الوحدة السادسة: تطبيقات التكامل Integration Applications

قُسّمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

6–1: المساحات في المستوي.

جزء 1: مساحة منطقة محددة بمنحنى دالة ومحور السينات في فترة معينة $[a,b]$.

جزء 2: المساحة بين منحنيين غير متقاطعين في فترة $[a,b]$.

جزء 3: المساحة بين منحنيين متقاطعين في فترة $[a,b]$.

جزء 4: القيم المحددة لدوال متغيرة في فترة $[a,b]$.

6–2: حجوم الأجسام الدورانية.

جزء 1: حجم مجسم ناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات لمنطقة مستوية محددة بمنحنى دالة ومحور السينات في فترة $[a,b]$.

جزء 2: حجم مجسم ناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات لمنطقة مستوية محددة بمنحنى دالتين في فترة $[a,b]$.

6–3: طول قوس ومعادلة منحنى دالة.

جزء 1: طول قوس من منحنى دالة.

جزء 2: معادلة منحنى بمعلومية ميل مماس عند نقطة عليه باستخدام التكامل.

6–4: المعادلات التفاضلية.

جزء 1: حل معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى.

جزء 2: حل معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية.

مقدمة الوحدة


الوحدة السادسة

تطبيقات التكامل

Integration Applications

مشروع الوحدة: احتساب سعر البيع

1 مقدمة المشروع: يعتبر النفط منذ فترة طويلة وحتى عصرنا الحاضر من أهم الموارد التي يحتاج إليها الإنسان، إن لجهة استخداماته أو لجهة مردوده المادي على الدول المنتجة.

2 الهدف: سوف تستكشف من خلال العمل في هذا المشروع كيف يحتسب سعر البيع لإنتاج بئر من النفط الخام خلال فترة زمنية معينة.

3 اللوازم: آلة حاسبة — حاسوب.

4 أسئلة حول التطبيق:

تبيّن لإحدى الشركات أن إحدى الآبار يمكن أن يعطي 300 برميل من النفط الخام يوميًّا على أن يتوقف إنتاجه خلال 3 سنوات، وقدرت أنه في عدد t من الأيام ابتداءً من الآن سوف يكون سعر النفط الخام معطى بالعلاقة: $P(t) = 30 + 0.3\sqrt{t}$ (Dollars) للبرميل الواحد (السعر العالمي لبيع النفط الخام بالدولار الأميركي).

إذا كانت الشركة تبيع النفط عند استخراجه من البئر مباشرة، فما القيمة الإجمالية لبيع النفط مستقبلاً؟

a معدل التغير لثمن البيع الإجمالي $\frac{dR}{dt}$ هو:

$\frac{dR}{dt}$ = [سعر بيع البرميل الواحد بالدولار] × [عدد البراميل المباعة في اليوم الواحد]

أوجد $\frac{dR}{dt}$ (لاحظ أن: $\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dB} \times \frac{dB}{dt}$ حيث إن B هو عدد البراميل المستخرجة).

b أوجد $R(t) = \int \frac{dR}{dt}\, dt$ علمًا أن: $R(0) = 0$

c أوجد قيمة $R(t)$ خلال 3 سنوات.

دروس الوحدة

المساحات في المستوي	حجوم الأجسام الدورانية	طول قوس ومعادلة منحنى دالة	المعادلات التفاضلية
6–1	6–2	6–3	6–4

64

من المتعارف عليه في الرياضيات أن التعبير «مكاملة دالة» يعني نوع من التصميم لكميات قابلة للتجزئة مثل المساحة، والحجم، والكتلة أو أي مجموع لعناصر متناهية إلى الصفر.

النقطة الأساسية في التكامل باستخدام دالة متصلة على فترة مغلقة تأتي من المبرهنة الأساسية لهذا التكامل، والتي تنص على ما يلي: إن مشتق دالة المساحة تحت منحنى هو الدالة نفسها. أي إذا عرفنا الدالة التي تربط المتغير x بقيمة مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة f، ومحور السينات، والمستقيمان العموديان على محور السينات ومحور الصادات y والمستقيم $x = t$ مثلاً.

فبالتالي تدعى f دالة المساحة ومشتقتها هي الدالة f نفسها، لذا يرتكز حساب التكامل على إيجاد الدالة الأصلية للدالة التي تريد القيام بمكاملتها.

ولا بد من الإشارة إلى تكامل ريمان (Reimann)، حيث أخذ مجموعات جزئية على فترة مغلقة لدالة معرفة ومتصلة، ومجموع هذه المجموعات الجزئية تحدد سلسلة متناهية، وكل حد من المجموع هو مساحة لمضلع لديه ارتفاع هو قيمة $f(x)$ عند النقطة المرفقة بالجزء المعطى وله عرض يساوي طول الفترة الجزئية.

من المهم جدًّا الإشارة إلى استخدامات التكامل المحدد في مجالات متنوعة:

- أطوال المنحنيات، والمساحات، والحجوم.
- حساب مركز الثقل، كمية التحرك، الإزاحة، السرعة، العجلة، الشكل، الطاقة.
- انتشار الجراثيم في وسط معين تحت ظروف بيئية معينة.
- حل معادلات تفاضلية وتطبيقاتها على البندول، ودوائر الرنين الكهربائية، وأنظمة التحكم الكهروميكانيكية.
- حساب الثوابت الرياضية إلى درجة عالية من الدقة مثل قيمة ثابت الدائرة π وقيمة الثابت الطبيعي e.

مشروع الوحدة

عرف الأقدمون النفط وبعض مشتقاته من تسربه خلال الشقوق التي توجد في سطح الأرض. أمّا اليوم فطرق البحث عن البترول معقّدة وتتطلّب مبالغ طائلة.

إنّ النفط ضروري للعديد من الصناعات ويساهم بنسبة كبيرة في استهلاك الطاقة العالمي، وهو من أهمّ الموارد لجهة مردوده المادّي للدول المنتجة.

في هذا المشروع، محاولة بسيطة للإضاءة على كيفيّة احتساب ثمن المبيع لإنتاج بئر من النفط الخام خلال ثلاث سنوات.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

(a) $R(t)$ هي القيمة الإجمالية لثمن المبيع بدلالة الزمن t يوم.

$\frac{dR}{dt}$ هو معدل التغير للمبيع، $P(t) = 30 + 0.3\sqrt{t}$ هو سعر البرميل بعد مرور t يوم من لحظة استخراج النفط و300 هو عدد البراميل المباعة يوميًّا.

$$\therefore\ \frac{dR}{dt} = P(t) \times 300$$
$$= (30 + 0.3\sqrt{t})(300)$$
$$= 9\,000 + 90\sqrt{t}$$

(b) $$R(t) = \int \frac{dR}{dt}dt = \int (9\,000 + 90\sqrt{t})dt$$
$$= 9\,000t + 60t^{\frac{3}{2}} + C$$

وبما أنّ $R(0) = 0$، إذًا $C = 0$،

$$R(t) = 9\,000t + 60t^{\frac{3}{2}}$$

(c) بما أنّ البئر سوف يجفّ بعد 3 سنوات أي ما يعادل 1 095 يومًا، إذًا القيمة الإجمالية المحتسبة خلال ثلاث سنوات هي:

$$R(1\,095) = 9\,000(1\,095) + 60(1\,095)^{\frac{3}{2}}$$
$$\approx 12\,094\,064.52$$

أي 12 مليون دولار أميركي تقريبًا.

التقرير

يجب أن يتضمّن التقرير حسابات مفصّلة. اِعرض تقريرك أمام زملائك في غرفة الصف.

ناقش معهم الاقتراحات التي وضعها في التقرير، أعد النظر ببعضها إذا رأيت ضرورة لذلك.

الوحدة السادسة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعرفت النهايات المنتهية وغير المنتهية عند نقطة أو على فترة.
- تعرفت الاتصال على فترة والانفصال عند نقطة أو على فترة.
- تعرفت مشتقة دالة عند نقطة وعلى فترة.
- تعرفت قابلية الاشتقاق وقواعد الاشتقاق.
- تعرفت التطبيق على الاشتقاق لإيجاد التفاضل.
- تعرفت الدوال التزايدية والدوال التناقصية ورسومها البيانية.
- تعرفت المشتقة العكسية والتكامل المحدد.

ماذا سوف تتعلم؟

- إيجاد المساحة بين المنحنيات.
- إيجاد المساحة المحددة بين منحنيات متقاطعة.
- إيجاد القيم المحدودة لدوال متغيرة.
- التعرف على الحجم كتكامل.
- إيجاد الحجم بطريقة المقاطع العرضية الدائرية.
- معادلة منحنى دالة بمعلومية ميل المماس وإحداثيات نقطة.
- طول قوس على منحنى دالة.
- حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى.
- حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية.

المصطلحات الأساسية

المساحة – المساحة المحددة بين منحنيين – الحجم – المقاطع العرضية الدائرية – معادلة دالة بمعلومية ميل المماس وإحداثيات نقطة – طول قوس على منحنى دالة – المعادلة التفاضلية – المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى – المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية.

أضف إلى معلوماتك

يستخدم التكامل المحدد في مجالات علمية متعددة ومنها المجال الفيزيائي حيث يمكن إيجاد كتلة إحداثيات نقطة ثقل جسم معين فمثلاً:

لنأخذ f , g دالتين متصلتين على الفترة $[a, b]$ حيث $f(x) \geq g(x)$ ونأخذ صفيحة رقيقة لها كثافة نوعية p وتغطي هذه الصفيحة المنطقة R بين منحنى الدالة $f(x)$ ومنحنى الدالة $g(x)$ فنحصل على التالي:

كتلة $(R) = m = p\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

وإحداثيات نقطة الثقل $(\bar{x}, \bar{y})$ هي:

$$\bar{x} = \frac{p\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx}{p\int_a^b [f(x) - g(x)]dx} = \frac{p\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx}{m}$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}p\int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}dx}{p\int_a^b [f(x) - g(x)]dx} = \frac{\frac{1}{2}p\int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}dx}{m}$$

65

سلّم التقييم

4	الحسابات دقيقة ومفصلة – النتائج والاقتراحات ممتازة – التقرير منظم وواضح.
3	معظم الحسابات دقيقة ومفصلة – النتائج والاقتراحات جيدة – التقرير منظم ولكن ينقصه بعض الوضوح.
2	بعض الحسابات دقيقة – النتائج والاقتراحات مقبولة – التقرير بمعظمه غير منظم وغير مفصل.
1	معظم عناصر المشروع غير كاملة.

6–1: المساحات في المستوي

6–1

المساحات في المستوي
Areas in the Plane

دعنا نفكر ونتناقش

في الشكل المجاور منحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - x - 2$ في الفترة $[1,3]$.

1 أوجد: $\int_1^3 f(x)\,dx$.

2 احسب مساحة كل من المنطقتين A_1 ، A_2 المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = 1$, $x = 3$

3 قارن بين ما حصلت عليه في 2 , 1 .

أولًا: مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة $[a,b]$

علمنا من دراستنا السابقة أنه إذا كانت f دالة متصلة على $[a,b]$ فإن مساحة المنطقة A المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = a$, $x = b$

إذا كانت: $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a,b]$

فإن $A = \int_a^b f(x)\,dx$

إذا كانت: $f(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in [a,b]$

فإن $A = -\int_a^b f(x)\,dx$

مثال (1)

يبيّن الشكل المقابل بيان الدالة: $f(x) = x^2 + 4 - 4x$

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة ومحور السينات والمستقيمين $x = 2$, $x = 5$

الحل:

من الشكل:

$\because \; f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [2,5]$

$\therefore \; A = \int_2^5 f(x)\,dx = \int_2^5 (x^2 + 4 - 4x)\,dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} + 4x - 2x^2\right]_2^5 = \left[\frac{125}{3} + 20 - 50\right] - \left[\frac{8}{3} + 8 - 8\right]$

$= \frac{35}{3} - \frac{8}{3} = 9$ units square

سوف تتعلم
- المساحة بين المنحنيات.
- المساحة المحددة بين منحنيات متقاطعة.
- القيم المحددة لدوال متغيّرة.

المفردات والمصطلحات:
- مساحة منطقة محددة بين منحنيين
Area Enclosed between Two Curves
- المساحة المحددة بين منحنيات متقاطعة
Area Enclosed by Intersecting Curves
- وحدة مربعة
Unit Squared

تذكر:
أننا نتعامل مع دوال متصلة على فترات معينة.

66

1 الأهداف

- يوجد مساحة منطقة محددة بمنحنى دالة ومحور السينات.
- يوجد مساحة منطقة محددة بمنحنيي دالتين غير متقاطعين.
- يوجد مساحة منطقة محددة بمنحنيي دالتين متقاطعين.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

مساحة منطقة محدّدة بمنحنين – مساحة منطقة محدّدة بمنحنين متقاطعين – وحدة مربعة.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

أوجد حلّ المعادلة $f(x) = g(x)$ في كلّ من الحالات التالية:

(a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

$g(x) = 0$

(b) $f(x) = 2x - 5$

$g(x) = \frac{3}{2}x - 4$

(c) $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$

$g(x) = 2x^2 - 2x + 5$

(d) $f(x) = x^2 + 3x - 4$

$g(x) = -x + 1$

5 التدريس

تعرّف الطالب سابقًا العلاقة بين التكامل المحدد ومساحة المنطقة المحدّدة بمنحنى الدالة المكاملة، ومحور السينات، والمستقيمان $x = a$, $x = b$، وفي هذا الدرس سوف يطبق هذه المعلومات ويتوسع بها وذلك لإيجاد مساحات لمناطق محدّدة بمنحنيات لدوال مختلفة.

لذا يتوجب عليه إيجاد إحداثيات نقاط التقاطع بين هذه المنحنيات، وتحديد المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها، وكذلك إيجاد حدود التكامل.

والأهم هو استخدام التكامل مع دالة واحدة بالشروط المعروفة لإيجاد مساحة أي منطقة، لذا من المفيد جدًّا تنبيه الطلاب إلى ضرورة تحديد كل منطقة حدودها الأربعة هي: محور السينات، منحنى الدالة، المستقيمان $x = a \;,\; x = b$

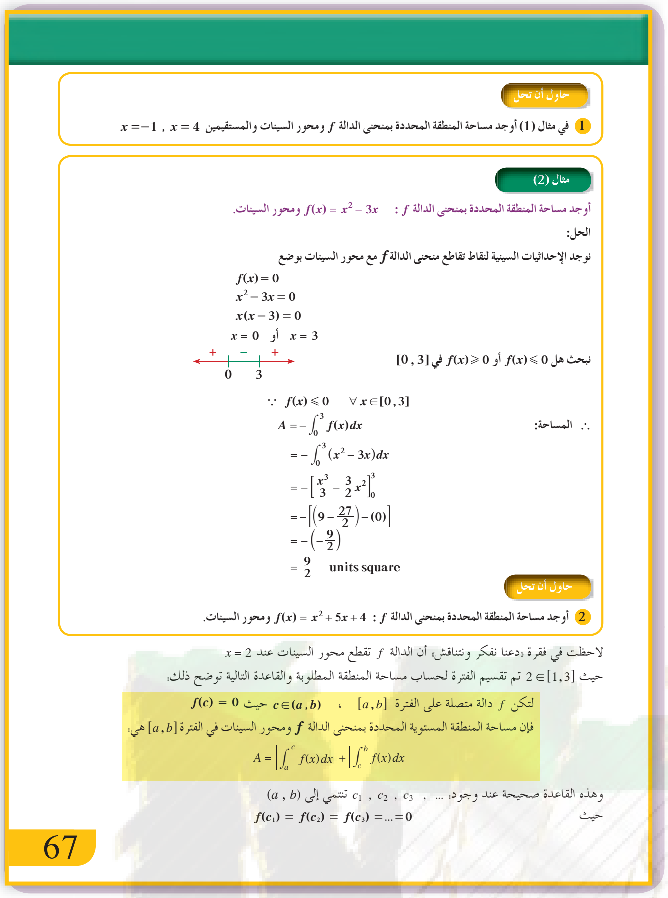
أخبر الطلاب أنه من الممكن أن تكون المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها هي ناتج جمع عدة مساحات. ألفت انتباههم إلى أن المنطقة الموجودة تحت محور السينات لها تكامل محدد قيمته دائمًا عددًا سالبًا، لذا عند إيجاد المساحة نأخذ القيمة المطلقة أو المعكوس الجمعي.

في المثال (1)

لاحظ أن المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها محدّدة بمنحنى الدالة $f(x) = x^2 + 4 - 4x$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 2 \;,\; x = 5$، وهي موجودة فوق محور السينات. لذا لإيجاد المساحة، علينا حساب تكامل الدّالة $f(x)$ بالشروط المعروفة.

في المثال (2)

لاحظ أن المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها موجودة تحت محور السينات ولها تكامل محدد قيمته عددًا سالبًا. لذا عند إيجاد المساحة، نأخذ المعكوس الجمعي أو القيمة المطلقة.



حاول أن تحل

1 في مثال (1) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = 4 \;,\; x = -1$

مثال (2)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 3x$ ومحور السينات.

الحل:

نوجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات بوضع

$$f(x) = 0$$
$$x^2 - 3x = 0$$
$$x(x-3) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{أو} \quad x = 3$$

نبحث هل $f(x) \leqslant 0$ أو $f(x) \geqslant 0$ في $[0\,,3]$

$$\because \; f(x) \leqslant 0 \qquad \forall\, x \in [0\,,3]$$

$\therefore$ المساحة:

$$A = -\int_0^3 f(x)\,dx$$
$$= -\int_0^3 (x^2 - 3x)\,dx$$
$$= -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_0^3$$
$$= -\left[\left(9 - \frac{27}{2}\right) - (0)\right]$$
$$= -\left(-\frac{9}{2}\right)$$
$$= \frac{9}{2} \quad \text{units square}$$

حاول أن تحل

2 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 5x + 4$ ومحور السينات.

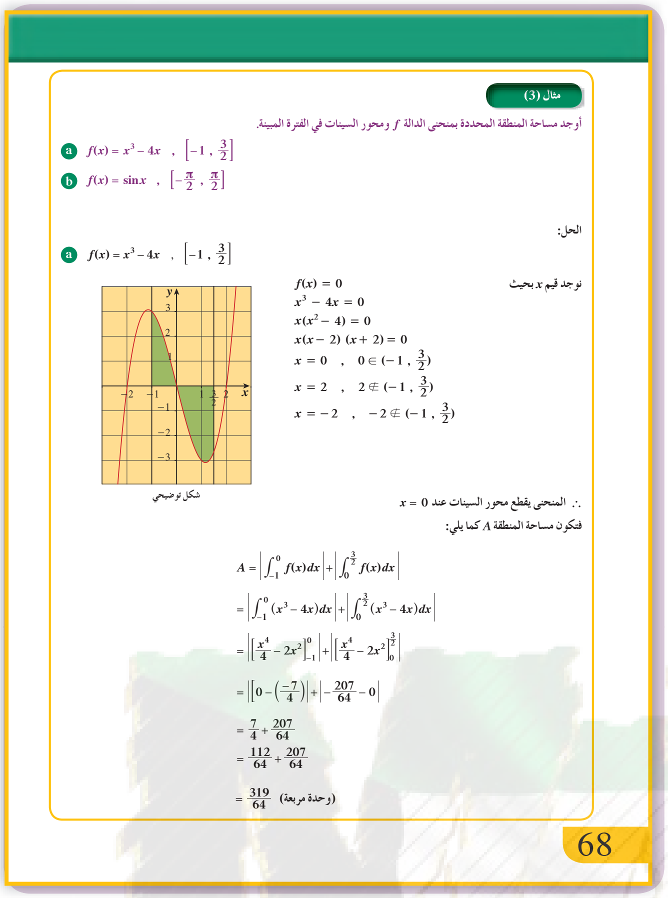
لاحظت في فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» أن الدالة f تقطع محور السينات عند $x = 2$ حيث $2 \in [1,3]$ تم تقسيم الفترة لحساب مساحة المنطقة المطلوبة والقاعدة التالية توضح ذلك:

لتكن f دالة متصلة على الفترة $[a\,,b]$ ، $c \in (a\,,b)$ حيث $f(c) = 0$
فإن مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة $[a\,,b]$ هي:

$$A = \left|\int_a^c f(x)\,dx\right| + \left|\int_c^b f(x)\,dx\right|$$

وهذه القاعدة صحيحة عند وجود: $c_1 \;,\; c_2 \;,\; c_3 \;,\; \ldots$ تنتمي إلى $(a\,,b)$
حيث $f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = \ldots = 0$

67



مثال (3)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة.

a $f(x) = x^3 - 4x \quad , \quad \left[-1 \, , \, \frac{3}{2}\right]$

b $f(x) = \sin x \quad , \quad \left[-\frac{\pi}{2} \, , \, \frac{\pi}{2}\right]$

الحل:

a $f(x) = x^3 - 4x \quad , \quad \left[-1 \, , \, \frac{3}{2}\right]$

نوجد قيم x بحيث

$$f(x) = 0$$
$$x^3 - 4x = 0$$
$$x(x^2 - 4) = 0$$
$$x(x-2)(x+2) = 0$$
$$x = 0 \quad , \quad 0 \in \left(-1 \, , \, \frac{3}{2}\right)$$
$$x = 2 \quad , \quad 2 \notin \left(-1 \, , \, \frac{3}{2}\right)$$
$$x = -2 \quad , \quad -2 \notin \left(-1 \, , \, \frac{3}{2}\right)$$

شكل توضيحي

$\therefore$ المنحنى يقطع محور السينات عند $x = 0$

فتكون مساحة المنطقة A كما يلي:

$$A = \left|\int_{-1}^{0} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx\right|$$
$$= \left|\int_{-1}^{0} (x^3 - 4x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{\frac{3}{2}} (x^3 - 4x)\,dx\right|$$
$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{0}^{\frac{3}{2}}\right|$$
$$= \left|\left[0 - \left(\frac{-7}{4}\right)\right| + \left|-\frac{207}{64} - 0\right|$$
$$= \frac{7}{4} + \frac{207}{64}$$
$$= \frac{112}{64} + \frac{207}{64}$$
$$= \frac{319}{64} \text{ (وحدة مربعة)}$$

68

في المثال (3)

إنّ المنطقة المحدّدة بمنحنى الدالة $f(x)$ ومحور السينات في (a) و(b) منقسمة إلى منطقتين. لذا فالمساحة المطلوب إيجادها هي ناتج جمع مساحتي هاتين المنطقتين.

