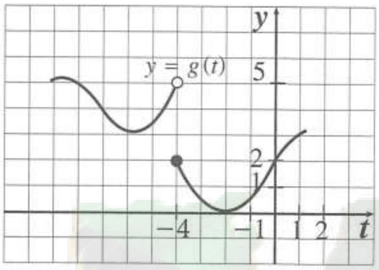
تمرّنْ
1−1

النهايات

Limits

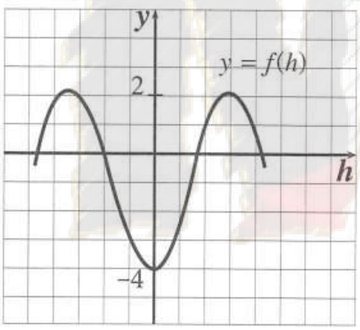
المجموعة A تمارين مقالية



(1) الشكل المقابل، يمثّل بيان الدالة g . أوجد إن أمكن:

(a) $\lim_{t \to -4^-} g(t)$ (b) $\lim_{t \to -4^+} g(t)$

(c) $\lim_{t \to -4} g(t)$ (d) $g(-4)$



(2) الشكل المقابل، يمثّل بيان الدالة f. أوجد إن أمكن:

(a) $\lim_{h \to 0^-} f(h)$ (b) $\lim_{h \to 0^+} f(h)$

(c) $\lim_{h \to 0} f(h)$ (d) $f(0)$

(3) بفرض أنّ: $\lim_{x \to 4} f(x) = 0$, $\lim_{x \to 4} g(x) = 3$ ،
أوجد:

(a) $\lim_{x \to 4}(g(x) + 3)$ (b) $\lim_{x \to 4} x\, f(x)$

(c) $\lim_{x \to 4}(g(x) \cdot g(x))$ (d) $\lim_{x \to 4} \frac{g(x)}{f(x) - 1}$

في التمارين (7–4)، أوجد:

(4) $\lim_{x \to -\frac{1}{2}} (3x^2(2x - 1))$ (5) $\lim_{y \to -3} \frac{y^2 + 4y + 3}{y^2 - 3}$

(6) $\lim_{x \to -4} (x + 3)^{1998}$ (7) $\lim_{x \to 3} \sqrt{x - 2}$

(8) لتكن الدالّة f:

$$f(x)=\begin{cases}3-x, & x<2\\ 2, & x=2\\ \dfrac{x}{2}, & x>2\end{cases}$$

أوجد: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

(9) لتكن الدالّة f:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{1-x^2}, & 0\le x<1\\ 1, & 1\le x<2\\ 2, & x=2\end{cases}$$

أوجد إن أمكن:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

(10) لتكن الدالّة f:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+4, & -1\le x<1\\ 2, & 1\le x<2\\ x, & 2\le x<4\end{cases}$$

أوجد إن أمكن:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

في التمارين (16–11)، أوجد:

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(4+x)^2-16}{x}$ (12) $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t^2-3t+2}{t^2-4}$

(13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3+x)^3-27}{x}$ (14) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{|x+2|}{x^2+3x+2}$

(15) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-4x+3}$ (16) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{\sqrt[3]{9x}+3}$

في التمارين (19–17)، أوجد النهايات التالية:

(17) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-3x^2-7x+6}{x+2}$

(18) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-7x^2-18}{x-3}$

(19) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^3-5x^2-12}{x-2}$

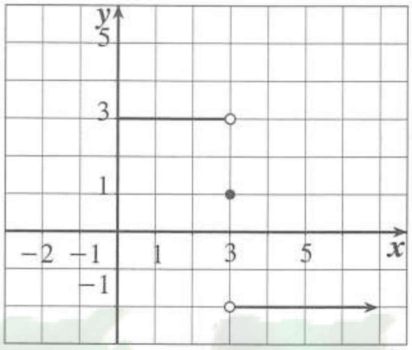
في التمارين (22–20)، أوجد كلًّا مما يلي:

(20) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$ (21) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$ (22) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{4x}{x^2-4}\right)$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -2$ (في الرسم البياني أدناه) (a) (b)



(2) $\lim\limits_{y \to 2} \dfrac{y^2+5y+6}{y+2} = 5$ (a) (b)

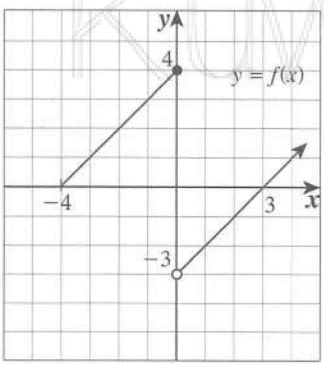
(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x^3+8x^2}{3x^4-16x^2} = 0$ (a) (b)

(4) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sqrt{x^2}-x}{x} = -2$ (a) (b)

(5) $\lim\limits_{x \to 1^+} (2x - |x| + 2) = 3$ (a) (b)

في التمارين (6–14)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) الشكل المقابل هو بيان دالة f.



