الوحدة السابعة: القطوع المخروطية

Conic Sections

قسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

1–7: القطوع المخروطية – القطع المكافئ

جزء 1: القطوع المكافئة.

جزء 2: تطبيقات باستخدام القطوع المكافئة.

2–7: القطع الناقص.

جزء 1: القطع الناقص.

جزء 2: تطبيقات باستخدام القطوع الناقصة.

3–7: القطع الزائد.

جزء 1: القطع الزائد.

جزء 2: تطبيقات باستخدام القطوع الزائدة.

4–7: الاختلاف المركزي.

جزء 1: أشكال القطوع المخروطية بدلالة الاختلاف المركزي.

مقدمة الوحدة


الوحدة السابعة

القطوع المخروطية
Conic Sections

مشروع الوحدة: لماذا القطوع المخروطية؟

1. **مقدمة المشروع:** اهتم علماء الفلك منذ القدم بالشمس والنجوم وحركة الكواكب وتأثيرها على حياتهم وذلك منذ مئات السنين أي قبل الميلاد وحتى عصرنا الحاضر. فتوصلوا إلى تحديد دوران الكواكب حول الشمس فكانت قطوعًا مخروطية على شكل قطع ناقص.
2. **الهدف:** استكشاف القطوع المخروطية وتعرف أنواعها وعناصرها الأساسية واستخداماتها في الحياة اليومية.
3. **اللوازم:** ورق رسم بياني – مسطرة – فرجار – آلة حاسبة (اختياري).
4. **أسئلة حول التطبيق:**

افترض أنك قمت برحلة مع زملائك إلى الطبيعة لبضعة أيام وأردتم نصب خيمة إلى جانب النهر ومضخة للمياه على أن يكون موقع الخيمة على المسافة نفسها من حافة النهر والمضخة.
استخدم اللوازم لصنع نموذج يحدد كل المواقع الممكنة للخيمة.

a ارسم مستقيمًا أفقيًا (L) قريبًا من أسفل ورقة الرسم البياني والتي تمثل حافة النهر، ثم رقّم المستقيمات الأفقية فوق المستقيم L (انظر الرسم).
b سجّل موقع المضخة بالنقطة (P) على المستقيم الثالث فوق المستقيم (L) الذي يمثل حافة النهر.
c ارسم مستقيمًا عموديًا على (L) يمر بالنقطة P، ثم حدّد عليه النقطة S في منتصف المسافة بين (P) والمستقيم (L).
d أوجد البعد d_1 من المستقيم (2) إلى المستقيم (L). ثم ركّز سن الفرجار عند P وبفتحة تساوي d_1 وعيّن نقطتين على المستقيم (2) على أن تكون كل نقطة في جهة مختلفة عن الأخرى من الخط العمودي على L.
e هل توجد نقاط أخرى على المستقيم (2) تبعد نفس البعد عن P والمستقيم L؟
f أوجد البعد d_2 من المستقيم (3) إلى المستقيم (L). عيّن نقطتين على المستقيم (3) لهما البعد d_2 إلى المضخة P.
g تابع العمل بتعيين نقاط مشابهة لما ورد سابقًا في الفقرتين (d), (f) وذلك على مستقيمات أفقية أعلى النقطة S.
h صل النقاط بمنحنى. ما نوع المنحنى الذي حصلت عليه؟ وماذا تمثل هذه النقاط؟
i كيف سيتغير المنحنى إذا كان موقع المضخة قريبًا من حافة النهر أو بعيدًا عن حافة النهر؟
j ما أقرب نقطة إلى المضخة وإلى حافة النهر؟ ما اسم هذه النقطة؟

5. **التقرير:** اكتب تقريرًا مفصلًا يعكس عملك في هذا المشروع وبيّن حساباتك والمنحنى الذي حصلت عليه.
اذكر إذا كان بالإمكان تسميته بناء على مكتسبات سابقة تعرفت عليها.

دروس الوحدة

القطوع المخروطية – القطع المكافىء	القطع الناقص	القطع الزائد	الاختلاف المركزي
7 – 1	7 – 2	7 – 3	7 – 4

98

القطوع المخروطية هي منحنيات تنتج عن تقاطع سطح مخروط دائري ومستوٍ. إذا لم يمر المستوي برأس المخروط فإن المنحنى الناتج يكون دائرة أو قطعًا مكافئًا أو قطعًا ناقصًا أو قطعًا زائدًا وذلك وفق وضع المستوى.

وضع أبولونيوس Apollonios (حوالى 190 – 262 ق.م.) مؤلّفًا ضخمًا من ثمانية أجزاء دعاه القطوع المخروطية، ضمّ القطوع الثلاثة وخصائصها. ينسب إلى أبوقراط Hippocrates استخدام تقاطع المخاريط لحل بعض المسائل الهندسية عند اليونان. كذلك أوجد أرخميدس Archimedes (القرن الثالث ق.م.) المساحة المحصورة بين قسم من قطع مكافئ ومستقيم.

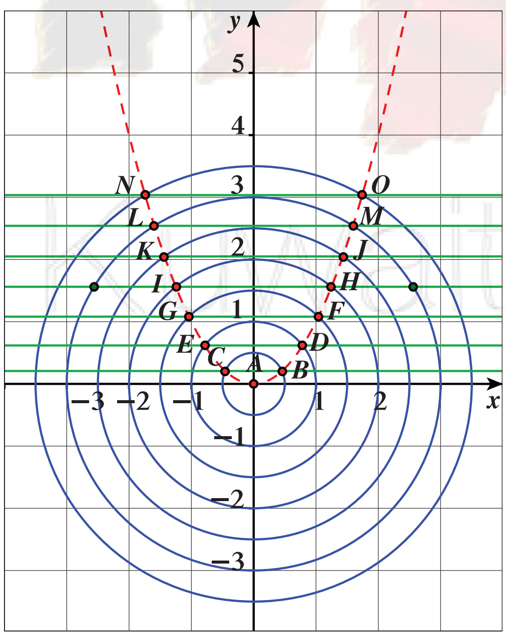
تكمن أهمية القطوع المخروطية في مجال تطبيقاتها الواسع. فمسارات الكواكب، والأقمار الاصطناعية، والإلكترونيات، والقذائف هي منحنيات مخروطية.

الهوائيات المخروطية (قطع مكافئ) هي أداة ضرورية لالتقاط الإشارات التي تبعث بها الأقمار الاصطناعية المتخصصة في مجال الاتصالات. المرايا على شكل قطع مكافئ مفيدة جدًّا نظرًا لخاصيتها في انعكاس الأشعة الموازية للدليل بحيث تمر في البؤرة.

تتحرك الكواكب في المجموعة الشمسية وفق مدارات على شكل قطوع ناقصة، تكون الشمس في موقع إحدى بؤرتيها (قانون كيبلر الأول). وكذلك فإن كل جسم خاضع لحركة جذب نيوتني (نسبة إلى نيوتن) له مدار مخروطي.

مدار المذنب هالي هو قطع ناقص (النسبة بين طولي محوريه كبيرة جدًّا).

ويذكر أن مرور هالي عام 1759 قرب الأرض جعل العلماء يخشون المخاطر التي قد يتسببها اقتراب المذنبات من الأرض. وكان العالم الفلكي هالي قد رأى المذنب عام 1682 وتوقع عودته إلى الظهور بعد 76 سنة (فترة هذا المذنب = 76). صدق توقعه إذ عاد هالي فعلًا عام 1759 (لذلك سمي المذنب باسمه).



يوضّح الرسم البياني أعلاه إنشاء قطع مكافئ باستخدام الدوائر والمستقيمات.

الوحدة السابعة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعرفت نهايات الدوال (كثيرات الحدود والدوال الجذرية).
- تعرفت ميل المماس على منحنى الدالة عند نقطة على هذا المنحنى.
- أوجدت معادلات خط المماس والخط العمودي على المماس عند نقطة معطاة على منحنى دالة.
- استكشفت الخطوط المقاربة العمودية والأفقية وكتبت معادلاتها.
- رسمت منحنى الدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$.
- أوجدت معكوس الدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$
- حدّدت خط التناظر لمنحنى الدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$ وخط التناظر لمنحنى معكوسها.

ماذا سوف تتعلم؟

- كتابة معادلات للقطوع المكافئة.
- تمثيل القطوع المكافئة يدويًا وإيجاد البؤرة والدليل.
- خواص القطع الناقص.
- كتابة معادلات القطوع الناقصة.
- إيجاد البؤرتين وأطراف المحورين الأكبر والأصغر في القطع الناقص ورسم بيانه.
- كتابة معادلات القطوع الزائدة.
- إيجاد المحور القاطع (الأساسي) والمحور المرافق والخطوط المقاربة والبؤرتين في القطع الزائد ورسم بيانه.
- الاختلاف المركزي للقطوع المخروطية.
- ربط قيمة الاختلاف المركزي بشكل القطع المخروطي.
- إيجاد الاختلاف المركزي.

المصطلحات الأساسية

القطوع المخروطية – قطع مكافئ – قطع ناقص – قطع زائد – بؤرة – دليل – المحور الأصغر والمحور الأكبر – نقطة المركز – رأسي القطع الناقص – رأسي القطع الزائد – خطوط مقاربة مائلة للقطع الزائد – المحور الأساسي (القاطع) للقطع الزائد – المحور المرافق للقطع الزائد – الاختلاف المركزي e

أضف إلى معلوماتك

في سنة 1609 أثبت العالم الفلكي «جوهانس كيبلر» أن النظام الذي أثبته «كوبرنيكس» والذي يتحدث عن مركزية الشمس يعكس هذه الحقيقة بدقة وبذلك وضع «كيبلر» القوانين الثلاثة. وما يهمنا هو القانون الأول، ومفاده ما يلي:

تدور الكواكب حول الشمس بحركة على شكل قطع ناقص حيث إن الشمس هي إحدى بؤرتيه.

جوهانس كيبلر Johannes Kepler

(1571 – 1630)

99

مشروع الوحدة

يهدف هذا المشروع إلى وضع رسم هندسي لقطع مكافئ باستخدام التعريف حول تساوي البعدين عن نقطة ثابتة ومستقيم ثابت، وهو يساعد على تركيز مفهوم القطع المكافئ مما يسمح للطالب بالتعامل بمرونة مع حل المسائل المرتبطة؛ خاصة وأن التقنيات الحديثة مع آلة حاسبة وحاسوب تسمح بسهولة برسم بيان قطع مكافئ، مما يحول دون استيعاب الطالب لفكرة تساوي البعدين وبعدها لثبوت مجموع (أو القيمة المطلقة لفرق) البعدين.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

(a) – (g) تحقق من عمل الطلاب.

(h) قطع مخروطي، قطع مكافئ.

(i) ينكمش المنحنى كلما كان موقع المضخة قريبًا من النهر ويتمدد المنحنى كلما كان موقع المضخة بعيدًا عن النهر.

(j) أقرب نقطة إلى المضخة وحافة النهر هي S، رأس القطع المكافئ.

التقرير

اكتب تقريرًا مفصلًا تبيّن فيه عملك والحسابات التي قمت بها. دعّم تقريرك بعرض مصدر باستخدام الحاسوب أو جهاز الإسقاط (Data Show). حيث تبيّن بوضوح إجابتك عن الفقرة (i).

سلّم التقييم	
4	الحسابات كلها صحيحة – الإنشاءات دقيقة – الشروحات واضحة وكاملة – الأفكار في التقرير واضحة ومتسلسلة.
3	الحسابات في معظمها صحيحة – أخطاء بسيطة في الإنشاءات – الشروحات واضحة – الأفكار في التقرير واضحة ومتسلسلة.
2	أخطاء متعددة في الحسابات – أخطاء متكررة في الإنشاءات – الشروحات غير واضحة – الأفكار في التقرير غير متسلسلة.
1	معظم عناصر هذا المشروع ناقصة أو غير موجودة.

1–7: القطوع المخروطية – القطع المكافئ

1 الأهداف

- يتعرف القطوع المخروطية.
- يتعرف القطوع المكافئة وخواصها.
- يستخدم القطوع المكافئة في حلّ المسائل.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

القطوع المخروطية – قطع مكافئ – بؤرة – دليل – الراسم – المحور – السطح المخروطي – رأس القطع المكافئ.

3 الأدوات والوسائل

أوراق رسم بياني – مسطرة – آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(1) اكتب معادلة منحنى على الصورة: $y = ax^2$ في كل حالة:

(a) يمر المنحنى بالنقطة $A(2\,,8)$.

(b) يمر المنحنى بالنقطة $B(2\,,-2)$.

(2) اكتب معادلة منحنى على الصورة: $x = ay^2$ في كل حالة:

(a) يمر المنحنى بالنقطة $C(2\,,1)$.

(b) يمر المنحنى بالنقطة $D(-1\,,2)$.

5 التدريس

يشدّد المعلم على تعريف القطع المكافئ، ويدعم التعريف برسوم بيانية (الأشكال الأربعة للقطع المكافئ) كما ويبيّن على أحدها تساوي البعدين. يطلب إلى أحد الطلاب تحديد موقع البؤرة على القطع واستنتاج الدليل، ثم رأس القطع المكافئ. يمكن استخدام الحاسوب أو جهاز الإسقاط لتحديد بؤرة ودليل القطع المكافئ في كل حالاته (الصورة $y^2 = 4px$ والصورة $x^2 = 4py$).


7–1

القطوع المخروطية – القطع المكافئ

Conic Sections – Parabola

سوف تتعلم
- القطوع المخروطية.
- القطوع المكافئة وخواصها.
- تطبيقات باستخدام القطوع المكافئة.

المفردات والمصطلحات:
- القطوع المخروطية Conic Sections
- قطع مكافئ Parabola
- بؤرة Focus
- دليل Directrix
- الراسم Tracer
- المحور Axis
- السطح المخروطي Conic Surface
- رأس القطع المكافئ Vertex of Parabola

دعنا نفكر ونتناقش

لتكن C، C' دائرتين متطابقتين في مستويين متوازيين حيث إن $\overleftrightarrow{OO'}$ عمودي على مستويي C, C' والنقطة M منتصف $\overline{OO'}$.

a ماذا يسمى هذا المجسم؟

b حدّد محوره.

c حدّد الرأس والقاعدة (هل يوجد أكثر من قاعدة؟)

d عيّن راسمًا (مستقيم واصل بين نقطتين على الدائرتين C، C' ويمر بالرأس M)

هل يوجد أكثر من راسم؟

اشرح.

السطح المخروطي Conic Surface

تخيّل شكلًا هندسيًا يتكوّن من مستقيمين غير متعامدين يتقاطعان في نقطة V.

إذا أدرنا هذا الشكل في الفضاء ثلاثي الأبعاد حول منصف إحدى الزاويتين بين هذين المستقيمين، سينشأ من هذا الشكل سطح مخروطين قائمين رأساهما عند النقطة V ومنصف إحدى الزاويتين هو المحور، كما يبيّن الشكل المقابل.

كل مستقيم يمر بالنقطة V ويشكل جزءًا من السطح المخروطي يسمى **راسم**.

القطوع المخروطية Conic Sections

إذا قُطع السطح الذي حصلنا عليه سابقًا بمستويات تأخذ أوضاعًا واتجاهات مختلفة بالنسبة إلى الراسم أو إلى المحور فسوف نحصل على مقاطع (منحنيات) مختلفة تسمى قطوعًا مخروطية.

الربط بالحياة:

يشبه مخروط الآيس كريم أحد سطوح المخروط.

100


تمرَّنْ 7–1

القطوع المخروطية – القطع المكافئ

Conic Sections – Parabola

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–3)، أوجد معادلة القطع المكافئ، الذي:

(1) رأسه نقطة الأصل والبؤرة $(-3,0)$ **(2)** رأسه نقطة الأصل والبؤرة $(0,-2)$

(3) بؤرته $F(0,2)$ ومعادلة دليله $y = -2$

في التمارين (4–7)، أوجد البؤرة، والدليل، وخط تماثل القطع المكافئ. ارسم تخطيطًا للرسم البياني للقطع المكافئ.

(4) $x^2 = -y$ **(5)** $y^2 = 2x$

(6) $y = 4x^2$ **(7)** $x = -8y^2$

(8) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $A(-1,2)$ وخط تماثله $x-axis$.

(9) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $B(3,4)$, $A(-3,4)$.

(10) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $y = 4$.

(11) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $x = -5$.

(12) **الميكروفونات المتكافئة.** تستخدم القنوات الرياضية ميكروفونًا مكافئًا لالتقاط كل أصوات لاعبي كرة السلة والمدربين أثناء المباريات. إذا كان لأحد هذه الميكروفونات سطح مكافئ متولد بالقطع المكافئ $10y = x^2$ فحدّد موضع البؤرة (المستقبِل الإلكتروني) للقطع المكافئ.

(13) يصل سلك معدني متدلٍ بين رأسي عمودي جسر. السلك المعدني هو على صورة قطع مكافئ حيث يبعد العمودان عن بعضهما مسافة 100 m ويبلغ ارتفاع كل منهما 20 m. يبلغ أصغر ارتفاع للسلك عن الطريق العام 5 m، وضعت على الطريق دعامات للسلك المتدلي، أوجد طول الدعامة التي تبعد 8 m عن أي من العمودين.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–7)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$ وبؤرته $(0,2)$ هي: $x^2 = 8y$ (a) (b)

(2) معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$ ودليله $x = -2$ هي: $x^2 = 8y$ (a) (b)

(3) معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(-4,0)$ ودليله $x = 4$ هي: $y^2 = -16x$ (a) (b)

(4) $y^2 = \frac{1}{2}x$ هي معادلة قطع مكافئ، بؤرته $\left(0, \frac{-3}{2}\right)$ (a) (b)

40

في المثال التوضيحي

استخدام قانون المسافة بين نقطتين والبعد بين نقطة ومستقيم لإيجاد معادلة القطوع المكافئة التي رأسها نقطة الأصل $(0, 0)$.

في المثال (1)

يساعد هذا المثال في تطبيق معادلة القطع المكافئ $y^2 = 4px$ أو $x^2 = 4py$ لإيجاد معادلات قطوع مكافئة ضمن معطيات محددة.

في المثال (2)

يساعد هذا المثال في إيجاد بؤرة قطع مكافئ ودليله بمعلومية معادلته ثم وضع رسم تقريبي لهذا القطع.

في المثال (3)

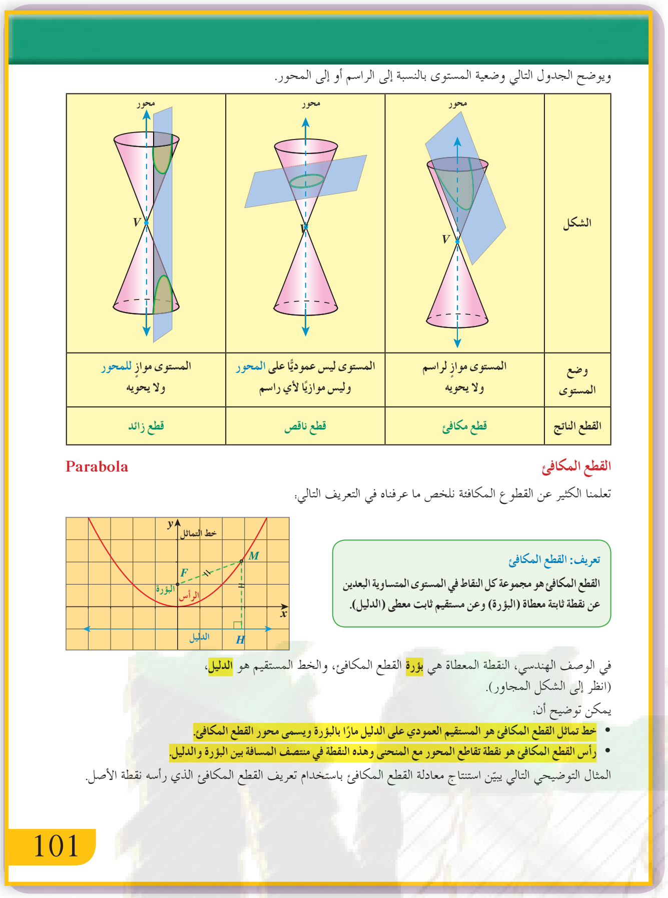
استخدام $x - axis$ كخط تماثل لقطع مكافئ رأسه نقطة الأصل ويمر بنقطة محددة لإيجاد معادلته.

في المثال (4)

إيجاد معادلة قطع مكافئ باستخدام نقطتان يمر بهما وذلك لتحديد صورة المعادلة، ثم يوجدها.

في المثال (5)

إيجاد معادلة قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل بمعلومية دليله. يهدف هذا المثال لتركيز مفهوم القطع المكافئ وخصائصه، كما يوضح العلاقة التي تربط بين معادلة الدليل وإحداثيات البؤرة.


ويوضح الجدول التالي وضعية المستوى بالنسبة إلى الراسم أو إلى المحور.

