثلاثة الأخرى، ما أكبر مساحة يمكن إحاطتها بسياج طوله 800 m؟ وما أبعادها؟

(6) يراد تصميم خزّان حديديّ لأحد المصانع على شكل شبه مكعب، قاعدته مربّعة، ومفتوح من أعلى وحجمه $500\ m^3$، لصنع الخزّان يتم وصل ألواح الحديد الصلب مع بعضها من أطرافها.

أوجد أبعاد القاعدة والارتفاع التي تجعل وزن الخزّان أقلّ ما يمكن.

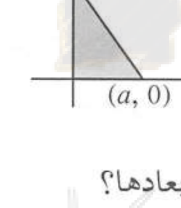
(7) ضلعان في مثلّث طولاهما a و b والزاوية بينهما θ.

ما قيمة θ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن؟

(**إرشاد:** مساحة مثلث = $\frac{1}{2} ab \sin\theta$).

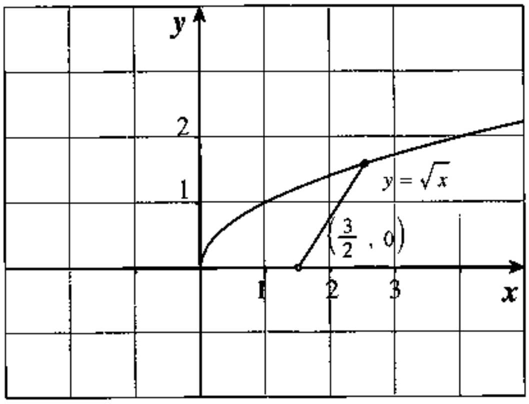
(8) علبة من الصفيح على شكل أسطوانة قائمة مفتوحة من أعلى حجمها $1000\ cm^3$

أوجد أبعاد العلبة بحيث يكون وزنها أقل ما يمكن.



(9) أوجد أكبر حجم لمخروط دائري قائم داخل كرة طول نصف قطرها 3 m.

(10) ما أقصر بعد للنقطة $\left(\frac{3}{2}\ ,\ 0\right)$ عن منحنى الدالة $y=\sqrt{x}$؟



المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمرينين (1–2)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) أصغر محيط ممكن لمستطيل مساحته $16\ cm^2$ هو $16\ cm$ (a) (b)

(2) أكبر مساحة لمستطيل قاعدته على محور السينات ورأساه العلويّان على القطع المكافئ الذي معادلته $y=12-x^2$، هي $24\ units^2$ (a) (b)

في التمارين (3–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(3) مستطيل مساحته $36\ cm^2$ فإن أبعاده التي تعطي أصغر محيط هي:

(a) $9\ cm\ ,\ 4\ cm$ (b) $12\ cm\ ,\ 3\ cm$

(c) $6\ cm\ ,\ 6\ cm$ (d) $18\ cm\ ,\ 2\ cm$

(4) أبعاد أكبر مساحة لمستطيل قاعدته على محور السينات ورأساه العلويّان على القطع المكافئ $y=4-x^2$ هي:

(a) $8\ ,\ \frac{4\sqrt{3}}{3}$ (b) $\frac{8}{3}\ ,\ \sqrt{3}$

(c) $4\ ,\ 4$ (d) $\frac{4\sqrt{3}}{3}\ ,\ \frac{8}{3}$

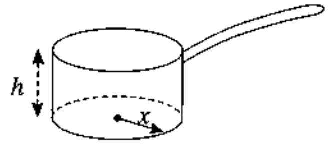
(5) أردت التخطيط لصنع صندوق على هيئة شبه مكعب بدون غطاء من قطعة ورق مقوى مستطيلة أبعادها $10\ cm, 16\ cm$، وذلك بقطع 4 مربّعات متطابقة عند الرؤوس، ثمّ طيّ الأجزاء البارزة.

أبعاد الصندوق الذي له أكبر حجم يمكن صنعه على أساسها هي:

(a) $2\ cm, 6\ cm, 12\ cm$ (b) $3\ cm, 4\ cm, 12\ cm$

(c) $2\ cm, 8\ cm, 12\ cm$ (d) $3\ cm, 6\ cm, 8\ cm$

(6) تعطى المساحة الكلية لوعاء أسطواني الشكل بالمعادلة $s = \pi x^2 + \frac{2v}{x}$، حيث x طول نصف قطر قاعدته وV حجمه. (**تذكر:** $V = \pi x^2 h$).