العبارة الصحيحة في ما يلي هي:

(a) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 4$

(b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -3$

(c) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 4$

(d) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -3$

(7) $\lim\limits_{x\to -2}(x^3+3x^2-2x-17)=$

ⓐ 17　ⓑ -17　ⓒ 9　ⓓ -9

(8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=$

ⓐ 1　ⓑ 0　ⓒ $\frac{1}{2}$　ⓓ غير موجودة

(9) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}=$

ⓐ 1　ⓑ 0　ⓒ $\frac{1}{2}$　ⓓ $\frac{1}{3}$

(10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=$

ⓐ -1　ⓑ 1　ⓒ $\frac{1}{2}$　ⓓ 0

(11) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x-2|}{x^2-4}=$

ⓐ $\frac{1}{2}$　ⓑ $-\frac{1}{2}$　ⓒ $\frac{1}{4}$　ⓓ $-\frac{1}{4}$

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x}=$

ⓐ $-\frac{1}{2}$　ⓑ $\frac{1}{2}$　ⓒ $\frac{1}{4}$　ⓓ $-\frac{1}{4}$

(13) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{x+8}{\sqrt[3]{x}+2}=$

ⓐ 12　ⓑ -12　ⓒ 4　ⓓ -4

(14) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^3+9x^2+9x}{x+3}=$

ⓐ 9　ⓑ 0　ⓒ -3　ⓓ -9

تمرَّنْ
1−2

نهايات تشتمل على $-\infty$، ∞

Limits Involving $-\infty$, ∞

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4–1)، أوجد:

(1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x-2}$

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2+1}{x^3}$

(3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x-1}{2x+3}$

(4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\left(2-\dfrac{x}{x+1}\right)\left(\dfrac{x^2}{5+x^2}\right)\right)$

في التمارين (8–5)، أوجد إن أمكن:

(5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{4x^2}}$

(6) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{3}{|x-5|}$

(7) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{-7}{|x+2|}$

(8) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} \dfrac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^8}}$

في التمارين (12–9)، أوجد إن أمكن معادلات الخطوط المقاربة الرأسية والأفقية لكل مما يلي:

(9) $f(x) = \dfrac{3x^2-2x+1}{2x^2+5x}$

(10) $f(x) = \dfrac{x-2}{2x^2+3x-5}$

(11) $f(x) = \dfrac{4x^3-2x+1}{x^3+x^2}$

(12) $f(x) = \dfrac{4x}{2x^2-5x+2}$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim\limits_{x \to -4^-} \dfrac{1}{(x+4)^9} = -\infty$ (a) (b)

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x-1}{|x|-3} = 2$ (a) (b)

(3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|x|-3}{x+3} = -1$ (a) (b)

(4) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1-x}{2x^2-5x-3} = -\infty$ (a) (b)

(5) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{|2x-3|} = \dfrac{1}{2}$ (a) (b)

في التمارين (6 – 13)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{|x|}{|x|+1}=$

(a) 0 (b) 1 (c) ∞ (d) $\frac{1}{2}$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x+3}=$

(a) ∞ (b) $-\infty$ (c) 1 (d) 0

(8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x}+1\right)\left(\frac{5x^2-1}{x^2}\right)=$

(a) 0 (b) 5 (c) 1 (d) $-\infty$

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-|x+3|}{2x}=$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) ∞ (d) $-\infty$

(10) $\lim\limits_{x\to2^-}\left(\frac{3}{x-2}\right)^5=$

(a) 0 (b) 2 (c) ∞ (d) $-\infty$

(11) $\lim\limits_{x\to4^+}\frac{2}{(x-4)^3}=$

(a) ∞ (b) 2 (c) $-\infty$ (d) 0

(12) المقارب الأفقي والمقارب الرأسي لمنحنى الدالة f: $f(x)=\frac{2x-3}{2x+1}$ هما:

(a) $y=2 \quad , \quad x=\frac{1}{2}$ (b) $y=2 \quad , \quad x=-\frac{1}{2}$

(c) $y=1 \quad , \quad x=-\frac{1}{2}$ (d) $y=1 \quad , \quad x=\frac{1}{2}$

(13) المقارب الأفقي والمقاربات الرأسية لمنحنى الدالة f: $f(x)=\frac{3x-5}{x^2-9}$ هي:

(a) $y=3 \quad , \quad x=3 \quad , \quad x=-3$ (b) $y=3 \quad , \quad x=9 \quad , \quad x=-9$

(c) $y=-3 \quad , \quad x=3 \quad , \quad x=-3$ (d) $y=0 \quad , \quad x=3 \quad , \quad x=-3$

تمرَّنْ
1−3

صيغ غير معينة

Indeterminate Forms

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1−10)، أوجد كلًّا مما يلي:

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} (3x^2 - 5x + 4)$

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-4x^2 + x - 1)$

(3) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x^3 - 3x + 7)$

(4) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-4x^3 + 2x + 5)$

(5) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^2 - 5x + 7}{-2x^2 + 3x - 1}$

(6) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3 + 7x - 1}{-5x^3 + x + 2}$

(7) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 3x + 5}{2x^3 + x - 1}$

(8) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x^2 - 2x + 3}$

(9) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + 5}{\sqrt{x^2 + 2x + 7}}$

(10) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x - 3}{\sqrt{4x^2 + 5x + 6}}$

(11) إذا كانت: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{ax^3 + bx^2 + 4}{3x^2 - 2x + 1} = -1$ فأوجد قيم a , b.

(12) إذا كانت: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 + 2x - 5}{ax^3 + bx^2 + 3} = -1$ فأوجد قيم a , b.

(13) إذا كانت: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x - 5}{\sqrt{ax^2 + 7x - 2}} = 2$ فأوجد قيمة a .

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$ (a) (b)

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos 2x}{4x}=\dfrac{1}{2}$ (a) (b)

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x}=0$ (a) (b)

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin 2x}{2\cos 2x}=\dfrac{1}{2}$ (a) (b)

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2\sin x+5x^3}{4x^3}=2$ (a) (b)

في التمارين (10–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin x}=$

(a) 2 (b) -2 (c) 0 (d) ∞

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(3+x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)=$

(a) 0 (b) 4 (c) 3 (d) ∞

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-x\cos x}{2x^2}$

(a) ∞ (b) $-\infty$ (c) -2 (d) 2

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2+5\sin^2 x}{3x^2}=$

(a) 3 (b) 9 (c) 0 (d) ∞

(10) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+\cos x}{|2x|}=$

(a) $\dfrac{1}{2}$ (b) $-\dfrac{1}{2}$ (c) 0 (d) ∞

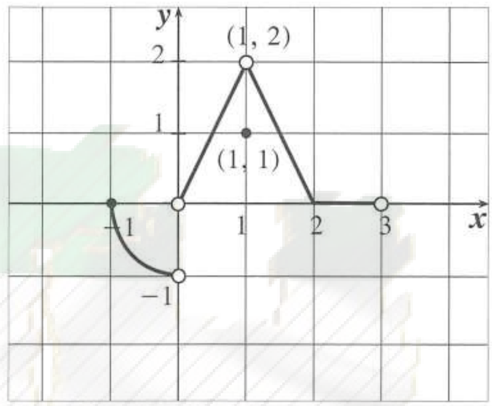
تمرَّنْ
1-5

الاتّصال

Continuity

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1—4)، استخدم الدالّة f المعرفة بأكثر من قاعدة ورسمها البيانيّ للإجابة عن الأسئلة مع ذكر السبب.



$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & , \quad -1\le x<0 \\ 2x & , \quad 0<x<1 \\ 1 & , \quad x=1 \\ -2x+4 & , \quad 1<x<2 \\ 0 & , \quad 2\le x<3 \end{cases}$$

(1) ابحث اتصال الدالة f عند $x=0$

(2) ابحث اتصال الدالة f عند $x=1$

(3) ابحث اتصال الدالة f عند $x=2$

(4) **تفكير ناقد.** هل من الممكن إعادة تعريف الدالّة f لتكون متّصلة عند $x=0$؟ فسّر إجابتك.

(5) ارسم شكلًا ممكنًا يمثّل دالّة f بحيث تحقق الشروط التالية:
$f(-2)$ موجودة، $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=f(-2)$ ولكن $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$ غير موجودة.