لاحظ أنّ إحدى المنطقتين موجودة تحت محور السينات ولها تكامل محدد قيمته عدد سالب، لذا علينا أن نأخذ المعكوس الجمعي أو القيمة المطلقة عند حساب مساحة هذه المنطقة.

في المثالين (4), (5)

لاحظ أنّ المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها محددة بمنحنى الدالة $f(x)$ ومنحنى $g(x)$ علمًا أنه في كل مثال لا تتقاطع المنحنيات مع بعضها وكخطوة أولى يمكن رسم بيان كل دالة للتعرف على موقع المنطقة بالنسبة إلى منحنيي الدالتين أو استخدام قيمة اختيارية في الفترة المحددة.

ركّز اهتمام الطلاب على إيجاد تكامل الدالة التي لها المنحنى الأعلى مطروحًا منه تكامل الدالة التي لها المنحنى الأدنى ويمكن الاستغناء عن ذلك باستخدام القيمة المطلقة للتكامل المحدد.

في المثالين (6), (7)

لإيجاد حدود التكامل أولًا حل المعادلة $y_1 = y_2$ في المثال (6) و $f(x) = g(x)$ في المثال (7).

في المثالين (8), (9)

من الممكن أن يحتاج الطالب إلى خطوات متعددة مع استخدام خاصية التجزئة في التكامل المحدد وذلك على فترات متعددة من محور السينات أي:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

6 الربط

لا يوجد.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب فيستخدمون تكاملًا محددًا لدالة واحدة أو قد لا يلاحظوا أن المنطقة جزء منها فوق محور السينات والجزء الآخر تحت محور السينات.

ساعدهم على العمل بخطوات متعددة مع تكامل لأكثر من دالة والانتباه إلى المناطق تحت محور السينات حيث نأخذ القيمة المطلقة للتكامل المحدد.

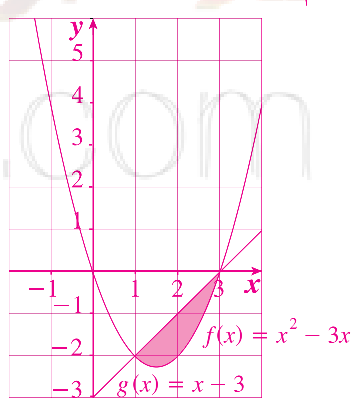
8 التقييم

راقب عمل الطلاب ولاحظ بدقة كيفية تعاملهم مع فقرات «دعنا نفكر ونتناقش» و«حاول أن تحل»، تأكد من أنهم يرسمون بيان كل دالة وأنهم قادرين على تحديد المنطقة المطلوبة وعلى إيجاد حدود التكامل.

اختبار سريع

1 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة: $f(x) = x^2 - 3x$ والمستقيم $g(x) = x - 3$.

نرسم أولًا:



ثم نوجد إحداثيات نقاط التقاطع، لذا نحل النظام:

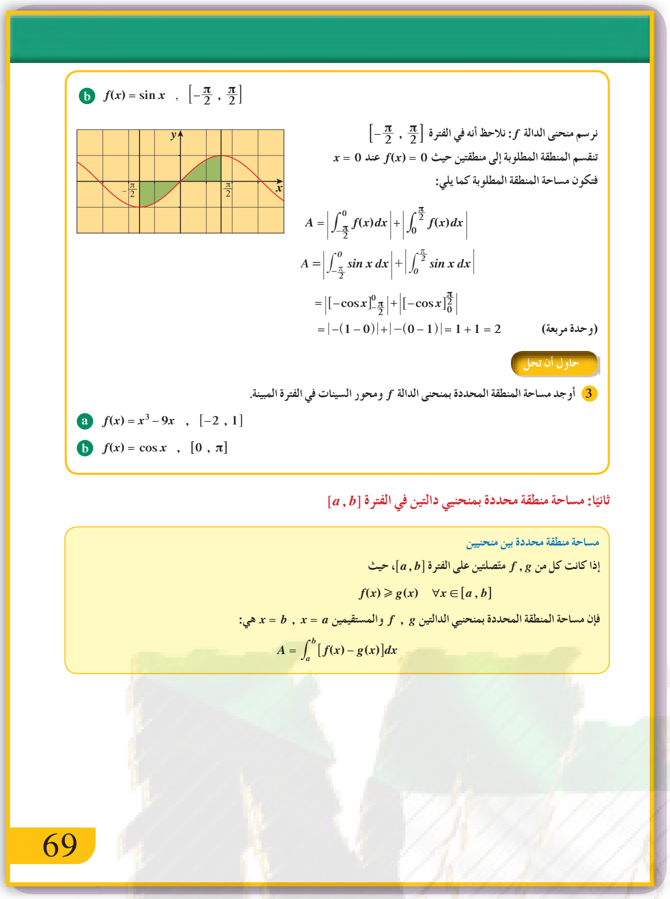
$f(x) = g(x)$

نحصل على: $x = 1$ ، $x = 3$

نأخذ: $A = \int_1^3 [g(x) - f(x)]dx$

$A = \int_1^3 [(x-3) - (x^2 - 3x)]dx$

$A = \frac{4}{3}$ units square



b $f(x) = \sin x \quad , \quad \left[-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right]$

نرسم منحنى الدالة f: نلاحظ أنه في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right]$

تنقسم المنطقة المطلوبة إلى منطقتين حيث $f(x) = 0$ عند $x = 0$

فتكون مساحة المنطقة المطلوبة كما يلي:

$$A = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx\right| + \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\right|$$

$$A = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x\, dx\right| + \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx\right|$$

$$= \left|[-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\right| + \left|[-\cos x]_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$= |-(1-0)| + |-(0-1)| = 1 + 1 = 2$$ (وحدة مربعة)

حاول أن تحل

3 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة.

a $f(x) = x^3 - 9x \quad , \quad [-2 , 1]$

b $f(x) = \cos x \quad , \quad [0 , \pi]$

ثانيًا: مساحة منطقة محددة بمنحنيي دالتين في الفترة $[a , b]$

مساحة منطقة محددة بين منحنيين

إذا كانت كل من f , g متّصلتين على الفترة $[a , b]$، حيث

$$f(x) \geqslant g(x) \quad \forall x \in [a , b]$$

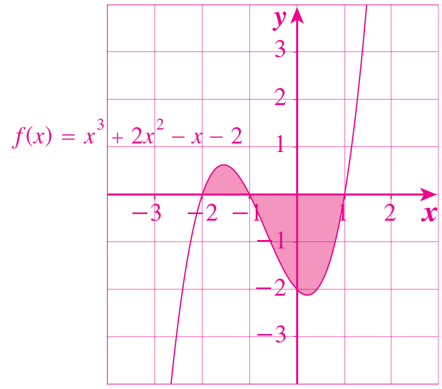
فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين f , g والمستقيمين $x = a$, $x = b$ هي:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

69

❷ أوجد مساحة المنطقة المحددة بين محور السينات ومنحنى الدالة $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

نرسم أولًا:



ثم نوجد نقاط التقاطع لمنحنى الدالة مع محور السينات، أي نأخذ:

$$f(x) = 0 \quad \therefore \quad x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$

$$\therefore \quad (x+2)(x-1)(x+1) = 0$$

$$\therefore \quad x = -2 \ , \ x = 1 \ , \ x = -1$$

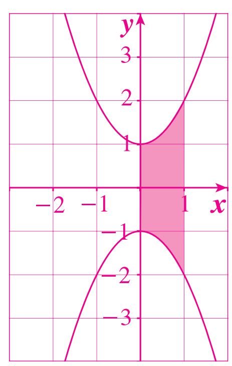
نلاحظ أن من -2 إلى -1 جزء من المنطقة موجود فوق محور السينات، ثم من -1 إلى 1 جزء من المنطقة موجود تحت محور السينات، لذا يجب استخدام خاصية التجزئة في التكامل المحدد مع المعكوس الجمعي لنجد المساحة الكلية.

$$A = \int_{-2}^{-1} (x^3 + 2x^2 - x - 2)dx - \int_{-1}^{1} (x^3 + 2x^2 - x - 2)dx$$

$$= \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12} \text{ units square}$$

❸ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين $f : f(x) = x^2 + 1$ ، $g : g(x) = -x^2 - 1$ في الفترة $[0 \ , \ 1]$.

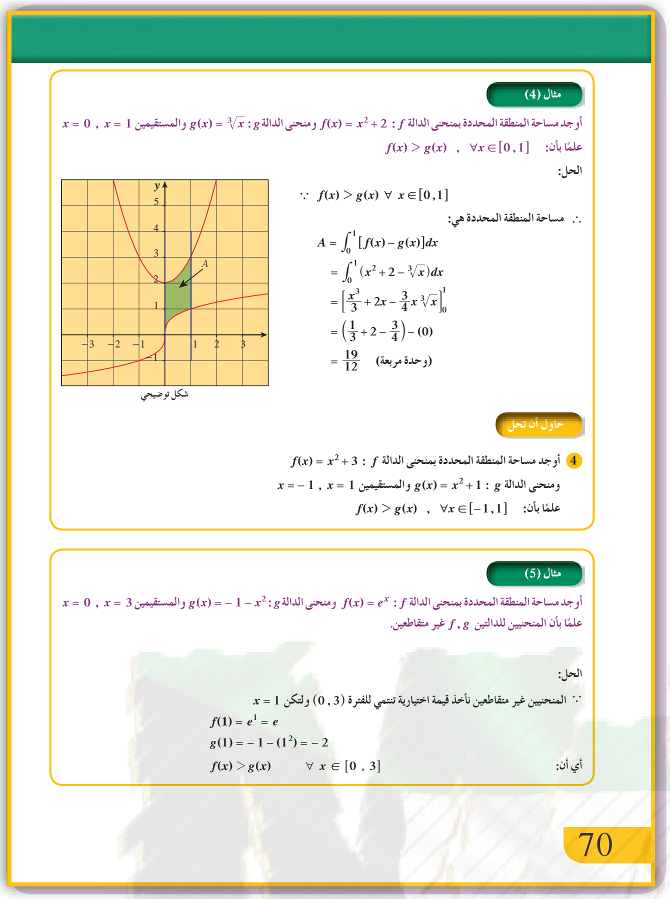
نرسم أولًا:



لا يوجد تقاطع بين المنحنيين لذا تكون المساحة:

$$A = \int_0^1 (f(x) - g(x))dx = \int_0^1 (x^2 + 1 + x^2 + 1)dx$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3} + 2x\right]_0^1 = \frac{8}{3} \text{ units square}$$



مثال (4)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f : f(x) = x^2 + 2$ ومنحنى الدالة $g : g(x) = \sqrt[3]{x}$ والمستقيمين $x = 1$, $x = 0$

علمًا بأن: $f(x) > g(x) \ , \ \forall x \in [0,1]$

الحل:

$\because \ f(x) > g(x) \ \forall \ x \in [0,1]$

$\therefore$ مساحة المنطقة المحددة هي:

$$A = \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 + 2 - \sqrt[3]{x})dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{3} + 2 - \frac{3}{4}\right) - (0)$$

$$= \frac{19}{12} \quad \text{(وحدة مربعة)}$$

شكل توضيحي

حاول أن تحل

4 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f : f(x) = x^2 + 3$ ومنحنى الدالة $g : g(x) = x^2 + 1$ والمستقيمين $x = 1$, $x = -1$

علمًا بأن: $f(x) > g(x) \ , \ \forall x \in [-1,1]$

مثال (5)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f : f(x) = e^x$ ومنحنى الدالة $g : g(x) = -1 - x^2$ والمستقيمين $x = 3$, $x = 0$

علمًا بأن المنحنيين للدالتين f , g غير متقاطعين.

الحل:

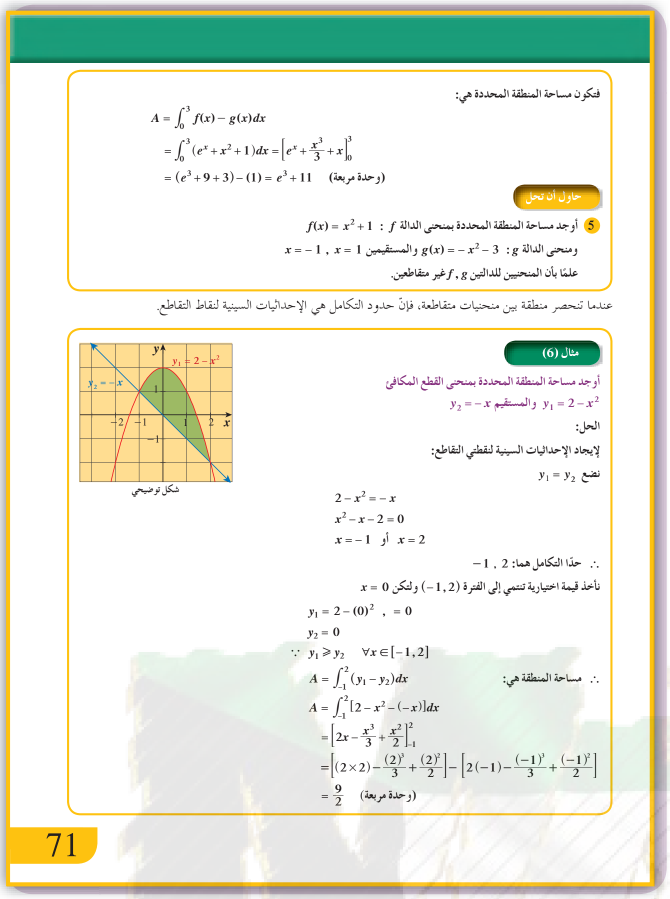
$\because$ المنحنيين غير متقاطعين نأخذ قيمة اختيارية تنتمي للفترة $(0 , 3)$ ولتكن $x = 1$

$f(1) = e^1 = e$

$g(1) = -1 - (1^2) = -2$

أي أن: $f(x) > g(x) \quad \forall \ x \in [0 \ , \ 3]$

70



فتكون مساحة المنطقة المحددة هي:

$$A = \int_0^3 f(x) - g(x)dx$$
$$= \int_0^3 (e^x + x^2 + 1)dx = \left[e^x + \frac{x^3}{3} + x\right]_0^3$$
$$= (e^3 + 9 + 3) - (1) = e^3 + 11 \quad \text{(وحدة مربعة)}$$

حاول أن تحل

5 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 1$
ومنحنى الدالة g: $g(x) = -x^2 - 3$ والمستقيمين $x = 1$, $x = -1$
علمًا بأن المنحنيين للدالتين f, g غير متقاطعين.

عندما تنحصر منطقة بين منحنيات متقاطعة، فإنّ حدود التكامل هي الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع.

مثال (6)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى القطع المكافئ
$y_1 = 2 - x^2$ والمستقيم $y_2 = -x$

شكل توضيحي

الحل:

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقطتي التقاطع:

نضع $y_1 = y_2$

$$2 - x^2 = -x$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$x = -1 \quad \text{أو} \quad x = 2$$

$\therefore$ حدّا التكامل هما: 2 , -1

نأخذ قيمة اختيارية تنتمي إلى الفترة $(-1, 2)$ ولتكن $x = 0$

$$y_1 = 2 - (0)^2 \quad , \quad = 0$$
$$y_2 = 0$$
$$\because \quad y_1 \geqslant y_2 \quad \forall x \in [-1, 2]$$

$\therefore$ مساحة المنطقة هي:

$$A = \int_{-1}^{2} (y_1 - y_2)dx$$
$$A = \int_{-1}^{2} [2 - x^2 - (-x)]dx$$
$$= \left[2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2}$$
$$= \left[(2\times 2) - \frac{(2)^3}{3} + \frac{(2)^2}{2}\right] - \left[2(-1) - \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2}\right]$$
$$= \frac{9}{2} \quad \text{(وحدة مربعة)}$$

71

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1 $$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 (x^2 - x - 2)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^3$$
$$= \left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2} - 6\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{2}{3}$$

2 $$A_1 = -\int_1^2 f(x)\,dx = -\int_1^2 (x^2 - x - 2)dx$$
$$= -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2$$
$$= -\left[\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 2\right)\right]$$
$$= -\left(-\frac{10}{3} + \frac{13}{6}\right) = \frac{7}{6} \quad \text{(وحدة مربعة)}$$

$$A_2 = \int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 (x^2 - x - 2)dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^3$$
$$= \left[\left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2} - 6\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4\right)\right]$$
$$= -\frac{3}{2} + \frac{10}{3} = \frac{11}{6} \quad \text{(وحدة مربعة)}$$

3 نلاحظ أن مساحة المنطقة المحدّدة هي:

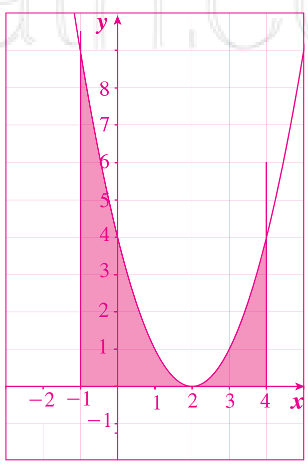
$$A_1 + A_2 = \frac{7}{6} + \frac{11}{6} = 3 \quad \text{(وحدة مربعة)}$$

بينما تكامل الدّالة $f(x)$ في الفترة $[1, 3]$ فهو
$\int_1^3 f(x)\,dx = \frac{2}{3}$.

إذًا الإجابتين غير متساويتين.