الشكل			
وضع المستوى	المستوى موازٍ لراسم ولا يحويه	المستوى ليس عموديًا على المحور وليس موازيًا لأي راسم	المستوى موازٍ للمحور ولا يحويه
القطع الناتج	قطع مكافئ	قطع ناقص	قطع زائد

القطع المكافئ Parabola

تعلمنا الكثير عن القطوع المكافئة نلخص ما عرفناه في التعريف التالي:

تعريف: القطع المكافئ

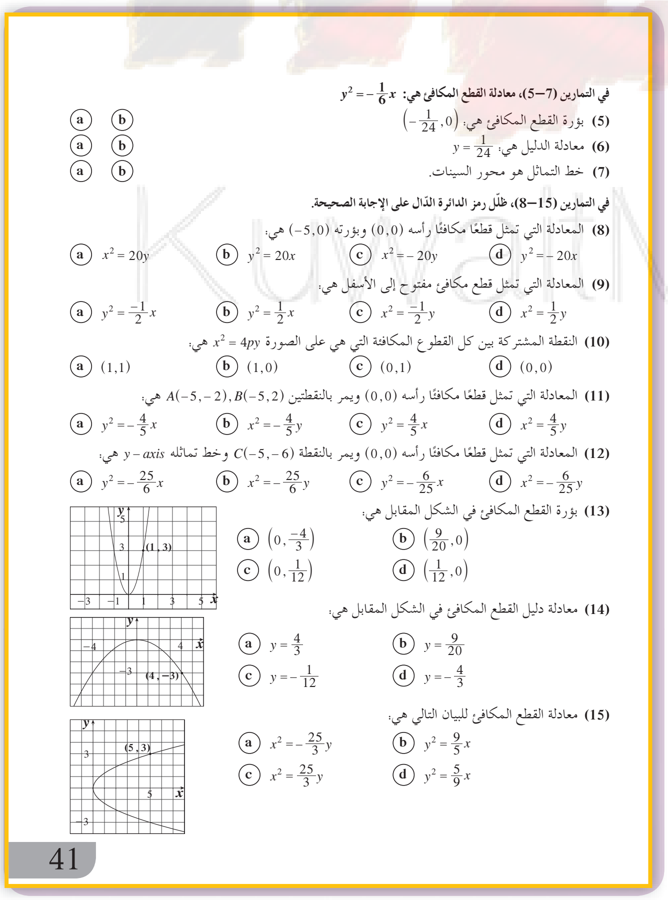
القطع المكافئ هو مجموعة كل النقاط في المستوى المتساوية البعدين عن نقطة ثابتة معطاة (البؤرة) وعن مستقيم ثابت معطى (الدليل).

في الوصف الهندسي، النقطة المعطاة هي بؤرة القطع المكافئ، والخط المستقيم هو الدليل. (انظر إلى الشكل المجاور).

يمكن توضيح أن:
- خط تماثل القطع المكافئ هو المستقيم العمودي على الدليل مارًا بالبؤرة ويسمى محور القطع المكافئ.
- رأس القطع المكافئ هو نقطة تقاطع المحور مع المنحنى وهذه النقطة في منتصف المسافة بين البؤرة والدليل.

المثال التوضيحي التالي يبين استنتاج معادلة القطع المكافئ باستخدام تعريف القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل.

101


في التمارين (7–5)، معادلة القطع المكافئ هي: $y^2 = -\frac{1}{6}x$

(5) بؤرة القطع المكافئ هي: $\left(-\frac{1}{24}, 0\right)$ ⓐ ⓑ

(6) معادلة الدليل هي: $y = \frac{1}{24}$ ⓐ ⓑ

(7) خط التماثل هو محور السينات. ⓐ ⓑ

في التمارين (15–8)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(8) المعادلة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه $(0,0)$ وبؤرته $(-5,0)$ هي:
ⓐ $x^2 = 20y$ ⓑ $y^2 = 20x$ ⓒ $x^2 = -20y$ ⓓ $y^2 = -20x$

(9) المعادلة التي تمثل قطع مكافئ مفتوح إلى الأسفل هي:
ⓐ $y^2 = \frac{-1}{2}x$ ⓑ $y^2 = \frac{1}{2}x$ ⓒ $x^2 = \frac{-1}{2}y$ ⓓ $x^2 = \frac{1}{2}y$

(10) النقطة المشتركة بين كل القطوع المكافئة التي هي على الصورة $x^2 = 4py$ هي:
ⓐ $(1,1)$ ⓑ $(1,0)$ ⓒ $(0,1)$ ⓓ $(0,0)$

(11) المعادلة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه $(0,0)$ ويمر بالنقطتين $A(-5,-2), B(-5,2)$ هي:
ⓐ $y^2 = -\frac{4}{5}x$ ⓑ $x^2 = -\frac{4}{5}y$ ⓒ $y^2 = \frac{4}{5}x$ ⓓ $x^2 = \frac{4}{5}y$

(12) المعادلة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه $(0,0)$ ويمر بالنقطة $C(-5,-6)$ وخط تماثله $y - axis$ هي:
ⓐ $y^2 = -\frac{25}{6}x$ ⓑ $x^2 = -\frac{25}{6}y$ ⓒ $y^2 = -\frac{6}{25}x$ ⓓ $x^2 = -\frac{6}{25}y$

(13) بؤرة القطع المكافئ في الشكل المقابل هي:
ⓐ $\left(0, \frac{-4}{3}\right)$ ⓑ $\left(\frac{9}{20}, 0\right)$ ⓒ $\left(0, \frac{1}{12}\right)$ ⓓ $\left(\frac{1}{12}, 0\right)$

(14) معادلة دليل القطع المكافئ في الشكل المقابل هي:
ⓐ $y = \frac{4}{3}$ ⓑ $y = \frac{9}{20}$ ⓒ $y = -\frac{1}{12}$ ⓓ $y = -\frac{4}{3}$

(15) معادلة القطع المكافئ للبيان التالي هي:
ⓐ $x^2 = -\frac{25}{3}y$ ⓑ $y^2 = \frac{9}{5}x$ ⓒ $x^2 = \frac{25}{3}y$ ⓓ $y^2 = \frac{5}{9}x$

41

في المثالين (7), (6)

تطبيقات حياتية تبيّن كيفية استخدام القطوع المكافئة في الميكروفونات ومصابيح السيارات حيث التركيز على بؤرة القطع المكافئ.

في المثال (8)

حل تطبيقات حياتية (مثل الجسور) باستخدام معادلة وخصائص القطع المكافئ. أخبر الطلاب أن الأسلكة المعدنية بين الأعمدة على الجسور أو بين الأعمدة الكهربائية... غالبًا ما تكون على شكل قطوع مكافئة.

6 الربط

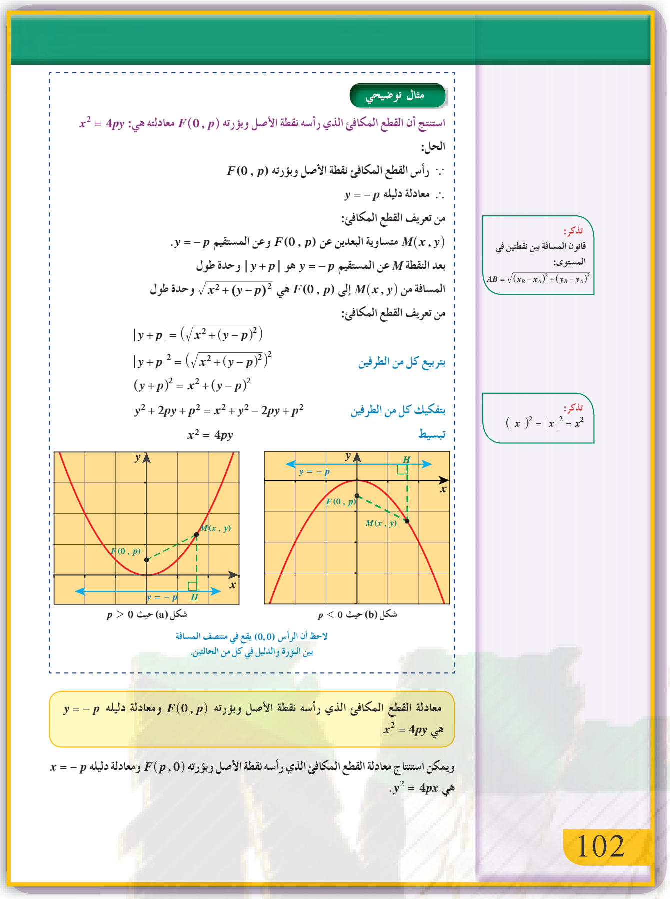
تعتبر الأمثلة (8) ,(7) ,(6) أفضل دليل في ربط القطع المكافئ بالحياة اليومية. فاستخدام الميكروفونات رائج جدًّا لالتقاط الأصوات. إضافة إلى المصابيح الأمامية في السيارات والأسلاك المعدنية بين الأعمدة.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في معرفة إحداثيات البؤرة ومعادلة الدليل في معادلة القطع المكافئ وكيفية الربط بينهما.

اكتب على السبّورة الجدول الذي يبيّن خواص القطع المكافئ واطلب إلى بعض الطلاب إيجاد البؤرة والدليل.

ساعد الطلاب على إيجاد الفرق بين أشكال القطوع المكافئة عندما تكون المعادلة على الصورة $y^2 = 4px$ أو على الصورة $x^2 = 4py$ وبالتالي كيفية كتابة معادلة الدليل وإيجاد إحداثيات البؤرة.



مثال توضيحي

استنتج أن القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(0, p)$ معادلته هي: $x^2 = 4py$

الحل:

$\because$ رأس القطع المكافئ نقطة الأصل وبؤرته $F(0, p)$

$\therefore$ معادلة دليله $y = -p$

من تعريف القطع المكافئ:

$M(x, y)$ متساوية البعدين عن $F(0, p)$ وعن المستقيم $y = -p$.

بعد النقطة M عن المستقيم $y = -p$ هو $|y+p|$ وحدة طول

المسافة من $M(x, y)$ إلى $F(0, p)$ هي $\sqrt{x^2+(y-p)^2}$ وحدة طول

من تعريف القطع المكافئ:

$$|y+p| = \left(\sqrt{x^2+(y-p)^2}\right)$$

بتربيع كل من الطرفين $|y+p|^2 = \left(\sqrt{x^2+(y-p)^2}\right)^2$

$$(y+p)^2 = x^2+(y-p)^2$$

بتفكيك كل من الطرفين $y^2+2py+p^2 = x^2+y^2-2py+p^2$

تبسيط $x^2 = 4py$

شكل (a) حيث $p > 0$

شكل (b) حيث $p < 0$

لاحظ أن الرأس (0,0) يقع في منتصف المسافة بين البؤرة والدليل في كل من الحالتين.

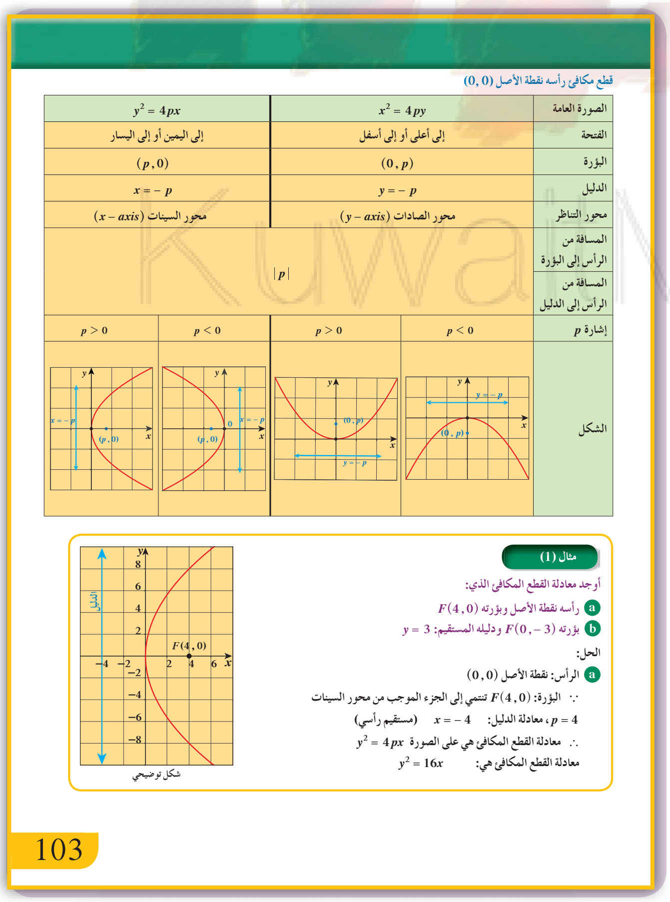
معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(0, p)$ ومعادلة دليله $y = -p$ هي $x^2 = 4py$

ويمكن استنتاج معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(p, 0)$ ومعادلة دليله $x = -p$ هي $y^2 = 4px$.

تذكر: قانون المسافة بين نقطتين في المستوى: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

تذكر: $(|x|)^2 = |x|^2 = x^2$

102



قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل (0, 0)

الصورة العامة	$x^2 = 4py$		$y^2 = 4px$	
الفتحة	إلى أعلى أو إلى أسفل		إلى اليمين أو إلى اليسار	
البؤرة	$(0, p)$		$(p, 0)$	
الدليل	$y = -p$		$x = -p$	
محور التناظر	محور الصادات $(y-axis)$		محور السينات $(x-axis)$	
المسافة من الرأس إلى البؤرة	$\|p\|$			
المسافة من الرأس إلى الدليل				
إشارة p	$p < 0$	$p > 0$	$p < 0$	$p > 0$
الشكل				

مثال (1)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي:

a رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(4, 0)$

b بؤرته $F(0, -3)$ ودليله المستقيم: $y = 3$

الحل:

a الرأس: نقطة الأصل $(0, 0)$

$\because$ البؤرة: $F(4, 0)$ تنتمي إلى الجزء الموجب من محور السينات

$p = 4$، معادلة الدليل: $x = -4$ (مستقيم رأسي)

$\therefore$ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $y^2 = 4px$

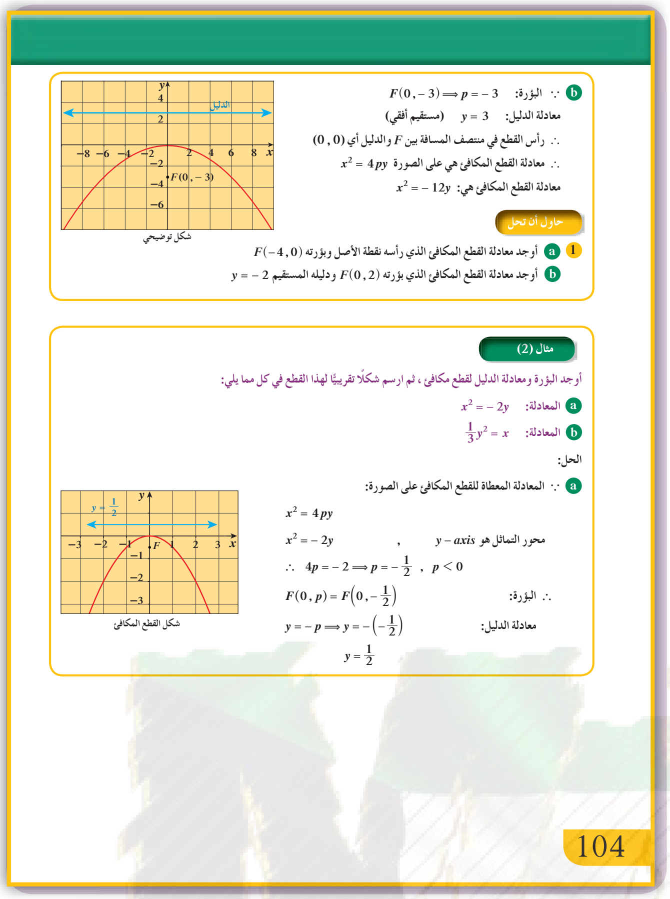
معادلة القطع المكافئ هي: $y^2 = 16x$

شكل توضيحي

103

8 التقييم

راقب الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل» وتحقق من فهمهم للقطع المكافئ ومن صحة حساباتهم في معرفة إحداثيات البؤرة والرأس ومعادلة الدليل.



b ∵ البؤرة: $F(0, -3) \Longrightarrow p = -3$

معادلة الدليل: $y = 3$ (مستقيم أفقي)

∴ رأس القطع في منتصف المسافة بين F والدليل أي $(0, 0)$

∴ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $x^2 = 4py$

معادلة القطع المكافئ هي: $x^2 = -12y$

شكل توضيحي

حاول أن تحل

1 a أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(-4, 0)$

b أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $F(0, 2)$ ودليله المستقيم $y = -2$

مثال (2)

أوجد البؤرة ومعادلة الدليل لقطع مكافئ ، ثم ارسم شكلًا تقريبيًّا لهذا القطع في كل مما يلي:

a المعادلة: $x^2 = -2y$

b المعادلة: $\frac{1}{3}y^2 = x$

الحل:

a ∵ المعادلة المعطاة للقطع المكافئ على الصورة:

$x^2 = 4py$

محور التماثل هو $y - axis$ ، $x^2 = -2y$

$\therefore \quad 4p = -2 \Longrightarrow p = -\frac{1}{2} \ , \ p < 0$

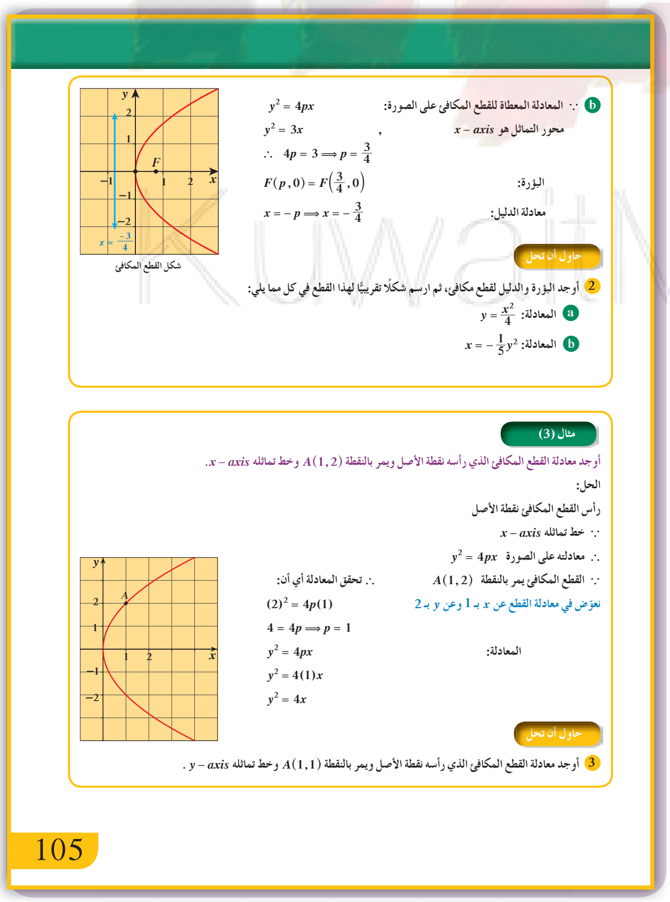
∴ البؤرة: $F(0, p) = F\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

معادلة الدليل: $y = -p \Longrightarrow y = -\left(-\frac{1}{2}\right)$

$y = \frac{1}{2}$

شكل القطع المكافئ

104



b ∵ المعادلة المعطاة للقطع المكافئ على الصورة: $y^2 = 4px$

محور التماثل هو $x - axis$ ، $y^2 = 3x$

$\therefore \quad 4p = 3 \Longrightarrow p = \frac{3}{4}$

البؤرة: $F(p, 0) = F\left(\frac{3}{4}, 0\right)$

معادلة الدليل: $x = -p \Longrightarrow x = -\frac{3}{4}$

شكل القطع المكافئ

حاول أن تحل

2 أوجد البؤرة والدليل لقطع مكافئ، ثم ارسم شكلًا تقريبيًّا لهذا القطع في كل مما يلي:

a المعادلة: $y = \frac{x^2}{4}$

b المعادلة: $x = -\frac{1}{5}y^2$

مثال (3)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $A(1, 2)$ وخط تماثله $x - axis$.

الحل:

رأس القطع المكافئ نقطة الأصل

∵ خط تماثله $x - axis$

∴ معادلته على الصورة $y^2 = 4px$

∵ القطع المكافئ يمر بالنقطة $A(1, 2)$ ∴ تحقق المعادلة أي أن:

نعوّض في معادلة القطع عن x بـ 1 وعن y بـ 2

$(2)^2 = 4p(1)$

$4 = 4p \Longrightarrow p = 1$

المعادلة: $y^2 = 4px$

$y^2 = 4(1)x$

$y^2 = 4x$

حاول أن تحل

3 أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $A(1, 1)$ وخط تماثله $y - axis$.

105

اختبار سريع

❶ أوجد البؤرة والدليل لقطع مكافئ معادلته:

$$y = \frac{1}{8}x^2$$

نضع المعادلة على الصورة: $x^2 = 4py$ أي $x^2 = 8y$

$F(0, 2)$ $\qquad y = -2$

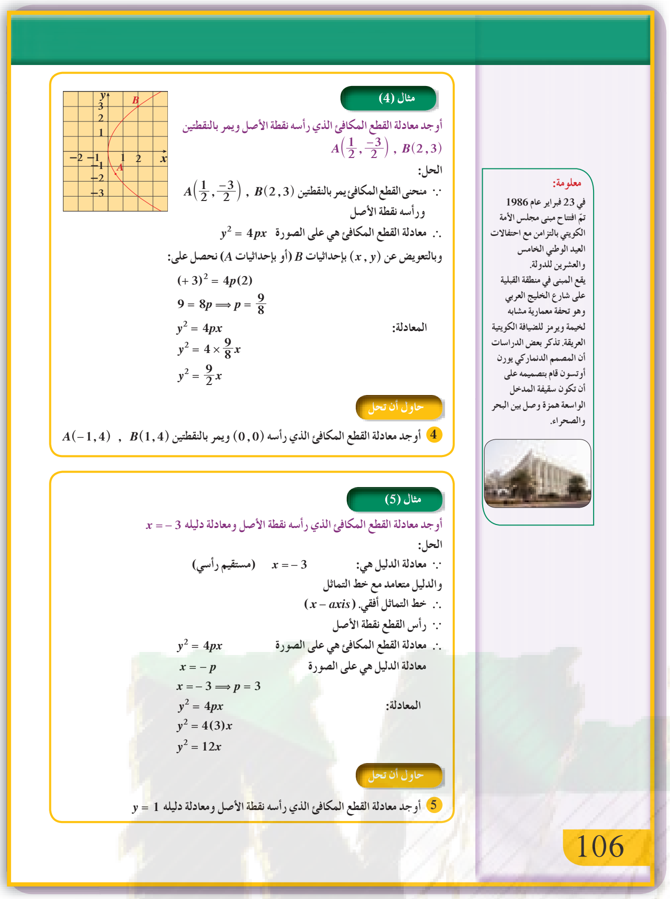
❷ أوجد معادلة قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل وبؤرته $(3, 0)$.