في التمارين (6—9)، ابحث اتصال كل من الدوال التالية عند $x=c$:

(6) $f(x)=\begin{cases} x+5 & : x\ge 0 \\ 5-x & : x<0 \end{cases} \quad , \quad x=0$

(7) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3x-4}{x+1} & : x\ne -1 \\ -1 & : x=-1 \end{cases} \quad , \quad x=-1$

(8) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3x}{|x|} & : x\ne 0 \\ -3 & : x=0 \end{cases} \quad , \quad x=0$

(9) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & : x\ne 1 \\ \dfrac{1}{2} & : x=1 \end{cases} \quad , \quad x=1$

(10) أوجد قيمة a بحيث تصبح الدالّة التالية متّصلة عند $x = 3$: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , \quad x < 3 \\ 2ax & , \quad x \geq 3 \end{cases}$

في التمارين (13—11)، أوجد قيم x التي تكون عندها الدالة منفصلة. ثم حدّد نوع الانفصال وإمكانية التخلص منه مع ذكر السبب.

(11) $y = \dfrac{x-1}{x^2 - 4x + 3}$

(12) $y = 2x - 1$

(13) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & , \quad x \neq -1 \\ 2 & , \quad x = -1 \end{cases}$

في التمارين (16—14)، أعد تعريف الدالّة بحيث تكون متّصلة عند قيم x المشار إليها.

(14) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3} \quad , \quad x = -3$

(15) $f(x) = \dfrac{\sin 4x}{x} \quad , \quad x = 0$

(16) $f(x) = \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} \quad , \quad x = 4$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (4—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة f : $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2} + 1$ متصلة عند $x=-2$ — (a) (b)

(2) الدالة: $y = \frac{1}{x^2+1}$ متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$ — (a) (b)

(3) الدالة: $y = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ متصلة عند $x = -1$ — (a) (b)

(4) إذا كانت الدالة f متصلة عند $x=-1$ وكان $\lim\limits_{x\to-1}(f(x)-2) = -1$ فإنّ $f(-1) = 1$ — (a) (b)

في التمارين (12—5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) نقاط انفصال الدالة f : $f(x) = \cot x$ هي:

(a) $0 \,,\, \pi$ (b) $2k\pi \,,\, k \in \mathbb{Z}$

(c) $k\pi \,,\, k \in \mathbb{Z}$ (d) $\frac{\pi}{2} + k\pi \,,\, k \in \mathbb{Z}$

(6) نقاط الدالة f : $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$ التي يمكن التخلص من الانفصال عندها هي:

(a) 2 (b) $-2 \,,\, 2$ (c) -2 (d) $-5 \,,\, 2$

(7) نقاط الدالة f : $f(x) = \frac{2x^3+16}{x^2+x-2}$ التي لا يمكن التخلص من الانفصال عندها هي:

(a) $-1 \,,\, 2$ (b) -2 (c) $1 \,,\, -2$ (d) 1

(8) إذا كانت الدالة f متصلة عند $x = 2$ فإنّ $f(x)$ يمكن أن تكون:

(a) $\frac{1}{|x-2|}$ (b) $\sqrt{x-2}$ (c) $\frac{|x-2|}{x-2}$ (d) $\begin{cases} \sqrt{x^2-3} & : x > 2 \\ 3x-5 & : x \leqslant 2 \end{cases}$

(9) إذا كانت الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & : x \geq 2 \\ \frac{x^2-4}{x-2} & : x < 2 \end{cases}$ فإن:

(a) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = 4$ (b) $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = 4$ (c) $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ موجودة (d) f متصلة عند $x = 2$

(10) لتصبح الدالة f : $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ متصلة عند $x=1$، يجب إعادة تعريفها على الشكل التالي:

ⓐ $\begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x^3-1} & , \quad x\neq 1, \quad x\neq -1 \\ \dfrac{3}{2} & , \quad x=1 \end{cases}$

ⓑ $\begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x^2-1} & , \quad x>1 \\ \dfrac{3}{2} & , \quad x=1 \end{cases}$

ⓒ $\begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x^2-1} & , \quad x\neq 1, \quad x\neq -1 \\ \dfrac{1}{2} & , \quad x=1 \end{cases}$

ⓓ لا يمكن إعادة تعريفها

(11) إذا كانت الدالة f متصلة عند $x=-2$ وكانت $\lim\limits_{x\to -2}(x^2+f(x))=7$ فإن $f(-2)$ تساوي:

ⓐ 3

ⓑ 5

ⓒ 9

ⓓ 11

(12) إذا كانت الدالة g متصلة عند $x=1$ وكانت النقطة $(1\ ,\ -3)$ تقع على منحنى الدالة g فإن $\lim\limits_{x\to 1}(g(x))^2$ تساوي:

ⓐ -6

ⓑ -3

ⓒ 1

ⓓ 9

في التمارين (13–15)، توجد قائمتان. اخترِ لكل سؤال من القائمة (1) ما يناسبه من القائمة (2) لتحصل على عبارة صحيحة:

إذا كانت g دالة متصلة عند $x=a$ ، $a\in\mathbb{Z}$ وكانت:

القائمة (1)	القائمة (2)
(13) $g(x)=\begin{cases} x+1 & : \ x>a \\ 3-x & : \ x\le a \end{cases} \Rightarrow a=$	ⓐ -1 ⓑ 2
(14) $g(x)=\begin{cases} 2ax-2 & : \ x\neq a \\ 3a & : \ x=a \end{cases} \Rightarrow a=$	ⓒ 0 ⓓ 1
(15) $g(x)=\begin{cases} 3x^2 & : \ x>a \\ 2x & : \ x\le a \end{cases} \Rightarrow a=$	ⓔ $\frac{2}{3}$

تمرّنْ
1-6

نظريات الاتصال

Continuous Theorems

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1−5)، ابحث اتصال كل دالة مما يلي عند $x = c$:

(1) $f(x) = x^2 - |2x-3| \quad , \quad x = 2$

(2) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+1} - \dfrac{3}{x} \quad , \quad x = -1$

(3) $f(x) = x^2 + 3x + |x| \quad , \quad x = 3$

(4) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1} \quad , \quad x = -1$

(5) $f(x) = \sqrt{x^2+5x+4} \quad , \quad x = -5$

(6) الدالتان g , f معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = -x+2 \quad , \quad g(x) = x^2 - 3$$

أوجد:

(a) $(g \circ f)(x)$ **(b)** $(g \circ f)(-1)$ **(c)** $(f \circ g)(x)$ **(d)** $(f \circ g)(-1)$

(7) الدالتان g , f معرفتان كما يلي: $f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = x^2 + 4$ أوجد:

(a) $(f \circ g)(x)$ **(b)** $(f \circ g)(2)$ **(c)** $(g \circ f)(x)$ **(d)** $(g \circ f)(2)$

(8) الدالتان g , f معرفتان كما يلي: $f(x) = \sqrt{x^2-9}$ ، $g(x) = \dfrac{1}{x^2+16}$.

أوجد:

(a) الدالة المركبة $(g \circ f)(x)$

(b) $(g \circ f)(4)$ ، $(g \circ f)(-4)$

(9) لتكن: $f(x) = 2x^2 - 3$ ، $g(x) = \sqrt{x+4}$. ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$

(10) ابحث اتصال الدالة f: $f(x) = \left|\sqrt{x} - 3\right|$ عند $x = 4$

(11) ابحث اتصال الدالة g: $g(x) = \sqrt{x^2+1} - \left|x - 3\right|$ عند $x = 3$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (5—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة f: $f(x) = x^2 + \left|x - 1\right|$ متصلة عند $x = 3$ (a) (b)

(2) الدالة f: $f(x) = \dfrac{2x+5}{x+2} - \dfrac{2}{x}$ متصلة عند $x = 0$ (a) (b)

(3) الدالة f: $f(x) = \dfrac{2x-2}{\left|x\right| - 1}$ متصلة عند $x = 0$ (a) (b)

(4) الدالة f: $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{3x-1}}{x^2}$ متصلة عند $x = 3$ (a) (b)

(5) الدالة f: $f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 4}$ متصلة عند $x = 2$ (a) (b)

في التمارين (12—6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) نقاط انفصال الدالة f: $f(x) = \dfrac{-x+2}{x^2+9}$ عند:

(a) $x = 3$ (b) $x = -3$

(c) $x = 2$ (d) لا يوجد نقاط انفصال

(7) نقاط انفصال الدالة f: $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$ عند x تساوي:

(a) $1\ ,\ -1$ (b) $2\ ,\ -2$ (c) $1\ ,\ 2$ (d) $-1\ ,\ -2$

(8) لتكن الدالة f: $f(x) = x^2 + 3, x \neq 0$ ، الدالة g : $g(x) = \dfrac{x}{x-3}$ ، فإن: $(g \circ f)(x)$ تساوي:

(a) $\dfrac{4x^2 - 18x + 27}{(x-3)^2}$ (b) $\dfrac{x^2}{x^2-3}$ (c) $\dfrac{x^2+3}{x^2}$ (d) $\dfrac{x^2}{x^2+3}$

(9) لتكن الدالة f: $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-3}}$ ، الدالة g: $g(x) = x^2 + 3, x \neq 0$ ، فإن: $(f \circ g)(x)$ تساوي:

(a) $\dfrac{x^2}{x-3} + 3$ (b) $\dfrac{x}{\sqrt{x-3}} + 3$ (c) $\dfrac{-(x^2+3)}{x}$ (d) $\dfrac{x^2+3}{\left|x\right|}$

(10) لتكن الدالة f: $f(x)=\sqrt{x^2+7}$ ، g : $g(x)=x^2-3$ فإن: $(f\circ g)(0)$ يساوي:

(a) 4 (b) -4

(c) 1 (d) -1

(11) إذا كانت g دالة متصلة عند $x=2$ فإن الدالة المتصلة عند $x=2$ فيما يلي هي $f(x)$ تساوي:

(a) $\sqrt{g(x)}$ (b) $\frac{1}{g(x)}$

(c) $\frac{g(x)}{x-2}$ (d) $|g(x)|$

(12) إذا كانت الدالة f: $f(x)=\sqrt{x^2-a}$ متصلة عند $x=3$ فإن a يمكن أن تساوي:

(a) 4 (b) 9

(c) 16 (d) 25

الاتصال على فترة

Continuity on an Interval

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (5−1)، ادرس اتصال كل دالة مما يلي على الفترة المبينة.

(1) $f(x) = x^2 + 2x - 3 \quad , \quad [-2\ ,\ 5]$

(2) $f(x) = \dfrac{7x}{x^2 + 5} \quad , \quad [1\ ,\ 3]$

(3) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 3} \quad , \quad [0\ ,\ 5]$

(4) $f(x) = \dfrac{-x + 3}{x^2 - 5x + 4} \quad , \quad [-2\ ,\ 6]$

(5) $f(x) = \begin{cases} -5 & : \quad x = -3 \\ -x^2 + 4 & : \quad -3 < x < 4 \\ -10 & : \quad x = 4 \end{cases} \quad , \quad [-3\ ,\ 4]$

(6) الدالة f معرفة كما يلي: $f(x) = \begin{cases} -x + 4 & : \quad x \leqslant 7 \\ \dfrac{9}{-x + 4} & : \quad x > 7 \end{cases}$ ، ادرس اتصال الدالة على مجالها.

(7) الدالة f معرفة كما يلي: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 9} & : \quad x \leqslant 0 \\ \dfrac{6}{x + 3} & : \quad x > 0 \end{cases}$ ، ادرس اتصال الدالة على مجالها.

(8) الدالة f معرفة كما يلي: $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & : \quad x \leqslant -2 \\ x - 7 & : \quad -2 < x < 4 \\ x^2 - 7 & : \quad x \geqslant 4 \end{cases}$ ، ادرس اتصال الدالة على مجالها.

(9) الدالة f معرفة كما يلي: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x + 2} & : \quad x \leqslant -4 \\ x^2 + 3x - 6 & : \quad -4 < x \leqslant 1 \\ x^3 - 3x^2 & : \quad x > 1 \end{cases}$ ، ادرس اتصال الدالة على مجالها.

في التمرينين (10–11)، أوجد قيم a , b بحيث تكون كل دالة متصلة على مجال تعريفها.

(10) $f(x)=\begin{cases} x^2-\sqrt{x} & : \quad x<1 \\ 3x+a & : \quad x>1 \\ b & : \quad x=1 \end{cases}$

(11) $f(x)=\begin{cases} x^2 & : \quad x<-2 \\ \dfrac{x^2-a}{x-b} & : \quad -2\le x<1 \\ x & : \quad x\ge 1 \end{cases}$

(12) لتكن الدالة f : $f(x)=\sqrt{-x^2+5x+6}$ ، أوجد D_f ثم ادرس اتصالها على $[0\ ,\ 4]$

في التمرينين (13–14)، ادرس اتصال كل من الدوال التالية على مجالها:

(13) $f(x)=\sqrt{8-2x^2}$

(14) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

في التمرينين (15–16)، ادرس اتصال كل من الدوال التالية على $\mathbb{R}$.