«حاول أن تحل»

1

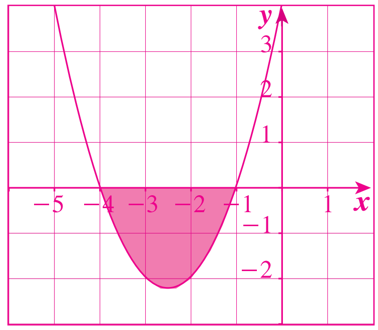


$$f(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in [-1, 4]$$

$\therefore$ المساحة:

$$A = \int_{-1}^{4} f(x)\,dx$$
$$= \int_{-1}^{4} (x^2 + 4 - 4x)dx = \frac{35}{3} \quad \text{(وحدة مربعة)}$$

2



نوجد نقاط التقاطع لمنحنى الدالة f مع محور السينات أي نأخذ: $f(x) = 0$

فنجد $x = -1 \ , \ x = -4$

نبحث، هل $f(x) \leqslant 0$ أو $f(x) \geqslant 0$ في $[-4 , -1]$؟

$$\therefore \quad f(x) \leqslant 0 \qquad \forall x \in [-4 , -1]$$

$$A = -\int_{-4}^{-1} f(x)\,dx$$

$$= -\int_{-4}^{-1} (x^2 + 5x + 4)\,dx$$

$$= \frac{9}{2} \text{ units square}$$

3 **(a)** لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع لمنحنى الدالة مع محور السينات، نحل المسألة: $f(x) = 0$

فنجد: $x = -3 \ , \ x = 0 \ , \ x = 3$ لذا:

$$A = \left|\int_{-2}^{0} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1} f(x)\,dx\right|$$

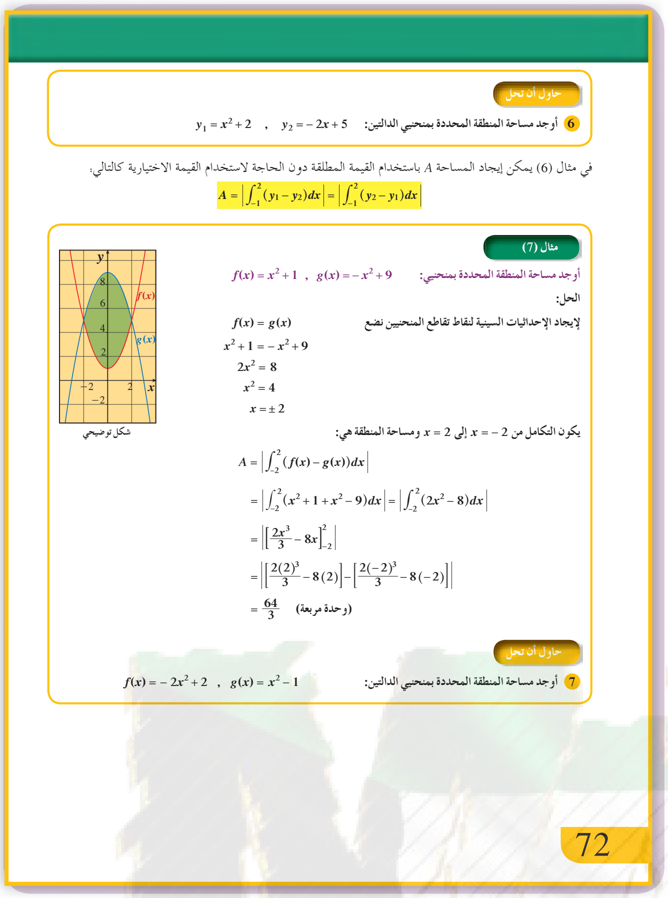
$$= 14 + \frac{17}{4} = \frac{73}{4} \text{ units square}$$

(b) لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع لمنحنى الدالة مع محور السينات، نحل المسألة: $f(x) = 0$ في الفترة $[0 \ ; \ \pi]$

فنجد: $x = \frac{\pi}{2}$ لذا:

$$A = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,dx\right|$$

$$= 1 + 1 = 2 \qquad \text{(وحدة مربعة)}$$



حاول أن تحل

6 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين: $y_1 = x^2 + 2 \quad , \quad y_2 = -2x + 5$

في مثال (6) يمكن إيجاد المساحة A باستخدام القيمة المطلقة دون الحاجة لاستخدام القيمة الاختيارية كالتالي:

$$A = \left|\int_{-1}^{2} (y_1 - y_2)\,dx\right| = \left|\int_{-1}^{2} (y_2 - y_1)\,dx\right|$$

مثال (7)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي: $f(x) = x^2 + 1 \ , \ g(x) = -x^2 + 9$

الحل:

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنيين نضع $f(x) = g(x)$

$$x^2 + 1 = -x^2 + 9$$
$$2x^2 = 8$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$

شكل توضيحي

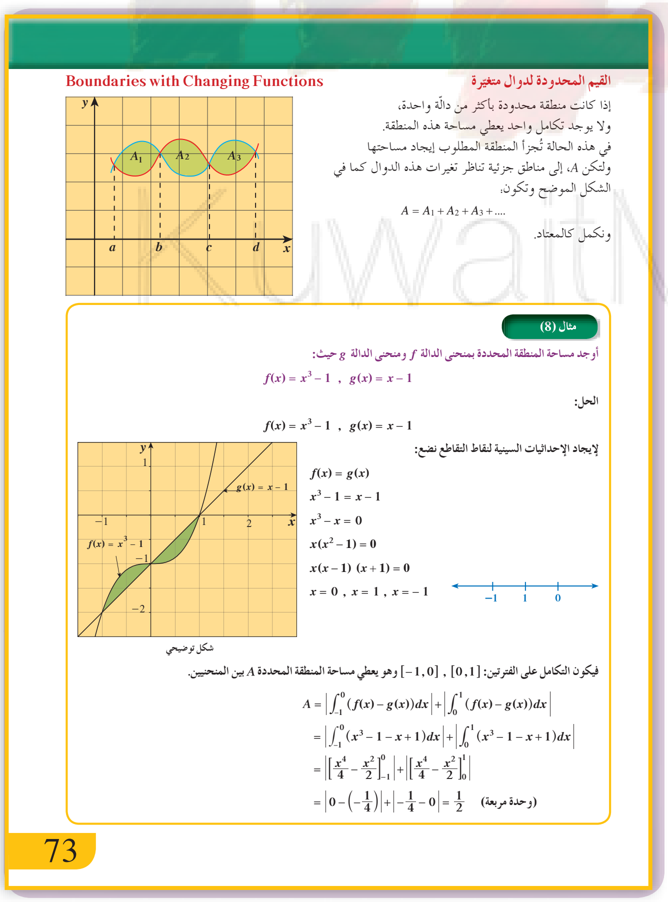
يكون التكامل من $x = -2$ إلى $x = 2$ ومساحة المنطقة هي:

$$A = \left|\int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\,dx\right|$$
$$= \left|\int_{-2}^{2} (x^2 + 1 + x^2 - 9)\,dx\right| = \left|\int_{-2}^{2} (2x^2 - 8)\,dx\right|$$
$$= \left|\left[\frac{2x^3}{3} - 8x\right]_{-2}^{2}\right|$$
$$= \left|\left[\frac{2(2)^3}{3} - 8(2)\right] - \left[\frac{2(-2)^3}{3} - 8(-2)\right]\right|$$
$$= \frac{64}{3} \quad \text{(وحدة مربعة)}$$

حاول أن تحل

7 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين: $f(x) = -2x^2 + 2 \ , \ g(x) = x^2 - 1$

72



القيم المحدودة لدوال متغيّرة — Boundaries with Changing Functions

إذا كانت منطقة محدودة بأكثر من دالّة واحدة، ولا يوجد تكامل واحد يعطي مساحة هذه المنطقة. في هذه الحالة تُجزأ المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها ولتكن A، إلى مناطق جزئية تناظر تغيرات هذه الدوال كما في الشكل الموضح وتكون:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots.$$

ونكمل كالمعتاد.

مثال (8)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومنحنى الدالة g حيث:

$$f(x) = x^3 - 1 \ , \ g(x) = x - 1$$

الحل:

$$f(x) = x^3 - 1 \ , \ g(x) = x - 1$$

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع نضع:

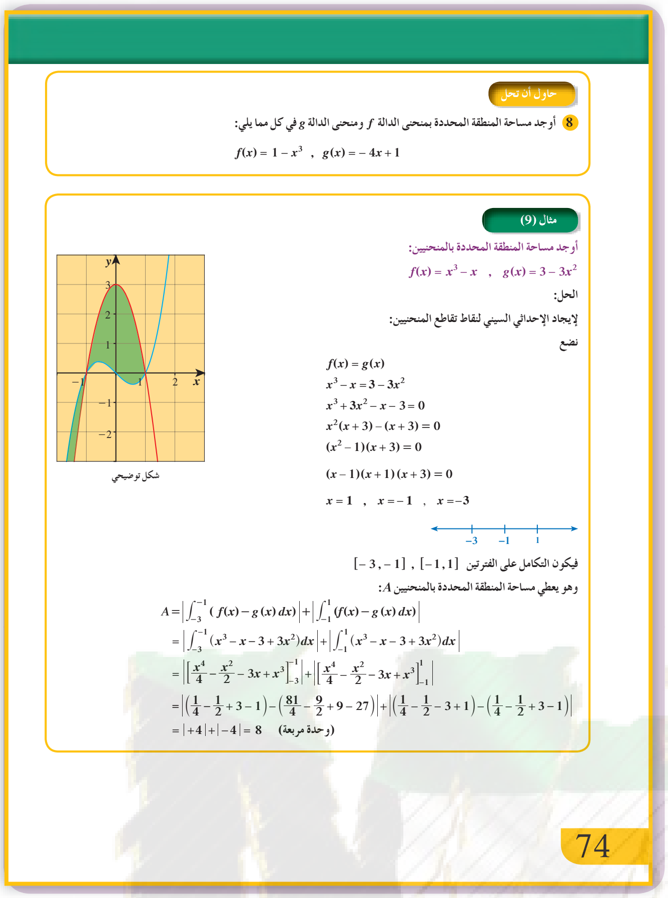
$$f(x) = g(x)$$
$$x^3 - 1 = x - 1$$
$$x^3 - x = 0$$
$$x(x^2 - 1) = 0$$
$$x(x - 1)\,(x + 1) = 0$$
$$x = 0 \ , \ x = 1 \ , \ x = -1$$

شكل توضيحي

فيكون التكامل على الفترتين: $[0 , 1] \ , \ [-1 , 0]$ وهو يعطي مساحة المنطقة المحددة A بين المنحنيين.

$$A = \left|\int_{-1}^{0} (f(x) - g(x))\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (f(x) - g(x))\,dx\right|$$
$$= \left|\int_{-1}^{0} (x^3 - 1 - x + 1)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (x^3 - 1 - x + 1)\,dx\right|$$
$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}\right|$$
$$= \left|0 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right| + \left|-\frac{1}{4} - 0\right| = \frac{1}{2} \quad \text{(وحدة مربعة)}$$

73



حاول أن تحل

8 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومنحنى الدالة g في كل مما يلي:

$f(x) = 1 - x^3 \quad , \quad g(x) = -4x + 1$

مثال (9)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين:

$f(x) = x^3 - x \quad , \quad g(x) = 3 - 3x^2$

الحل:

لإيجاد الإحداثي السيني لنقاط تقاطع المنحنيين:

نضع

$$f(x) = g(x)$$
$$x^3 - x = 3 - 3x^2$$
$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$$
$$x^2(x+3) - (x+3) = 0$$
$$(x^2 - 1)(x+3) = 0$$
$$(x-1)(x+1)(x+3) = 0$$
$$x = 1 \quad , \quad x = -1 \quad , \quad x = -3$$

شكل توضيحي

فيكون التكامل على الفترتين $[-1,1]$, $[-3,-1]$

وهو يعطي مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين A:

$$A = \left|\int_{-3}^{-1} (f(x) - g(x)\,dx)\right| + \left|\int_{-1}^{1} (f(x) - g(x)\,dx)\right|$$
$$= \left|\int_{-3}^{-1} (x^3 - x - 3 + 3x^2)dx\right| + \left|\int_{-1}^{1} (x^3 - x - 3 + 3x^2)dx\right|$$
$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - 3x + x^3\right]_{-3}^{-1}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - 3x + x^3\right]_{-1}^{1}\right|$$
$$= \left|\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 3 - 1\right) - \left(\frac{81}{4} - \frac{9}{2} + 9 - 27\right)\right| + \left|\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 3 + 1\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 3 - 1\right)\right|$$
$$= |+4| + |-4| = 8 \quad \text{(وحدة مربعة)}$$

74

4 لنأخذ $x = 0$ على الفترة $[-1,1]$

نحسب: $f(0) = 0^2 + 3 = 3$

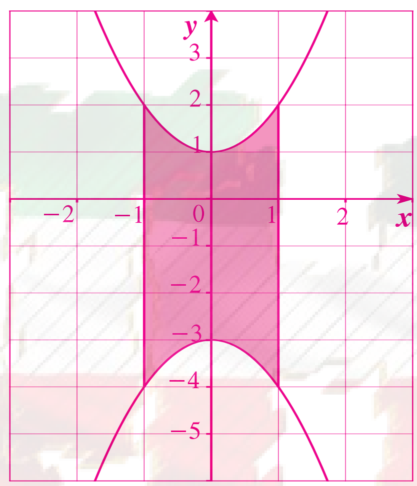
$g(0) = 0^2 + 1 = 1$

ومنه $f(0) > g(0)$

وبالتالي: $\forall x \in [-1,1] \qquad f(x) \geqslant g(x)$

$$A = \int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)]dx = \int_{-1}^{1} (x^2 + 3 - x^2 - 1)dx$$
$$= \int_{-1}^{1} (2)dx = [2x]_{-1}^{1}$$
$$= 2 + 2 = 4 \text{ units square}$$

5 رسم توضيحي

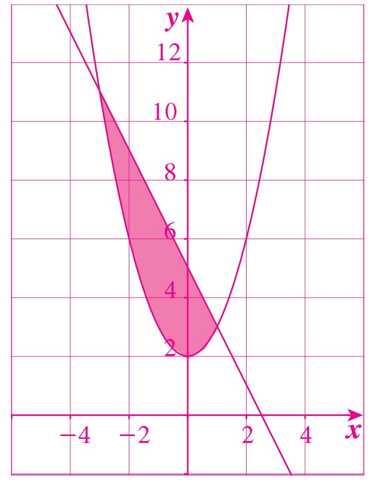


لا يوجد تقاطع بين المنحنيين:

$$A = \left|\int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)]dx\right| = \left|\int_{-1}^{1} (x^2 + 1 + x^2 + 3)dx\right|$$
$$= \left|\int_{-1}^{1} (2x^2 + 4)dx\right| = \left|\left[\frac{2x^3}{3} + 4x\right]_{-1}^{1}\right|$$
$$= \frac{28}{3} \text{ units square}$$

6

رسم توضيحي



نوجد إحداثيات التقاطع بحل المسألة: $y_1 = y_2$

فنجد: $x = -3 \ , \ x = 1$

مساحة المنطقة المظللة المطلوبة:

$$\therefore \quad y_2 \geqslant y_1 \quad \forall x \in [-3, 1]$$

$$A = \int_{-3}^{1} (y_2 - y_1)dx$$

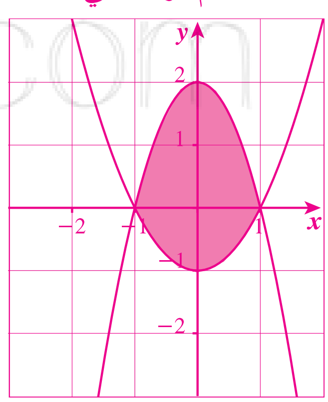
$$= \int_{-3}^{1} (-2x + 5 - x^2 - 2)dx$$

$$= \int_{-3}^{1} (-x^2 - 2x + 3)dx$$

$$= \frac{32}{3}$$ (وحدة مربعة)

7

رسم توضيحي



نوجد إحداثيات التقاطع بحل المسألة: $f(x) = g(x)$

فنجد: $x = -1 \ , \ x = 1$

مساحة المنطقة المظللة المطلوبة:

$$A = \left| \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))dx \right| = \left| \int_{-1}^{1} (-2x^2 + 2 - x^2 + 1)dx \right|$$

$$= \left| \int_{-1}^{1} (-3x^2 + 3)dx \right| = \left| [-x^3 + 3x]_{-1}^{1} \right|$$

$$= 4$$ (وحدة مربعة)

حاول أن تحل

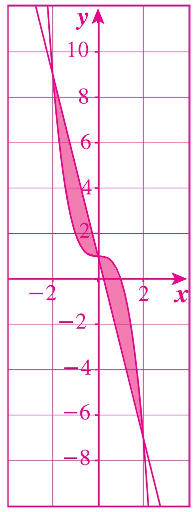
9 أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين:

$f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad g(x) = \frac{x}{2}$

والمستقيمين $x = 9 \ , \ x = 0$

75

8 رسم توضيحي



نوجد إحداثيات التقاطع بحل المسألة: $f(x) = g(x)$

فنجد: $x = -2 \ , \ x = 2$

$$\therefore \quad g(x) \geqslant f(x) \qquad \forall x \in [-2 , 0]$$

$$f(x) \geqslant g(x) \qquad \forall x \in [0 , 2]$$

إذًا:

$$A = \int_{-2}^{0} [g(x) - f(x)]dx + \int_{0}^{2} [f(x) - g(x)]dx$$

$$= \int_{-2}^{0} (-4x + 1 - 1 + x^3)dx + \int_{0}^{2} (1 - x^3 + 4x - 1)dx$$

$$= \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)dx + \int_{0}^{2} (-x^3 + 4x)dx$$

$= 4 + 4 = 8$ (وحدة مربعة)

تمرّن 6−1

المساحات في المستوي
Areas in the Plane

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 8x^3$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 3$, $x = 1$

(2) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 5x$ ومحور السينات.

(3) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 12 - x^2$ ومحور السينات.

في التمارين (6—4)، أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المحددة:

(4) $f(x) = x^2 - x - 6 \ , \ [-3 , 2]$

(5) $f(x) = x^3 - 6x \ , \ [0 , 3]$

(6) $f(x) = \cos 2x \ , \ \left[-\frac{\pi}{4} , \frac{\pi}{2}\right]$

(7) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 4x - x^2$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = 5 + x^2$ والمستقيمين $x = 0$, $x = 2$ علمًا بأن منحنيي الدالتين g , f غير متقاطعين.

(8) أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $f(x) = x$، والمستقيمين $x = 8$, $x = 1$.

(9) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 2x^2$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = 3 - x$ والمستقيمين $x = 3$, $x = 0$.

(10) أوجد مساحة المنطقة بين المنحنى $f(x) = 3 - x^2$ والمستقيم $g(x) = -1$.

في التمارين (13—11)، أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيات التالية:

(11) $f(x) = x^2 - 2 \ , \ g(x) = 2$

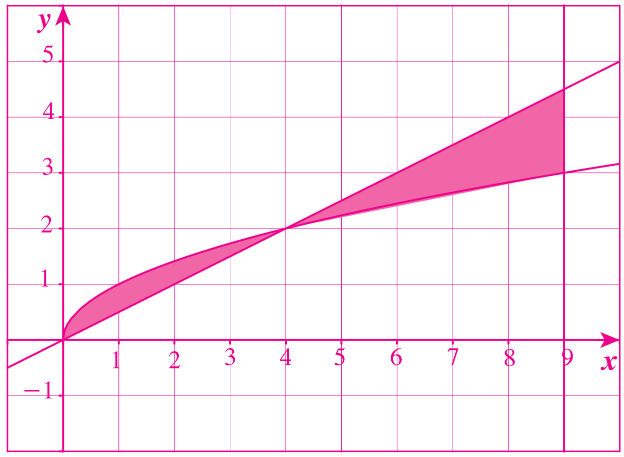
(12) $f(x) = 2x - x^2 \ , \ g(x) = -2x$

(13) $f(x) = 7 - 2x^2 \ , \ g(x) = x^2 + 4$

27

9

رسم توضيحي



نوجد إحداثيات التقاطع بحل المسألة: $f(x) = g(x)$

فنجد: $x = 0 \ , \ x = 4$

$$\therefore \quad f(x) \geqslant g(x) \qquad \forall x \in [0\,,4]$$

$$g(x) \geqslant f(x) \qquad \forall x \in [4\,,9]$$

$$A = \int_0^4 [f(x) - g(x)]dx + \int_4^9 [g(x) - f(x)]dx$$

$$= \int_0^4 \left[\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right]dx + \int_4^9 \left(\frac{x}{2} - \sqrt{x}\right)dx$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{43}{12} = \frac{59}{12}$$ (وحدة مربعة)

وهناك حلول أخرى أيضا مثل:

$$A = \left|\int_0^4 (f(x) - g(x))dx\right| + \left|\int_4^9 (f(x) - g(x))dx\right|$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = a \ , \ x = b$ هي: $\int_a^b f(x)\,dx$ (a) (b)

(2) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 4 - x^2$ ومحور السينات في $[-2,2]$ هي: $2\int_0^2 f(x)\,dx$ (a) (b)

(3) إذا كانت: $\forall x \in [a,b] \quad f(x) \le 0$ فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في $[a,b]$ هي: $\int_b^a f(x)\,dx$ (a) (b)

(4) إذا كان منحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 2x - 3$ يقطع محور السينات عند $x = -1$، $x = 3$.
فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات هي: $A = \int_{-1}^3 f(x)\,dx$ (a) (b)

(5) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = |x|$ ومحور السينات.
في الفترة $[-2,2]$ هي: 2 وحدة مساحة (a) (b)

في التمارين (6–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ ومحور السينات هي:

(a) 9π units^2 (b) 6π units^2
(c) 3π units^2 (d) $\frac{9}{2}\pi$ units^2

(7) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة g : $g(x) = (x-2)^3$ ومحور السينات في الفترة $[0,4]$ بالوحدات المربعة هي:

(a) $2\int_0^2 g(x)\,dx$ (b) $-2\int_0^2 g(x)\,dx$
(c) $\int_0^4 g(x)\,dx$ (d) $-2\int_2^4 g(x)\,dx$

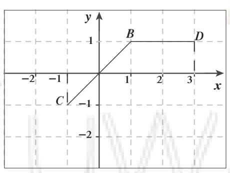
(8) مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة $f(x) = 2$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = -\sqrt{x}$ والمستقيمين $x = 0$ ، $x = 4$ هي:

(a) 20 units^2 (b) $\frac{8}{3}$ units^2
(c) $\frac{40}{3}$ units^2 (d) 8 units^2

(9) مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = x + 2$ هي:

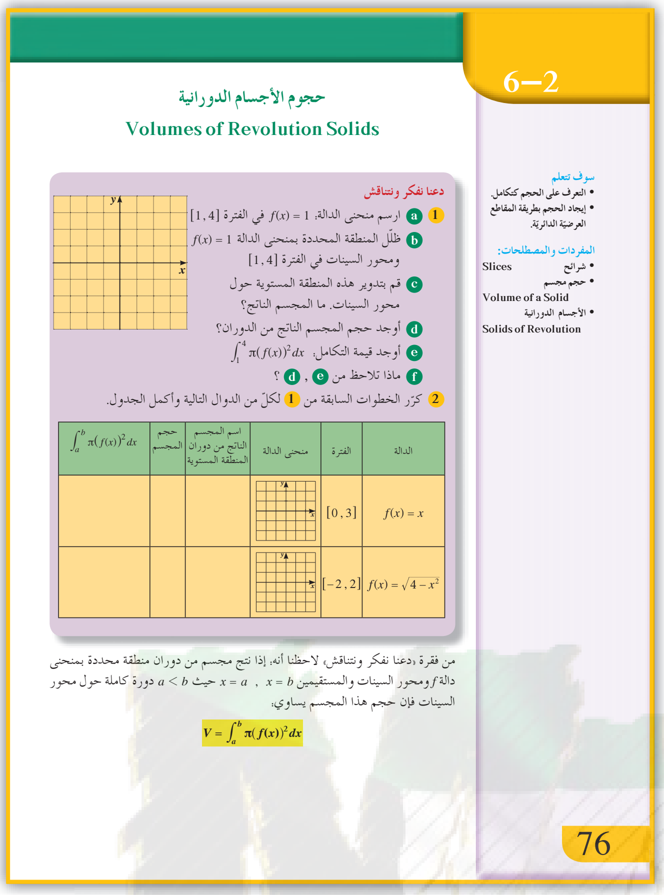
(a) $\pi - 2$ units^2 (b) π units^2
(c) $\pi + 2$ units^2 (d) 2 units^2

(10) إذا كان بيان الدالة f يمثله $\overline{CB} \cup \overline{BD}$ كما هو موضح بالشكل فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = 3 \ , \ x = -1$ هي:



(a) 3 units^2 (b) 4 units^2 (c) 2 units^2 (d) 5 units^2

6–2: حجوم الأجسام الدورانية



6–2

حجوم الأجسام الدورانية

Volumes of Revolution Solids

سوف تتعلم
- التعرف على الحجم كتكامل.
- إيجاد الحجم بطريقة المقاطع العرضيّة الدائريّة.