محور السينات هو محور تماثل لذا تكون المعادلة على الصورة: $y^2 = 4px$ حيث $p = 3$ وتكون المعادلة $y^2 = 12x$

❸ أوجد معادلة قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $A(2, -4)$ وخط تماثله $y - axis$

معادلة القطع المكافئ على الصورة: $x^2 = 4py$ ويمر بالنقطة $A(2, -4)$

فتكون $p = -\frac{1}{4}$ والمعادلة $x^2 = -y$ أو $y = -x^2$



مثال (4)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $A\left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}\right)$ ، $B(2,3)$

الحل:

$\because$ منحنى القطع المكافئ يمر بالنقطتين $A\left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}\right)$ ، $B(2,3)$ ورأسه نقطة الأصل

$\therefore$ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $y^2 = 4px$

وبالتعويض عن (x , y) بإحداثيات B (أو بإحداثيات A) نحصل على:

$(+3)^2 = 4p(2)$

$9 = 8p \Longrightarrow p = \frac{9}{8}$

المعادلة: $y^2 = 4px$

$y^2 = 4 \times \frac{9}{8}x$

$y^2 = \frac{9}{2}x$

حاول أن تحل

4 أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$ ويمر بالنقطتين $A(-1,4)$ ، $B(1,4)$

مثال (5)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $x = -3$

الحل:

$\because$ معادلة الدليل هي: $x = -3$ (مستقيم رأسي)

والدليل متعامد مع خط التماثل

$\therefore$ خط التماثل أفقي. $(x - axis)$

$\because$ رأس القطع نقطة الأصل

$\therefore$ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $y^2 = 4px$

معادلة الدليل هي على الصورة $x = -p$

$x = -3 \Longrightarrow p = 3$

المعادلة: $y^2 = 4px$

$y^2 = 4(3)x$

$y^2 = 12x$

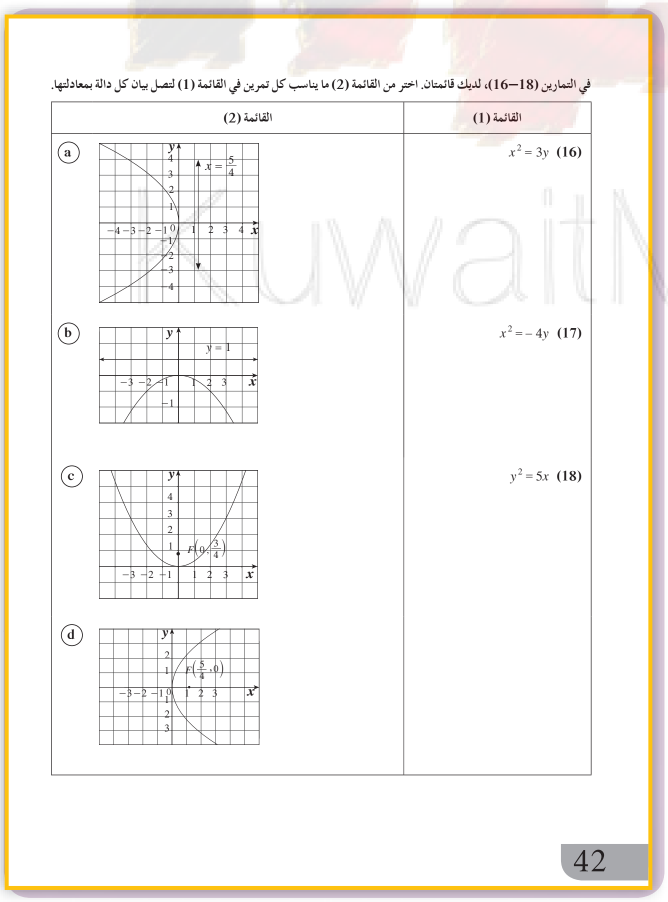
حاول أن تحل

5 أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $y = 1$

معلومة:

في 23 فبراير عام 1986 تمّ افتتاح مبنى مجلس الأمة الكويتي بالتزامن مع احتفالات العيد الوطني الخامس والعشرين للدولة. يقع المبنى في منطقة القبلية على شارع الخليج العربي وهو تحفة معمارية مشابه لخيمة ويرمز للضيافة الكويتية العريقة. تذكر بعض الدراسات أن المصمم الدنماركي يورن أوتسون قام بتصميمه على أن تكون سقيفة المدخل الواسعة همزة وصل بين البحر والصحراء.

106



في التمارين (18–16)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتصل بيان كل دالة بمعادلتها.

القائمة (1)	القائمة (2)
(16) $x^2 = 3y$	a
(17) $x^2 = -4y$	b
(18) $y^2 = 5x$	c
	d

42

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a) مخروطي الشكل.

(b) $\overleftrightarrow{OO'}$

(c) الرأس M، قاعدة (c)، قاعدة (c')

(d) $\overleftrightarrow{DD'}$

نعم $\overleftrightarrow{AA'}$، $\overleftrightarrow{BB'}$ كل مستقيم يمر بالنقطة M ويقطع الدائرتين هو راسم.

«حاول أن تحل»

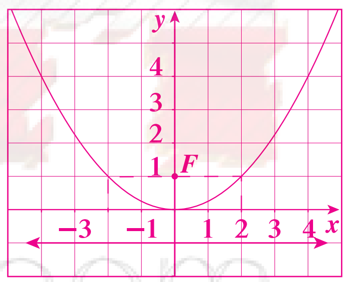
1 **(a)** $y^2 = -16x$

(b) $x^2 = 8y$

2 **(a)** $x^2 = 4y \quad \therefore \quad p = 1$

البؤرة: $(0, 1)$

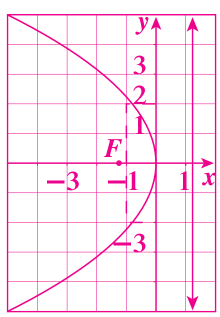
معادلة الدليل: $y = -1$



(b) $y^2 = -5x \quad \therefore \quad p = -\frac{5}{4}$

البؤرة: $\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$

معادلة الدليل: $y = \frac{5}{4}$



3 $x^2 = 4py \quad \therefore \quad (1)^2 = 4p(1) \Longrightarrow p = \frac{1}{4}$

المعادلة: $x^2 = y$

4 $x^2 = 4py \quad \therefore \quad (-1)^2 = 4p(4) \Longrightarrow p = \dfrac{1}{16}$

المعادلة: $x^2 = \dfrac{1}{4}y$

5 $-p = 1 \Longrightarrow p = -1$

المعادلة: $x^2 = -4y$

6 $4p = 12 \Longrightarrow p = 3 \;;\; F(0\,,3)$

يوضع المصباح في البؤرة F على بعد 3 وحدات من رأس القطع المكافئ.

7 $p = 4 \;;\; 4p = 16 \;;\; y^2 = 16x$

8 $x_B = \dfrac{220}{2} = 110 \;;\; y_B = 36 - 3 = 33$

$x^2 = 4py \quad \therefore \quad (110)^2 = 4p(33) \Longrightarrow p = 91.\overline{6}$

معادلة القطع المكافئ: $x^2 = 366.\overline{6}y$

$x = 110 - 10 = 100$

$\therefore \quad y \approx 27.3$

الإحداثي السيني للدعامة.

طول الدعامة: $27.3 + 3 = 30.3\ \text{m}$

Applications Using Parabolas تطبيقات باستخدام القطوع المكافئة

إذا دورنا قطعًا مكافئًا في الفراغ الثلاثي الأبعاد باستخدام خط التماثل كمحور للدوران، فإن القطع المكافئ ينتج **سطحًا مكافئًا Paraboloid**.

إذا وضعنا مصدرًا ضوئيًا في بؤرة سطح مكافئ عاكس، فإن الضوء ينعكس من هذا السطح في خطوط مستقيمة موازية لمحور التماثل، كما هو موضح في الشكل المقابل.

هذا يبيّن كيف تعمل الأنوار (الكشافات) الرئيسية للسيارة.

مقطع عرضي لمجسم مكافئ

ينطبق المبدأ نفسه على الإشارات التي تنطلق في الاتجاه العكسي، مثل بعض مكبرات الصوت والعكس صحيح.

عندما تنطلق الموجات الضوئية أو الصوتية نحو السطح المكافئ موازية لخط تماثله فإنها تنعكس من هذا السطح وتتجمع في البؤرة.

الهدف هو تركيز الضوء أو الصوت عند البؤرة حيث يوضع المستقبل الإلكتروني (الريسيفر).

على سبيل المثال الميكروفونات المكافئة التي تستخدم أثناء مباريات كرة القدم.

مثال (6)

تُستخدم ميكروفونات مكافئة على جانبي ملعب لالتقاط الأصوات من داخل الملعب.

إذا كان قد تولد ميكروفون مكافئ من تدوير قطع مكافئ معادلته: $y^2 = 15x$،

فحدّد موضع البؤرة (جهاز الاستقبال الإلكتروني) لهذا القطع المكافئ.

الحل:

إذا نظرنا إلى السطح المكافئ باعتبار أن رأسه $(0\,,0)$ وخط تماثله هو محور السينات،

$$\because \quad y^2 = 4px$$
$$y^2 = 15x$$
$$\therefore 4p = 15$$
$$p = \frac{15}{4}$$

البؤرة هي عند: $F(p\,,0) = F\left(\frac{15}{4}\,,0\right)$

فيلزم أن يوضع المستقبل (جهاز الاستقبال الإلكتروني) عند النقطة $F\left(\frac{15}{4}\,,0\right)$

حاول أن تحل

6 تصنع إحدى الشركات الكشافات المكافئة لنوعيات عديدة من السيارات.

إذا كان لأحد هذه الكشافات سطح مكافئ متولد من تدوير القطع المكافئ الذي معادلته $x^2 = 12y$، فأين سيكون موضع المصباح الكهربائي؟

107

مثال (7)

تصنع إحدى الشركات مصابيح أمامية للسيارات. إذا كان أحد المصابيح على شكل سطح مكافئ متولد من تدوير قطع مكافئ معادلته $y^2 = 12x$، فأين يجب وضع لمبة المصباح؟

الحل:

إذا نظرنا إلى السطح المكافئ باعتبار أن رأسه $(0\,,0)$ ومحور تماثله $x-axis$

معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $y^2 = 4px$

$\because \quad y^2 = 12x$

$4p = 12 \Longrightarrow p = 3$

البؤرة: $F(p\,,0) \quad F(3\,,0)$

توضع اللمبة على بعد 3 (وحدات قياس) من رأس القطع المكافئ.

حاول أن تحل

7 في مثال (7)، ما معادلة القطع المكافئ إذا كانت اللمبة تبعد 4 (وحدات قياس) عن رأس القطع المكافئ؟

مثال (8)

يصل سلك معدني متدلٍ بين رأسي عمودي جسر. السلك المعدني هو على صورة قطع مكافئ. يبعد العمودان عن بعضهما مسافة 180 m ويبلغ ارتفاع كل منهما 33 m، يبلغ أصغر ارتفاع للسلك عن الطريق العام 3 m، وضعت على الطريق دعامات للسلك المتدلي. أوجد طول الدعامة التي تبعد 10 m عن أي من العمودين.

الحل: باعتبار رأس القطع المكافئ هو $(0\,,0)$

معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $x^2 = 4py$

إحداثيات النقطة B هي: $x_B = \frac{180}{2} = 90 \;,\; y_B = 33 - 3 = 30$

بالتعويض في معادلة القطع المكافئ نحصل على: $(90)^2 = 4p \times 30$

$$p = \frac{90^2}{4 \times 30} = 67.5$$

معادلة القطع المكافئ: $x^2 = 4 \times 67.5y$

$x^2 = 270y$

الإحداثي السيني للدعامة: $90 - 10 = 80$

بالتعويض في معادلة القطع المكافئ: $(80)^2 = 270y$

$y \approx 23.7$

يبلغ طول الدعامة حوالي: $23.7 + 3 = 26.7\text{m}$

حاول أن تحل

8 في مثال (8)، إذا كان البعد بين العمودين 220 m وارتفاع كل عمود 36 m، فأوجد طول الدعامة التي تبعد 10 m عن أي من العمودين.

108

7–2: القطع الناقص

1 الأهداف

- يتعرف القطع الناقص وخواصه.
- يستخدم القطع الناقص في حلّ المسائل.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

قطع ناقص – بؤرتين – المحور الأصغر – المحور الأكبر – نقطة المركز – رؤوس.

3 الأدوات والوسائل

أوراق رسم بياني – مسطرة – آلة حاسبة علمية – مسمار – خيط – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(1) اكتب كلًّا مما يلي على الصورة: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(a) $4x^2 + 9y^2 = 36$

(b) $2x^2 + y^2 = 18$

(2) اكتب معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل في كل حالة:

(a) نصف قطرها: $r = 2$

(b) قطرها: $d = 1$


7–2

القطع الناقص

Ellipse

سوف تتعلم

- القطوع الناقصة وخواصها.
- تطبيقات باستخدام القطوع الناقصة.

المفردات والمصطلحات:

- قطع ناقص Ellipse
- بؤرتين Two Foci
- المحور الأصغر Minor Axis
- المحور الأكبر Major Axis
- نقطة المركز Center
- رؤوس Vertices

دعنا نفكر ونتناقش

1 (a) أوجد إحداثيات نقاط التقاطع مع محور السينات ومحور الصادات للمنحنى حيث معادلته: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 1$

(b) عيّن أربع نقاط أخرى تحقق المعادلة المعطاة أعلاه.

ما شكل المنحنى الذي تتوقع أن تحصل عليه؟

(c) ما إحداثيات نقطة المركز للشكل الذي حصلت عليه؟

2 (a) أوجد إحداثيات نقاط التقاطع مع محور السينات ومحور الصادات للمنحنى الذي معادلته: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ عيّن هذه النقاط على المحاور.

(b) عيّن أربع نقاط أخرى تحقق المعادلة المعطاة. وارسم شكلًا تقريبيًّا ثم قارن بين الشكلين.

تعريف: القطع الناقص

القطع الناقص هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي يكون مجموع بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوى ثابتًا.

معلومة:

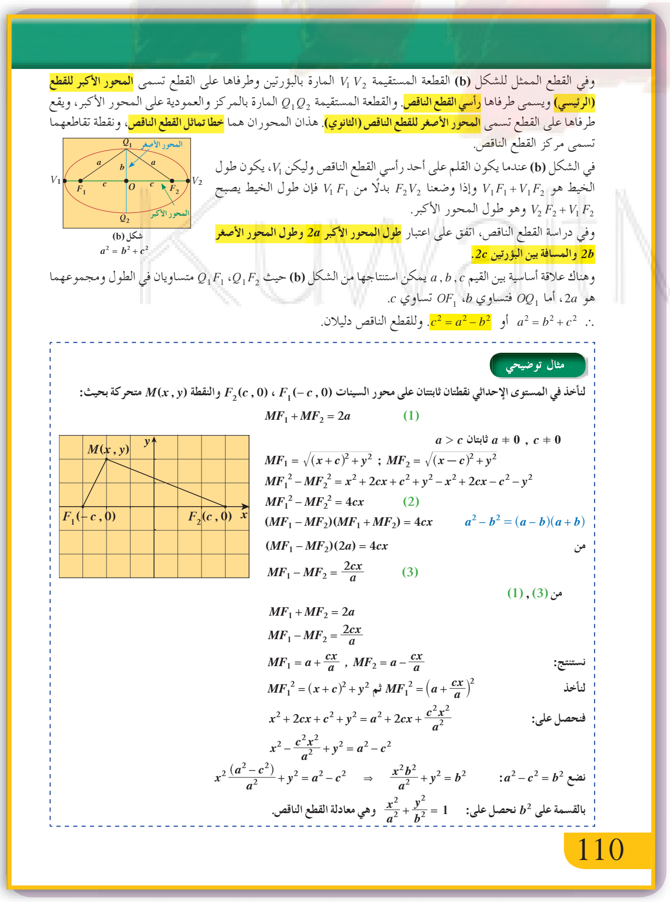
لاحظ أنه إذا انطبقت بؤرتا القطع الناقص على بعضهما، فإن الشكل الناتج يكون دائرة نصف قطرها هو نصف طول الخيط.

تسمى النقطتان الثابتتان **بؤرتين**، وتسمى نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما **مركز القطع الناقص**. يوضّح الشكل المقابل قطعًا ناقصًا بؤرتاه F_1 , F_2، والبعدان اللذان مجموعهما ثابت هما d_1 , d_2.

شكل (a)

لتوضيح تعريف القطع الناقص عمليًّا، تخيل خيطًا طوله ثابت، أحد طرفيه مثبت عند إحدى البؤرتين وطرفه الآخر مثبت عند البؤرة الثانية، ويتحرك قلم على الخيط وهو مشدود، فإن المنحنى الذي يرسمه القلم هو قطع ناقص. وإن طول الخيط هو مجموع البعدين d_1 , d_2 انظر إلى الشكل **(a)**.

109


وفي القطع الممثل للشكل **(b)** القطعة المستقيمة V_1V_2 المارة بالبؤرتين وطرفاها على القطع تسمى **المحور الأكبر للقطع (الرئيسي)** ويسمى طرفاها **رأسي القطع الناقص**. والقطعة المستقيمة Q_1Q_2 المارة بالمركز والعمودية على المحور الأكبر، ويقع طرفاها على القطع تسمى **المحور الأصغر للقطع الناقص (الثانوي)**. هذان المحوران هما **خطا تماثل القطع الناقص**، ونقطة تقاطعهما تسمى مركز القطع الناقص.

في الشكل **(b)** عندما يكون القلم على أحد رأسي القطع الناقص وليكن V_1، يكون طول الخيط هو $V_1F_1 + V_1F_2$ وإذا وضعنا F_2V_2 بدلًا من V_1F_1 فإن طول الخيط يصبح $V_2F_2 + V_1F_2$ وهو طول المحور الأكبر.

شكل (b)

$a^2 = b^2 + c^2$

وفي دراسة القطع الناقص، اتفق على اعتبار **طول المحور الأكبر $2a$ وطول المحور الأصغر $2b$ والمسافة بين البؤرتين $2c$.**

وهناك علاقة أساسية بين القيم a , b , c يمكن استنتاجها من الشكل **(b)** حيث Q_1F_2، Q_1F_1 متساويان في الطول ومجموعهما هو $2a$، أما OQ_1 فتساوي b، OF_1 تساوي c.

$\therefore$ $a^2 = b^2 + c^2$ أو $c^2 = a^2 - b^2$. وللقطع الناقص دليلان.

مثال توضيحي

لنأخذ في المستوى الإحداثي نقطتان ثابتتان على محور السينات $F_1(-c , 0)$ ، $F_2(c , 0)$ والنقطة $M(x , y)$ متحركة بحيث:

$$MF_1 + MF_2 = 2a \qquad (1)$$

$a > c$ ثابتان $a \neq 0$, $c \neq 0$

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \; ; \; MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$MF_1^2 - MF_2^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - x^2 + 2cx - c^2 - y^2$$

$$MF_1^2 - MF_2^2 = 4cx \qquad (2)$$

$$(MF_1 - MF_2)(MF_1 + MF_2) = 4cx \qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

من

$$(MF_1 - MF_2)(2a) = 4cx$$

$$MF_1 - MF_2 = \frac{2cx}{a} \qquad (3)$$

من (1) , (3)

$$MF_1 + MF_2 = 2a$$

$$MF_1 - MF_2 = \frac{2cx}{a}$$

نستنتج: $MF_1 = a + \frac{cx}{a}$, $MF_2 = a - \frac{cx}{a}$

لنأخذ $MF_1^2 = (x+c)^2 + y^2$ ثم $MF_1^2 = \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2$

فنحصل على: $x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2}$

$$x^2 - \frac{c^2x^2}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2$$

نضع $a^2 - c^2 = b^2$: $x^2\frac{(a^2 - c^2)}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow \frac{x^2b^2}{a^2} + y^2 = b^2$

بالقسمة على b^2 نحصل على: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ وهي معادلة القطع الناقص.

110

5 التدريس

يتم التركيز أوّلًا على تعريف القطع الناقص الذي مركزه $(0, 0)$ ومحوره الأكبر ينطبق على أحد المحورين. يمكن للمعلم الاستعانة بمسمارين وخيط، يثبّت المسمارين على خشبة ويتدلى بينهما الخيط؛ بواسطة القلم يمكن أن يرسم بيان القطع الناقص كما في الشكل (a).