(15) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+3x-2}$

(16) $f(x)=|3x^2+4x-1|$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت f دالة متصلة على كل من $[1\ ,\ 3)$, $[3\ ,\ 5]$ فإن f متصلة على $[1\ ,\ 5]$ — (a) (b)

(2) الدالة f : $f(x)=x^2-|x|$ متصلة لكل قيم $x\in\mathbb{R}$ — (a) (b)

(3) الدالة f : $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ متصلة على $[-2\ ,\ 2]$ — (a) (b)

(4) الدالة f : $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+2}$ متصلة على $(-\infty\ ,\ 0)$ — (a) (b)

(5) الدالة f : $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ متصلة على $(-\infty\ ,\ 2)$ فقط — (a) (b)

في التمارين (6–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) لتكن الدالة f : $f(x)=\dfrac{x+1}{x-4}$ فإن الدالة f :

(a) لها نقطتي انفصال عند كل من $x=4$, $x=-1$

(b) متصلة على $(-\infty\ ,\ 4]$

(c) متصلة على كلٍ من $(-\infty, 4)$, $(4, \infty)$

(d) ليس أي مما سبق

(7) إذا كانت f دالة متصلة على $[-2 , 3]$ فإن:

ⓐ $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

ⓑ $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = f(3)$

ⓒ $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = f(-2)$

ⓓ $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = f(-2)$

(8) الدالة f : $f(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-25}}$ متصلة على:

ⓐ $\left(-\infty , \frac{1}{2}\right]$

ⓑ $(5 , \infty)$

ⓒ $\mathbb{R}$

ⓓ $(-5 , 5)$

(9) لتكن f : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{2} & : \quad x \leqslant -3 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+16}}{2} & : \quad -3 < x < 0 \\ \dfrac{4-x^2}{x-2} & : \quad x \geqslant 0 , x \neq 2 \end{cases}$ ، فإن f دالة متصلة على:

ⓐ $(-\infty , \infty)$

ⓑ $(-\infty , 2)$

ⓒ $(-\infty , 0]$

ⓓ $(-\infty , -3]$

(10) الدالة f : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+m}{x-2} & : \quad x < 1 \\ x+n & : \quad x > 1 \\ 2m & : \quad x = 1 \end{cases}$ متصلة على $\mathbb{R}$ إذا كان:

ⓐ $m = -1 \quad , \quad n = 3$

ⓑ $m = 1 \quad , \quad n = -3$

ⓒ $m = -1 \quad , \quad n = -3$

ⓓ $m = 1 \quad , \quad n = 3$

(11) الدالة g : $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & : \quad x > 1 \\ 3x & : \quad x \leq 1 \end{cases}$ متصلة على:

ⓐ $(-\infty , 1] , (1 , \infty)$

ⓑ $(-\infty , 1) , [1 , \infty)$

ⓒ $(-\infty , \infty)$

ⓓ $(-\infty , 3]$

اختبار الوحدة الأولى

في التمارين (11—1)، أوجد النهايات.

(1) $\lim\limits_{x\to-2}(x^3-2x^2+1)$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{3x^2-2x+5}\right)$

(3) $\lim\limits_{x\to-4}\sqrt{1-2x}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x}$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{4x}$

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\csc x+1}{x\csc x}$

(7) $\lim\limits_{x\to1}|x-2|+2x$

(8) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{9-x}-2}{x-5}$

(9) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}$

(10) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-7x+12}$

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}$

(12) لتكن الدالة f: $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

(a) بيّن أن $f(x)$ غير متصلة عند $x=-2$, $x=2$

(b) أعد تعريف الدالة f بحيث تصبح متصلة عند $x=2$

في التمرينين (13, 14)، أوجد المقاربات الرأسية لمنحنى الدالة f.

(13) $f(x)=\dfrac{x+3}{x+2}$

(14) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2(x+2)}$

(15) لتكن الدالة f:

$$f(x)=\begin{cases}1 & , \quad x\le-1\\ -x & , \quad -1<x<0\\ 1 & , \quad x=0\\ -x & , \quad 0<x<1\\ 1 & , \quad x\ge1\end{cases}$$

(a) أوجد إن أمكن: $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$, $\lim\limits_{x\to0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1}f(x)$

(b) هل f متّصلة عند كل من $x=-1$ ، $x=0$ ، $x=1$؟ فسّر إجابتك.

في التمرينين (16, 17)، أوجد جميع نقاط عدم الاتصال للدالّة إن وجدت:

(16) $f(x) = \dfrac{x+1}{4-x^2}$

(17) $g(x) = \sqrt[3]{3x+2}$

في التمرينين (18, 19)، أوجد المقارب الأفقي والمقاربات الرأسية.

(18) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-2x+1}$

(19) $f(x) = \dfrac{2x^2+5x-1}{x^2+2x}$

في التمرينين (20, 21)، أوجد قيمة k التي تجعل الدالة f متصلة.