المفردات والمصطلحات:
- شرائح Slices
- حجم مجسم Volume of a Solid
- الأجسام الدورانية Solids of Revolution

دعنا نفكر ونتناقش

1 a ارسم منحنى الدالة: $f(x) = 1$ في الفترة $[1, 4]$

b ظلّل المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f(x) = 1$ ومحور السينات في الفترة $[1, 4]$

c قم بتدوير هذه المنطقة المستوية حول محور السينات. ما المجسم الناتج؟

d أوجد حجم المجسم الناتج من الدوران؟

e أوجد قيمة التكامل: $\int_1^4 \pi(f(x))^2\,dx$

f ماذا تلاحظ من e , d ؟

2 كرّر الخطوات السابقة من 1 لكلّ من الدوال التالية وأكمل الجدول.

الدالة	الفترة	منحنى الدالة	اسم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية	حجم المجسم	$\int_a^b \pi(f(x))^2\,dx$
$f(x) = x$	$[0, 3]$				
$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$	$[-2, 2]$				

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» لاحظنا أنه: إذا نتج مجسم من دوران منطقة محددة بمنحنى دالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = b$, $x = a$ حيث $a < b$ دورة كاملة حول محور السينات فإن حجم هذا المجسم يساوي:

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2\,dx$$

76

1 الأهداف

- يربط الحجم بالتكامل.
- يوجد الحجم.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

حجم مجسم – الأجسام الدورانية.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – مجسمات – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(1) أوجد حجم كل مجسم ممّا يلي:

(a) أسطوانة نصف قطر قاعدتها 8 cm وارتفاعها 20 cm

(b) مخروط نصف قطر قاعدته 14 cm وارتفاعه 18 cm

(c) كرة نصف قطرها 24 cm

(2) احسب التكاملات التالية:

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x\,dx$

(b) $\int_{-1}^{2} \pi(x-1)^2\,dx$

5 التدريس

ركّز انتباه الطلاب على حساب حجوم الأجسام الناتجة من الدوران دورة كاملة حول محور السينات لمنطقة مستوية محددة على فترة $[a\,,b]$، محور السينات ومنحنى دالة متصلة.

المثال (1)

يبيّن كيفية استخدام القاعدة: $V=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$ لإيجاد حجم مجسم ناتج من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحى دالة ومحور السينات وذلك على فترة محددة ومن ثم تطبيق التكامل المحدد.

المثال (2)

يعطي هذا المثال فكرة واضحة عن دوران نصف دائرة حول محور السينات نصف قطرها r في فترة محددة $[-r\,,r]$ وباستخدام قاعدة إيجاد الحجم نحصل على حجم كرة بدلالة نصف قطرها.

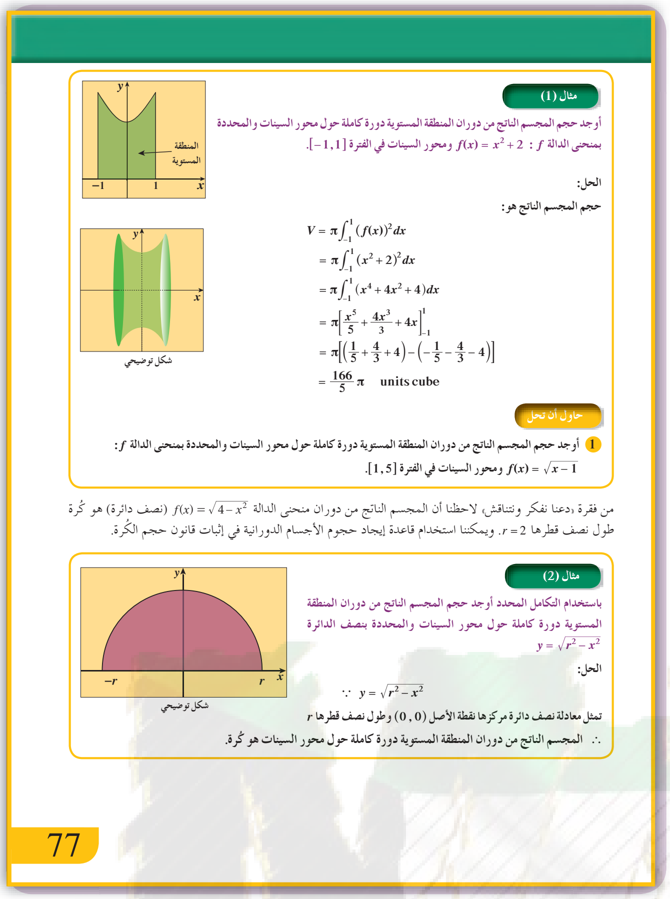
في المثالين (3), (4)

أخبر الطلاب أنه في حال تدوير منطقة محددة بمنحنيين لدالتين مختلفتين يجب الانتباه إلى المجسم الناجم عن هذا الدوران حول محور السينات، وبالتالي يصبح حجم المجسم ناتج طرح وذلك بحسب مواقع المنحنيات، لذا يكون حجم المجسّم يساوي:

$$V=\pi\int_a^b [(g(x))^2-(f(x))^2]dx$$

أو $$V=\pi\int_a^b [(f(x))^2-(g(x))^2]dx$$

نبّه الطلاب أن المنحنيين يقعان إما أسفل محور السينات معًا أو فوق محور السينات معًا.



مثال (1)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=x^2+2$ ومحور السينات في الفترة $[-1\,,1]$.

المنطقة المستوية

الحل:

حجم المجسم الناتج هو:

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_{-1}^{1}(f(x))^2dx\\&=\pi\int_{-1}^{1}(x^2+2)^2dx\\&=\pi\int_{-1}^{1}(x^4+4x^2+4)dx\\&=\pi\left[\frac{x^5}{5}+\frac{4x^3}{3}+4x\right]_{-1}^{1}\\&=\pi\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{3}+4\right)-\left(-\frac{1}{5}-\frac{4}{3}-4\right)\right]\\&=\frac{166}{5}\pi \quad \text{units cube}\end{aligned}$$

شكل توضيحي

حاول أن تحل

1 أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f: $f(x)=\sqrt{x-1}$ ومحور السينات في الفترة $[1\,,5]$.

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» لاحظنا أن المجسم الناتج من دوران منحنى الدالة $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ (نصف دائرة) هو كُرة طول نصف قطرها $r=2$. ويمكننا استخدام قاعدة إيجاد حجوم الأجسام الدورانية في إثبات قانون حجم الكُرة.

مثال (2)

باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بنصف الدائرة $y=\sqrt{r^2-x^2}$

الحل:

$\because\ y=\sqrt{r^2-x^2}$

تمثل معادلة نصف دائرة مركزها نقطة الأصل $(0\,,0)$ وطول نصف قطرها r

$\therefore$ المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات هو كُرة.

شكل توضيحي

77

6 الربط

لا يوجد.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في:

(a) إيجاد طرح الدالتين قبل التربيع.

(b) استخدام إحدى الدالتين فقط.

(c) إهمال π عند كتابة قانون الحجم.

(d) تحديد وضع المنحنيين.

8 التقييم

تابع الطلاب بدقة وهم يتعاملون مع فقرات «دعنا نفكر ونتناقش» و«حاول أن تحل» لتتأكد من أنهم قادرين على ملاحظة دوران المنطقة وتطبيق القاعدة لإيجاد الحجم.

اختبار سريع

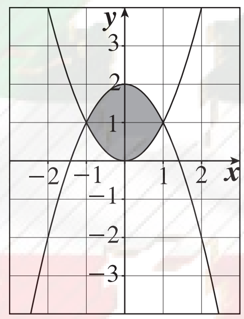
❶ أوجد حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المستوية المحددة بين: $x=-1$ ، $x=3$ ، محور السينات ومنحنى $f(x)=\sqrt{x+1}$

$V=\int_{-1}^{3}\pi\, f(x)^2\,dx$

$V=\pi\int_{-1}^{3}(x+1)\,dx = 8\pi$ units cube

❷ أوجد حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المستوية المحددة بمنحنيي الدالتين:

$f(x)=x^2\ ,\ g(x)=-x^2+2$



المنطقة المستوية محددة بمنحنيي الدالتين.

نوجد التقاطع:

$f(x)=g(x)$

$x^2=-x^2+2$

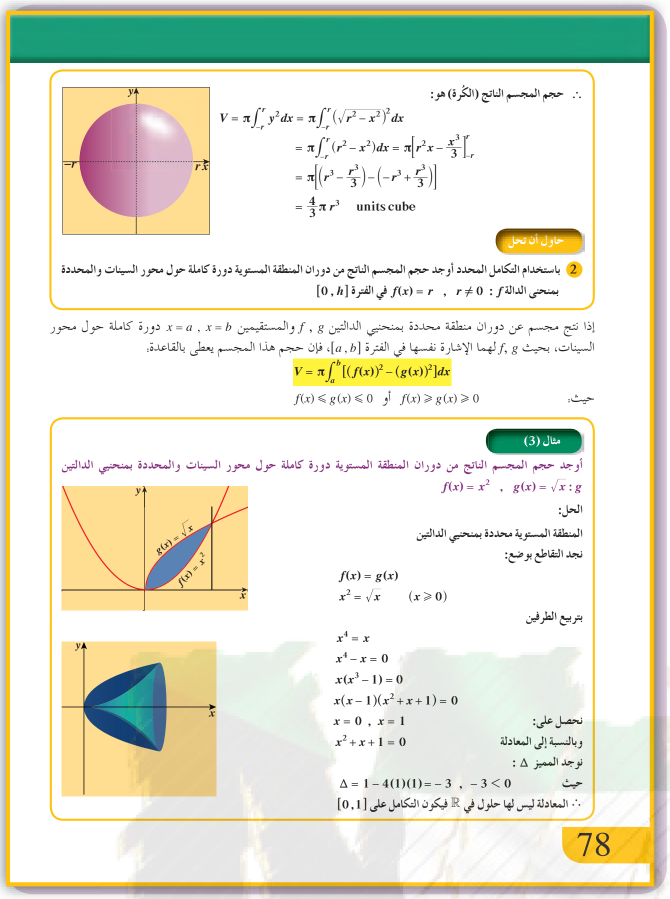
$2x^2=2\ ;\ x^2=1 \quad x=\pm 1$

فيكون التكامل على الفترة $[-1,1]$

والحجم: $V=\pi\int_{-1}^{1}[(g(x))^2-(f(x))^2]dx$

$V=\pi\int_{-1}^{1}[(-x^2+2)^2-(x^2)^2]dx$

$=\pi\int_{-1}^{1}(-4x^2+4)dx=\frac{16}{3}\pi$ units cube



∴ حجم المجسم الناتج (الكُرة) هو:

$$V=\pi\int_{-r}^{r}y^2dx=\pi\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx$$
$$=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)dx=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}$$
$$=\pi\left[\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)-\left(-r^3+\frac{r^3}{3}\right)\right]$$
$$=\frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{units cube}$$

حاول أن تحل

2 باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f : $r\neq 0$, $f(x)=r$ في الفترة $[0,h]$

إذا نتج مجسم عن دوران منطقة محددة بمنحنيي الدالتين g , f والمستقيمين $x=b$, $x=a$ دورة كاملة حول محور السينات، بحيث f, g لهما الإشارة نفسها في الفترة $[a,b]$، فإن حجم هذا المجسم يعطى بالقاعدة:

$$V=\pi\int_a^b[(f(x))^2-(g(x))^2]dx$$

حيث: $f(x)\geqslant g(x)\geqslant 0$ أو $f(x)\leqslant g(x)\leqslant 0$

مثال (3)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين g : $g(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=x^2$

الحل:

المنطقة المستوية محددة بمنحنيي الدالتين

نجد التقاطع بوضع:

$f(x)=g(x)$

$x^2=\sqrt{x} \qquad (x\geqslant 0)$

بتربيع الطرفين

$x^4=x$

$x^4-x=0$

$x(x^3-1)=0$

$x(x-1)(x^2+x+1)=0$

نحصل على: $x=0\ ,\ x=1$

وبالنسبة إلى المعادلة $x^2+x+1=0$

نوجد المميز Δ :

حيث $\Delta=1-4(1)(1)=-3\ ,\ -3<0$

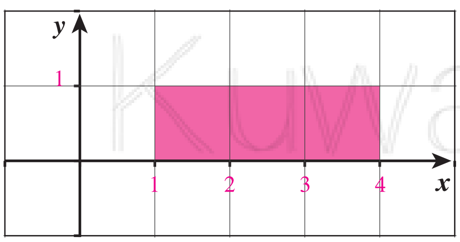
∴ المعادلة ليس لها حلول في $\mathbb{R}$ فيكون التكامل على $[0,1]$

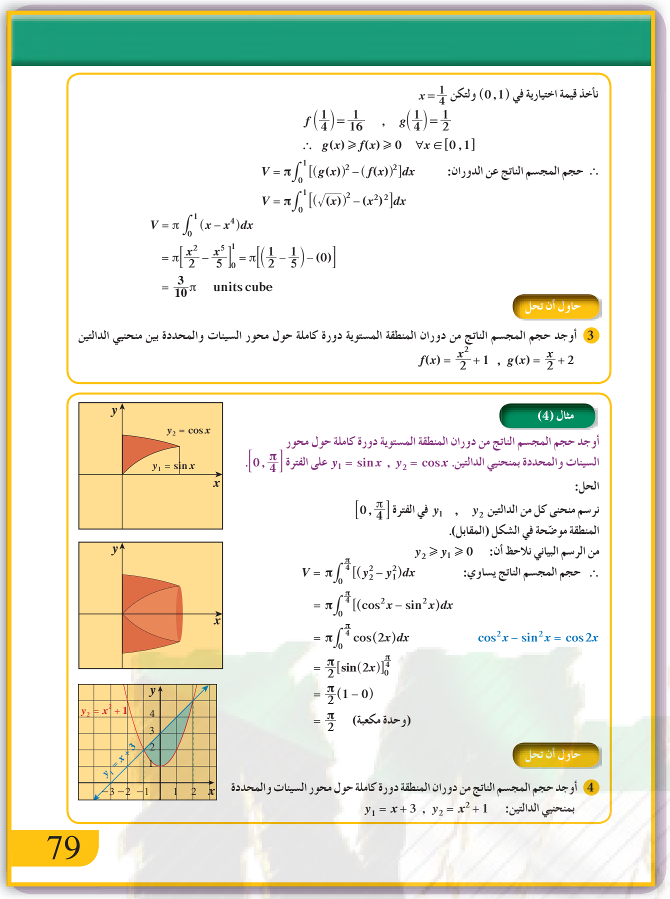
78

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

❶ (a) ،(b)




نأخذ قيمة اختيارية في $(0,1)$ ولتكن $x=\frac{1}{4}$

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{16} \quad , \quad g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad g(x) \geqslant f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

$\therefore$ حجم المجسم الناتج عن الدوران: $V=\pi\int_0^1 [(g(x))^2-(f(x))^2]dx$

$$V=\pi\int_0^1 [(\sqrt{(x)})^2-(x^2)^2]dx$$

$$V=\pi\int_0^1 (x-x^4)dx$$

$$=\pi\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\pi\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)-(0)\right]$$

$$=\frac{3}{10}\pi \quad \text{units cube}$$

حاول أن تحل

3 أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بين منحنيي الدالتين $f(x)=\frac{x^2}{2}+1 \ , \ g(x)=\frac{x}{2}+2$

مثال (4)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين. $y_1=\sin x \ , \ y_2=\cos x$ على الفترة $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

الحل:

نرسم منحنى كل من الدالتين y_2 ، y_1 في الفترة $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

المنطقة موضّحة في الشكل (المقابل).

من الرسم البياني نلاحظ أن: $y_2 \geqslant y_1 \geqslant 0$

$\therefore$ حجم المجسم الناتج يساوي: $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}[(y_2^2-y_1^2)dx$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}[(\cos^2 x-\sin^2 x)dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2x)dx \qquad \cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$$

$$=\frac{\pi}{2}[\sin(2x)]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\pi}{2}(1-0)$$

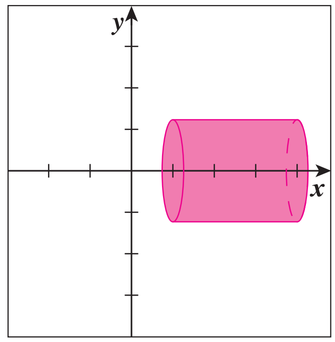
$$=\frac{\pi}{2} \quad \text{(وحدة مكعبة)}$$

حاول أن تحل

4 أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين: $y_1=x+3 \ , \ y_2=x^2+1$

79

(c)



المجسم الناتج هو «أسطوانة».