لاحظ في القطع الناقص أن:

$a > b > 0$ وطول المحور الأكبر في القطع الناقص $2a$ وطول المحور الأصغر $2b$، وغيرها من الخواص.

يربط المعلم بين خطي تماثل القطع الناقص ووجود بؤرتين ودليلين ورأس القطع وطرفي المحور الأصغر.

يستحسن التكلم عن الحالة الخاصة الممثلة بالدائرة، عندما يكون $a = b$ أو عندما يكون المستوى القاطع للقطع عموديًّا على المحور.

يشدّد المعلم على أهمية معرفة الطلاب لخواص القطع الناقص.

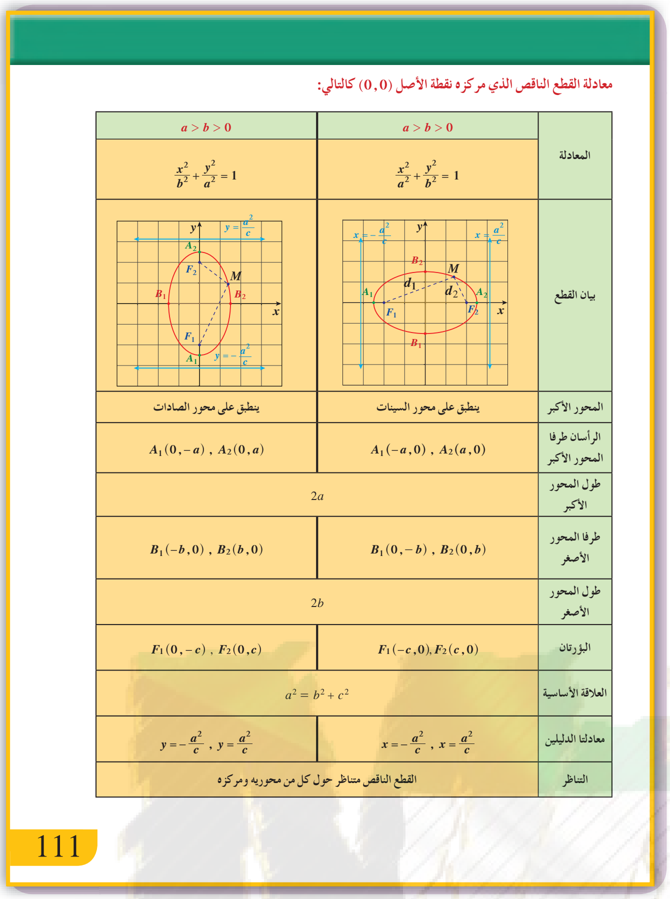
في المثال التوضيحي

استخدام التعريف الهندسي للقطع الناقص: $MF_1 + MF_2 = 2a$ لإيجاد معادلة القطع الناقص وكتابة العلاقة الأساسية $a^2 = b^2 + c^2$. سوف تستخدم هذه المعادلة مع العلاقة الأساسية في بعض الأمثلة.

في المثال (1)

إيجاد رأسي القطع، وطرفي المحور الأصغر، ومعادلتي الدليلين، وطولي المحورين، وإحداثيات البؤرتين باستخدام معادلة القطع الناقص ثم وضع رسم تقريبي له.

ألفت انتباه الطلاب في هذا المثال إلى معادلة القطع الناقص على الصورة $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$، وبالتالي المحور الأكبر ينطبق على محور السينات والمحور الأصغر ينطبق على محور الصادات.



معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل $(0,0)$ كالتالي:

	$a > b > 0$	$a > b > 0$
المعادلة	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
بيان القطع		
المحور الأكبر	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
الرأسان طرفا المحور الأكبر	$A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)$, $A_2(0,a)$
طول المحور الأكبر	$2a$	
طرفا المحور الأصغر	$B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$	$B_1(-b,0)$, $B_2(b,0)$
طول المحور الأصغر	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c,0), F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$
العلاقة الأساسية	$a^2 = b^2 + c^2$	
معادلتا الدليلين	$x = -\frac{a^2}{c}$, $x = \frac{a^2}{c}$	$y = -\frac{a^2}{c}$, $y = \frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع الناقص متناظر حول كل من محوريه ومركزه	

111

تمرَّنْ 7-2

القطع الناقص

Ellipse

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4—1)، لكل معادلة من معادلات القطع الناقص التالية أوجد: رأسي القطع — طرفي المحور الأصغر — البؤرتين — معادلتي دليلي القطع — طول كل من المحورين، ثم ارسم شكلًا تقريبيًّا لكل قطع.

(1) $\frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$ **(2)** $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$

(3) $3x^2 + 5y^2 - 225 = 0$ **(4)** $4x^2 + y^2 - 28 = 0$

في التمارين (12—5)، اكتب معادلة القطع الناقص الذي فيه:

(5) البؤرتان $F_2\ (2,0)$ ، $F_1\ (-2,0)$ ، ونقطتا طرفي المحور الأصغر $B_2\ (0,3)$ ، $B_1\ (0,-3)$.

(6) $V_1F_1 + V_1F_2 = 10$، حيث إنّ V_1 هو نقطة على القطع الناقص، F_2 و F_1 هما البؤرتين، علمًا أنّ $F_1(3,0)$، $F_2(-3,0)$.

(7) نقطتا طرفي المحور الأكبر هما $A_2\ (0,5)$, $A_1\ (0,-5)$ ، طول المحور الأصغر 4.

(8) نقطتا طرفي المحور الأصغر $B_2\ (0,4)$, $B_1\ (0,-4)$ ، طول المحور الأكبر 10.

(9) مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه $F(5,0)$ ويمر بالنقطة $C(2,3)$.

(10) محوره الأكبر نقطتاه الطرفيتان $A_2(6,0)$, $A_1(-6,0)$ ومحوره الأصغر إحدى نقطتيه الطرفيتين $B_1(0,-4)$.

(11) بؤرتاه $F_2(-5,0)$, $F_1(5,0)$ وطول محوره الأصغر 6.

(12) طول المحور الأكبر الذي ينطبق على محور السينات 10 والمسافة بين البؤرتين 6 ومركزه نقطة الأصل.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) رأسي القطع للقطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{9^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ هما: $(-9,0)$، $(9,0)$ (a) (b)

(2) النقطة $(\sqrt{33},0)$ هي إحدى بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{7^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ (a) (b)

(3) طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته $25x^2 + 9y^2 = 225$ يساوي 10 units (a) (b)

(4) بؤرتا القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$، هما $(\pm 3,0)$ (a) (b)

(5) في القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$، طول المحور الأصغر يساوي 8 (a) (b)

43

في المثال (2)

يوضّح هذا المثال كيفية إيجاد معادلة القطع الناقص بمعلومية بؤرتيه وطول محوره الأصغر. إن رسم شكل تقريبي للقطع يساعد على تركيز مفهوم القطع وخواصه لدى الطالب. ألفت انتباه الطلاب إلى المعادلة التي على الصورة $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$، وبالتالي المحور الأكبر ينطبق على محور الصادات والمحور الأصغر ينطبق على محور السينات.

في المثال (3)

يحول الطالب في هذا المثال المعادلة إلى الصورة: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. وبالمقارنة يوجد a^2, b^2، وباستخدام العلاقة الأساسية $a^2 = b^2 + c^2$ يوجد قيمة c^2، والمعروف أن قيم a, b, c تساعد على إيجاد إحداثيات البؤرتين والرأسين وطول المحور الأكبر وطول المحور الأصغر.

في المثال (4)

في هذا المثال يستخدم الطلاب خصائص القطع الناقص. من طول المحور الأكبر يتم استنتاج قيمة a ومن المسافة بين البؤرتين يتم استنتاج قيمة c، ثم من العلاقة الأساسية $a^2 = b^2 + c^2$ يتم الحصول على قيمة b^2، وبالتالي يمكن كتابة معادلة القطع الناقص.

في المثال (5)

في هذا المثال يتعامل الطلاب مع إحداثيات بؤرة، فيتعرفون على قيمة c ويستنتجون أن المحور الأكبر ينطبق على محور السينات، ويستخدمون مرور القطع الناقص بنقطة محددة ليستنتجوا علاقة تساعدهم على إيجاد a^2 , b^2 فيمكن عندها كتابة معادلة القطع الناقص.

في الأمثلة (6), (7), (8)

تعتبر هذه الأمثلة من التطبيقات الحياتية المهمة لاستخدام معادلة القطع الناقص وخواصه في مجالات متعددة مثل الطب، ودوران الكواكب حول الشمس باعتبارها إحدى بؤرتي قطع ناقص.

مثال (1)

إذا كانت: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{10} = 1$ معادلة قطع ناقص فأوجد:

a) رأسي القطع وطرفي المحور الأصغر.

b) البؤرتين.

c) معادلتي دليلي القطع.

d) طول كل من المحورين ثم ارسم شكلًا تقريبيًا للقطع.

الحل:

a) معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

ومن معادلة القطع الناقص نجد أن:

$a^2 = 16 \Longrightarrow a = 4$

$b^2 = 10 \Longrightarrow b = \sqrt{10}$

والمحور الأكبر ينطبق على محور السينات

رأسا القطع الناقص هما: $A_1(-4, 0)$, $A_2(4, 0)$

طرفا المحور الأصغر هما: $B_1(0, -\sqrt{10})$, $B_2(0, \sqrt{10})$

b) $c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 16 - 10$

$= 6$

ومنه $c = \sqrt{6}$

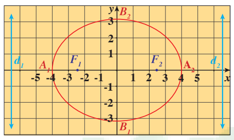
فنحصل على: $F_1(-\sqrt{6}, 0)$, $F_2(\sqrt{6}, 0)$

c) معادلة الدليلين: $x = \frac{a^2}{c}$, $x = -\frac{a^2}{c}$ ومنه نجد:

$x = \frac{16}{\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{6}}{3}$ $\qquad$ $x = \frac{-16}{\sqrt{6}} = \frac{-8\sqrt{6}}{3}$

d) طول المحور الأكبر هو $2a$: $2a = 2 \times 4 = 8$

طول المحور الأصغر هو $2b$: $2b = 2\sqrt{10}$



حاول أن تحل

1) إذا كانت: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة قطع ناقص فأوجد:

a) رأسي القطع وطرفي المحور الأصغر.

b) البؤرتين.

c) معادلة دليلي القطع.

d) طول كل من المحورين، ثم ارسم شكلًا تقريبيًا للقطع.

مثال (2)

أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه: $F_1(0, -3)$, $F_2(0, 3)$ وطول محوره الأصغر 4، ثم ارسم شكلًا تقريبيًا لهذا القطع.

الحل:

تقع البؤرتان على محور الصادات فتكون المعادلة على الصورة $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

وتكون $c = 3$، طول المحور الأصغر $= 4$

$\therefore 2b = 4 \Longrightarrow b = 2$

$\therefore$ طرفا المحور الأصغر $(2, 0)$, $(-2, 0)$

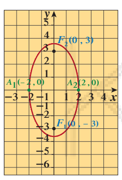
$\therefore b^2 = 4$

$c^2 = a^2 - b^2$

$9 = a^2 - 4$

$a^2 = 13$

$\therefore$ معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{13} = 1$



حاول أن تحل

2) أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه: $F_2(2, 0)$, $F_1(-2, 0)$ وطول محوره الأكبر 6، وارسم شكلًا تقريبيًا لهذا القطع.

مثال (3)

أوجد البؤرتين والرأسين وطول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته: $25x^2 + 16y^2 - 400 = 0$

الحل:

$25x^2 + 16y^2 - 400 = 0$

$25x^2 + 16y^2 = 400$

قسمة طرفي المعادلة على 400 $\qquad \frac{25x^2}{400} + \frac{16y^2}{400} = \frac{400}{400}$

الصورة العامة للقطع الناقص $\qquad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

$b^2 = 16 \Longrightarrow b = 4$

$a^2 = 25 \Longrightarrow a = 5$

$\because c^2 = a^2 - b^2$

$\therefore c^2 = 25 - 16$

$c^2 = 9 \Longrightarrow c = 3$

البؤرتان على محور الصادات: $F_1(0, -3)$, $F_2(0, 3)$

الرأسان على محور الصادات: $B_1(0, -5)$, $B_2(0, 5)$

طول المحور الأكبر هو $2a$ فيكون: $2a = 2 \times 5 = 10$

حاول أن تحل

3) أوجد البؤرتين والرأسين وطول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته: $x^2 + 4y^2 = 16$

6 الربط

يبيّن المثال (6) كيفية الاستفادة من خصائص البؤرة في عمل جهاز تفتيت الحصى، ويبيّن المثال (7) كيفية متابعة الأصوات في أبنية بيضاوية الشكل. كما يبين المثال (8) مدارات الكواكب حول الشمس وهي قطوع ناقصة.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في الربط بين المحور الأكبر وإحداثيات البؤرتين. يمكن رسم عدة أشكال تبين الترابط بينهما. يشير المعلم إلى العلاقة بين قيمتي a, b واختيار المحور الأكبر الذي تقع عليه البؤرتان.

يتحقق المعلم من تمكن الطلاب من إيجاد معادلة القطع الناقص دون أخطاء حسابية.

ساعدهم على تحديد a^2 و b^2 لمعرفة شكل القطع الناقص وتحديد المحور الأكبر والمحور الأصغر وبالتالي البؤرتين.

8 التقييم

راقب الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل». تحقق من تمكنهم من خواص القطع الناقص ومن صحة حساباتهم.

اختبار سريع

1 أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه: $F_1(-4,0)$, $F_2(4,0)$ وطول محوره الأكبر 10.

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

2 من معادلة القطع الناقص: $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{81}=1$، أوجد إحداثيات نقطتي طرفي كل من المحور الأكبر والمحور الأصغر ومركز القطع وإحداثيات بؤرتيه.

المركز $(0, 0)$

$A_1(-12,0)$; $A_2(12,0)$

$B_1(0,-9)$, $B_2(0,9)$

$F_1(-\sqrt{63},0)$, $F_2(\sqrt{63},0)$

مثال (4)

أوجد معادلة قطع ناقص إذا كان طول محوره الأكبر 12 cm والمسافة بين البؤرتين 8 cm.

الحل:

$\because$ طول المحور الأكبر هو 12 cm

$\therefore 2a=12 \Longrightarrow a=6$

$\because$ المسافة بين البؤرتين هو 8 cm

$\therefore 2c=8 \Longrightarrow c=4$

ولكن: $a^2=b^2+c^2$

$b^2=a^2-c^2=6^2-4^2=36-16=20$

معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

بالتعويض نحصل على المعادلة: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$

حاول أن تحل

4 أوجد معادلة قطع ناقص إذا كان محوره الأكبر 16 cm والمسافة بين البؤرتين 10 cm.

مثال (5)

أوجد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه $F(2,0)$ ويمر بالنقطة $A(2,1)$.

الحل:

$\because$ البؤرة $F(2,0)$ تقع على محور السينات

$\therefore$ معادلة للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل هي:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $c=2$

$c^2=a^2-b^2$

$(2)^2=a^2-b^2$

$a^2=b^2+4$ (1)

$\because$ القطع الناقص يمر بالنقطة $A(2,1)$

$\therefore \frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1 \Longrightarrow \frac{4b^2+a^2}{a^2b^2}=1$

$4b^2+a^2=a^2b^2$ (2)

بالتعويض (1) في (2) نجد: $4b^2+b^2+4=b^2(b^2+4)$

ومنه نحصل على المعادلة: $b^4-b^2-4=0$

$b^2=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$

114

في التمارين (6–12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) النقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر للقطع الناقص الذي معادلته $4x^2+9y^2=36$ هما:

ⓐ $(\pm 2,0)$ ⓑ $(\pm 3,0)$

ⓒ $(0,\pm 2)$ ⓓ $(0,\pm 3)$

(7) معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $(\pm 7,0)$ والنقطتان الطرفيتان لمحوره الأصغر $(0,\pm 6)$ هي:

ⓐ $\frac{x^2}{85}+\frac{y^2}{36}=1$ ⓑ $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{85}=1$

ⓒ $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$ ⓓ $\frac{x^2}{85}+\frac{y^2}{49}=1$

(8) معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل وطول محوره الأكبر 9 units وطول محوره الأصغر 4 units هي:

ⓐ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ ⓑ $\frac{x^2}{20.25}+\frac{y^2}{4}=1$

ⓒ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ ⓓ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{20.25}=1$

(9) النقطة $A(-10,0)$ تنتمي إلى القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$. مجموع المسافتين AF_1+AF_2 حيث F_1 , F_2 هما البؤرتان يساوي:

ⓐ 10 units ⓑ 12 units

ⓒ 14 units ⓓ 20 units

(10) طول المحور الأكبر للقطع الناقص $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ يساوي:

ⓐ 12 units ⓑ $2\sqrt{41}$ units

ⓒ 16 units ⓓ 20 units

(11) المسافة بين البؤرتين للقطع الناقص $15x^2+25y^2-75=0$ هي:

ⓐ $\sqrt{2}$ ⓑ $2\sqrt{2}$

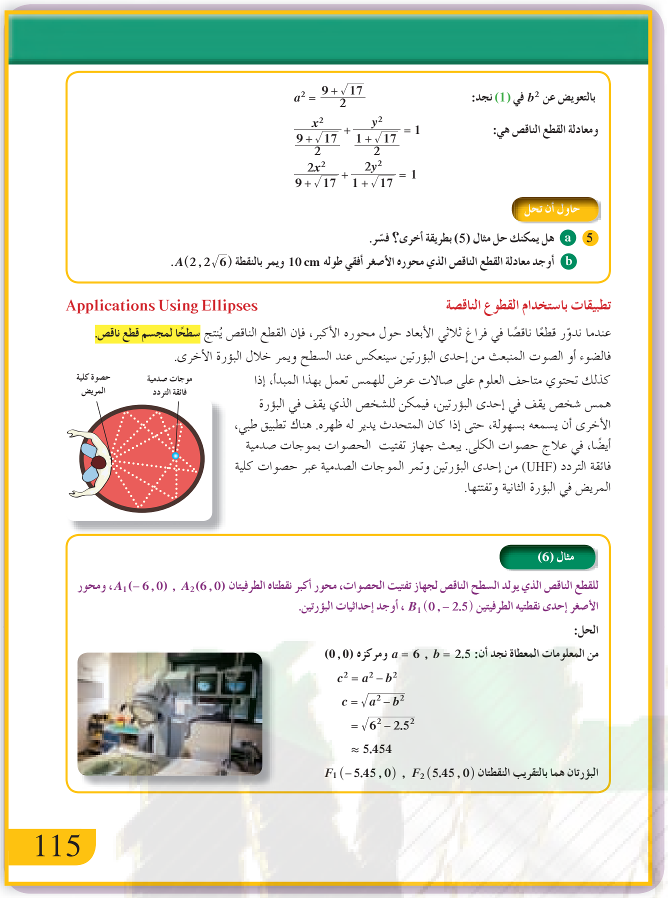
ⓒ 10 ⓓ $2\sqrt{3}$

(12) المسافة بين نقطة الأصل وأحد رأسي القطع الناقص على المحور الأكبر الذي معادلته $\frac{x^2}{20.25}+\frac{y^2}{4}=1$ هي:

ⓐ 9 ⓑ 2

ⓒ 4.5 ⓓ 16.25

44


بالتعويض عن b^2 في (1) نجد: $a^2 = \frac{9+\sqrt{17}}{2}$

ومعادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{\frac{9+\sqrt{17}}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1+\sqrt{17}}{2}} = 1$

$$\frac{2x^2}{9+\sqrt{17}} + \frac{2y^2}{1+\sqrt{17}} = 1$$

حاول أن تحل

5 (a) هل يمكنك حل مثال (5) بطريقة أخرى؟ فسّر.

(b) أوجد معادلة القطع الناقص الذي محوره الأصغر أفقي طوله 10 cm ويمر بالنقطة $A(2, 2\sqrt{6})$.

تطبيقات باستخدام القطوع الناقصة Applications Using Ellipses

عندما ندوّر قطعًا ناقصًا في فراغ ثلاثي الأبعاد حول محوره الأكبر، فإن القطع الناقص يُنتج سطحًا لمجسم قطع ناقص. فالضوء أو الصوت المنبعث من إحدى البؤرتين سينعكس عند السطح ويمر خلال البؤرة الأخرى.

كذلك تحتوي متاحف العلوم على صالات عرض للهمس تعمل بهذا المبدأ، إذا همس شخص يقف في إحدى البؤرتين، فيمكن للشخص الذي يقف في البؤرة الأخرى أن يسمعه بسهولة، حتى إذا كان المتحدث يدير له ظهره. هناك تطبيق طبي، أيضًا، في علاج حصوات الكلى. يبعث جهاز تفتيت الحصوات بموجات صدمية فائقة التردد (UHF) من إحدى البؤرتين وتمر الموجات الصدمية عبر حصوات كلية المريض في البؤرة الثانية وتفتتها.

مثال (6)

للقطع الناقص الذي يولد السطح الناقص لجهاز تفتيت الحصوات، محور أكبر نقطتاه الطرفيتان $A_1(-6,0)$, $A_2(6,0)$، ومحور الأصغر إحدى نقطتيه الطرفيتين $B_1(0,-2.5)$، أوجد إحداثيات البؤرتين.