إذا كان حجم الوعاء ثابتًا فإن القيمة الدنيا لمساحته هي عندما:

(a) $x > h$ **(b)** $x = h$ **(c)** $x < h$ **(d)** ليس أيّ مما سبق

اختبار الوحدة الثالثة

في التمرينين (2—1)، أوجد القيم القصوى المطلقة للدوالّ على الفترات الموضّحة:

(1) $f(x) = x^3 - 9x^2 - 21x - 11 \quad , \quad [-2, 0]$

(2) $f(x) = \dfrac{5}{x^2 + 1} \quad , \quad [-2, 3]$

في التمارين (5—3)، أوجد:

(a) فترات التزايد وفترات التناقص للدالة.

(b) القيم القصوى المحليّة.

(3) $f(x) = x^3 - 12x + 6$

(4) $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

(5) $h(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2x + 9}$

في التمارين (8—6)، أوجد:

(a) فترات التقعر لأعلى وفترات التقعر لأسفل.

(b) نقاط الانعطاف إن وجدت.

(6) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3$

(7) $g(x) = x^4 - 2x^3 + 5x - 6$

(8) $h(x) = \dfrac{3}{x - 1}$

في التمرينين (10—9)، استخدم مشتقة الدالة $y = f(x)$ لإيجاد:

(a) قيم x التي عندها قيم قصوى محلية للدالة f.

(b) فترات التقعر لأعلى.

(c) فترات التقعر لأسفل.

(9) $y' = 6(x+1)(x-2)$

(10) $y' = 6(x+1)(x-2)^2$

(11) استخدم المشتقة الثانية للدالّة $y = f(x)$ لإيجاد قيم x التي يكون عندها نقاط انعطاف للدالة f.

$$y'' = x(x-3)^2$$

في التمارين (14—12)، ادرس تغير كل من الدوال التالية ثم ارسم بيانها.

(12) $f(x) = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$

(13) $g(x) = x^4 - 6x^2 + 9$

(14) $h(x) = (x^2 + 4x + 4)^2$

(15) لتكن الدالة f : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

(a) بيّن أنّ شروط نظريّة القيم المتوسطة محققة على الفترة $[0,3]$

(b) أوجد قيم c على (a, b) حيث $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

(16) لتكن الدالة f : $f(x) = x^2 + bx + c$

أوجد قيم b , c إذا كان منحنى f له قيمة صغرى محلية تساوي -1 عند $x = -2$

تمارين إثرائية

(1) **الحركة على مستقيم.** يتحدد موقع جسيم A على محور السينات بالمعادلة: $S_1 = \sin t$ ويتحدد موقع جسيم B على نفس المحور بالمعادلة: $S_2 = \sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$ حيث S_2 و S_1 بالمتر و t بالثواني.

(a) في أي وقت بالثواني يتلاقى الجسيم A مع الجسيم B على الفترة $[0\ ,\ 2\pi]$؟

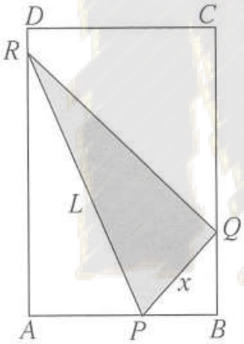
(b) ما أكبر مسافة يمكن أن تفصل بين الجسيم A والجسيم B؟

(c) في أي وقت على الفترة $[0\ ,\ 2\pi]$ تكون المسافة بين الجسيمين تتغير بأقصى سرعة لها؟

(2) **طي ورقة.** قطعة ورق مستطيلة الشكل أبعادها $22\,\text{cm}$ ، $28\,\text{cm}$ موضوعة على أرض مسطحة.

اطوِ إحدى زواياها المقابلة للضلع الأطول كما ترى في الصورة بحيث ينطبق الرأس A عند Q على $\overline{BC}$.

المطلوب إيجاد أقصر طول للضلع PR.



(a) أثبت أن: $L^2 = \dfrac{x^3}{x-11}$

(b) ما قيمة x التي تعطي أصغر قيمة لـ L^2؟

(c) ما أصغر قيمة لـ L؟

(3) **المبيع.** تبلغ تكلفة تصنيع سلعة وتوزيعها 10 دنانير.