(d) حجم المجسم الناتج من الدوران هو:

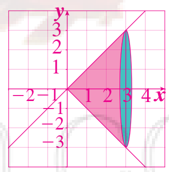
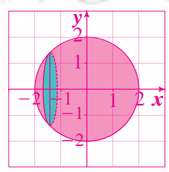
$$V=\pi r^2 \times h$$

$$=\pi(1)^2 \times 3 = 3\pi \quad \text{(وحدة مكعبة)}$$

(e) $\int_1^4 \pi(1)^2 dx = \pi[x]_1^4 = 3\pi$

(f) نلاحظ من (e)، (d) أنّ حجم المجسّم الناتج من الدوران يساوي: $V=\int_1^4 \pi(f(x))^2 dx$

2

الدالة	الفترة	منحنى الدالة	اسم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية	حجم المجسّم	$\int_a^b \pi(f(x))^2 dx$
$f(x)=x$	$[0,3]$		مخروط	$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ $V=\frac{1}{3}\pi \times 9 \times 3$ $V=9\pi$ units cube	$\int_0^3 \pi x^2 dx$ $=\frac{\pi}{3}[x^3]_0^3=9\pi$
$f(x)=\sqrt{4-x^2}$	$[-2,2]$		كرة	$V=\frac{4}{3}\pi r^3$ $V=\frac{32}{3}\pi$ units cube	$\pi\int_{-2}^2 (4-x^2)dx$ $=\pi\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^2=\frac{32}{3}\pi$

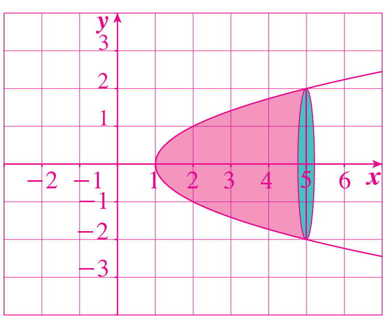
«حاول أن تحل»

1 حجم المجسم يساوي:

$$V=\int_1^5 \pi(f(x))^2 dx$$

$$=\pi\int_1^5 (\sqrt{x-1})^2 dx = 8\pi \quad \text{(وحدة مكعّبة)}$$

رسم توضيحي



2 $A = \int_0^h \pi (f(x))^2 dx = \int_0^h \pi r^2 dx$

$= [\pi r^2 x]_0^h = \pi r^2 \times h$ (وحدة مكعّبة)

3 نوجد نقاط التقاطع بوضع $f(x) = g(x)$

$\frac{x^2}{2} + 1 = \frac{x}{2} + 2 \qquad x = -1 \ , \ x = 2$

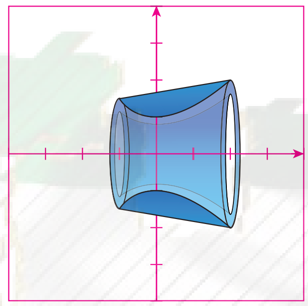
$(g(x)) \geq (f(x)) \qquad \forall x \in [-1, 2]$

$V = \pi \int_{-1}^{2} [(g(x))^2 - (f(x))^2] dx$

$= \pi \int_{-1}^{2} \left[\left(\frac{x}{2} + 2 \right)^2 - \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right)^2 \right] dx;$

$= \frac{81\pi}{10}$ (وحدة مكعّبة)

رسم توضيحي



4 نوجد نقاط التقاطع بوضع $y_1 = y_2$

$x + 3 = x^2 + 1 \qquad x = -1 \ , \ x = 2$

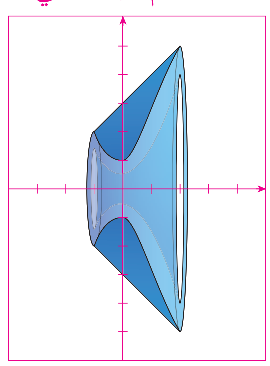
$\because \ y_1 \geqslant y_2 \quad \forall x \in [-1, 2]$

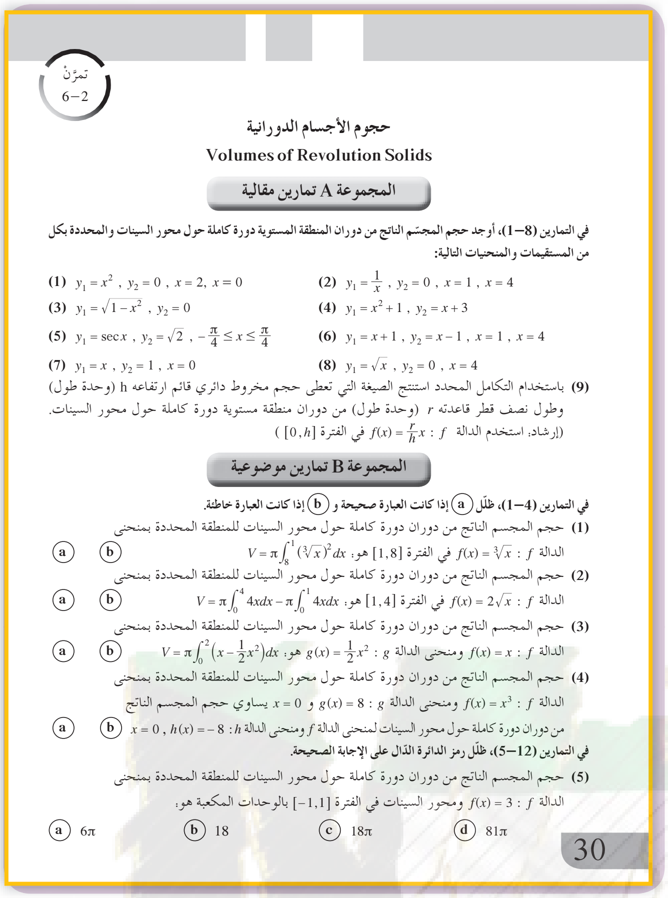
$\therefore \ V = \pi \int_{-1}^{2} [y_1^2 - y_2^2] dx$

$= \pi \int_{-1}^{2} [(x+3)^2 - (x^2+1)^2] dx$

$= \frac{117\pi}{5}$ (وحدة مكعّبة)

رسم توضيحي





تمرَّنْ 6−2

حجوم الأجسام الدورانية

Volumes of Revolution Solids

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (8–1)، أوجد حجم المجسّم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بكل من المستقيمات والمنحنيات التالية:

(1) $y_1 = x^2 \ , \ y_2 = 0 \ , \ x = 2, \ x = 0$

(2) $y_1 = \frac{1}{x} \ , \ y_2 = 0 \ , \ x = 1 \ , \ x = 4$

(3) $y_1 = \sqrt{1 - x^2} \ , \ y_2 = 0$

(4) $y_1 = x^2 + 1 \ , \ y_2 = x + 3$

(5) $y_1 = \sec x \ , \ y_2 = \sqrt{2} \ , \ -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

(6) $y_1 = x + 1 \ , \ y_2 = x - 1 \ , \ x = 1 \ , \ x = 4$

(7) $y_1 = x \ , \ y_2 = 1 \ , \ x = 0$

(8) $y_1 = \sqrt{x} \ , \ y_2 = 0 \ , \ x = 4$

(9) باستخدام التكامل المحدد استنتج الصيغة التي تعطى حجم مخروط دائري قائم ارتفاعه h (وحدة طول) وطول نصف قطر قاعدته r (وحدة طول) من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول محور السينات.
(إرشاد: استخدم الدالة f : $f(x) = \frac{r}{h}x$ في الفترة $[0, h]$)

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt[3]{x}$ في الفترة $[1, 8]$ هو: $V = \pi \int_8^1 (\sqrt[3]{x})^2 dx$ (a) (b)

(2) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 2\sqrt{x}$ في الفترة $[1, 4]$ هو: $V = \pi \int_0^4 4x dx - \pi \int_0^1 4x dx$ (a) (b)

(3) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ هو: $V = \pi \int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) dx$ (a) (b)

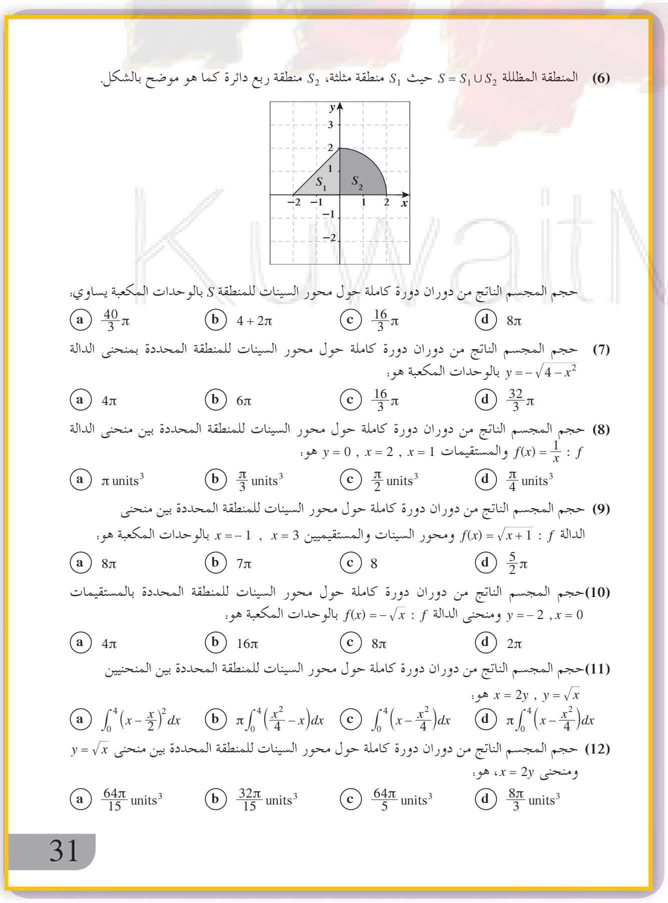
(4) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^3$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = 8$ و $x = 0$ يساوي حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات لمنحنى الدالة f ومنحنى الدالة h : $h(x) = -8$, $x = 0$ (a) (b)

في التمارين (12–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 3$ ومحور السينات في الفترة $[-1, 1]$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) 6π (b) 18 (c) 18π (d) 81π

30



(6) المنطقة المظللة $S = S_1 \cup S_2$ حيث S_1 منطقة مثلثة، S_2 منطقة ربع دائرة كما هو موضح بالشكل.

حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة S بالوحدات المكعبة يساوي:

(a) $\frac{40}{3}\pi$ (b) $4 + 2\pi$ (c) $\frac{16}{3}\pi$ (d) 8π

(7) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة $y = -\sqrt{4 - x^2}$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) 4π (b) 6π (c) $\frac{16}{3}\pi$ (d) $\frac{32}{3}\pi$

(8) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{1}{x}$ والمستقيمات $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$ هو:

(a) π units³ (b) $\frac{\pi}{3}$ units³ (c) $\frac{\pi}{2}$ units³ (d) $\frac{\pi}{4}$ units³

(9) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين منحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{x+1}$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 3$, $x = -1$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) 8π (b) 7π (c) 8 (d) $\frac{5}{2}\pi$

(10) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بالمستقيمات $x = 0$, $y = -2$ ومنحنى الدالة f : $f(x) = -\sqrt{x}$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) 4π (b) 16π (c) 8π (d) 2π

(11) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين المنحنيين $y = \sqrt{x}$, $x = 2y$ هو:

(a) $\int_0^4 \left(x - \frac{x}{2}\right)^2 dx$ (b) $\pi \int_0^4 \left(\frac{x^2}{4} - x\right) dx$ (c) $\int_0^4 \left(x - \frac{x^2}{4}\right) dx$ (d) $\pi \int_0^4 \left(x - \frac{x^2}{4}\right) dx$

(12) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين منحنى $y = \sqrt{x}$ ومنحنى $x = 2y$، هو:

(a) $\frac{64\pi}{15}$ units³ (b) $\frac{32\pi}{15}$ units³ (c) $\frac{64\pi}{5}$ units³ (d) $\frac{8\pi}{3}$ units³

31

6–3: طول قوس ومعادلة منحنى دالة


6–3

طول قوس ومعادلة منحنى دالة

Arc Length and Equation of Function Curve

سوف تتعلم
- معادلة منحنى دالة بمعلومية ميل المماس ونقطة تنتمي إلى بيان الدالة.
- طول القوس.

المفردات والمصطلحات:
- معادلة منحنى دالة Equation of Function Curve
- طول قوس Arc Length

دعنا نفكر ونتناقش

تعرفت سابقًا أن محيط دائرة طول نصف قطرها r يعطى بالقاعدة: $2\pi r$ وأن القوس المقابل لزاوية مركزية θ (radians) في الدائرة طوله: $L = r\theta$.

أكمل الجدول التالي:

طول القوس المقابل (L)	قياس زاوية مركزية في دائرة θ (radians)
	$\frac{\pi}{6}$
	$\frac{\pi}{2}$
	π
	$\frac{3\pi}{2}$

أولًا: إيجاد طول قوس من منحنى

نلاحظ من خلال فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» أن بالإمكان إيجاد طول قوس على منحنى مألوف لدينا وهو الدائرة حيث استخدمنا القاعدة $L = r\theta$.

كما أننا نستخدم قاعدة لإيجاد طول قوس على أي منحنى.

قاعدة طول القوس

إذا كانت الدالة f' متصلة على $[a, b]$ فإن طول القوس من منحنى $y = f(x)$ في $[a, b]$ هو:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

ملاحظة: سنتعامل في هذا البند مع دوال مشتقاتها متصلة على الفترات المعطاة.

80

1 الأهداف

- يوجد طول قوس من منحنى الدالة.
- يوجد معادلة منحنى دالة بمعلومية ميل المماس ونقطة تنتمي إلى بيان الدالة.
- يوجد معادلة منحنى دالة بمعلومية ميل العمودي ونقطة تنتمي للمنحنى.
- يوجد معادلة منحنى دالة بمعلومية المشتقة الثانية للدالة ونقطة تنتمي للمنحنى.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

طول قوس – معادلة منحنى دالة.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(1) أوجد المشتقة الأولى $f'(x)$ والمشتقة الثانية $f''(x)$ للدالة f في كلّ من الحالات التالية:

(a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 7$

(b) $f(x) = \sqrt{x}$

(2) أوجد: $\int_1^3 \sqrt{7 + 5x}\, dx$

(3) أوجد: $f(x)$ حيث $f''(x) = 2x$

عند $f'(1) = 2$ ، $f(1) = \frac{7}{3}$

5 التدريس

يستخدم الطلاب في هذا الدرس المشتقات والتكامل المحدد لإيجاد طول قوس من منحنى دالة $f(x)$ في فترة محددة.

ويوجد الطلاب معادلة منحنى دالة بمعلومية الميل عند أي نقطة $P(x, y)$، ثم يوجد هذه المعادلة بمعلومية نقطة محددة تنتمي إليه.

في المثالين (2) ,(1)

قبل البدء بالمثالين (2) ,(1)، تأكّد من أنّ الطلاب يعرفون قاعدة طول القوس.

لتطبيق هذه القاعدة، علينا أولًا إيجاد $f'(x)$ ومن ثمّ

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}$$

في المثالين (4) ,(3)

ذكّر الطلاب أنّ ميل منحنى الدالة f عند $x = x_0$ هو $f'(x_0)$. إذًا فإنّ ميل منحنى الدالة f عند أي نقطة $(x, f(x))$ هو $f'(x)$ ولإيجاد معادلة منحنى الدالة f علينا إيجاد $\int f'(x)\,dx$.

لاحظ أن معادلة الدالة f تتضمّن ثابتًا C لمعرفته يجب التعويض بإحداثيات نقطة معلومة يمرّ بها منحنى الدالة f.

في المثال (5)

إنّ ميل العمودي على منحنى دالة f هو $\dfrac{-1}{f'(x)}$ حيث $f'(x) \neq 0$ في هذا المثال يجب أن نوجد $f'(x)$ من خلال ميل العمودي ثمّ $f(x) = \int f'(x)\,dx$.

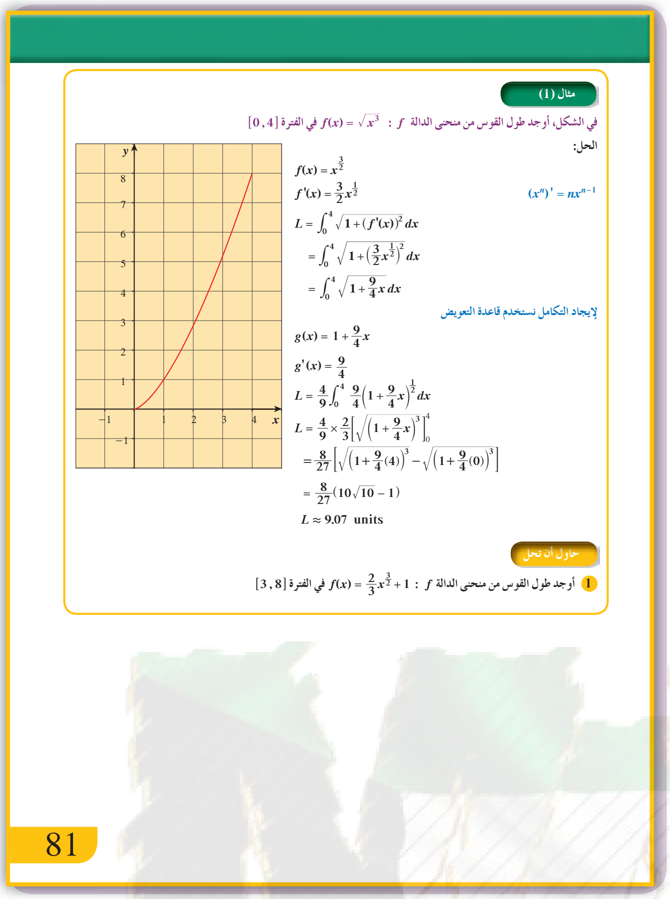
يمكننا إيجاد الثابت C الناتج من إيجاد تكامل $f'(x)$ بالتعويض بإحداثيات النقطة المعطاة.

في المثال (6)

علينا أوّلًا إيجاد $f'(x)$ وذلك بإيجاد تكامل $f''(x)$.

لاحظ أنّ معادلة المشتقة الأولى f' تتضمّن ثابتًا C، لمعرفته يجب الاستعانة بالنقطة الحرجة $(-1, 15) \quad \therefore \quad f'(-1) = 0$. ثمّ علينا إيجاد $f(x)$ وذلك بإيجاد تكامل $f'(x)$.

لاحظ أنّ معادلة الدالة f تتضمّن ثابتًا C، لمعرفته يجب التعويض بإحداثيات النقطة الحرجة.



مثال (1)

في الشكل، أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{x^3}$ في الفترة $[0, 4]$

الحل:

$f(x) = x^{\frac{3}{2}}$

$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ $\qquad (x^n)' = nx^{n-1}$

$L = \int_0^4 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

$= \int_0^4 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx$

$= \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx$

لإيجاد التكامل نستخدم قاعدة التعويض

$g(x) = 1+\frac{9}{4}x$

$g'(x) = \frac{9}{4}$

$L = \frac{4}{9}\int_0^4 \frac{9}{4}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}}dx$

$L = \frac{4}{9}\times\frac{2}{3}\left[\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^3}\right]_0^4$

$= \frac{8}{27}\left[\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}(4)\right)^3} - \sqrt{\left(1+\frac{9}{4}(0)\right)^3}\right]$

$= \frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$

$L \approx 9.07$ units

حاول أن تحل

1 أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+1$ في الفترة $[3, 8]$

81

6 الربط

لا يوجد.

7 أخطاء متوقّعة ومعالجتها

عند إيجاد طول القوس، قد يخطئ الطلاب في إيجاد التكامل $\int_a^b u'\sqrt{u}\,dx$.

أخبرهم أنّ: $\int_a^b u' u^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_a^b$

8 التقييم

تابع الطلّاب وهم يعملون على فقرات «دعنا نفكر ونتناقش» و«حاول أن تحل» لتتحقّق من قدرتهم على إيجاد الحلول وتطبيق القواعد بشكل صحيح.