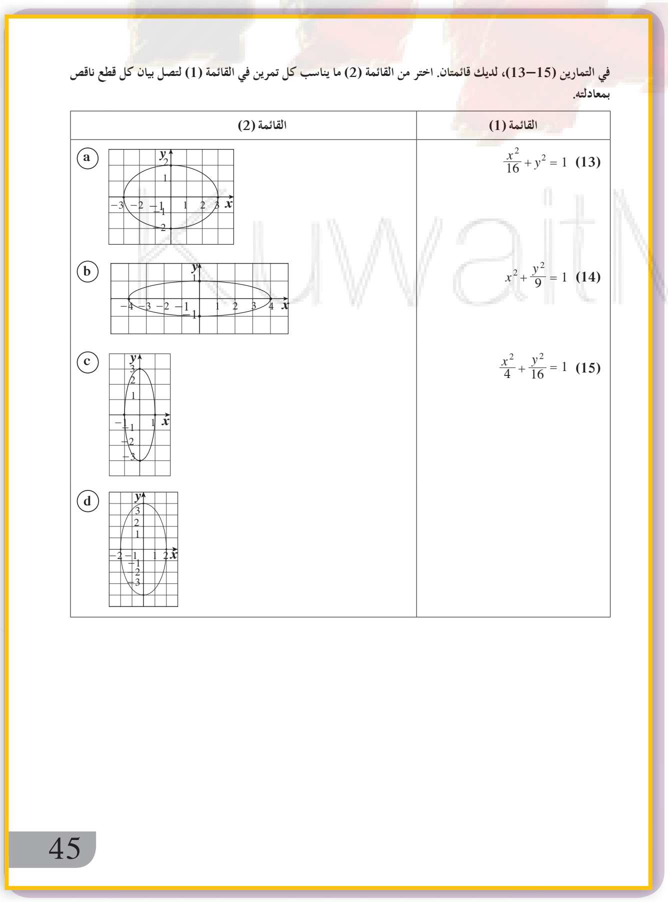
الحل:

من المعلومات المعطاة نجد أن: $a = 6$, $b = 2.5$ ومركزه $(0,0)$

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$
$$= \sqrt{6^2 - 2.5^2}$$
$$\approx 5.454$$

البؤرتان هما بالتقريب النقطتان $F_1(-5.45, 0)$, $F_2(5.45, 0)$

115


في التمارين (13–15)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتصل بيان كل قطع ناقص بمعادلته.

القائمة (1)	القائمة (2)
(13) $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$	(a)
(14) $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$	(b)
(15) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$	(c)
	(d)

45

③ من معادلة القطع الناقص: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{81} = 1$، أوجد إحداثيات نقطتي طرفي المحور الأكبر والمحور الأصغر وإحداثيات بؤرتيه.

$A_1(0,-9)$; $A_2(0,9)$

$B_1(-5,0)$, $B_2(5,0)$

$F_1(0,-\sqrt{56})$, $F_2(0, \sqrt{56})$

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1 (a) $(-4,0)$, $(4,0)$, $(0,-4)$, $(0,4)$

(b) إجابة ممكنة:

$(-2,-2\sqrt{3}), (-2, 2\sqrt{3}), (2,-2\sqrt{3}), (2, 2\sqrt{3})$

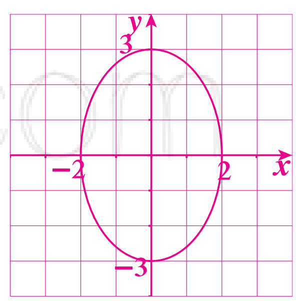
(c) $(0, 0)$

2 (a) $(-4,0)$, $(4,0)$, $(0,-3)$, $(0,3)$

(b) راجع عمل الطلاب. قطع ناقص يمس الدائرة في النقطتين: $(-4,0)$, $(4,0)$.

«حاول أن تحل»

1



(a) رأسا القطع الناقص هما:

$A_1(0,-3)$, $A_2(0,3)$

طرفا المحور الأصغر هما:

$B_1(-2,0)$, $B_2(2,0)$

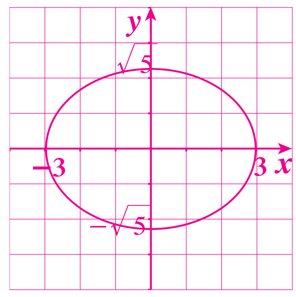
(b) البؤرتين: $F_1(0,-\sqrt{5})$, $F_2(0,\sqrt{5})$

(c) معادلة الدليلين: $y = \frac{9\sqrt{5}}{5}$, $y = -\frac{9\sqrt{5}}{5}$

(d) طول المحور الأكبر 6، طول المحور الأصغر 4.

2 رأسا القطع الناقص هما: $A_1(-3,0)\ ,\ A_2(3\ ,0)$

$b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$



$\therefore$ معادلة القطع الناقص هي: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$

3 $x^2 + 4y^2 = 16 \Longrightarrow \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

$a = 4\ ,\ b = 2\ ,\ c = 2\sqrt{3}$

البؤرتان: $F_1(-2\sqrt{3}\ ,0)\ ,\ F_2(2\sqrt{3}\ ,0)$

الرأسان: $A_1(-4\ ,0)\ ,\ A_2(4\ ,0)$

طول المحور الأكبر 8.

4 $2a = 16 \Longrightarrow a = 8\ ;\ 2c = 10 \Longrightarrow c = 5$

$b^2 = a^2 - c^2 \Longrightarrow b^2 = 39$

$\therefore$ معادلة القطع الناقص هي: $\dfrac{x^2}{39} + \dfrac{y^2}{64} = 1$

5 **(a)** تحقق من عمل الطلاب.

(b) $b^2 = 25 \Longrightarrow \dfrac{4}{25} + \dfrac{24}{a^2} = 1 \Longrightarrow a^2 = \dfrac{200}{7}$

$$\Longrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{200}{7}} = 1$$

$$\Longrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{7y^2}{200} = 1$$

6 $c^2 = 8^2 - 3.5^2 = 51.75$

$\Longrightarrow F_1(-\sqrt{51.75}\ ,0)\ ,\ F_2(\sqrt{51.75}\ ,0)$

7 $c^2 = 39^2 - 18^2 = 1197 \Longrightarrow c \approx 34.6$

إذًا المسافة هي حوالي 69.2 m

8 $\dfrac{x^2}{5\,776 \times 10^{12}} + \dfrac{y^2}{5\,476 \times 10^{12}} = 1$

حاول أن تحل

6 يتولد المجسم الناقص لأحد أجهزة تفتيت الحصوات، من دوران قطع ناقص نقطتا طرفي محوره الأكبر $A_1(-8\ ,0)\ ,\ A_2(8\ ,0)$. إذا كانت إحدى نقطتي طرفي محوره الأصغر $B_1(0\ ,3.5)$؛ فأوجد إحداثيات البؤرتين.

مثال (7)

لمتابعة الهمس في الصالات البيضاوية الشكل فإن الصوت الذي ينطلق من بؤرة يمكن الاستماع إليه بشكل تام في البؤرة الثانية. على افتراض أن إحدى الصالات الكبرى مبنية على شكل بيضاوي طولي محوريها 98 m و 46 m.
على أي مسافة من مصدر الصوت يجب أن يكون موقع شخص ليتمكن من سماعه بشكل واضح؟

الحل:

$\because$ مصدر الصوت عند إحدى البؤرتين

$\therefore$ يجب أن يقف الشخص عند البؤرة الأخرى حتى يسمع الصوت بوضوح

الشكل البيضاوي للصالة يمثل قطعًا ناقصًا له محور أكبر طوله 98 m

$\therefore\ 2a = 98$

$a = 49$

وطول المحور الأصغر 46 m $\quad \therefore\ 2b = 46$

$b = 23$

$c^2 = a^2 - b^2$

من المعادلة: $c^2 = (49)^2 - (23)^2$

$c^2 = 1872$

$c \approx 43.267$

والمسافة بين البؤرتين هي: $2c \approx 86.5$

أي حوالي 86.5 m

يجب أن يكون موقع الشخص على بعد 86.5 m تقريبًا من مصدر الصوت.

حاول أن تحل

7 على افتراض أن الصالة بيضاوية الشكل طولي محوريها 78 m ، 36 m.
على أي مسافة من مصدر الصوت يجب أن يكون موقع شخص ليتمكن من سماع الصوت المنطلق بشكل واضح؟

116

مثال (8)

تتحرك كواكب المجموعة الشمسية في مدارات على شكل قطع ناقص حيث إن الشمس هي إحدى بؤرتيه. على افتراض أن المحور الأكبر أفقي وطوله حوالى 1.52×10^8 km والمحور الأصغر طوله حوالى 1.48×10^8 km،
ما المسافة بين الشمس والبؤرة الثانية؟

الحل:

$\because$ المدار على شكل قطع ناقص

طول المحور الأكبر 1.52×10^8

$\therefore\ 2a = 1.52 \times 10^8$

$a = 0.76 \times 10^8 = 76 \times 10^6$

وطول المحور الأصغر 1.48×10^8 $\quad \therefore\ 2b = 1.48 \times 10^8$

$b = 0.74 \times 10^8 = 74 \times 10^6$

من المعادلة: $c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = (76 \times 10^6)^2 - (74 \times 10^6)^2 = 10^{12}(5\,776 - 5\,476)$

$= 300 \times 10^{12} \Longrightarrow c \approx 17.3 \times 10^6$

$2c \approx 34.6 \times 10^6$

أي أن المسافة بين الشمس والبؤرة الثانية هي 34.6×10^6 km

حاول أن تحل

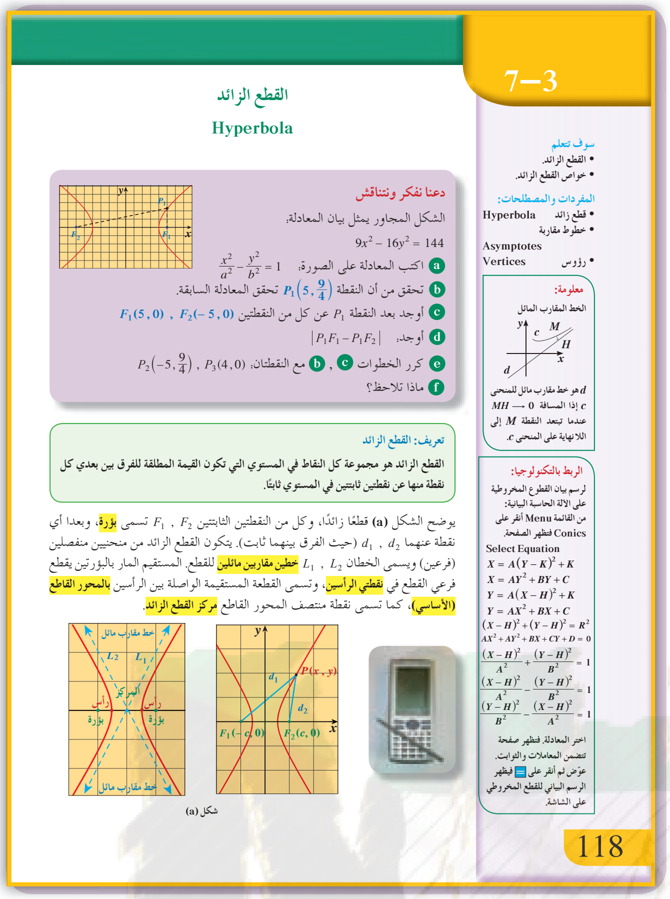
8 إذا كان الكوكب المقصود في المثال (8) هو كوكب الأرض، اكتب معادلة تمثل حركة كوكب الأرض حول الشمس.

117

3–7: القطع الزائد

1 الأهداف

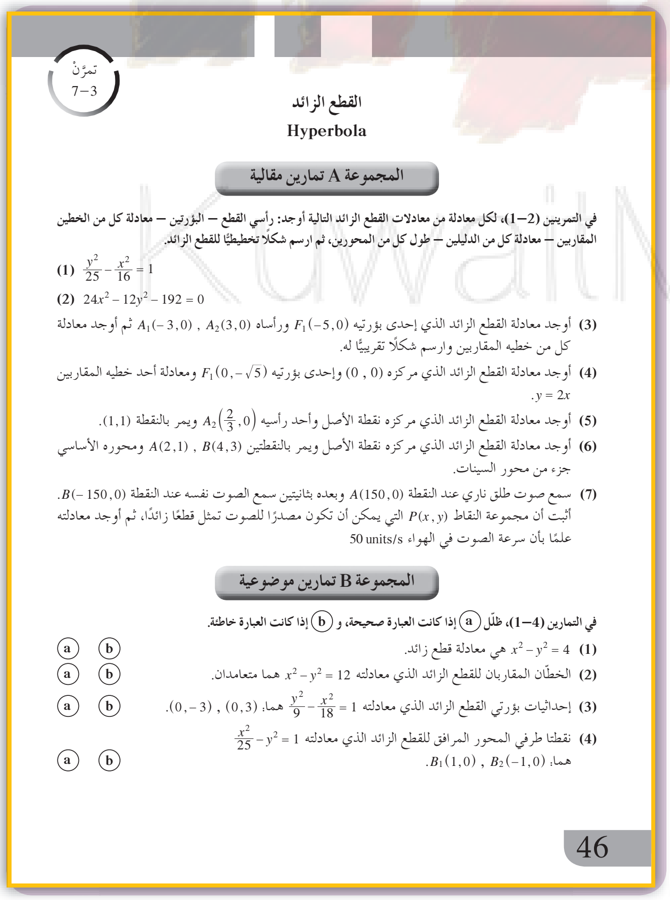
- يتعرف القطع الزائد وخواصه.
- يستخدم القطع الزائد في حل المسائل.



القطع الزائد
Hyperbola

7–3

118



تمرّن 7–3

القطع الزائد
Hyperbola

المجموعة A تمارين مقالية

المجموعة B تمارين موضوعية

46

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

قطع زائد – خطوط مقاربة – رؤوس – المحور القاطع – المحور المرافق.

3 الأدوات والوسائل

أوراق رسم بياني – آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(1) اكتب كلًّا مما يلي على الصورة: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

(a) $8x^2 - 4y^2 = 24$

(b) $6y^2 - x^2 = -36$

(2) لتكن معادلة منحنى على الصورة:

$mx^2 - ny^2 = m\,n : (m \neq 0 , n \neq 0)$

ويمر بالنقطتين: $A(4,0)\ ,\ B(0,-3)$

فأوجد m, n ثم بيّن أنها معادلة قطع ناقص.

5 التدريس

قم بالتركيز أولًا على تعريف القطع الزائد ثم بيّن للطلاب نقاط التشابه والاختلاف بين معادلتي القطع الزائد والقطع الناقص. ذكرهم أن القطع الزائد هو الوحيد بين القطوع المخروطية الذي له خطين مقاربين. اسأل الطلاب عن كيفية الاستفادة من الخطين المقاربين لرسم بيان قطع زائد. استخدم الحاسوب أو جهاز الإسقاط أو الرسم على السبورة لعرض الرسم البياني لكل من القطعين الزائدين $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ، $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ واعرض بالقرب من كل رسم بياني خواصه للمقارنة.

اعرض على الطلاب القطع الزائد بحالته الخاصة الذي معادلته: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ وناقش معهم خواصه. اسألهم عن خطوطه المقاربة. بيّن لهم أن الخطين المقاربين هما متعامدان ومعادلتهما $y = \pm x$.

اسأل الطلاب: ما قياس الزاوية التي يصنعها كل منهما مع المحور السيني؟

في المثال التوضيحي

يوضّح هذا المثال كيفية استخدام الخاصية:

$MF_1 - MF_2 = 2a$ لكتابة معادلة قطع زائد.

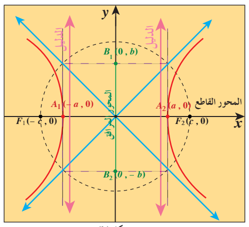
فسّر للطلاب أن معادلة القطع الزائد التي حصلنا عليها يمكن أيضًا الحصول عليها إذا أخذنا $MF_2 - MF_1 = 2a$، علمًا أن F_1، F_2 هما بؤرتا القطع الزائد و $MF_2 > MF_1$

في المثال (1)

يوضّح هذا المثال كيفية استخدام معادلة القطع الزائد لإيجاد خواصه، حيث يتم إيجاد إحداثيات الرأسين، وإحداثيات البؤرتين، ومعادلتي الدليلين وطول كل من المحورين ومعادلتي الخطين المقاربين. أشر إلى طريقة رسم القطع الزائد.

في المثال (2)

يهدف هذا المثال إلى إيجاد معادلة القطع الزائد ومعادلة كلّ من خطيه المقاربين بمعلومية بؤرتيه ورأسيه. إن وضع مخطط لرسمه البياني يسمح للطلاب بالمقارنة بين خواص القطع الزائد وما يرونه في الشكل المرسوم. أشر إلى الطريقة الأخرى لرسم القطع الزائد.



شكل (b)

في الشكل (b) إذا رسمنا مماسين للقطع الزائد عند نقطتي الرأسين، ودائرة مركزها هو مركز القطع الزائد، وطول نصف قطرها c هو بعد البؤرة عن مركز القطع، فإن الدائرة تقطع كل مماس بنقطتين. وبرسم مستطيل رؤوسه النقاط الأربع يكون أحد بعديه $2a$ مساويًا لطول المحور القاطع $(\overline{A_1A_2})$، وبعده الآخر $2b$ مساويًا لطول **المحور المرافق** $(\overline{B_1B_2})$، وبالتالي، نحصل على العلاقة الأساسية:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

نلاحظ أن: $c > a \ , \ c > b$

كما أنه لا توجد علاقة ثابتة بين $a \ , \ b$ كما في القطع الناقص.
وللقطع الزائد دليلين كما في الشكل.

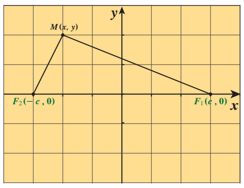
مثال توضيحي

لنأخذ في المستوى الإحداثي نقطتان ثابتتان $F_1(c, 0)$ ، $F_2(-c, 0)$ والنقطة $M(x, y)$ متحركة بحيث:

$|MF_1 - MF_2| = 2a$ $\quad$ $a \neq 0 \ , \ c \neq 0$ ثابتتان $c > a$

ومنه $MF_1 - MF_2 = 2a$ أو $MF_2 - MF_1 = 2a$

ومن الشكل المقابل نلاحظ أن: $MF_1 > MF_2$ فيكون $MF_1 - MF_2 = 2a$



$$MF_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$MF_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
$$MF_1^2 - MF_2^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - x^2 - 2cx - c^2 - y^2$$
$$MF_1^2 - MF_2^2 = -4cx$$

ولكن: $(MF_1 - MF_2)(MF_1 + MF_2) = -4cx$

المعطى: $(2a)(MF_1 + MF_2) = -4cx$

$$MF_1 + MF_2 = -\frac{2cx}{a}$$

فيصبح لدينا: $\begin{cases} MF_1 + MF_2 = -\frac{2cx}{a} \\ MF_1 - MF_2 = 2a \end{cases}$

نحصل على: $MF_1 = a - \frac{cx}{a} \ , \ MF_2 = -a - \frac{cx}{a}$

$$MF_1^2 = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2 = (x-c)^2 + y^2$$
$$a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} = x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$
$$\frac{c^2x^2}{a^2} - x^2 - y^2 = c^2 - a^2$$

نفرض $c^2 - a^2 = b^2$ $\quad$ $x^2\frac{(c^2 - a^2)}{a^2} - y^2 = c^2 - a^2$

$$\frac{x^2b^2}{a^2} - y^2 = b^2$$

بالقسمة على b^2 نحصل على: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ وهي معادلة قطع زائد

119

في التمارين (11–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(0, \pm 3)$ وطول محوره القاطع 4 هي:

ⓐ $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ $\qquad$ ⓑ $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{4} = 1$

ⓒ $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$ $\qquad$ ⓓ $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$

(6) إذا كانت معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{3} = 1$ ؛ فيمرّ أحد الخطين المقاربين له في النقطة:

ⓐ $\left(2, 2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$ $\qquad$ ⓑ $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, 2\right)$

ⓒ $\left(2\sqrt{\frac{3}{5}}, 2\right)$ $\qquad$ ⓓ $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, 2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

(7) معادلة القطع الزائد الذي نقطتي تقاطعه مع المحور السيني هما $(\pm 6, 0)$ هي:

ⓐ $y^2 - x^2 = 36$ $\qquad$ ⓑ $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{49} = 1$

ⓒ $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{36} = 1$ $\qquad$ ⓓ $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$

(8) البعد بين بؤرتي القطع الزائد الذي معادلته: $50y^2 - 25x^2 - 100 = 0$ بوحدة الطول يساوي:

ⓐ $\sqrt{6}$ $\qquad$ ⓑ $2\sqrt{6}$

ⓒ 6 $\qquad$ ⓓ $2\sqrt{2}$

(9) منحنى أي معادلة مما يلي **لا يقطع** المحور الصادي في $(0, \pm 4)$:

ⓐ $y^2 - x^2 = 16$ $\qquad$ ⓑ $4y^2 - 16x^2 = 64$

ⓒ $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ $\qquad$ ⓓ $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

(10) نقطتا تقاطع القطع الزائد الذي معادلته: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{49} = 1$ مع محور السينات هما:

ⓐ $(\pm 7, 0)$ $\qquad$ ⓑ $(\pm 5, 0)$

ⓒ $(0, \pm 5)$ $\qquad$ ⓓ ليس أيًّا مما سبق

(11) معادلتا الخطين المقاربين للقطع الزائد: $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{32} = 2$ هما:

ⓐ $y = \pm 2x$ $\qquad$ ⓑ $y = \pm \frac{1}{2}x$

ⓒ $y = \pm 4x$ $\qquad$ ⓓ $y = \pm \frac{1}{4}x$

47

في المثال (3)

يوضّح هذا المثال كيفية استخدام إحدى بؤرتي القطع الزائد ومعادلة أحد خطيه المقاربين لكتابة معادلته.