إذا كان سعر مبيع هذه السلعة هو (دنانير) x وعدد السلع المباعة يعطى بالقاعدة:

$$n = \frac{a}{x-10} + b(100-x)$$

ما هو سعر المبيع الذي يحقق أكبر ربح؟ (a, b ثوابت موجبة في المعادلة).

(4) لتكن f الدالة المعرَّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = -x^4 + 2x^2 + x$.

(a) ادرس تغيّر f وارسم بيانها (C).

(b) أوجد النقاط على المنحنى (C) حيث يكون ميل المماس يساوي 1.

(c) أثبت أن لنقطتين من هذه النقاط مماس مشترك.

في التمارين (7–5)، أوجد الفترات التي تكون عندها الدالّة:

(a) متزايدة **(b)** متناقصة **(c)** مقعّرة لأعلى **(d)** مقعّرة لأسفل

ثمّ أوجد:

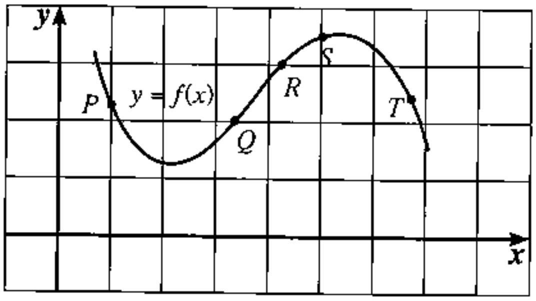
(e) القيم القصوى المحليّة **(f)** نقاط الانعطاف

(5) $y = 1 + x - x^2 - x^4$

(6) $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}}$

(7) $y = x^{\frac{4}{5}}(2-x)$

(8) عند أيّ من النقاط الخمس المحدّدة على المنحنى الممثّل للدالّة $y = f(x)$ والمبيّنة في الشكل:



(a) تكون كلّ من y' و y'' سالبة؟

(b) تكون y' سالبة و y'' موجبة؟

(9) لنأخذ الدالة f : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$

أوجد قيم a, b, c, d إذا كان منحنى f له الخصائص التالية:

(a) يمر بالنقطة $A(0\ ,\ 3)$

(b) له قيمة عظمى محلية تساوي 3 عند $x = 0$

(c) $I(1\ ,\ 1)$ نقطة انعطاف

(10) الربط بين f , f' , f'' : f دالة متّصلة على $[0, 3]$ وتحقّق الآتي:

x	0	1	2	3
f	0	2	0	-2
f'	3	0	غير موجودة	-3
f''	0	-1	غير موجودة	0

x	$0 < x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x < 3$
f	+	+	−
f'	+	−	−
f''	−	−	−

(a) أوجد القيم القصوى المطلقة لـ f وأين تتحقّق.

(b) أوجد أيّ نقاط انعطاف.

(c) ارسم بيانًا تقريبيًّا ممكنًا للدالّة f.

(11) لنأخذ الدالة f : $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ $(a \neq 0 \ , \ c \neq 0)$

أوجد قيم a, b, c, d إذا كان منحنى f له الخصائص التالية:

(a) $y = 2$ مقارب أفقي.

(b) $x = \frac{1}{2}$ مقارب رأسي.

(c) يمر بالنقطة $A(-1 \ , \ 1)$

(12) لتكن الدالة f المعرَّفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = 2x^2 - 4x$ و(C) منحناها.

(a) ادرس تغير f وضع جدول التغير ثم ارسم (C).

(b) استنتج منحنى الدالة g : $g(x) = |2x^2 - 4x|$.

(c) استنتج منحنى الدالة h : $h(x) = 2x^2 - 4|x|$.

(13) **(a)** هل يمكن أن يكون المستقيم $y = 7x + 9$ مماسًا لمنحنى الدالة f : $f(x) = x^3 + 4x + 11$؟

(b) في حال الإيجاب حدّد نقاط التماس.

(14) لتكن f : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$

(a) ادرس تغيّر f وارسم بيانها (C).

(b) حدّد النقاط على (C) حيث يكون المماس موازيًا للمستقيم $y = 3x + 5$

(15) ليكن (C) و(C') منحنيي الدالتين f وg المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x) = x^3 - 3x + 2$ و $g(x) = x^2 - 3x$

(a) ادرس تغير كل من الدالتين f وg ونهاياتهما.

(b) أوجد إحداثيات النقطة المشتركة بين منحنيي الدالتين.

(c) أوجد معادلات مستقيمات المماس في هذه النقطة على (C) و(C').

(d) ارسم (C) و(C').