اختبار سريع

❶ أوجد طول قوس من منحنى الدالة f:

$f(x) = \sqrt{(2x+1)^3}$ في الفترة $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

$$f(x) = (2x+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}} \times 2 = 3(2x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \sqrt{1+\left[3(2x+1)^{\frac{1}{2}}\right]^2}\, dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \sqrt{1+9(2x+1)}\, dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \sqrt{1+18x+9}\, dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \sqrt{10+18x}\, dx$$

لإيجاد التكامل نستخدم قاعدة التعويض:

$$u = 10 + 18x$$

$$du = 18dx$$

$$dx = \frac{1}{18}du$$

$$L = \frac{1}{18} \times \frac{2}{3}\left[\sqrt{(10+18x)^3}\right]_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}$$

$$L = \frac{56}{27} \text{ units}$$

❷ أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $(x, f(x))$ يساوي $4x^2 + 3x - 2$ ويمرّ بالنقطة $A(2, 1)$.

$$f'(x) = 4x^2 + 3x - 2$$

$$f(x) = \int (4x^2 + 3x - 2)dx$$

$$f(x) = \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x + C$$

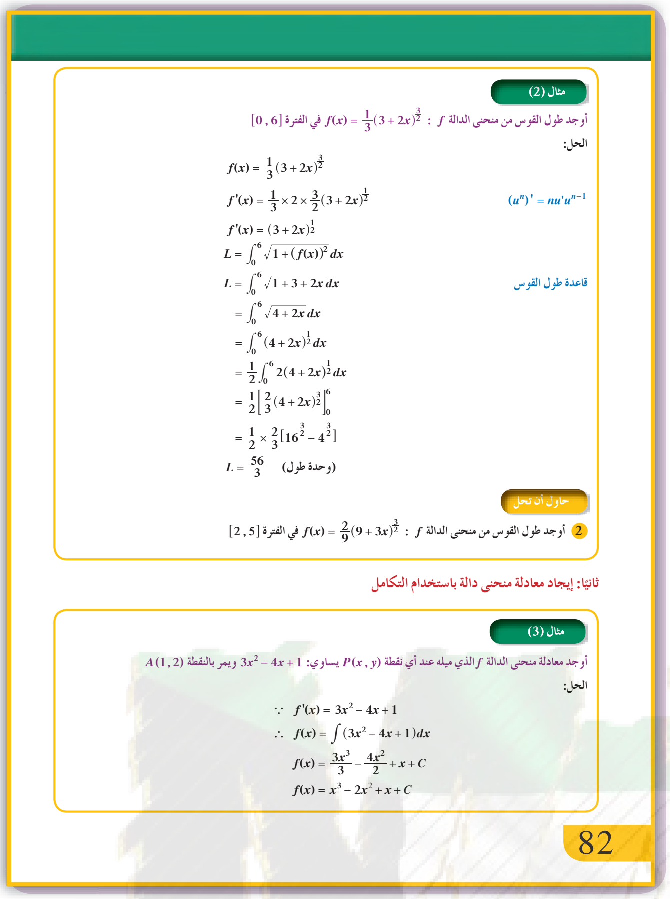
لتعيين قيمة الثابت C نعوّض بالنقطة $A(2, 1)$ في المعادلة السابقة فنحصل على:

$$1 = \frac{4}{3}(2)^3 + \frac{3}{2}(2)^2 - 2(2) + C$$

$$C = \frac{-35}{3}$$

معادلة المنحنى للدالة f المطلوبة هي:

$$f(x) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{35}{3}$$



مثال (2)

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{1}{3}(3+2x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[0, 6]$

الحل:

$$f(x) = \frac{1}{3}(3+2x)^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{3}{2}(3+2x)^{\frac{1}{2}} \qquad (u^n)' = nu'u^{n-1}$$

$$f'(x) = (3+2x)^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_0^6 \sqrt{1+(f(x))^2}\, dx$$

$$L = \int_0^6 \sqrt{1+3+2x}\, dx \qquad \text{قاعدة طول القوس}$$

$$= \int_0^6 \sqrt{4+2x}\, dx$$

$$= \int_0^6 (4+2x)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^6 2(4+2x)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(4+2x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^6$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\left[16^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right]$$

$L = \frac{56}{3}$ (وحدة طول)

حاول أن تحل

2 أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{2}{9}(9+3x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[2, 5]$

ثانيًا: إيجاد معادلة منحنى دالة باستخدام التكامل

مثال (3)

أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x, y)$ يساوي: $3x^2 - 4x + 1$ ويمر بالنقطة $A(1, 2)$

الحل:

$$\because \quad f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$\therefore \quad f(x) = \int (3x^2 - 4x + 1)dx$$

$$f(x) = \frac{3x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + x + C$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + C$$

82

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

قياس زاوية مركزية في دائرة $\theta(\text{radians})$	طول القوس المقابل (L)
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}\times r=\frac{\pi}{2}r$ (وحدة طول)
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}r$ (وحدة طول)
π	$\pi\, r$ (وحدة طول)
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}r$ (وحدة طول)

«حاول أن تحل»

1) $f(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+1$

$$f'(x)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x)=x^{\frac{1}{2}}$$

$$L=\int_3^8\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\int_3^8\sqrt{1+\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_3^8\sqrt{1+x}\,dx$$

لإيجاد التكامل نستخدم قاعدة التعويض:

$$u=1+x$$

$$du=dx$$

$$dx=du$$

$$L=\frac{2}{3}\left[\sqrt{(1+x)^3}\right]_3^8=\frac{2}{3}\left[(1+x)\sqrt{1+x}\right]_3^8$$

$$=\frac{38}{3}\quad \text{(وحدة طول)}$$

لتعيين قيمة الثابت C نعوّض بالنقطة $A(1,2)$ في المعادلة السابقة فنحصل على:

$$2=(1)^3-2(1)^2+1+C$$

$$2=1-2+1+C$$

$$C=2$$

$\therefore$ معادلة المنحنى f المطلوب هي: $f(x)=x^3-2x^2+x+2$

حاول أن تحل

3) أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x,y)$ يساوي $3x^2+x$ ويمر بالنقطة $(2,2)$

مثال (4)

أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x,y)$ يساوي: $4x^3+6x^2-2x+1$ ويمر بالنقطة $B(1,0)$

الحل:

$$\because\ f'(x)=4x^3+6x^2-2x+1$$

$$\therefore\ f(x)=\int(4x^3+6x^2-2x+1)dx$$

$$f(x)=4\frac{x^4}{4}+6\frac{x^3}{3}-2\frac{x^2}{2}+x+C$$

$$f(x)=x^4+2x^3-x^2+x+C$$

لتعيين قيمة الثابت C نعوّض بالنقطة $B(1,0)$ في المعادلة السابقة فنحصل على:

$$0=(1)^4+2(1)^3-(1)^2+1+C$$

$$0=1+2-1+1+C$$

$$C=-3$$

$\therefore$ معادلة المنحنى f المطلوب هي: $f(x)=x^4+2x^3-x^2+x-3$

حاول أن تحل

4) أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x,y)$ يساوي $-8x^3+3x^2-2x+4$ ويمر بالنقطة $(-1,-5)$

83

مثال (5)

إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x,y) يساوي $\sqrt{5-4x}$

فأوجد معادلة المنحنى عندما يمر بالنقطة $A(-5,3)$

الحل:

$\because$ ميل العمودي $=\frac{-1}{f'(x)}$ حيث $f'(x)\neq 0$

$$\therefore\ \sqrt{5-4x}=\frac{-1}{f'(x)}$$

$$\therefore\ f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{5-1x}}$$

$\therefore$ معادلة المنحنى هي: $f(x)=\int f'(x)dx$

$$=\int\frac{-1}{\sqrt{5-4x}}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int -4(5-4x)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{(5-4x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C\right]$$

(1) $\therefore\ f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{5-4x}+\frac{1}{4}C$

لتعيين قيمة $f(-5)=3$

بالتعويض في (1)

$$3=\frac{1}{2}\sqrt{5-4(-5)}+\frac{1}{4}C$$

$$3=\frac{1}{2}(5)+\frac{1}{4}C$$

$$\Longrightarrow C=2$$

$$\therefore\ f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{5-4x}+\frac{1}{2}$$

حاول أن تحل

5) إذا كان ميل العمودي لمنحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x,y) هو $2x-1$

فأوجد معادلة المنحنى علمًا بأنه يمر بالنقطة $B(1,0)$

84

2 $f(x) = \frac{2}{9}(9+3x)^{\frac{3}{2}}$

$$f'(x) = \frac{2}{9} \times 3 \times \frac{3}{2}(9+3x)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = (9+3x)^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_2^5 \sqrt{1+9+3x}\,dx$$

$$= \int_2^5 \sqrt{10+3x}\,dx$$

$$= \int_2^5 (10+3x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}(10+3x)^{\frac{3}{2}}\right]_2^5$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\left[25^{\frac{3}{2}} - 16^{\frac{3}{2}}\right]$$

$= \frac{122}{9}$ (وحدة طول)

3 $f'(x) = 3x^2 + x$

$$f(x) = \int (3x^2 + x)\,dx$$

$$f(x) = \frac{3x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

$$f(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} + C$$

لتعيين قيمة الثابت C نعوّض بالنقطة $(2\,,2)$ في المعادلة السابقة فنحصل على:

$$2 = 2^3 + \frac{2^2}{2} + C$$

$$2 = 8 + 2 + C$$

$$C = -8$$

معادلة المنحنى للدالة f هي:

$$f(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - 8$$

مثال (6)

لتكن: $f''(x) = 6x - 6$ فأوجد معادلة الدالة f إذا كانت النقطة $(-1\,,\,15)$ نقطة حرجة للدالة.

الحل:

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx$$

$$= \int (6x-6)\,dx$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + C$$

$\because$ $(-1\,,\,15)$ نقطة حرجة $\quad \therefore\ f'(-1) = 0$

$$3(-1)^2 - 6(-1) + C = 0$$

$$C = -9$$

$$\therefore\ f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx$$

$$= \int (3x^2 - 6x - 9)\,dx$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + C$$

بالتعويض في النقطة $(-1\,,\,15)$:

$$15 = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + C$$

$$\therefore\ C = 15 - 5 = 10$$

$\therefore$ معادلة المنحنى هي: $\quad \therefore\ f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

حاول أن تحل

6 لتكن: $f''(x) = 5x - 2$

فأوجد معادلة الدالة f إذا كانت النقطة $P(2\,,\,-2)$ نقطة حرجة للدالة.

85

4

$$f'(x) = -8x^3 + 3x^2 - 2x + 4$$

$$f(x) = \int (-8x^3 + 3x^2 - 2x + 4)dx$$

$$f(x) = -\frac{8x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 4x + C$$

$$f(x) = -2x^4 + x^3 - x^2 + 4x + C$$

لتعيين قيمة الثابت C نعوّض بالنقطة $(-1, -5)$ في المعادلة السابقة فنحصل على:

$$-5 = -2(-1)^4 + (-1)^3 - (-1)^2 + 4(-1) + C$$

$$-5 = -2 - 1 - 1 - 4 + C$$

$$C = 3$$

معادلة المنحنى f المطلوب هي:

$$f(x) = -2x^4 + x^3 - x^2 + 4x + 3$$

5 $\therefore$ ميل العمودي $= \dfrac{-1}{f'(x)}$ حيث $f'(x) \neq 0$

$$\therefore \quad 2x - 1 = \frac{-1}{f'(x)}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{-1}{2x - 1}$$

$\therefore$ معادلة المنحنى هي:

$$f(x) = \int f'(x)\,dx$$

$$= \int \frac{-1}{2x-1}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{2}{2x-1}dx$$

$$\therefore \quad f(x) = -\frac{1}{2}\ln|2x-1| + C \qquad \textbf{(1)}$$

لتعيين قيمة C بالتعويض في **(1)**

$$f(1) = 0$$

$$-\frac{1}{2}\ln|2-1| + C = 0$$

$$-\frac{1}{2}\ln 1 + C = 0$$

$$C = 0$$

ومعادلة منحنى الدالة f هي:

$$f(x) = -\frac{1}{2}\ln|2x-1|$$

تمرَّنْ 6–3

طول قوس ومعادلة منحنى دالة
Arc Length and Equation of Function Curve

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x) = 5 + 2\sqrt{x^3}$ في الفترة $\left[0, \frac{1}{3}\right]$.

(2) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x) = \frac{1}{3}(7+4x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $\left[1, \frac{5}{4}\right]$.

(3) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$ في الفترة $[1, 2]$.

(4) أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x, y) هو: $-x^2 + 2x - 4$ ويمر بالنقطة $A(3, 7)$

(5) أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x, y) هو: $-4x^3 + 2x + 5$ ويمر بالنقطة $A(1, 3)$

(6) أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x, y) هو: $\cos 2x$ ويمر بالنقطة $A\left(\frac{-\pi}{4}, \frac{5}{2}\right)$

(7) أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x, y) هو: $\sin 3x$ ويمر بالنقطة $A\left(\frac{2\pi}{9}, \frac{7}{6}\right)$

(8) إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x, y) هو $2x + 5$ فأوجد معادلة منحنى الدالة f إذا كان يمر بالنقطة $B(-2, 3)$

(9) لتكن: $f''(x) = 12x^2 - 24x - 1$
أوجد معادلة الدالة f إذا كان لها نقطة عظمى محلية عند $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{15}{16}\right)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x) = \frac{1}{3}(1+4x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[0, 1]$ هو $L = \frac{2}{3}$ وحدة طول. (a) (b)

(2) منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x, y) هو: $x^3 + 2$ ويمر بالنقطة $A(2, 6)$ معادلته: $f(x) = \frac{x^4}{4} + 2x + 2$ (a) (b)

(3) منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x, y) هو: $x + \sqrt{x}-$ ويمر بالنقطة $A(1, 1)$ معادلته: $f(x) = -\frac{2}{3}x\sqrt{x} + x^2 + \frac{2}{3}$ (a) (b)

(4) لتكن $A(1, 3)$ نقطة على منحنى الدالة f: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ فإن معادلة الدالة f هي $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ (a) (b)

32

في التمارين (9–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{1}{3}$ في الفترة $[-2,3]$ هو:

ⓐ 7 units ⓑ 6 units ⓒ 5 units ⓓ 1 unit

(6) طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = x - 3$ في الفترة $[0,2]$ هو:

ⓐ $\sqrt{2}$ units ⓑ $2\sqrt{2}$ units ⓒ $3\sqrt{2}$ units ⓓ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ units

(7) معادلة منحنى الدالة الذي ميل العمودي عليه عند أي نقطة (x,y) هو: $-x+3$ ويمر بالنقطة $A(2,3)$ هي y تساوي:

ⓐ $-\frac{x^2}{2} + 3x - 4$ ⓑ $\ln|3-x| + 3$ ⓒ $-\frac{x^2}{2} + 3x + 4$ ⓓ $3 - \ln|3-x|$

(8) معادلة منحنى الدالة الذي ميله عند أي نقطة (x,y) هو: $2x - 3\sqrt{x}$ ويمر بالنقطة $A(4,-2)$ هي:

ⓐ $x^2 + 2\sqrt{x^3} - 2$ ⓑ $x^2 - 2\sqrt{x^3}$ ⓒ $x^2 - 2\sqrt{x^3} - 2$ ⓓ $\frac{x^2}{2} - 2\sqrt{x^3} + 2$

(9) إذا كانت النقطة $A(0,2)$ نقطة حرجة لمنحنى الدالة f : $f''(x) = 12x - 6$ فإن النقطة الحرجة الأخرى للدالة f هي:

ⓐ $B(-2,0)$ ⓑ $B(0,-2)$ ⓒ $B(1,-1)$ ⓓ $B(1,1)$

33

6

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx$$
$$= \int (5x-2)\,dx$$
$$f'(x) = \frac{5x^2}{2} - 2x + C_1$$

$\because$ $P(2,-2)$ نقطة حرجة

$$f'(2) = 0$$
$$\therefore \quad \frac{5}{2}(2)^2 - 2(2) + C_1 = 0$$
$$C_1 = -6$$
$$\therefore \quad f'(x) = \frac{5}{2}x^2 - 2x - 6$$
$$f(x) = \int f'(x)\,dx$$
$$= \int \left(\frac{5}{2}x^2 - 2x - 6\right)dx$$
$$f(x) = \frac{5}{6}x^3 - x^2 - 6x + C_2$$

بالتعويض في النقطة $P(2,-2)$

$$-2 = \frac{5}{6}(2)^3 - (2)^2 - 6(2) + C_2$$
$$\therefore \quad C_2 = \frac{22}{3}$$

معادلة المنحنى هي:

$$f(x) = \frac{5}{6}x^3 - x^2 - 6x + \frac{22}{3}$$

6–4: المعادلات التفاضلية

1 الأهداف

- يوجد حل لمعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى.
- يوجد حل لمعادلة تفاضلية من الرتبة الثانية.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

معادلة تفاضلية.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(1) أوجد مجموعة الحل لكل معادلة ممّا يلي:

(a) $x^2 - 7x + 10 = 0$

(b) $x^2 + 14x + 49 = 0$

(c) $x^2 - 6x + 25 = 0$

(2) أوجد علاقة بين y، y' مستقلة عن x وعن k في المعادلة: $y = ke^{2x} + 5$.

5 التدريس

يتعرف الطالب في هذا البند على مبادئ أولية للمعادلات التفاضلية ورتبتها ودرجتها والتمييز بينهما، ثم أخبرهم أن هذه المعادلات تختلف في حلولها عن تلك التي تعلمها سابقًا. إذ أنه كان يبحث عن قيمة المتغير x التي تحقق معادلة من الدرجة الأولى، أو الدرجة الثانية، ... وقيم المتغير التي تحقق معادلة من درجات أكبر، ولكن في المعادلة التفاضلية سوف يبحث الطالب عن قيمة أو قيم المتغير التابع y التي تحقق المعادلة.

6–4

المعادلات التفاضلية

Differential Equations

سوف تتعلم

- حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى.
- حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية.

المفردات والمصطلحات:

- معادلة تفاضلية
Differential Equation

دعنا نفكر ونتناقش

لتكن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $y = f(x) = 5e^{2x} + 4$

(a) أوجد المشتقه من الرتبة الأولى y' للدالة $y = f(x)$

(b) أثبت أن y , y' تحققان المعادلة: $y' - 2y + 8 = 0$

(c) لنأخذ الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $y = g(x) = x^2 + 4$،
أوجد علاقة بين y' , y مستقلة عن المتغير x .

تعريف (1)

المعادلات التفاضلية: هي معادلات تحتوي على دالّة مجهولة وبعض مشتقاتها.

نستخدم عادة y بدلًا من $f(x)$.

تعريف (2)

رتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى رتبة لمشتقة دالة موجودة في هذه المعادلة.

فمثلًا:

$y' = xy$ ، $y' = -8$ ، $y' - 2y = x - 1$ هي معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى.

$y'' = -8$ ، $y'' + 2xy' - y = 0$ هي معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية.

ولكن $y - 2x = 5$ هي ليست بمعادلة تفاضلية.

تعريف (3)

درجة المعادلة التفاضلية: هي أكبر أس لأعلى المشتقات رتبة.

فمثلًا:

$y'' + (y')^2 + y = 1$ هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى.

$(y')^2 = \frac{4x}{y}$ هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية.

$(y'')^3 + x^4 y' + e^x y = 0$ هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثالثة.

86

تدريب:

أكمل الجدول التالي محدّدًا رتبة ودرجة كل معادلة من المعادلات التفاضلية فيه.

الدرجة	الرتبة	المعادلة التفاضلية
		$y' = 5y$
		$y'^2 = \frac{4x}{y}$
		$y'' = 5y' + xy$
		$(y'')^2 = 1 + (y')^3$
		$y''' = (y')^2 + x^3$

حل المعادلات التفاضلية هو إيجاد دوال تحقق مع مشتقاتها هذه المعادلات.
وسنقتصر في دراستنا على حل معادلات تفاضلية من الدرجة الأولى.

مثال (1)

أثبت أن الدالة: $y = e^{x^2}$ هي حل للمعادلة التفاضلية: $y' - 2xy = 0$

الحل:

أوجد المشتقة من الدرجة الأولى: $y = e^{x^2}$

$(e^u)' = u'e^u$ $y' = 2x\,e^{x^2}$

عوّض y, y' بقيمتيهما في المعادلة التفاضلية $2xe^{x^2} - 2xe^{x^2} = 0$

الدالة $y = e^{x^2}$ هي حل للمعادلة التفاضلية: $y' - 2xy = 0$

حاول أن تحل

1 أثبت أنّ الدالة: $y = 2e^{3x} + 1$ هي حل للمعادلة: $y' + 3 = 3y$

هناك بعض القواعد التي تساعد في حل معادلات تفاضلية من الدرجة الأولى.

I المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى التي على الصورة $y' = f(x)$ حلها يكون على الصورة: $y = \int f(x)dx$

87

في المثال (1)

المطلوب هو التأكد من أن قيمة معينة للمتغير التابع y هي حلّ للمعادلة التفاضلية. أكّد للطلاب أننا سنتطرق فقط لحل معادلات تفاضلية من الدرجة الأولى.

في المثالين (3) ,(2)

المعادلة التفاضلية $y' = 3x^2 - 1$ هي على الصورة $y' = f(x)$. لإيجاد حل عام لها يجب أن يستخدم القاعدة الأولى وهي إيجاد تكامل الدالة f أي $y = \int f(x)dx$، ومن ثم يمكننا إيجاد حلّ خاص إذا أضيف إلى المعطيات قيمة ابتدائية للمتغير المستقل والمتغير التابع وذلك لإيجاد قيمة واحدة للثابت الناتج عن حل المعادلة.

في المثال (4)

المعادلة في (a) هي على الصورة $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$.
لإيجاد حلولها، علينا فصل المتغيرات بالصورة التالية:

$\frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx$ وهي القاعدة الثانية ومن ثم نكامل الطرفين $\left(\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)dx\right)$ وصولًا إلى حل المعادلة وهو إيجاد y.

اشرح للطلّاب كيفية الوصول إلى الحل وأخبرهم أنه من (b) يمكن استخدام القاعدة مباشرة. وهي تمهد للقاعدة الثالثة كما في مثال (5).

في المثال (5)

يمكننا إيجاد حل خاص للمعادلة $y' = 4y$ باستخدام القاعدة الثالثة وذلك بإضافة المعطيات $y = 2$, $x = 0$ إذ نعوّض في الحل $y = ke^{4x}$ عن x , y بالقيمة المعطاة لإيجاد الثابت k.

في المثال (6)

المعادلة التفاضلية $2y' + y = 1$ التي يمكن كتابتها $y' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$، هي على الصورة $y' = ay + b$ وهي القاعدة الرابعة.

حلولها هي $y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث k ثابت يمكن إيجاده بتعويض y , x بقيمتيهما المعطاة.