في المثال (4)

يوضّح هذا المثال كيفية استخدام أحد رأسي القطع الزائد ونقطة يمر بها لإيجاد معادلته.

في المثالين (6) ,(5)

يعتبر هذين المثالين من التطبيقات الحياتية، لأنهما يوضحان كيفية إيجاد مسار مركبة فضائية وتأثير جاذبية الكواكب على مسارها ووضع معادلة، مما يسمح باستخلاص النتائج. ينصح هنا باستخدام الآلة الحاسبة.

ألفت انتباه الطلاب إلى تأثير جاذبية الكواكب في تغيير مسار مركبة فضائية من خط مستقيم إلى قطع زائد.

6 الربط

يشكل المثالان (6) ,(5) ترابطًا مهمًا مع مسارات المركبات الفضائية. أُطلب إلى الطلاب البحث عن مسارات بعض المراكب الفضائية على صورة قطع زائد وإيجاد معادلاتها.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

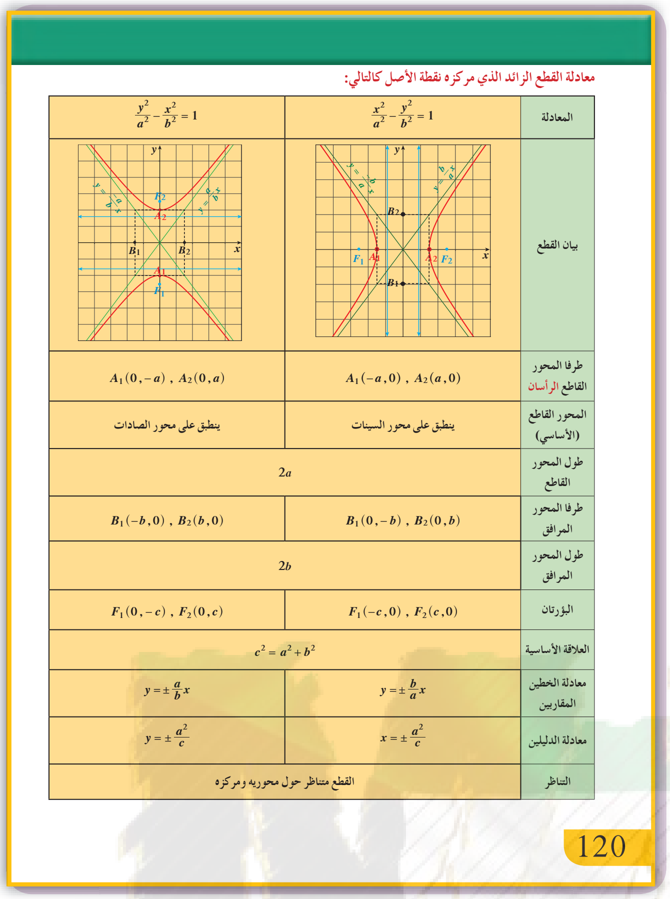
قد يخطئ الطلاب في استخدام خواص القطع الزائد وما إذا كان المحور القاطع منطبقًا على محور السينات أم منطبقًا على محور الصادات.

شدّد على الدقة في الحسابات لمنع الأخطاء وشدّد أيضًا على التمييز بين خواص القطع الزائد في كلتا الحالتين.

قد لا يفرق الطالب بين العلاقة الأساسية لكل من القطع الزائد والقطع الناقص وضّح لهم الفرق.

8 التقييم

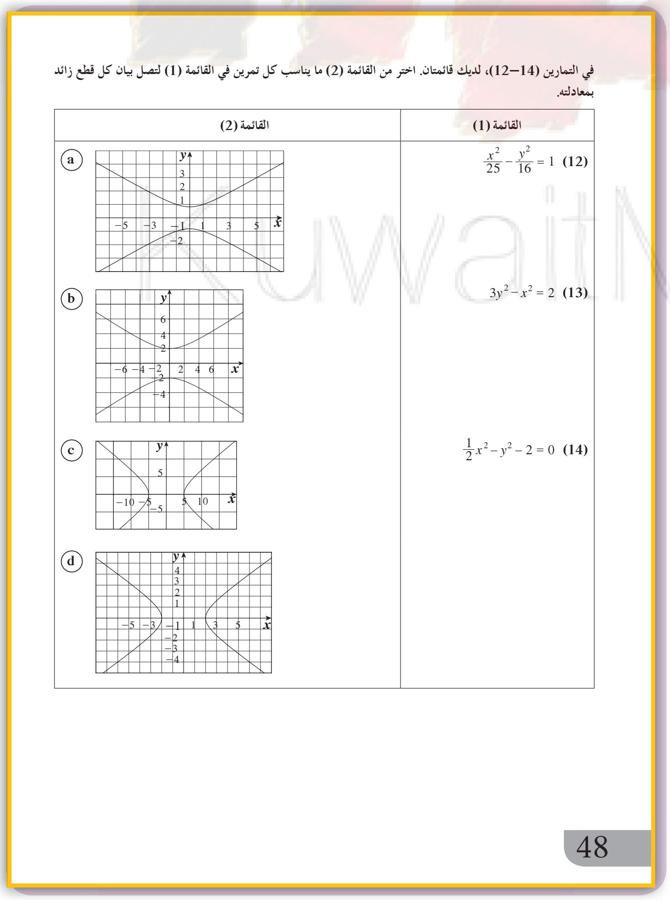
راقب الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل» لتتحقق من تمكنهم من المفاهيم الواردة في الدرس والدقة في الحسابات.



معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل كالتالي:

المعادلة	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
بيان القطع		
طرفا المحور القاطع الرأسان	$A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)$, $A_2(0,a)$
المحور القاطع (الأساسي)	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
طول المحور القاطع	$2a$	
طرفا المحور المرافق	$B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$	$B_1(-b,0)$, $B_2(b,0)$
طول المحور المرافق	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$
العلاقة الأساسية	$c^2=a^2+b^2$	
معادلة الخطين المقاربين	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$
معادلة الدليلين	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$y=\pm\frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع متناظر حول محوريه ومركزه	

120



في التمارين (14–12)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتصل بيان كل قطع زائد بمعادلته.

القائمة (1)	القائمة (2)
(12) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$	a
(13) $3y^2-x^2=2$	b
(14) $\frac{1}{2}x^2-y^2-2=0$	c
	d

48

اختبار سريع

1. (a) وضح أن الرسم البياني للمعادلة:
$9x^2 - 4y^2 = 36$ هو قطع زائد.

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة قطع زائد

(b) أوجد مركزه ونقطتي طرفي المحور القاطع وبؤرتيه. المركز: $(0, 0)$

نقطتا طرفا المحور القاطع:

$A_1(2, 0)$, $A_2(-2, 0)$

البؤرتان: $F_1(-\sqrt{13}, 0)$, $F_2(\sqrt{13}, 0)$

(c) أوجد معادلتي الخطين المقاربين.

$y = \pm\frac{3}{2}x$

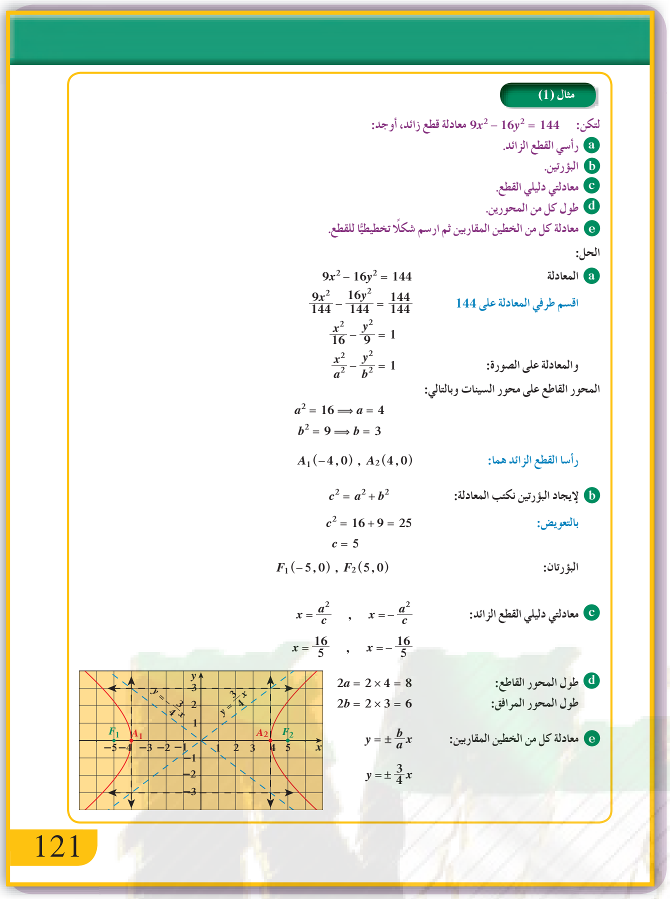
2. أوجد معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل $(0, 0)$ وإحدى بؤرتيه $F(0, 5)$ ومعادلة أحد خطيه المقاربين: $y = \frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{2}}x$

$c = 5$, $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{2}}$, $a = \frac{\sqrt{17}\,b}{2\sqrt{2}} \Longrightarrow a^2 = \frac{17b^2}{8}$

ولكن: $(5)^2 = b^2 + \frac{17b^2}{8} \Longrightarrow 25 = \frac{25b^2}{8}$

$b^2 = 8$, $a^2 = 17$

فتكون معادلة القطع الزائد: $\frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{17} = 1$ لأن المحور القاطع ينطبق على محور الصادات.


مثال (1)

لتكن: $9x^2 - 16y^2 = 144$ معادلة قطع زائد، أوجد:

a رأسي القطع الزائد.
b البؤرتين.
c معادلتي دليلي القطع.
d طول كل من المحورين.
e معادلة كل من الخطين المقاربين ثم ارسم شكلًا تخطيطيًا للقطع.

الحل:

a المعادلة $9x^2 - 16y^2 = 144$

اقسم طرفي المعادلة على 144 $\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144}$

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

والمعادلة على الصورة: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

المحور القاطع على محور السينات وبالتالي:

$a^2 = 16 \Longrightarrow a = 4$

$b^2 = 9 \Longrightarrow b = 3$

رأسا القطع الزائد هما: $A_1(-4, 0)$, $A_2(4, 0)$

b لإيجاد البؤرتين نكتب المعادلة: $c^2 = a^2 + b^2$

بالتعويض: $c^2 = 16 + 9 = 25$

$c = 5$

البؤرتان: $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$

c معادلتي دليلي القطع الزائد: $x = \frac{a^2}{c}$, $x = -\frac{a^2}{c}$

$x = \frac{16}{5}$, $x = -\frac{16}{5}$

d طول المحور القاطع: $2a = 2 \times 4 = 8$

طول المحور المرافق: $2b = 2 \times 3 = 6$

e معادلة كل من الخطين المقاربين: $y = \pm\frac{b}{a}x$

$y = \pm\frac{3}{4}x$

121

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

(b) $\frac{5^2}{16} - \frac{\left(\frac{9}{4}\right)^2}{9} = \frac{25}{16} - \frac{9}{16} = \frac{16}{16} = 1$

(c) $P_1F_1 = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2} = 2.25$

$P_1F_2 = \sqrt{10^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2} = 10.25$

(d) $|P_1F_1 - P_1F_2| = 8$

(e) تحقق من عمل الطلاب.

(f) قيمة $|PF_1 - PF_2|$ ثابتة.


لرسم مخطط هذا القطع الزائد نعيّن طرفي المحور الأساسي (رأس القطع) ونرسم منهما مستقيمين موازيين لمحور الصادات ونعيّن طرفي المحور المرافق ونرسم منهما مستقيمين موازيين لمحور السينات.

تتقاطع هذه المستقيمات في أربع نقاط تشكل رؤوس مستطيل والخطان المقاربان للقطع الزائد ينطبقان على قطري المستطيل ونكمل رسم بيان القطع.

حاول أن تحل

1 لتكن: $9y^2 - 25x^2 = 225$ معادلة قطع زائد، أوجد:

a رأسي القطع الزائد.

b البؤرتين.

c معادلتي دليلي القطع.

d طول كل من المحورين.

e معادلة كل من الخطين المقاربين ثم ارسم شكلًا تخطيطيًا للقطع.

مثال (2)

أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $F_2(0,3)$, $F_1(0,-3)$ ورأساه $A_2(0,2)$, $A_1(0,-2)$ ثم أوجد معادلة كلّ من خطيه المقاربين وارسم شكلًا تقريبيًا للقطع.

الحل:

$\because$ البؤرتين على محور الصادات.

$\therefore$ معادلة القطع الزائد هي: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

$\because$ إحدى البؤرتين $F_2(0,3)$ $\therefore c = 3$

$\because$ أحد الرأسين $A_2(0,2)$ $\therefore a = 2$

ولكن:

$c^2 = a^2 + b^2$

$3^2 = 2^2 + b^2$

$b^2 = c^2 - a^2$

$= 9 - 4$

$= 5$

معادلة القطع الزائد هي: $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$

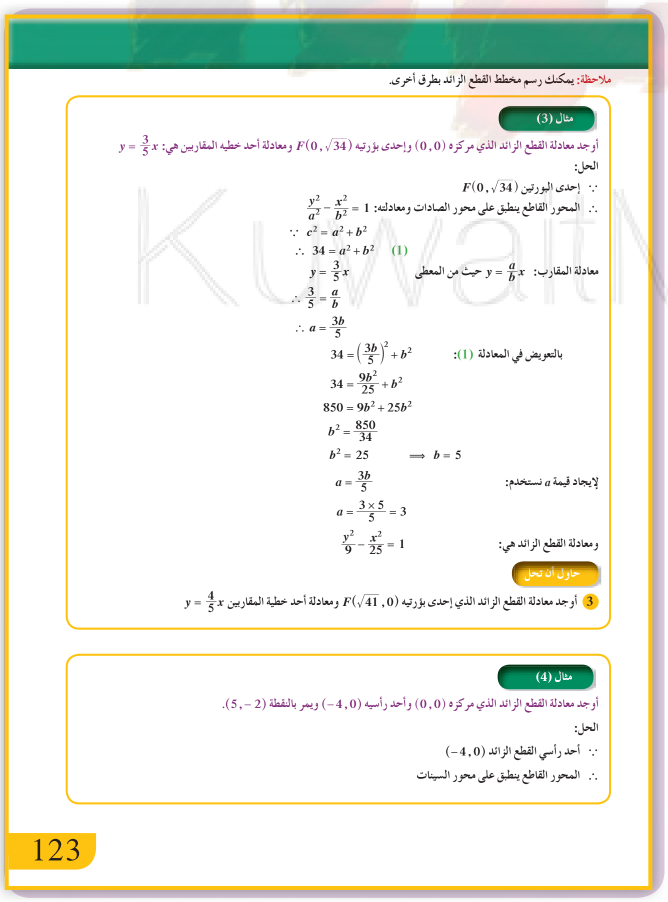
معادلتا الخطين المقاربين هما: $y = \pm \frac{a}{b}x \Rightarrow y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}x \Rightarrow y = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}x$

لرسم مخطط القطع الزائد، نبدأ برسم مستطيل رؤوسه هي الأزواج المرتبة: $(\pm a, \pm b)$ $(\pm\sqrt{5}, \pm 2)$، ثم نرسم الخطين المقاربين على أنهما ينطبقان على قطري المستطيل ونكمل رسم بيان القطع.

حاول أن تحل

2 أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $F_1(-4,0)$, $F_2(4,0)$ ورأساه $A_1(-2,0)$, $A_2(2,0)$، ثم أوجد معادلة كلّ من خطيه المقاربين، وارسم شكلًا تقريبيًا للقطع.

122


ملاحظة: يمكنك رسم مخطط القطع الزائد بطرق أخرى.

مثال (3)

أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ وإحدى بؤرتيه $F(0,\sqrt{34})$ ومعادلة أحد خطيه المقاربين هي: $y = \frac{3}{5}x$

الحل:

$\because$ إحدى البورتين $F(0,\sqrt{34})$

$\therefore$ المحور القاطع ينطبق على محور الصادات ومعادلته: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

$\because c^2 = a^2 + b^2$

$\therefore 34 = a^2 + b^2 \quad (1)$

معادلة المقارب: $y = \frac{a}{b}x$ حيث من المعطى $y = \frac{3}{5}x$

$\therefore \frac{3}{5} = \frac{a}{b}$

$\therefore a = \frac{3b}{5}$

بالتعويض في المعادلة (1): $34 = \left(\frac{3b}{5}\right)^2 + b^2$

$34 = \frac{9b^2}{25} + b^2$

$850 = 9b^2 + 25b^2$

$b^2 = \frac{850}{34}$

$b^2 = 25 \implies b = 5$

لإيجاد قيمة a نستخدم: $a = \frac{3b}{5}$

$a = \frac{3 \times 5}{5} = 3$

ومعادلة القطع الزائد هي: $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1$

حاول أن تحل

3 أوجد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه $F(\sqrt{41},0)$ ومعادلة أحد خطية المقاربين $y = \frac{4}{5}x$

مثال (4)

أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ وأحد رأسيه $(-4,0)$ ويمر بالنقطة $(5,-2)$.

الحل:

$\because$ أحد رأسي القطع الزائد $(-4,0)$

$\therefore$ المحور القاطع ينطبق على محور السينات

123

«حاول أن تحل»

1 المعادلة: $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$

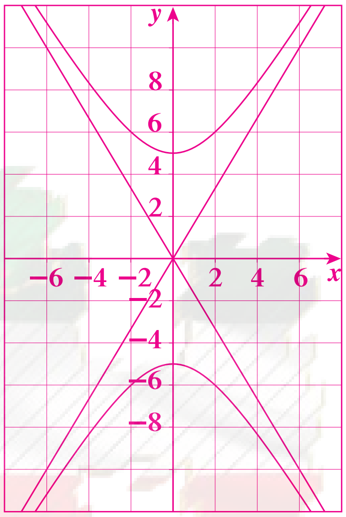
(a) $A_1(0,-5)$, $A_2(0,5)$

(b) $F_1(0,-\sqrt{34})$, $F_2(0,\sqrt{34})$

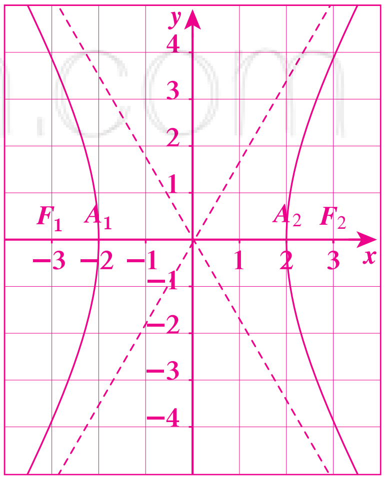
(c) $y = \pm \frac{25}{\sqrt{34}}$

(d) 10, 6

(e) $y = \pm \frac{5}{3}x$



2 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$, $y = \pm\sqrt{3}x$



ومعادلة القطع هي: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

من المعطيات: $a = 4$ فيكون:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

يمر القطع الزائد بالنقطة $(5, -2)$

بالتعويض

$$\therefore \quad \frac{25}{16} - \frac{4}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{25}{16} - 1 = \frac{4}{b^2}$$

$$\frac{9}{16} = \frac{4}{b^2}$$

$$b^2 = \frac{64}{9}$$

معادلة القطع الزائد: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{\frac{64}{9}} = 1$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{9y^2}{64} = 1$$

حاول أن تحل

4 أوجد معادلة القطع الزائد الذي أحد رأسيه $\left(0, \frac{5}{4}\right)$ ويمر بالنقطة $\left(-\sqrt{3}, -\frac{5}{2}\right)$

تطبيقات باستخدام القطع الزائد

يتحدث العلماء عن نظرية تقول إن الجرم السماوي الذي يتحرك ضمن مجال جاذبية جسم آخر أثقل منه يتبع مسارًا قريبًا جدًّا من شكل قطع مخروطي حيث إحدى بؤرتيه هي الجسم الأثقل، مثال على ذلك الشمس هي إحدى بؤرتي الكواكب التي تدور حولها. أما حركة المذنبات بالنسبة للشمس نظريًّا فإنها تقترب من الشمس ويكوّن معها حلقة جزئية لتترك بعد ذلك النظام الشمسي وتبتعد في الفضاء الواسع لتتبع مسارًا يشبه أحد فروع القطع الزائد.

مثال (5) **تطبيقات حياتية**

عند اقتراب مركبة فضائية من أحد الكواكب، تُغيّر جاذبية هذا الكوكب مسار المركبة إلى قطع زائد.
أوجد معادلة تنمذج مسار مركبة فضائية قرب كوكب زحل إذا كان $c = 492\,788.2$ km ، $a = 332\,965$ km

الحل:

نفرض أن مركز القطع الزائد هو نقطة الأصل وأن المحور القاطع أفقي.