(20) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-15}{x-3} & , \quad x \neq 3 \\ k & , \quad x = 3 \end{cases}$

(21) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{2x} & , \quad x \neq 0 \\ k & , \quad x = 0 \end{cases}$

(22) لتكن f : $f(x) = \sqrt{x^2+5}$ ، g : $g(x) = x^2 - 5$ أوجد:

(a) $(g \circ f)(x)$ **(b)** $(g \circ f)(0)$

(c) $(f \circ g)(x)$ **(d)** $(f \circ g)(0)$

(23) لتكن f : $f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \leqslant 2 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+21}}{5} & : \quad 2 < x < 15 \\ \dfrac{225-x^2}{x-15} & : \quad x > 15 \end{cases}$ ، ادرس اتصال الدالة على مجالها.

تمارين إثرائية

(1) لتكن f : $f(x) = \sqrt{3x-2}$

بيّن أن: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 2$

(2) في كلٍّ مما يلي أوجد: $\lim\limits_{x \to b} f(x)$, $\lim\limits_{x \to b} g(x)$, $\lim\limits_{x \to b} (f \cdot g)(x)$

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x$, $b = 0$

(b) $f(x) = -\dfrac{2}{x^3}$, $g(x) = 4x^3$, $b = 0$

(c) $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$, $g(x) = (x-2)^3$, $b = 2$

(d) $f(x) = \dfrac{5}{(3-x)^4}$, $g(x) = (x-3)^3$, $b = 3$

(3) لتكن f دالة متصلة ولا تساوي الصفر على الفترة $[a\ ,\ b]$.

بيّن أن دائمًا $f(x) > 0$ لكل $x \in [a\ ,\ b]$ أو $f(x) < 0$ لكل $x \in [a\ ,\ b]$

(4) بيّن أنه إذا كانت الدالة f متصلة على فترة ما فإن الدالة $|f|$ هي كذلك أيضًا.

(5) لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} |x^3 - 4x| & , \quad x < 1 \\ x^2 - 2x - 2 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$

(a) أوجد النهاية لجهة اليمين والنهاية لجهة اليسار لـ f عند $x = 1$

(b) هل f لها نهاية عندما $x \to 1$؟ إذا كان كذلك فما هي تلك النهاية؟ وإذا لم يكن كذلك فبيّن السبب.

(c) هل f متصلة عند $x = 1$؟

(6) لنأخذ الدالتين f ، g حيث إن: $f(x) = \sqrt{2x+1}$ ، $g(x) = 3x - 4$

(a) حدّد مجال: $f \circ g$ ، $g \circ f$

(b) أوجد: $(f \circ g)(x)$ ، $(g \circ f)(x)$

(c) أوجد: $\lim\limits_{x \to \infty} (f \circ g)(x)$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} (g \circ f)(x)$

(7) إذا كانت: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{ax^2 + bx - 5}{\sqrt{4x^2 - 5x + 8}} = -1$ فأوجد قيم $a\ ,\ b$.

(8) لتكن f ، g دالتين: $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$ ، $g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

أوجد نقاط انفصال الدالة $g \circ f$. هل يمكن التخلص من هذا الانفصال؟ اشرح.

(9) لتكن f , g دالتين: $f(x) = x^2 + 1$ معرفة على $\mathbb{R}$،

$g(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4}}$ معرفة لكل $x \in (-\infty \ , \ -2) \cup (2 \ , \ \infty)$

(a) أوجد نقاط انفصال: $f \circ g$

(b) أوجد المقارب الأفقي والمقاربات الرأسية لمنحنى الدالة $f \circ g$

(10) لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} 5 & : \quad x \leqslant 4 \\ \frac{x^2 + 9}{5} & : \quad 4 < x \leqslant 18 \\ \frac{324 - x^2}{x - 18} & : \quad x > 18 \end{cases}$ ، ادرس اتصال الدالة على مجالها.

في التمارين (11–16) أوجد النهاية:

(11) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

(12) $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4}}$

(13) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

(14) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}$

(15) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{14x^3 - 5x + 27}{x^4 + 10}$

(16) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^4 + 12x^2 + 5}{7x^2 + 6}$

(17) لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x \ , & x > 0 \\ x + 1 \ , & x \leq 0 \end{cases}$

(a) ارسم منحنى الدالة f.

(b) أوجد: $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

(18) بيّن في كل دالة مما يلي نقاط الانفصال وابحث إذا كان بالإمكان التخلص منه:

(a) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 10}{x + 2}$

(b) $f(x) = \begin{cases} -x + 4 \ , & x > 3 \\ x - 2 \ , & 0 < x < 3 \\ x - 1 \ , & x \leq 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

(d) $f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 3} - 2}$