في المثال (7)

المعادلة التفاضلية $y'' = 3x^2 - 2x$ هي من الرتبة الثانية، وهي على الصورة $y'' = f(x)$ وهي القاعدة الخامسة.

يتمّ حلّ هذه المعادلة بإيجاد $y' = \int f(x)dx$ أولًا، ثم بإيجاد $y = \int y'dx$.

في الأمثلة (8), (9), (10)

المعادلة التفاضلية التي على الصورة $ay'' + by' + cy = 0$ هي من الرتبة الثانية ومهم جدًّا ترتيبها وذلك لكتابة المعادلة المميزة على الصورة: $ar^2 + br + c = 0$

ركّز انتباههم على الحلول العامة بحسب قيمة المميز:

$\Delta = b^2 - 4ac$

مثال (2)

حل المعادلة: $y' = 3x^2 - 1$

الحل:

لإيجاد y نكامل y' $\quad y = \int y'\,dx$

طبّق الحالة $\quad y = \int (3x^2 - 1)\,dx$

حيث C ثابت $\quad y = x^3 - x + C$

حاول أن تحل

2 حل المعادلة: $y' = 7x^2 + 9x - 1$

مثال (3)

حل المعادلة: $y' = 3x^2 - 1$، التي تحقق $y = 2$ عند $x = 1$

الحل:

$$y = \int y'dx$$
$$y = \int (3x^2 - 1)\,dx$$
$$= x^3 - x + C$$

عوّض عن x بـ 1 وعن y بـ 2 $\quad 2 = 1^3 - 1 + C$

$$C = 2$$
$$\therefore\ y = x^3 - x + 2$$

حاول أن تحل

3 حل المعادلة: $y' = 8x^3 - 3x^2 + 4$، والتي تحقق $y = 5$ عند $x = 1$

II بعض المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى تحوي المتغيرين: y , x على الصورة: $\frac{dy}{dx} = g(x)\cdot h(y)$ يتم حلها بطريقة فصل المتغيرات بالصورة التالية:

$$\frac{1}{h(y)}dy = g(x)\,dx$$

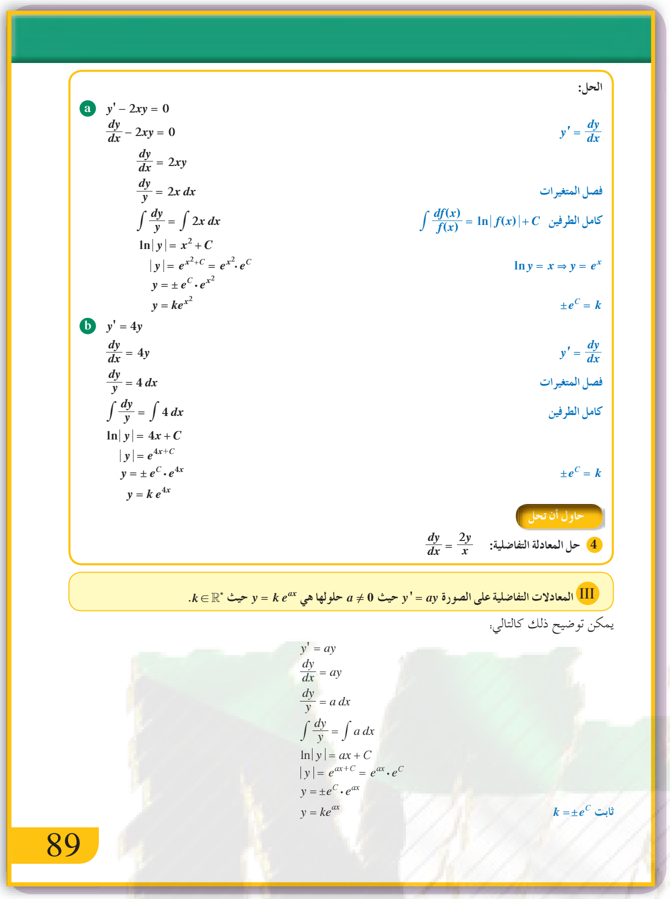
ونكامل الطرفين وصولًا إلى حل المعادلة التفاضلية وهو إيجاد y.

مثال (4)

حل المعادلات التفاضلية التالية:

a $y' - 2xy = 0$ $\qquad$ b $y' = 4y$

88


الحل:

a

$$y' - 2xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 0 \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$\frac{dy}{y} = 2x\,dx \qquad \text{فصل المتغيرات}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx \qquad \text{كامل الطرفين} \quad \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$$

$$\ln|y| = x^2 + C$$

$$|y| = e^{x^2+C} = e^{x^2} \cdot e^C \qquad \ln y = x \Rightarrow y = e^x$$

$$y = \pm e^C \cdot e^{x^2}$$

$$y = ke^{x^2} \qquad \pm e^C = k$$

b

$$y' = 4y$$

$$\frac{dy}{dx} = 4y \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{y} = 4\,dx \qquad \text{فصل المتغيرات}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 4\,dx \qquad \text{كامل الطرفين}$$

$$\ln|y| = 4x + C$$

$$|y| = e^{4x+C}$$

$$y = \pm e^C \cdot e^{4x} \qquad \pm e^C = k$$

$$y = k\,e^{4x}$$

حاول أن تحل

4 حل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$

III المعادلات التفاضلية على الصورة $y' = ay$ حيث $a \neq 0$ حلولها هي $y = k\,e^{ax}$ حيث $k \in \mathbb{R}^*$.

يمكن توضيح ذلك كالتالي:

$$y' = ay$$

$$\frac{dy}{dx} = ay$$

$$\frac{dy}{y} = a\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int a\,dx$$

$$\ln|y| = ax + C$$

$$|y| = e^{ax+C} = e^{ax} \cdot e^C$$

$$y = \pm e^C \cdot e^{ax}$$

$$y = ke^{ax} \qquad \text{ثابت } k = \pm e^C$$

89

6 الربط

تطبيق حياتي يوفر الربط بين المعادلات التفاضلية ومجال علوم الأحياء.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام القاعدة لحل معادلة من الرتبة الأولى على الصورة $y' = ay + b$. أخبرهم أنه كي يستخدم القاعدة: $y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ يجب ترتيب المعادلة على الصورة $y' = ay + b$. فمثلًا، لا يمكن تطبيق القاعدة على المعادلة: $2y' - 5y + 7 = 0$ ولكن يمكن كتابتها على الصورة: $y' = \frac{5}{2}y - \frac{7}{2}$ وهكذا يمكن معرفة قيمة كلّ من a, b في القاعدة.

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل» لتتحقق من قدرتهم على إيجاد الحلول للمعادلات التفاضلية وتطبيق القواعد بشكل صحيح على كل حالة.

اختبار سريع

1 أوجد حلّ المعادلة: $3y' - 5y + 2 = 0$ بحيث إن $y = 2$ عند $x = 0$.

نكتب: $y' = \frac{5}{3}y - \frac{2}{3}$

الحل العام:

$$y = ke^{\frac{5}{3}x} - \left(\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}}\right) \quad \text{أي} \quad y = ke^{\frac{5}{3}x} + \frac{2}{5}$$

ومنه $2 = k + \frac{2}{5}$ نحصل على $k = \frac{8}{5}$

الحل الخاص:

$$y = \frac{8}{5}e^{\frac{5}{3}x} + \frac{2}{5}$$

2 أوجد حلّ المعادلة: $y'' - 5y' + 4y = 0$

المعادلة المميزة:

$$r^2 - 5r + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1$$

$$r_1 = 1 \ , \ r_2 = 4$$

وبالتالي:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x}$$

3 أوجد حلّ المعادلة: $y'' - 2y' + 5y = 0$

المعادلة المميزة:

$$r^2 - 2r + 5 = 0$$

$$\Delta = 4 - 20 = -16 = 16i^2$$

$$r_1 = 1 - 2i \ , \ r_2 = 1 + 2i$$

وبالتالي:

$$y = e^{x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a) $y' = f'(x) = 10e^{2x}$

(b) $y' - 2y + 8 = 10e^{2x} - 2(5e^{2x} + 4) + 8$

$$= 10e^{2x} - 10e^{2x} - 8 + 8 = 0$$

إذًا y , y' تحقّقان المعادلة $y' - 2y + 8 = 0$

(c) $y = g(x) = x^2 + 4 \iff x^2 = y - 4$

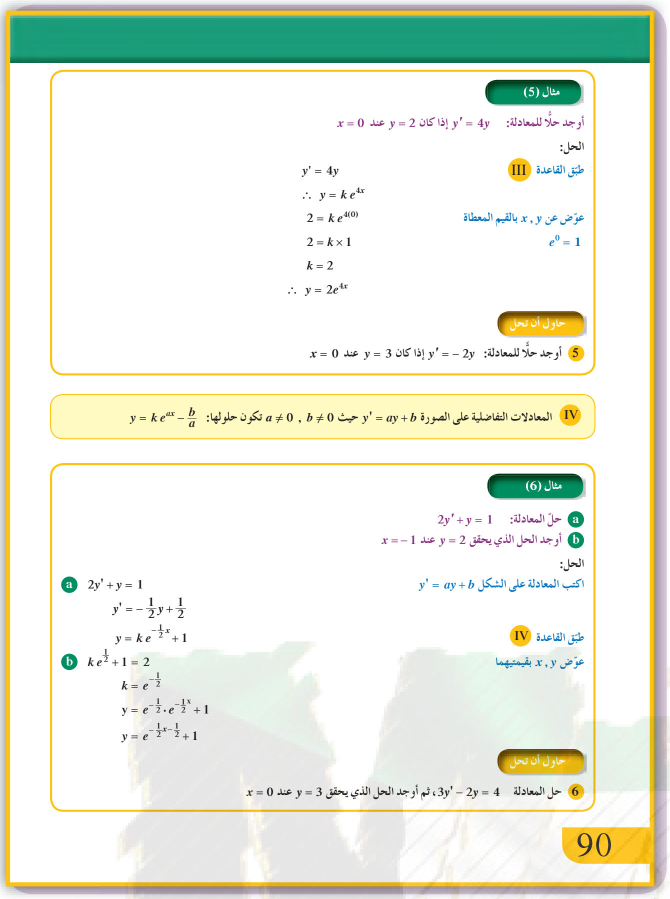
$$y' = g'(x) = 2x \iff x = \frac{y'}{2}$$

$$x^2 = \frac{y'^2}{4}$$

إذًا

$$y - 4 = \frac{y'^2}{4}$$

$$y'^2 - 4y + 16 = 0$$



مثال (5)

أوجد حلًّا للمعادلة: $y' = 4y$ إذا كان $y = 2$ عند $x = 0$

الحل:

طبّق القاعدة III

$y' = 4y$

$\therefore \ y = k e^{4x}$

عوّض عن y , x بالقيم المعطاة

$2 = k e^{4(0)}$

$e^0 = 1$

$2 = k \times 1$

$k = 2$

$\therefore \ y = 2e^{4x}$

حاول أن تحل

5 أوجد حلًّا للمعادلة: $y' = -2y$ إذا كان $y = 3$ عند $x = 0$

IV المعادلات التفاضلية على الصورة $y' = ay + b$ حيث $b \neq 0$, $a \neq 0$ تكون حلولها: $y = k e^{ax} - \frac{b}{a}$

مثال (6)

a حلّ المعادلة: $2y' + y = 1$

b أوجد الحل الذي يحقق $y = 2$ عند $x = -1$

الحل:

اكتب المعادلة على الشكل $y' = ay + b$

a $2y' + y = 1$

$y' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$

طبّق القاعدة IV

$y = k e^{-\frac{1}{2}x} + 1$

عوّض y , x بقيمتيهما

b $k e^{\frac{1}{2}} + 1 = 2$

$k = e^{-\frac{1}{2}}$

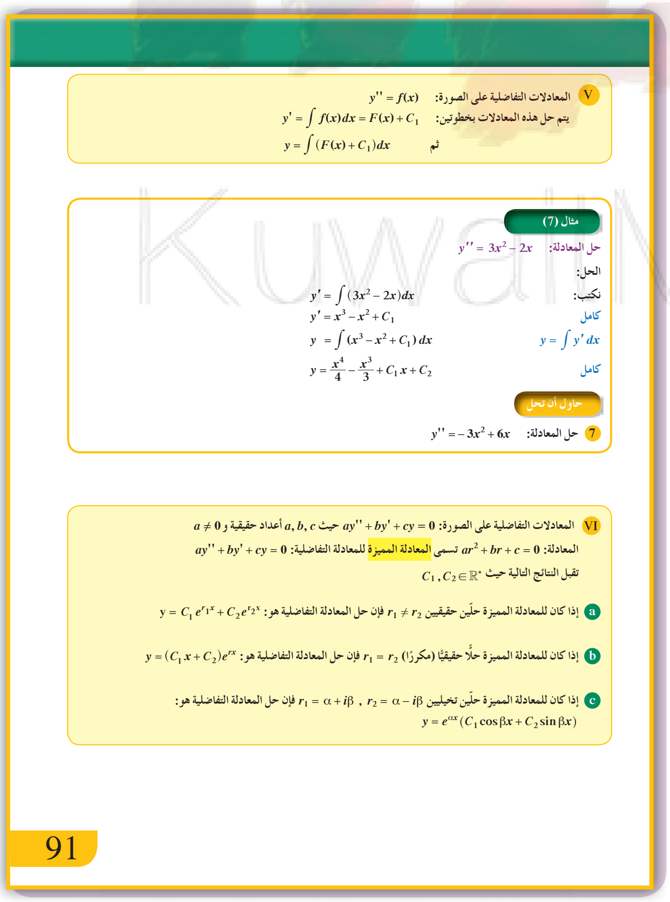
$y = e^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + 1$

$y = e^{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}} + 1$

حاول أن تحل

6 حل المعادلة $3y' - 2y = 4$ ، ثم أوجد الحل الذي يحقق $y = 3$ عند $x = 0$

90



V المعادلات التفاضلية على الصورة: $y'' = f(x)$

يتم حل هذه المعادلات بخطوتين: $y' = \int f(x)dx = F(x) + C_1$

ثم $y = \int (F(x) + C_1)dx$

مثال (7)

حل المعادلة: $y'' = 3x^2 - 2x$

الحل:

نكتب: $y' = \int (3x^2 - 2x)dx$

كامل $y' = x^3 - x^2 + C_1$

$y = \int y'\, dx$ $\quad y = \int (x^3 - x^2 + C_1)\, dx$

كامل $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$

حاول أن تحل

7 حل المعادلة: $y'' = -3x^2 + 6x$

VI المعادلات التفاضلية على الصورة: $ay'' + by' + cy = 0$ حيث a, b, c أعداد حقيقية و $a \neq 0$

المعادلة: $ar^2 + br + c = 0$ تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية: $ay'' + by' + cy = 0$

تقبل النتائج التالية حيث $C_1 , C_2 \in \mathbb{R}^*$

a إذا كان للمعادلة المميزة حلّين حقيقيين $r_1 \neq r_2$ فإن حل المعادلة التفاضلية هو: $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

b إذا كان للمعادلة المميزة حلًّا حقيقيًّا (مكررًا) $r_1 = r_2$ فإن حل المعادلة التفاضلية هو: $y = (C_1 x + C_2)e^{rx}$

c إذا كان للمعادلة المميزة حلّين تخيليين $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ فإن حل المعادلة التفاضلية هو:
$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

91

«تدريب»

المعادلة التفاضلية	الرتبة	الدرجة
$y' = 5y$	الأولى	الأولى
$y'^2 = \frac{4x}{y}$	الأولى	الثانية
$y'' = 5y' + xy$	الثانية	الأولى
$(y'')^2 = 1 + (y')^3$	الثانية	الثانية
$y''' = (y')^2 + x^3$	الثالثة	الأولى

«حاول أن تحل»

1 $y = 2e^{3x} + 1 \ , \ y' = 6e^{3x}$

ومنه:

$$y' + 3 = 6e^{3x} + 3$$
$$= 3(2e^{3x} + 1)$$
$$= 3y$$

2 $$y = \int (7x^2 + 9x - 1)dx$$
$$= \frac{7x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} - x + C$$

3 الحل العام:

$$y = \int (8x^3 - 3x^2 + 4)dx$$
$$= 2x^4 - x^3 + 4x + C$$

الحل الخاص:

$$5 = 2 - 1 + 4 + C \Rightarrow C = 0$$

ومنه:

$$y = 2x^4 - x^3 + 4x$$

مثال (8)

حل المعادلة: $y'' - 4y' + 3y = 0$

الحل:

أوجد المعادلة المميزة $r^2 - 4r + 3 = 0$

$(r-3)(r-1) = 0$

$r = 3$ أو $r = 1$

أوجد الحلول

طبّق a – VI $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$

حاول أن تحل

8 حل المعادلة: $2y'' - 5y' + 3y = 0$

ملاحظة: يمكنك استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد جذري المعادلة التربيعية.

مثال (9)

حل المعادلة: $y'' - 4y' + 4y = 0$

الحل:

أوجد المعادلة المميزة $r^2 - 4r + 4 = 0$

$(r-2)^2 = 0$

$r - 2 = 0$

أوجد الحلول $r = 2$

$r_1 = r_2 = 2$

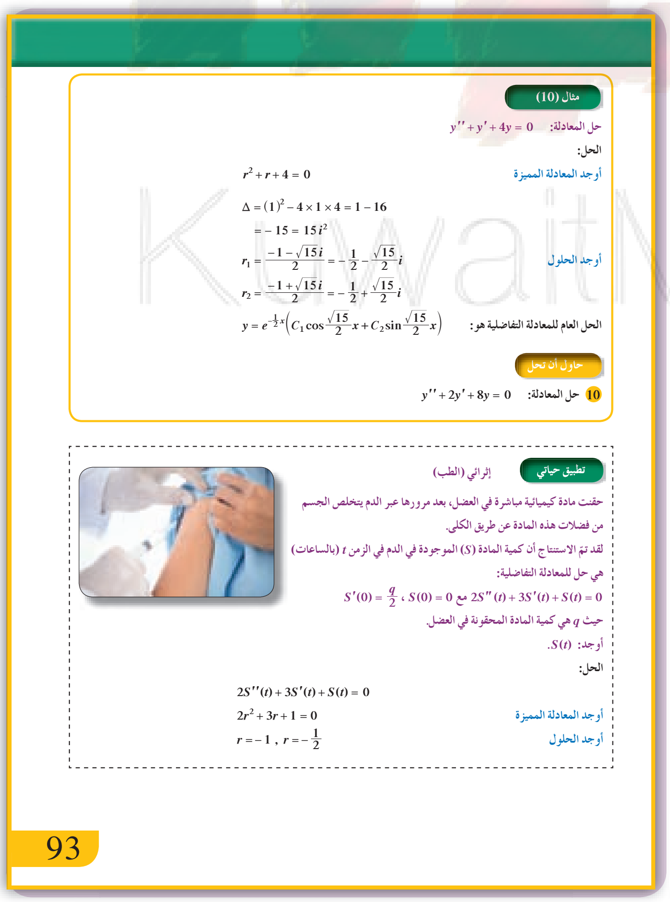
$y = (C_1 x + C_2)e^{rx}$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو: $y = (C_1 x + C_2)e^{2x}$

حاول أن تحل

9 حل المعادلة: $4y'' - 12y' + 9y = 0$

92



مثال (10)

حل المعادلة: $y'' + y' + 4y = 0$

الحل:

أوجد المعادلة المميزة $r^2 + r + 4 = 0$

$\Delta = (1)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 1 - 16$

$= -15 = 15i^2$

أوجد الحلول $r_1 = \frac{-1 - \sqrt{15}i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i$

$r_2 = \frac{-1 + \sqrt{15}i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو: $y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{15}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{15}}{2}x\right)$

حاول أن تحل

10 حل المعادلة: $y'' + 2y' + 8y = 0$

تطبيق حياتي إثرائي (الطب)

حقنت مادة كيميائية مباشرة في العضل، بعد مرورها عبر الدم يتخلص الجسم من فضلات هذه المادة عن طريق الكلى.

لقد تمّ الاستنتاج أن كمية المادة (S) الموجودة في الدم في الزمن t (بالساعات) هي حل للمعادلة التفاضلية:

$2S''(t) + 3S'(t) + S(t) = 0$ مع $S(0) = 0$ ، $S'(0) = \frac{q}{2}$

حيث q هي كمية المادة المحقونة في العضل.

أوجد: $S(t)$.