تكون المعادلة على الصورة: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

العلاقة الأساسية للقطع الزائد $c^2 = a^2 + b^2$

حل في b^2 $b^2 = c^2 - a^2$

عوّض $b^2 = (492\,788.2)^2 - (332\,956)^2$

استخدم آلة حاسبة $b^2 \approx 1.320 \times 10^{11}$

$$\frac{x^2}{1.109 \times 10^{11}} - \frac{y^2}{1.320 \times 10^{11}} = 1$$

يمكن أن تنمذج مسار سفينة فضائية حول زحل بالمعادلة: $\frac{x^2}{1.109 \times 10^{11}} - \frac{y^2}{1.320 \times 10^{11}} = 1$

124

حاول أن تحل

5 أوجد معادلة تنمذج مسار سفينة فضائية حول نبتون إذا كان: $a = 35\,988\,342$ km ، $c = 4\,498\,542\,800$ km

مثال (6)

عندما تنطلق مركبة فضائية وتقترب من أحد الكواكب، فإن جاذبية هذا الكوكب تغير مسار المركبة من خط مستقيم إلى منحنى يشبه أحد فرعي القطع الزائد. أوجد معادلة قطع زائد تمثل مسار مركبة فضائية حول كوكب الزهرة إذا افترضنا أن نقطة الأصل هي مركز القطع الزائد والمحور القاطع في وضع أفقي علمًا أن طول نصف المحور القاطع 1 882 820 km والمسافة بين البؤرتين هي 108 208 000 km

الحل:

$\because$ المحور القاطع هو أفقي

$\therefore$ معادلة القطع الزائد هي على الصورة: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

من المعطيات:

$$a = 1\,882\,820$$
$$2c = 108\,208\,000$$
$$c = 54\,104\,000$$

من المعادلة الأساسية للقطع الزائد: $c^2 = a^2 + b^2$

$$b^2 = (54\,104\,000)^2 - (1\,882\,820)^2 = 2.9 \times 10^{15}$$

والمعادلة: $\frac{x^2}{3.5 \times 10^{12}} - \frac{y^2}{2.9 \times 10^{15}} = 1$

حاول أن تحل

6 أوجد معادلة قطع زائد لمسار مركبة فضائية حول كوكب المشتري علمًا أن: $c = 778\,547\,200$ km ، $a = 38\,942\,360$ km

125

3 $c = \sqrt{41}$

$$\frac{b}{a} = \frac{4}{5} \;,\; b = \frac{4}{5}a$$

$$a^2 + \left(\frac{4}{5}a\right)^2 = 41$$

المعادلة: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

4 $a = \frac{5}{4} \;;\; \frac{\frac{25}{4}}{\frac{25}{16}} - \frac{3}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 1$

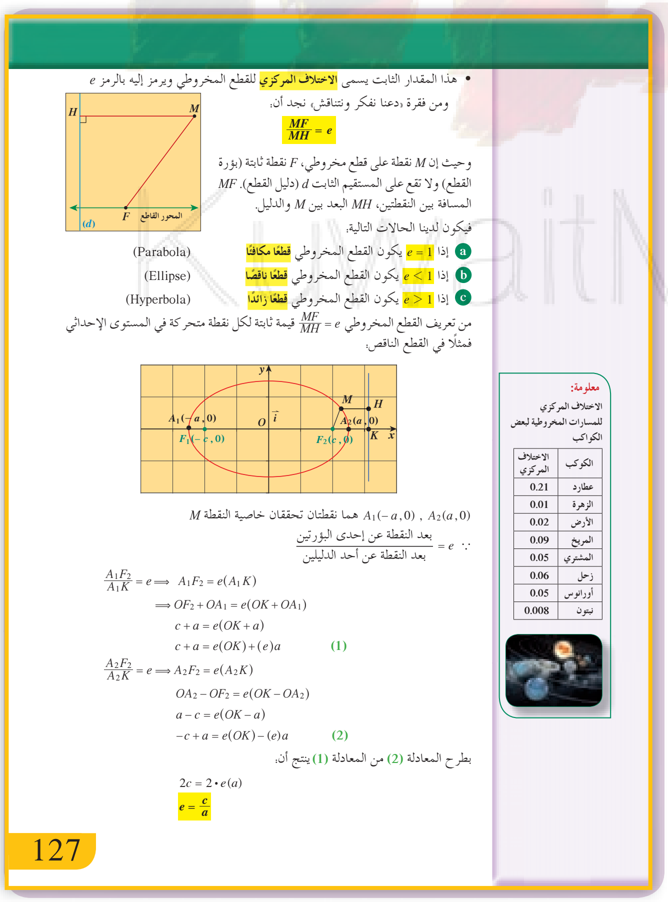
المعادلة: $\frac{y^2}{\frac{25}{16}} - x^2 = 1$

محوره القاطع ينطبق على محور الصادات.

5 $\frac{x^2}{(35\,988\,342)^2} - \frac{y^2}{(4\,498\,398\,844)^2} = 1$

6 $\frac{x^2}{(38\,942\,360)^2} - \frac{y^2}{(777\,572\,655.9)^2} = 1$


الاختلاف المركزي
Eccentricity
سوف تتعلم
• الاختلاف المركزي
• الدليل
المفردات والمصطلحات:
• اختلاف مركزي Eccentricity
• دليل Directrix
دعنا نفكر ونتناقش
1 في كل قطع من القطوع الموضحة إذا كانت MF تمثل المسافة بين البؤرة ونقطة تنتمي للقطع، MH تمثل البعد بين الدليل ونقطة تنتمي للقطع فأوجد $\frac{MF}{MH}$ (مستخدمًا الأدوات الهندسية).
2 بفرض أن النقطة M في التمثيلات البيانية أخذت موضعًا آخر على منحنى القطع. أوجد $\frac{MF}{MH}$
3 من 2 ، 1 ماذا تلاحظ؟
قطع مكافئ
قطع ناقص
قطع زائد
ملاحظة: البؤرة لا تقع على الدليل
معلومة: الحرف e هو نسبة تستخدم في القطوع المخروطية وليس له علاقة بالحرف e في اللوغاريتم الطبيعي حيث $\ln e = 1$، $e > 0$
تمكنا في البنود السابقة من تعريف القطوع المخروطية (المكافئ – الناقص – الزائد). يوفر الاختلاف المركزي فرصة جديدة للتعرف على القطوع المخروطية على أنها منحنيات مترابطة تشكل عائلة موحدة.
تعريف: القطع المخروطي هو مجموعة كل النقاط في المستوى الإحداثي حيث تكون نسبة بعد كل منها من نقطة ثابتة (البؤرة) إلى بعدها عن مستقيم ثابت (الدليل) في نفس المستوى تساوي مقدارًا ثابتًا.
7-4
126


• هذا المقدار الثابت يسمى الاختلاف المركزي للقطع المخروطي ويرمز إليه بالرمز e ومن فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» نجد أن
$\frac{MF}{MH} = e$
وحيث إن M نقطة على قطع مخروطي، F نقطة ثابتة (بؤرة القطع) ولا تقع على المستقيم الثابت d (دليل القطع). MF المسافة بين النقطتين، MH البعد بين M والدليل.
فيكون لدينا الحالات التالية:
a إذا $e = 1$ يكون القطع المخروطي قطعًا مكافئًا (Parabola)
b إذا $e < 1$ يكون القطع المخروطي قطعًا ناقصًا (Ellipse)
c إذا $e > 1$ يكون القطع المخروطي قطعًا زائدًا (Hyperbola)
من تعريف القطع المخروطي $\frac{MF}{MH} = e$ قيمة ثابتة لكل نقطة متحركة في المستوى الإحداثي فمثلًا في القطع الناقص:
$A_1(-a,0)$ ، $A_2(a,0)$ هما نقطتان تحققان خاصية النقطة M
$\because e = \frac{\text{بعد النقطة عن إحدى البؤرتين}}{\text{بعد النقطة عن أحد الدليلين}}$
$\frac{A_1F_2}{A_1K} = e \Longrightarrow A_1F_2 = e(A_1K)$
$\Longrightarrow OF_2 + OA_1 = e(OK + OA_1)$
$c + a = e(OK + a)$
$c + a = e(OK) + (e)a \qquad (1)$
$\frac{A_2F_2}{A_2K} = e \Longrightarrow A_2F_2 = e(A_2K)$
$OA_2 - OF_2 = e(OK - OA_2)$
$a - c = e(OK - a)$
$-c + a = e(OK) - (e)a \qquad (2)$
بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) ينتج أن
$2c = 2 \cdot e(a)$
$e = \frac{c}{a}$
معلومة: الاختلاف المركزي للمسارات المخروطية لبعض الكواكب

الكوكب	الاختلاف المركزي
عطارد	0.21
الزهرة	0.01
الأرض	0.02
المريخ	0.09
المشتري	0.05
زحل	0.06
أورانوس	0.05
نبتون	0.008

127

4-7: الاختلاف المركزي

1 الأهداف

- يتعرف الاختلاف المركزي والدليل.
- يستخدم الاختلاف المركزي والدليل في حل المسائل.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

اختلاف مركزي – دليل.

3 الأدوات والوسائل

أوراق رسم بياني – آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) أوجد المسافة بين النقطتين $A(2,3)$ ، $B(4,5)$

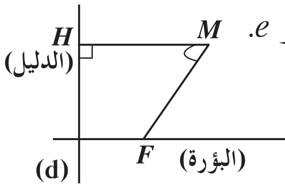
(b) أوجد البعد بين النقطة $A(2,3)$ والمستقيم $d: x = 1$

(c) أوجد النسبة $= \frac{AB}{\text{البعد بين النقطة } A \text{ والمستقيم } d}$

5 التدريس

تمكنا في البنود السابقة من تعريف القطوع المخروطية الثلاث (القطع المكافئ والقطع الناقص والقطع الزائد) واستخدمنا هذه التعريفات في حل مسائل وإيجاد رؤوس القطع وبؤرته (أو بؤرتيه). سنتعرف في هذا البند على تعريف جديد للقطوع المخروطية باستخدام نسبة مسافة النقاط في المستوى الإحداثي من نقطة ثابتة (البؤرة) إلى بعدها عن مستقيم ثابت (الدليل). وسوف نرى من خلال هذا التعريف أن القطوع المخروطية تشكل عائلة مترابطة مع بعضها بواسطة هذه النسبة.

هذه النسبة تساوي مقدارًا ثابتًا يسمى الاختلاف المركزي للقطع المخروطي ويرمز إليه بالرمز e.

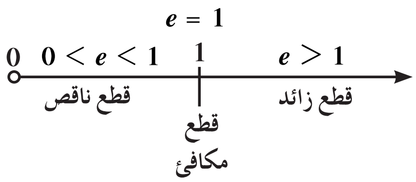


$\frac{MF}{MH} = e$

$e = \frac{c}{a}$

أكد على أنه إذا كانت $\left(e = \frac{3}{5}\right)$ فهذا لا يعني بالضرورة أن $c = 3$ ، $a = 5$.

يعرف القطع المخروطي بالثلاثية (البؤرة، الدليل، الاختلاف المركزي) ومنها يمكن إيجاد كل خصائص القطع المخروطي كما يحدد نوع القطع بمعلومية e.



في المثال (1)

يبيّن هذا المثال كيفية استخدام الاختلاف المركزي وبؤرة (أو إحدى البؤرتين) أو اختلاف المركزي ومعادلة دليله لإيجاد معادلة القطع المكافئ. يتعرف الطالب شكل القطع المخروطي من خلال قيمة الاختلاف المركزي.

في المثال (2)

يوضّح هذا المثال كيفية إيجاد الاختلاف المركزي بمعلومية معادلة القطع وذلك بتطبيق القاعدة $e = \dfrac{c}{a}$ في القطع الناقص وفي القطع الزائد مع العلاقة الأساسية $c^2 = a^2 - b^2$ (قطع ناقص)، $c^2 = a^2 + b^2$ (قطع زائد).

في المثال (3)

يوضّح هذا المثال كيف أنه من خلال معرفة الاختلاف المركزي وطول أحد المحورين نستطيع حساب طول المحور الآخر وذلك باستخدام القاعدة $e = \dfrac{c}{a}$ والعلاقة الأساسية في كل من القطع الناقص والقطع الزائد.

في المثال (4)

يعتبر هذا المثال تطبيق حياتي لمدارات الأقمار الاصطناعية حول الأرض وهي مدارات بيضاوية الشكل، كما يوضّح كيفية إيجاد معادلة أحد هذه المدارات بمعلومية الاختلاف المركزي وإحدى بؤرتي القطع ويتم فيه تحديد أطول وأقصر بُعد لأي قمر اصطناعي عن سطح الأرض.

6 الربط

يعتبر المثال (4) تطبيق حياتي، حيث يتم استخدام الاختلاف المركزي لدراسة مدارات الأقمار الاصطناعية.

مثال (1)

حدد نوع القطع في كل مما يلي ثم أوجد معادلته.

a اختلافه المركزي $(e = 1)$ وبؤرته: $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

b اختلافه المركزي $\left(e = \frac{1}{2}\right)$ وإحدى بؤرتيه: $F(2, 0)$

c اختلافه المركزي $(e = 2)$ ومعادلة أحد دليليه: $x = 1$

الحل:

a $\because\ e = 1$

$\therefore$ القطع هو قطع مكافئ

البؤرة $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $p = \frac{1}{2}$

محور السينات هو محور التماثل

$\therefore\ y^2 = 4px$

$= 4\left(\frac{1}{2}\right)x$

معادلة القطع: $y^2 = 2x$

b $\because\ e = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < 1$

$\therefore$ القطع هو قطع ناقص

$\because$ إحدى البؤرتين $F(2, 0)$

$\therefore$ المحور الأكبر ينطبق على محور السينات ومركزه نقطة الأصل

من البؤرة $F(2, 0)$ نستنتج $c = 2$

$\because\ e = \frac{c}{a}$

$\therefore\ \frac{1}{2} = \frac{2}{a}$

$a = 4$

في القطع الناقص:

$c^2 = a^2 - b^2$

$2^2 = 4^2 - b^2$

$b^2 = 16 - 4$

$b^2 = 12$

معادلة القطع الناقص: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

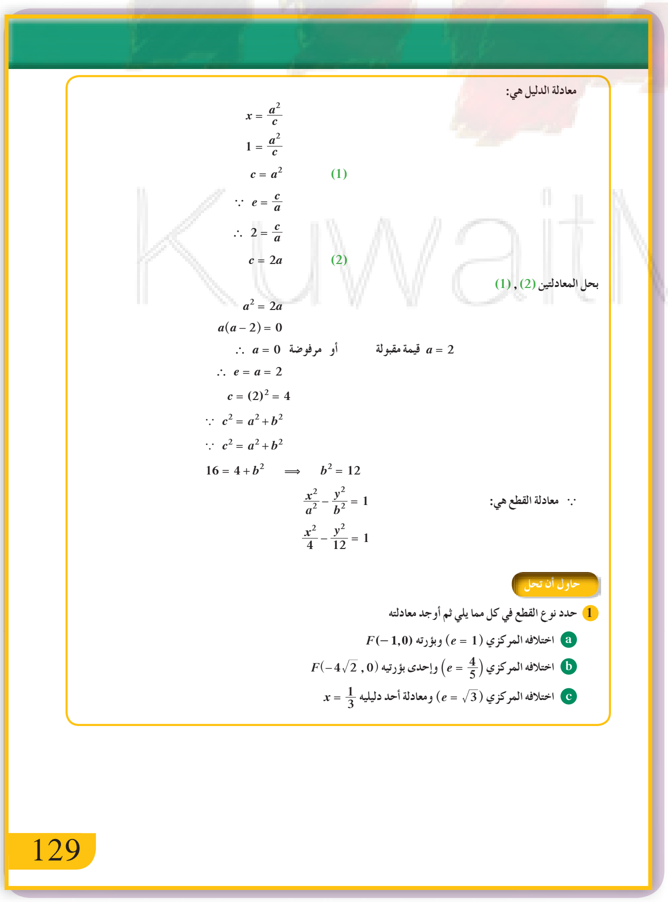
c $\because\ e = 2$, $2 > 1$

$\therefore$ القطع هو قطع زائد

$\because$ معادلة أحد دليليه $x = 1$

$\therefore$ المحور القاطع (الأساسي) ينطبق على محور السينات ومركزه $(0, 0)$

128



معادلة الدليل هي:

$x = \frac{a^2}{c}$

$1 = \frac{a^2}{c}$

$c = a^2$ (1)

$\because\ e = \frac{c}{a}$

$\therefore\ 2 = \frac{c}{a}$

$c = 2a$ (2)

بحل المعادلتين (2) , (1)

$a^2 = 2a$

$a(a - 2) = 0$

$\therefore\ a = 0$ مرفوضة أو $a = 2$ قيمة مقبولة

$\therefore\ e = a = 2$

$c = (2)^2 = 4$

$\because\ c^2 = a^2 + b^2$

$\because\ c^2 = a^2 + b^2$

$16 = 4 + b^2 \implies b^2 = 12$

$\because$ معادلة القطع هي: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

حاول أن تحل

1 حدد نوع القطع في كل مما يلي ثم أوجد معادلته

a اختلافه المركزي $(e = 1)$ وبؤرته $F(-1,0)$

b اختلافه المركزي $\left(e = \frac{4}{5}\right)$ وإحدى بؤرتيه $F(-4\sqrt{2}, 0)$

c اختلافه المركزي $(e = \sqrt{3})$ ومعادلة أحد دليليه $x = \frac{1}{3}$

129

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ بعض الطلاب فيعتبرون أن الاختلاف المركزي يساوي نسبة البعد عن مستقيم ثابت إلى المسافة من نقطة ثابتة. شدّد إلى أن: $e = \frac{MF}{MH}$

أشر إلى ضرورة الانتباه والدقة في حساب المسافة عن نقطة والبعد عن المستقيم دون أخطاء.

قد يخطئ بعض الطلاب في تحديد نوع القطع بمعلومية الاختلاف المركزي.

8 التقييم

راقب الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل» لتتحقق من تمكنهم من مفهومي الاختلاف المركزي والدليل والدقة في الحسابات.

اختبار سريع

❶ أوجد معادلة القطع المخروطي الذي بؤرته $F(2,0)$ ومعادلة دليله $x = -2$ واختلافه المركزي: $e = 1$.

القطع المخروطي هو قطع مكافئ محور تماثله هو محور السينات ورأسه نقطة الأصل.

لذا معادلته: $y^2 = 8x$

❷ أوجد الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

$a^2 = 9\ ;\ a = 3\ ,\ c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 5 = 4\ ,\ c = 2$

فتكون: $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$

❸ أوجد معادلة قطع زائد اختلافه المركزي: $e = \frac{\sqrt{10}}{2}$، مركزه نقطة الأصل $(0, 0)$ وإحدى بؤرتيه: $F(5, 0)$.

$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Longrightarrow \frac{5}{a} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Longrightarrow a = \sqrt{10}$

$b^2 = 25 - 10 = 15$

المعادلة: $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{15} = 1$

مثال (2)

أوجد الاختلاف المركزي لكل قطع مما يلي حيث معادلته:

ⓐ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ⓑ $x^2 - 25y^2 = 1$

الحل:

ⓐ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

قطع ناقص معادلته: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

بالمقارنة: $a^2 = 25$, $a = 5$, $b^2 = 9$, $b = 3$

لدينا: $c^2 = a^2 - b^2$, $c^2 = 25 - 9 = 16$, $c = 4$

الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a}$

بالتعويض: $e = \frac{4}{5}$

ⓑ $x^2 - 25y^2 = 1$

$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{25}} = 1$

قطع زائد معادلته: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ بالمقارنة يكون:

$a^2 = 1$, $a = 1$, $b^2 = \frac{1}{25}$, $b = \frac{1}{5}$

في القطع الزائد:

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 1 + \frac{1}{25} = \frac{26}{25}$

$c = \frac{\sqrt{26}}{5}$

$\because\ e = \frac{c}{a}$

$\therefore\ e = \frac{\frac{\sqrt{26}}{5}}{1} = \frac{\sqrt{26}}{5}$

130

تمرَّنْ 7–4

الاختلاف المركزي
Eccentricity

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4–1)، حدّد نوع القطع في كل ممّا يلي، ثم أوجد معادلته.

(1) اختلافه المركزي $e = \frac{3}{2}$ وإحدى بؤرتيه $F(0, 3)$

(2) اختلافه المركزي $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$ وإحدى بؤرتيه $F(0, -\sqrt{7})$

(3) اختلافه المركزي $e = \frac{5}{3}$ وأحد رأسيه $A(-4, 0)$

(4) اختلافه المركزي $e = \frac{3}{4}$ ومعادلة دليله $x = 8$

في التمرينين (6–5)، أوجد الاختلاف المركزي لكل قطع ممّا يلي حيث معادلته:

(5) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

(6) $4y^2 - 9x^2 = 36$

في التمرينين (8–7)، أوجد الرأسين والبؤرتين والاختلاف المركزي ومعادلتي الدليلين للقطع الزائد.

(7) المعادلة: $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{16} = 1$

(8) المعادلة: $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$

(9) مسار الأرض حول الشمس هو قطع ناقص، حيث تقع الشمس عند إحدى بؤرتيه. إذا كان طول المحور الأكبر للقطع 300 000 km واختلافه المركزي $e = 0.017$. فأوجد أكبر وأصغر بُعد للأرض عن الشمس.

المجموعة B تمارين مقالية

في التمرينين (7–1)، ظلّل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت $e < 1$، فإن القطع هو قطع ناقص. ⓐ ⓑ

(2) إذا $a = 6$ ، $b = 9$ في القطع الناقص فإنّ $c = 3\sqrt{13}$ ⓐ ⓑ

(3) معادلتا المقاربين للقطع الزائد $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$ هما: $y = \frac{-1}{2}x$ ، $y = \frac{1}{2}x$ ⓐ ⓑ

49

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1 – 2 تحقق من عمل الطلاب.