الحل:

$2S''(t) + 3S'(t) + S(t) = 0$

أوجد المعادلة المميزة $2r^2 + 3r + 1 = 0$

أوجد الحلول $r = -1 \ , \ r = -\frac{1}{2}$

93

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو: $S(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-\frac{1}{2}t}$

عوّض عن S بقيمتها $0 = C_1 + C_2 \quad (1)$

أوجد مشتقة $S(t)$: $S'(t) = -C_1 e^{-t} - \frac{1}{2} C_2 e^{-\frac{1}{2}t}$

عوّض عن S' بقيمتها $\frac{q}{2} = -C_1 - \frac{1}{2} C_2 \quad (2)$

لإيجاد قيم C_1 , C_2 نحل النظام $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -C_1 - \frac{1}{2}C_2 = \frac{q}{2} \end{cases}$

نحصل على: $C_1 = -q \ , \ C_2 = q$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو: $S(t) = -q e^{-t} + q e^{-\frac{1}{2}t}$

94

تمرّنْ 6−4

المعادلات التفاضلية
Differential Equation

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أثبت أن الدالة: $y = 3e^x$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y'' - y' + 2x = 2x$

(2) أثبت أن الدالة: $y = e^x$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y + y'' = 2e^x$

في التمارين (3—19)، حلّ المعادلات التفاضلية التالية:

(3) $y' = x^2 + x + 2$ التي تحقق $y = 4$ عند $x = 1$

(4) $xy' = 1 - x^2$

(5) $xy' = 4$ التي تحقق $y = 1$ عند $x = 1$

(6) $y' = 3y$

(7) $y' = 5y$

(8) $2y' - 5y = 0$ التي تحقق $y = 4$ عند $x = 2$

(9) $\sqrt{2}y' + y = 0$ التي تحقق $y = \sqrt{2}$ عند $x = 0$

(10) $y' = y + 1$

(11) $\frac{1}{2}y' + 4y = 1$ التي تحقق $y = \frac{3}{4}$ عند $x = \frac{1}{4}$

(12) $2y' + y = 4$ التي تحقق $y = 2$ عند $x = 0$

(13) $y'' = -4\sin 4x$

(14) $y'' = 6x - 8$

(15) $2y'' + y' - 15y = 0$

(16) $y'' - 6y' + 9 = 0$

(17) $y'' + 9y = 0$

(18) $y'' - 2y' + y = 0$

(19) $2y'' + 4y' = -3y$

(20) **(a)** حل المعادلة التفاضلية: $y' + 2y = 0$

(b) أوجد الحل الذي يحقق $y = \frac{1}{2}$ عند $x = 0$

34

4 $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x}$

$\ln|y| = 2\ln|x| + C$

$y = \pm e^{2\ln|x| + C}$

$\therefore \quad y = ke^{2\ln|x|} \quad , \quad k = \pm e^C$

5 الحل العام:

$y = ke^{-2x}$

الحل الخاص:

$3 = ke^0$

$k = 3$

ومنه:

$y = 3e^{-2x}$

6 كتابة المعادلة على الصورة: $y' = ay + b$

أي:

$y' = \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}$

الحل العام:

$y = ke^{\frac{2}{3}x} - 2$

الحل الخاص:

$3 = k - 2 \Rightarrow k = 5$

ومنه:

$y = 5e^{\frac{2}{3}x} - 2$

7 $y' = -x^3 + 3x^2 + C_1$

$y = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + C_1 x + C_2$

8 المعادلة المميزة:

$2r^2 - 5r + 3 = 0$

$\Delta = 25 - 24 = 1$

$r_1 = 1 \ , \ r_2 = \frac{3}{2}$

الحل العام:

$y = C_1 e^x + C_2 e^{\frac{3}{2}x}$

9 المعادلة المميزة:

$$4r^2 - 12r + 9 = 0$$

$$\Delta = 144 - 144 = 0$$

$$r = \frac{3}{2}$$

الحل العام:

$$y = (C_1 x + C_2) e^{\frac{3}{2}x}$$

10 المعادلة المميزة:

$$r^2 + 2r + 8 = 0$$

$$4 - 32 = -28 = 28i^2$$

$$r_1 = -1 - i\sqrt{7} \quad , \quad r_2 = -1 + i\sqrt{7}$$

الحل العام:

$$y = e^{-x}(C_1 \cos\sqrt{7} + C_2 \sin\sqrt{7}\,x)$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (7—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) المعادلة التفاضلية التالية: $x^2 y''' + (y')^2 + y = 0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الأولى. (a) (b)

(2) المعادلة التفاضلية التالية: $(y')^2 + 2xy = 0$ من الرتبة الثانية والدرجة الأولى. (a) (b)

(3) إذا كان $y = \frac{1}{2}$ عند $x = 0$ و $y' + 2y = 0$ فإن $y = \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{4}$ (a) (b)

(4) إذا كان $y = 1$ عند $x = 0$ و $y' + y = 2$ فإن $y = 2e^{-x}$ (a) (b)

(5) إذا كان $y'' + 2y' + 2y = 0$ فإن $y = (c_1 \cos x + c_2 \sin x)e^{-x}$ (a) (b)

(6) إذا كان $y'' + y = 0$ فإن $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ (a) (b)

(7) إذا كان $y'' - y = 0$ فإن $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$ (a) (b)

في التمارين (14—8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(8) المعادلة التفاضلية التالية: $\frac{(2y'' + x)^2}{xy} = 3$ من:

(a) الرتبة الأولى والدرجة الثانية.
(b) الرتبة الثانية والدرجة الأولى.
(c) الرتبة الثانية والدرجة الثانية.
(d) الرتبة الأولى والدرجة الأولى.

(9) حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 2x$ الذي يحقق $y = -2$ عندما $x = 1$ هو:

(a) $y = x^2 + 3$
(b) $y = x^2 - 3$
(c) $y = \frac{x^2}{2} - 3$
(d) $y = \frac{x^2}{2} + 3$

(10) إذا كان $y'' = 2x^2 + 3x$ فإنّ:

(a) $y = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + c$
(b) $y = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}$
(c) $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + c_1 x + c_2$
(d) $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + c_1 x$

(11) حل المعادلة التفاضلية $2y' + y = 1$ الذي يحقق $y = 3$ عند $x = 5$ هو:

(a) $y = 2e^{\frac{5}{2}}$
(b) $y = \frac{2}{e^{\frac{5}{2}}}$
(c) $y = 2e^{\left(-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)} + 1$
(d) $y = 2e^{\left(-\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right)} + 1$

(12) إذا كان $y'' - 3y' + 2y = 0$ فإنّ:

(a) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$
(b) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$
(c) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$
(d) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$

35

(13) إذا كان $y'' + 2y' + y = 0$ فإنّ:

(a) $y = (c_1 x + c_2)e^{-x}$
(b) $y = (c_1 x + c_2)e^{x}$
(c) $y = (c_1 x + c_2)e^{2x}$
(d) $y = (c_1 x + c_2)e^{-2x}$

(14) إذا كان $y'' - 4y' + 13y = 0$ فإنّ:

(a) $y = e^{x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$
(b) $y = e^{-2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$
(c) $y = e^{-x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$
(d) $y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$

36

المرشد لحل المسائل

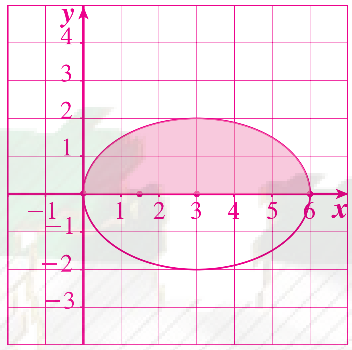
حل «مسألة إضافية»

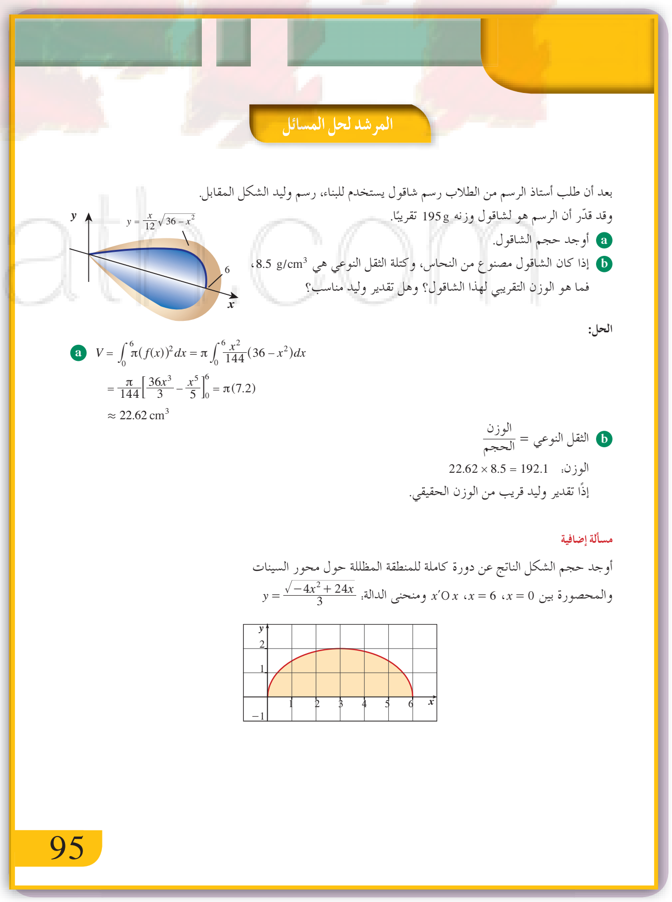
$$V = \int_0^6 \pi[f(x)]^2 dx$$

$$V = \int_0^6 \frac{\pi}{9}(-4x^2 + 24x)dx$$

$$= \frac{\pi}{9}\left[-\frac{4x^3}{3} + 12x^2\right]_0^6$$

$$= 16\pi \text{ units cube}$$





المرشد لحل المسائل

بعد أن طلب أستاذ الرسم من الطلاب رسم شاقول يستخدم للبناء، رسم وليد الشكل المقابل.
وقد قدّر أن الرسم هو لشاقول وزنه 195 g تقريبًا.

a أوجد حجم الشاقول.

b إذا كان الشاقول مصنوع من النحاس، وكتلة الثقل النوعي هي $8.5\ g/cm^3$، فما هو الوزن التقريبي لهذا الشاقول؟ وهل تقدير وليد مناسب؟

$y = \frac{x}{12}\sqrt{36 - x^2}$

الحل:

a $V = \int_0^6 \pi(f(x))^2 dx = \pi\int_0^6 \frac{x^2}{144}(36 - x^2)dx$

$= \frac{\pi}{144}\left[\frac{36x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^6 = \pi(7.2)$

$\approx 22.62\ cm^3$

b الثقل النوعي = $\frac{\text{الوزن}}{\text{الحجم}}$

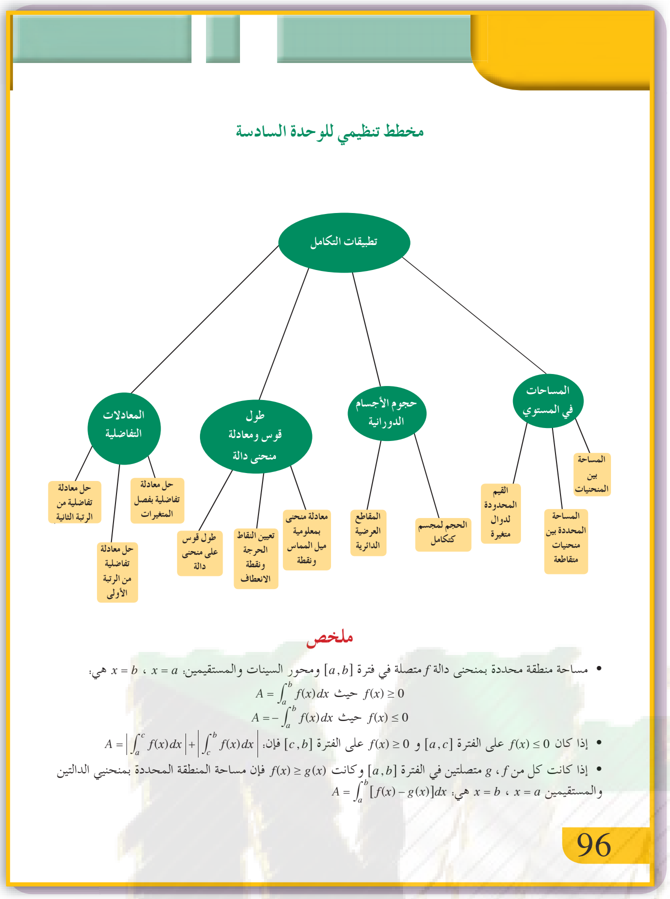
الوزن: $22.62 \times 8.5 = 192.1$

إذًا تقدير وليد قريب من الوزن الحقيقي.

مسألة إضافية

أوجد حجم الشكل الناتج عن دورة كاملة للمنطقة المظللة حول محور السينات والمحصورة بين $x = 0$، $x = 6$، $x'Ox$ ومنحنى الدالة: $y = \frac{\sqrt{-4x^2 + 24x}}{3}$

95



مخطط تنظيمي للوحدة السادسة

تطبيقات التكامل
المساحات في المستوي
حجوم الأجسام الدورانية
طول قوس ومعادلة منحنى دالة
المعادلات التفاضلية
المساحة بين المنحنيات
المساحة المحددة بين منحنيات متقاطعة
القيم المحدودة لدوال متغيرة
الحجم لمجسم كتكامل
المقاطع العرضية الدائرية
معادلة منحنى بمعلومية ميل المماس ونقطة
تعيين النقاط الحرجة ونقطة الانعطاف
طول قوس على منحنى دالة
حل معادلة تفاضلية بفصل المتغيرات
حل معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى
حل معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية

ملخص

- مساحة منطقة محددة بمنحنى دالة f متصلة في فترة $[a,b]$ ومحور السينات والمستقيمين: $x = a$ ، $x = b$ هي:
  $A = \int_a^b f(x)dx$ حيث $f(x) \geq 0$
  $A = -\int_a^b f(x)dx$ حيث $f(x) \leq 0$
- إذا كان $f(x) \leq 0$ على الفترة $[a,c]$ و $f(x) \geq 0$ على الفترة $[c,b]$ فإن: $A = \left|\int_a^c f(x)dx\right| + \left|\int_c^b f(x)dx\right|$
- إذا كانت كل من f ، g متصلتين في الفترة $[a,b]$ وكانت $f(x) \geq g(x)$ فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين والمستقيمين $x = a$ ، $x = b$ هي: $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

96

- إذا تحددت منطقة بين منحنيات متقاطعة فإن نقاط التقاطع هي حدود التكامل.
- إذا تحددت منطقة بأكثر من دالة ولا يوجد تكامل مفرد يعطي المساحة فيمكن تجزيء هذه المنطقة إلى مناطق تناظر تغيرات كل دالة ونتابع العمل.
- إذا نتج مجسم عن دوران منطقة مستوية محددة بمنحيي الدالتين f , g دورة كاملة حول محور السينات بحيث f , g لهما الإشارة نفسها في الفترة $[a,b]$ فإن حجم هذا المجسم يعطى بالقاعدة: $V(x) = \pi\int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2]dx$ وذلك في الحالتين: $f(x) \geq g(x) \geq 0$ أو $f(x) \leq g(x) \leq 0$.
- إذا نتج مجسم عن دورة منطقة مستوية محددة بمنحنى دالة واحدة f دورة كاملة حول محور السينات في الفترة $[a,b]$ فإن حجم المجسم يعطى بالقاعدة: $V(x) = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$.
- كل نقطة على منحنى دالة ينتج عنها مقطع دائري في دورة كاملة حول محور السينات.
- يمكن إيجاد معادلة منحنى دالة بمعلومية ميل المماس على المنحنى ومعلومية نقطة محددة يمر بها هذا المنحنى.
- نستخدم المشتقة الثانية للدالة f لدراسة القيم القصوى والقيم العظمى لمنحنى الدالة.
- نستخدم المشتقة الثانية للدالة f لإيجاد نقطة انعطاف منحنى الدالة.
- تساعدنا القاعدة: $L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ على إيجاد طول قوس على منحنى دالة في الفترة $[a,b]$.
- رتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى رتبة لمشتقة دالة موجودة في هذه المعادلة.
- درجة المعادلة التفاضلية هي أكبر أس لأعلى المشتقات رتبة.
- يمكن حل المعادلات التفاضلية بفصل المتغيرات: $\frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx$ ثم نكامل.
- حل المعادلة التفاضلية: $y' = ay$ هو $y = ke^{ax}$.
- حل المعادلة التفاضلية: $y' = ay + b$ هو $y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$.

لحل المعادلات التفاضلية على الصورة: $ay'' + by' + cy = 0$

نوجد المعادلة المميزة: $ar^2 + br + c = 0$ ومنها لدينا 3 حالات:

a إذا كانت $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ فإن الحل: $y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$

b إذا كانت $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ فإن الحل: $y = (C_1x + C_2)e^{rx}$

c إذا كانت $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ فإن الحل: $y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

حيث: $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$

97

اختبار الوحدة السادسة

(1) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 4x + 3$، محور السينات في الفترة $[0,1]$.

(2) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 6x + 5$، محور السينات في الفترة $[1,5]$.

(3) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^3 - 4x$، محور السينات في الفترة $[-2,2]$.

(4) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 1$ ومنحنى الدالة g: $g(x) = \sqrt{x}$ في الفترة $[1,2]$.

(5) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^3 + 1$ ومنحنى الدالة g: $g(x) = x + 1$.

(6) أوجد حجم المجسم الناتج من دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ والمستقيم $y = 2$ في الفترة $[-2,2]$.

(7) أوجد حجم المجسم الناتج من دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x + 2$ والدالة g: $g(x) = -x + 3$ في الفترة $[-1,2]$.

(8) أوجد حجم المجسم الناتج من دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = -x^2 + 4$ والدالة g: $g(x) = x + 2$ في الفترة $[-2,1]$.

(9) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x) = 2 + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[0,12]$.

(10) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x) = 2 - \sqrt{3}x$ في الفترة $[-3,1]$.

(11) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x) = \frac{1}{3}(-1 + 2x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[2,8]$.

(12) أوجد معادلة منحنى الدالة الذي ميله عند أي نقطة (x, y) هو: $3x^2 - 2x + 1$ ويمر بالنقطة $A(-1,-5)$.

(13) أوجد معادلة منحنى الدالة إذا كان ميل العمودي عند أي نقطة (x, y) على هذا المنحنى هو: $3x - 2$ ويمر بالنقطة $(1,-1)$.

(14) لتكن: $f''(x) = 12x^2 - 4$، أوجد معادلة الدالة f إذا كان لها نقطة صغرى محلية عند $A(-1,3)$

في التمارين (20–15)، حلّ المعادلات التفاضلية التالية:

(15) $3y' + 5y = 2$

(16) $3xy' = 5y$

(17) $y'' - 7y' + 12y = 0$

(18) $y'' - 6y' + 9y = 0$

(19) $y'' + 4y' + 20y = 0$

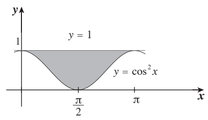
(20) $y'' + 16y = 0$

37

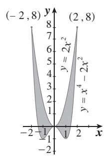
تمارين إثرائية

في التمارين (3–1)، أوجد مساحة المنطقة المظلّلة تحليليًّا (جبريًّا):

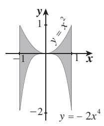
(1)



(2)



(3)



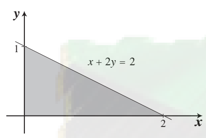
(4) أوجد مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة: $y = 2x^2 + 8$ ومنحنى الدالة: $y = x^4$.

(5) أوجد مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة: $y = 2x - 15$ ومنحنى الدالة: $y = -x^2 + 4x$.

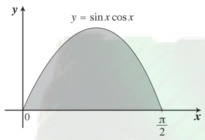
(6) أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $g(x) = x$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$، والمستقيم $x = 2$ ومحور السينات.

في التمرينين (8–7)، أوجد حجم المجسّم الناتج من دورة كاملة للمنطقة المظلّلة حول محور السينات.

(7)



(8)



(9) أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة x هو: $\sin 3x$ ويمر بالنقطة $A\left(\frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\right)$

(10) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^3}$ في الفترة $[0,27]$

38

في التمارين (13–11)، حل المعادلات التفاضلية التالية:

(11) $2y' + 3y = 4$

(12) $y'' + y = 0$

(13) $y'' - y = 0$

(14) نتيجة لحادث نووي، تبيّن أن الجزئيات المشعة $y(t)$ في الزمن t (بالساعات) بواسطة عداد جيجر (Geiger) تعطى بالمعادلة التفاضلية: $(E): y' = a(y-2)$، حيث a ثابت موجب.

(a) أوجد الحل العام للمعادلة (E).

(b) أوجد حل (E) الذي يحقق $y(0) = 170$.

(c) إذا علمنا أن $y(6) = 9$ فما قيمة الثابت a؟

(15) إذا كانت النقطة $A(3,-2)$ نقطة حرجة لمنحنى الدالة f: $f''(x) = 6x - 6$ فأوجد معادلة الدالة f.

39