3 $\frac{MF}{MH}$ ثابت.

«حاول أن تحل»

1 (a) $e = 1$ قطع مكافئ. محور السينات هو محور التماثل.

$$y^2 = -4x$$

(b) $e < 1$ قطع ناقص. والمحور الأكبر ينطبق على المحور السيني $\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$ حيث $c = 4\sqrt{2}$

$$\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{18} = 1$$

(c) $e > 1$ قطع زائد. والمحور القاطع ينطبق على المحور السيني $\frac{c}{a} = \sqrt{3}$ ، $x = \frac{a^2}{c} = \frac{1}{3}$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{3}} - \frac{y^2}{\frac{2}{3}} = 1$$

2 (a) $a = 5$

$$c = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$e = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

(b) $a = 5$

$$c = 7$$

$$e = \frac{7}{5}$$

حاول أن تحل

2 أوجد الاختلاف المركزي لكل قطع مما يلي حيث معادلته:

a $x^2 + \frac{y^2}{25} = 1$

b $24y^2 = 600 + 25x^2$

مثال (3)

أوجد طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي اختلافه المركزي $\left(e = \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ وطول محوره الأصغر 4 وحدات.

الحل:

$$\because \quad e = \frac{c}{a}$$

$$\therefore \quad \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

أي: $c = \frac{a\sqrt{5}}{3}$

طول المحور الأصغر 4 أي $2b = 4$

$$b = 2$$

في القطع الناقص:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$\frac{5a^2}{9} = a^2 - 4$$

$$a^2 = 4 + \frac{5a^2}{9}$$

$$9a^2 = 36 + 5a^2$$

$$4a^2 = 36$$

$$a^2 = 9$$

$$a = 3$$

$$2a = 2(3) = 6$$

طول المحور الأكبر = 6 وحدات.

حاول أن تحل

3 أوجد طول المحور القاطع للقطع الزائد الذي اختلافه المركزي $(e = 2)$ وطول محوره المرافق 6 وحدات.

131

مثال (4)

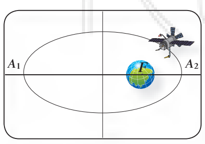
يمكن وضع الأقمار الاصطناعية في مدارات بيضاوية الشكل (قطع ناقص) في دورانها حول الأرض.

لنفترض أن قمرًا صناعيًا يتحرك في مدار بيضاوي (قطع ناقص) حول الأرض حيث الاختلاف المركزي $(e = 0.04)$ وطول نصف محوره الأكبر 7 500 km وإحدى بؤرتيه مركز الأرض.

a أوجد معادلة مدار القمر الاصطناعي.

b على افتراض أن طول نصف قطر الأرض 6 372 km فأوجد أطول وأقصر بُعد للقمر الاصطناعي عن سطح الأرض.

الحل:



a $e = 0.04 \ , \ a = 7\,500$ km

لدينا: $e = \frac{c}{a} = 0.04$ بالتعويض:

$$c = 7\,500 \times 0.04$$

$$= 300$$

ويكون مركز الأرض إحدى البؤرتين أي $F(300 , 0)$:

في القطع الناقص:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$b^2 = (7\,500)^2 - (300)^2$$

$$b^2 = 56\,160\,000$$

معادلة المدار: $\frac{x^2}{56\,250\,000} + \frac{y^2}{56\,160\,000} = 1$

b أقصر بُعد للقمر الاصطناعي عن سطح الأرض هو عند النقطة A_2

نوجد أولًا المسافة FA_2

$$FA_2 = 7\,500 - 300 = 7\,200$$

طول نصف قطر الأرض = 6 372

فيكون أقصر بُعد: $7200 - 6372 = 828$

أي 828 km

أطول بُعد للقمر الاصطناعي عن سطح الأرض هو عند النقطة A_1

نوجد FA_1

$$FA_1 = 7\,500 + 300 = 7\,800$$

أطول بُعد عن سطح الأرض:

$$7\,800 - 6\,372 = 1\,428$$

أي 1 428 km

132

3 طول المحور القاطع: $2\sqrt{3}$ units

4 **(a)** المعادلة: $\dfrac{x^2}{73\,960\,000} + \dfrac{y^2}{73\,775\,100} = 1$

(b) أقصر بُعد = 1 798 km

أطول بُعد = 2 658 km

(4) إذا كانت معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{9} = 1$، فإن طول محوره الأكبر هو 6 وطول محوره الأصغر هو 14. Ⓐ Ⓑ

(5) لأيّ معادلة قطع مكافئ فإنّ $e = 1$ Ⓐ Ⓑ

(6) المحور القاطع للقطع الزائد $\frac{y^2}{15} - \frac{x^2}{10} = 1$ هو محور الصادات. Ⓐ Ⓑ

(7) رأسا القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$ هما: $(0,-6)$ ، $(0,6)$ Ⓐ Ⓑ

في التمارين (13–8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(8) إذا كانت $a = 7$ ، $c = 2\sqrt{10}$ ، فإن معادلة القطع المخروطي الناتج هي:

ⓐ $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{9} = 1$ ⓑ $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{9} = 1$

ⓒ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$ ⓓ $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{49} = 1$

(9) أيّ معادلة مما يلي تمثل قطعًا زائدًا معادلة أحد دليليه $y = \frac{25}{7}$؟

ⓐ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{24} = 1$ ⓑ $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{25} = 1$

ⓒ $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{24} = 1$ ⓓ $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{24} = 1$

(10) إذا كانت معادلة أحد المقاربين $y = \frac{-7}{5}x$ والاختلاف المركزي $e = \frac{\sqrt{74}}{5}$ فمعادلة القطع الزائد هي:

ⓐ $\frac{y^2}{7} - \frac{x^2}{5} = 1$ ⓑ $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{5} = 1$

ⓒ $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$ ⓓ $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{49} = 1$

(11) الاختلاف المركزي للمعادلة $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$ هو:

ⓐ $\frac{\sqrt{11}}{6}$ ⓑ $\frac{\sqrt{11}}{5}$

ⓒ $\frac{36}{25}$ ⓓ $\frac{25}{36}$

(12) معادلة قطع ناقص إحدى بؤرتيه $(0,4)$ وأحد رأسيه $(0,-5)$ هي:

ⓐ $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{25} = 1$ ⓑ $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{5} = 1$

ⓒ $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$ ⓓ $\frac{y^2}{5} + \frac{x^2}{3} = 1$

(13) لأيّ قطع ناقص يكون:

ⓐ $a > c$ ⓑ $a < c$

ⓒ $a = ec$ ⓓ $a = c$

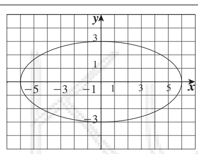
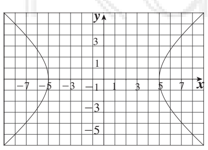
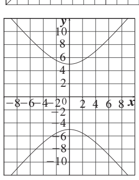
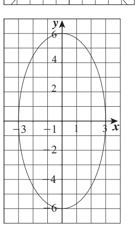
حاول أن تحل

4 إذا كان القمر الاصطناعي له مدار بيضاوي (قطع ناقص) حول الأرض حيث اختلافه المركزي $e = 0.05$ وطول نصف محوره الأكبر 8 600 km وإحدى بؤرتيه مركز الأرض.

a أوجد معادلة مدار القمر الاصطناعي.

b إذا كان نصف قطر الأرض 6 372 km فأوجد أطول وأقصر بُعد للقمر الاصطناعي عن سطح الأرض.

في التمارين (16–14)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتصل بيان كل قطع مخروطي بمعادلته.

القائمة (1)	القائمة (2)
(14) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$	ⓐ 
(15) $\frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{9} = 1$	ⓑ 
(16) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$	ⓒ 
	ⓓ 

المرشد لحل المسائل

حل «مسألة إضافية»

$F(0\,,4)$

المرشد لحل المسائل

يوضح الرسم المقابل شكل **(a)** لوحًا للطاقة الشمسية على شكل قطع مكافئ، حيث إن البعد بين طرفيه هو $8\,m$.
ويبلغ عمقه من منتصف المسافة $2\,m$.
أوجد البؤرة، ثم أوجد معادلة القطع المكافئ وارسمه.

الحل:

كيف فكر عبد العزيز؟

بعد تحليل معطيات المسألة. أستنتج نقطتين على القطع المكافئ وأعوض عنهما في المعادلة لأجد البؤرة، ومن ثم أرسم القطع المكافئ بعد إيجاد معادلته.

أولًا:

بما أن المسافة بين طرفي القطع المكافئ هي $8\,m$. والعمق في منتصف المسافة هو $2\,m$ فيكون لدينا $M_1(4\,,2)\ ,\ M_2(-4\,,2)$ نقطتان على القطع المكافئ.

ثانيًا:

معلوم أن معادلة القطع المكافئ العامة هي: $x^2 = 4py$

لذا أعوض عن x بـ 4 وعن y بـ 2 لأجد p

إذًا $(4)^2 = 4p(2)$

$16 = 8p$

$p = 2$

$\therefore$ البؤرة هي $F(0\,,p)$ أي $F(0\,,2)$ فتكون المعادلة هي:

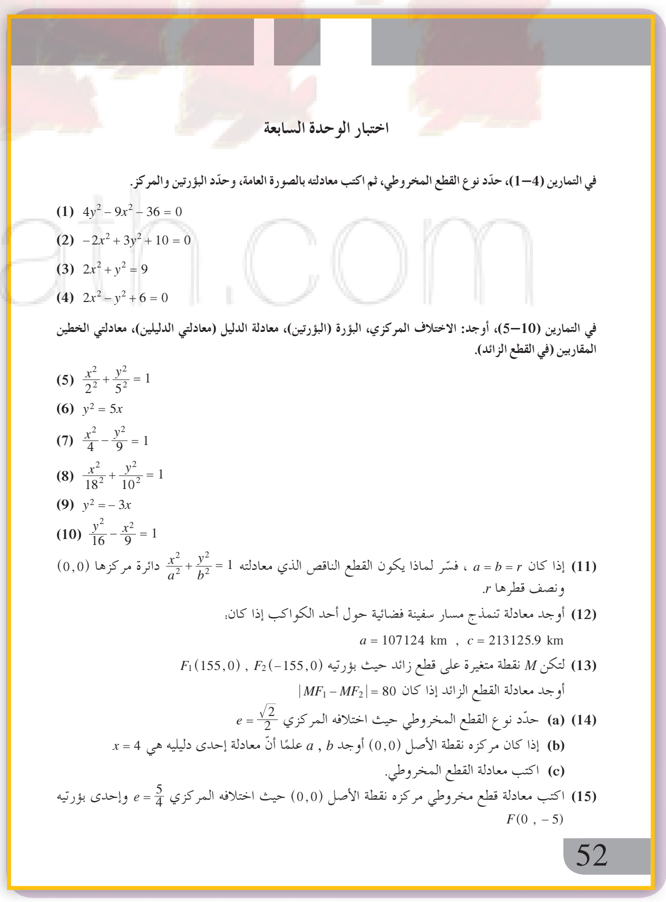
$x^2 = 8y$ فأرسمها بالآلة الحاسبة البيانية.

شكل (a)

مسألة إضافية

أوجد البؤرة في المسألة أعلاه إذا بلغ عمق لوح الطاقة الشمسية مترًا واحدًا من المركز.

134



اختبار الوحدة السابعة

في التمارين (4—1)، حدّد نوع القطع المخروطي، ثم اكتب معادلته بالصورة العامة، وحدّد البؤرتين والمركز.

(1) $4y^2 - 9x^2 - 36 = 0$

(2) $-2x^2 + 3y^2 + 10 = 0$

(3) $2x^2 + y^2 = 9$

(4) $2x^2 - y^2 + 6 = 0$

في التمارين (10—5)، أوجد: الاختلاف المركزي، البؤرة (البؤرتين)، معادلة الدليل (معادلتي الدليلين)، معادلتي الخطين المقاربين (في القطع الزائد).

(5) $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$

(6) $y^2 = 5x$

(7) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

(8) $\frac{x^2}{18^2} + \frac{y^2}{10^2} = 1$

(9) $y^2 = -3x$

(10) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

(11) إذا كان $a = b = r$ ، فسّر لماذا يكون القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ دائرة مركزها $(0\,,0)$ ونصف قطرها r.

(12) أوجد معادلة تنمذج مسار سفينة فضائية حول أحد الكواكب إذا كان:

$a = 107124\ km\ ,\ c = 213125.9\ km$

(13) لتكن M نقطة متغيرة على قطع زائد حيث بؤرتيه $F_1(155,0)\ ,\ F_2(-155,0)$

أوجد معادلة القطع الزائد إذا كان $|MF_1 - MF_2| = 80$

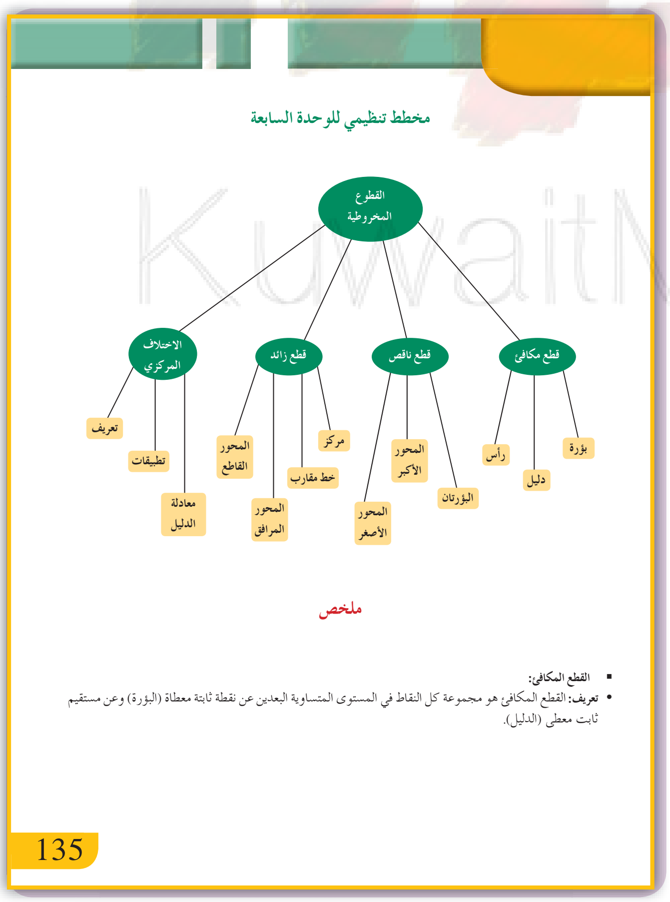
(14) **(a)** حدّد نوع القطع المخروطي حيث اختلافه المركزي $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(b) إذا كان مركزه نقطة الأصل $(0\,,0)$ أوجد $a\ ,\ b$ علمًا أنّ معادلة إحدى دليليه هي $x = 4$

(c) اكتب معادلة القطع المخروطي.

(15) اكتب معادلة قطع مخروطي مركزه نقطة الأصل $(0\,,0)$ حيث اختلافه المركزي $e = \frac{5}{4}$ وإحدى بؤرتيه $F(0\ ,\ -5)$

52



مخطط تنظيمي للوحدة السابعة

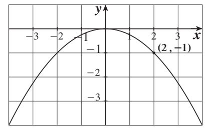
ملخص

- **القطع المكافئ:**
- **تعريف:** القطع المكافئ هو مجموعة كل النقاط في المستوى المتساوية البعدين عن نقطة ثابتة معطاة (البؤرة) وعن مستقيم ثابت معطى (الدليل).

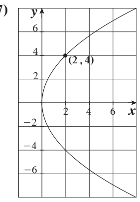
135

في التمارين (19–16)، اكتب معادلة القطع المخروطي الموضّح في الرسم.

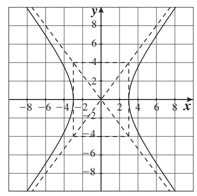
(16)



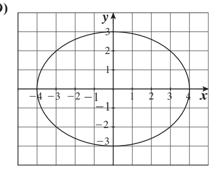
(17)



(18)



(19)



(20) أوجد معادلة قطع زائد إذا كان محوره الأكبر ينطبق على محور الصادات وطوله 12 والمسافة بين البؤرتين 20.

تمارين إثرائية

(1) أوجد معادلات الخطوط المقاربة للقطع الزائد: $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{9}=1$، ومن ثم ارسم بيان هذا القطع الزائد.

(2) النقطتان الطرفيتان للمحور الأكبر في قطع ناقص إحداثياتهما $(-10,0)$، $(10,0)$ وإحدى النقاط الطرفية للمحور الأصغر هي $(0,7)$. أوجد إحداثيات بؤرتيه.

(3) لتكن المعادلة: $mx^2+(2m+1)y^2+(m-1)x=0$
حدّد m لتكون هذه المعادلة معادلة قطع مكافئ، ثم عدّد خواصه.

(4) لتكن المعادلة: $(m-1)x^2-(2m+1)y^2+2m+3=0$
إذا $m=2$، فحدّد ما تمثّله المعادلة، ثم أوجد خواصه.

(5) لتكن المعادلتان: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ ، $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}=1$

(a) حدّد ما تمثله كل معادلة.

(b) أوجد نقاط التقاطع مستخدمًا المنحنيين اللذين يمثلاهما.

(c) علّل النتيجة التي حصلت عليها في السؤال **(b)** مستخدمًا عمليّات حسابيّة.

(6) أوجد معادلة قطع مخروطي مركزه نقطة الأصل $(0,0)$ حيث اختلافه المركزي $e=\frac{7}{5}$ ومعادلة إحدى دليليه $y=\frac{25}{7}$.

(7) أوجد معادلة قطع مخروطي مركزه نقطة الأصل $(0,0)$ حيث اختلافه المركزي $e=\frac{5}{7}$ وإحدى بؤرتيه $F(-5,0)$.

(8) أوجد معادلة القطع الزائد حيث بؤرتيه $F_1(-\sqrt{34},0)$, $F_2(\sqrt{34},0)$؛ وأحد خطّيه المقاربين يمر بالنقطة $A(3,5)$.

(9) أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وميل أحد الخطين المقاربين 2 وإحدى بؤرتيه $F(0,-\sqrt{5})$.

في التمارين (14–10)، أوجد: الاختلاف المركزي، البؤرة (البؤرتين)، معادلة الدليل (معادلتي الدليلين)، معادلتي الخطين المقاربين (في القطع الزائد).

(10) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

(11) $8y^2-25x^2=200$

(12) $x^2=-2y$

(13) $y^2=-x$

(14) $5x^2-9y^2=45$

- **قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل $(0,0)$**

الصورة العامة	$x^2=4py$		$y^2=4px$	
الفتحة	إلى أعلى أو إلى أسفل		إلى اليمين أو إلى اليسار	
إشارة p	$p<0$	$p>0$	$p<0$	$p>0$
البؤرة	$(0,p)$		$(p,0)$	
الدليل	$y=-p$		$x=-p$	
محور التناظر	محور الصادات $(y-axis)$		محور السينات $(x-axis)$	
المسافة من الرأس إلى البؤرة	$\|p\|$			
المسافة من الرأس إلى الدليل	$\|p\|$			

- **القطع الناقص:**
- **تعريف:** القطع الناقص هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي يكون مجموع بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوى ثابتًا.
- **معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل $(0,0)$ كالتالي:**

المعادلة	$a>b>0$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$a>b>0$ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$
المحور الأكبر	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
الرأسان طرفا المحور الأكبر	$A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)$, $A_2(0,a)$
طول المحور الأكبر	$2a$	
طرفا المحور الأصغر	$B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$	$B_1(-b,0)$, $B_2(b,0)$
طول المحور الأصغر	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c,0), F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$
العلاقة الأساسية	$a^2=b^2+c^2$	
معادلتا الدليلين	$x=-\frac{a^2}{c}$, $x=\frac{a^2}{c}$	$y=-\frac{a^2}{c}$, $y=\frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع الناقص متناظر حول كل من محوريه ومركزه	

- **القطع الزائد:**
- **تعريف:** القطع الزائد هو مجموعة كل النقاط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة للفرق بين بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوي ثابتًا.
- **معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل كالتالي:**

المعادلة	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
طرفا المحور القاطع الرأسان	$A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)$, $A_2(0,a)$
المحور القاطع (الأساسي)	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
طول المحور القاطع	$2a$	
طرفا المحور المرافق	$B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$	$B_1(-b,0)$, $B_2(b,0)$
طول المحور المرافق	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$
العلاقة الأساسية	$c^2=a^2+b^2$	
معادلة الخطين المقاربين	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$
معادلة الدليلين	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$y=\pm\frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع متناظر حول محوريه ومركزه	

- **الاختلاف المركزي:**
- **تعريف:** القطع المخروطي هو مجموعة كل النقاط في المستوى الإحداثي حيث تكون نسبة بعد كل منها من نقطة ثابتة (البؤرة) إلى بعدها عن مستقيم ثابت (الدليل) في نفس المستوى تساوي مقدارًا ثابتًا.

هذا المقدار الثابت يسمى الاختلاف المركزي للقطع المخروطي ويرمز إليه بالرمز e.

- في القطع المكافئ: $e=1$
- في القطع الناقص: $e=\frac{c}{a}<1$
- في القطع الزائد: $e=\frac{c}{a}>1$