الوحدة الخامسة: التكامل

Integral

قسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

5–1: التكامل غير المحدد.

جزء 1: المشتقة العكسية.

جزء 2: قواعد التكامل غير المحدد وتطبيقاتها.

جزء 3: خواص التكامل غير المحدد وتطبيقاتها.

5–2: التكامل بالتعويض.

جزء 1: قاعدة التكامل بالتعويض وتطبيقاتها.

5–3: تكامل الدوال المثلثية.

جزء 1: قواعد تكامل بعض الدوال المثلثية وتطبيقاتها.

5–4: الدوال الأسية واللوغاريتمية.

جزء 1: قواعد مشتقات الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية الطبيعية وتطبيقاتها.

جزء 2: قواعد تكامل الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية الطبيعية وتطبيقاتها.

5–5: التكامل بالتجزيء.

جزء 1: قاعدة التكامل بالتجزيء وتطبيقاتها.

5–6: التكامل باستخدام الكسور الجزئية.

جزء 1: المقام هو ناتج ضرب عوامل خطية غير مكررة.

جزء 2: المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية بعضها متكرر.

جزء 3: درجة البسط في الحدودية النسبية مساوية أو أكبر من درجة المقام.

5–7: التكامل المحدد.

جزء 1: خواص التكامل المحدد.

جزء 2: التفسير البياني للتكامل المحدد.

جزء 3: استخدام طرائق التكامل غير المحدد في التكامل المحدد.

مقدمة الوحدة

أظهرت الاكتشافات أن المصريين كانوا قد استخدموا التكامل حوالي سنة 1800 قبل الميلاد، حيث دلّت «بردية موسكو الرياضية» على درايتهم بصيغة لحساب حجم الهرم المقطوع. وتعدّ طريقة التجزئة (أو الاستنزاف) من أوائل الطرائق المستخدمة في إيجاد التكاملات، ويعود تاريخها إلى سنة 370 قبل الميلاد، حيث يتم حساب الحجوم والمساحات بتقسيمها إلى أشكال صغيرة غير منتهية يمكن إيجاد مساحتها أو حجمها. وبعد ذلك قام أرخميدس بتطوير هذه الطريقة ليجد مساحة تقريبية للدائرة. أما الخطوة التالية والهامة في هذا المضمار فقد كانت في القرن الحادي عشر على يد الحسن بن الهيثم، وتعرف باسم (مسألة ابن الهيثم)، وهي مدرجة في كتابه «المناظر» حيث قام بعملية تكامل لإيجاد حجم السطح المكافئ. كما أنه استخدم الاستقراء الرياضي لتعميم هذه النتيجة على دوال كثيرات الحدود حتى الدرجة الرابعة، وبالتالي كان قادرًا على إيجاد صيغة عامة لتكاملات كثيرات الحدود.

وفي القرن السادس عشر بدأ التقدم الملحوظ يخطو سريعًا في علم التفاضل والتكامل على يد كافالييري وفيرما وهذا سمح لنيوتن وتورشيلي بتوسيع هذا العلم.

إن اكتشاف النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل على يد نيوتن ولايبنتز حقّقت تقدمًا مهمًا لهذا العلم، فهي توضّح العلاقة بين التفاضل والتكامل، وتساعد كثيرًا في حل مسائل متقدمة ومعقدة.

والمهم في هذا العلم أنه يدخل في العديد من التطبيقات الهندسية وفي علوم أخرى، حيث يتوجه إلى دراسة سلوك الدالة والتغير فيها، ويحل مشاكل كثيرة يعجز علم الجبر عن حلها بسهولة.

الوحدة الخامسة

التكامل

Integral

مشروع الوحدة: إيجاد مساحة تحت منحنى دالة

1 مقدمة المشروع: تعرّف الطلاب قوانين إيجاد مساحات أشكال هندسيّة مثل: المربع، المستطيل، المثلث، متوازي الأضلاع، الدائرة... ولكن كيف يمكن إيجاد مساحة منطقة محددة بمنحنى دالة ومحور السينات في فترة معينة.

2 الهدف: يريد متعهد تقدير مساحة إحدى المنطقتين المحصورة بين مدرّج مسرح يمثل قطعًا مكافئًا معادلته: $y = x^2$ ومستوى الأرض، علمًا أن طول الممر 10 m من كل جهة ونمثله على مستوى الإحداثيات.

3 اللوازم: آلة حاسبة بيانية — حاسوب — أوراق رسم.

4 أسئلة حول التطبيق:

a ارسم منحنى الدالة $f : f(x) = x^2$ على الفترة المغلقة $[0,10]$، لتكن S المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة ومحور السينات و $x = 0\ ,\ x = 10$.

b اقسم الفترة المغلقة $[0\ ,10]$ إلى خمسة أجزاء متساوية بحيث أن طول كل جزء يساوي 2. (لاحظ أن: $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$). انظر الشكل (1).

c استخدم أطوال الفترات الجزئية: $[8,10]$، $[6,8]$، $[4,6]$، $[2,4]$، $[0,2]$ كأطوال لأضلاع مستطيلات حيث ارتفاع كل مستطيل يحقق: $y = x^2$ وذلك من جهة اليمين لكل فترة جزئية (انظر الشكل 2). احسب قيمة R_5 حيث إن R_5 هو مجموع مساحات المستطيلات الخمسة اليمنى. (تسمى أيضًا المجاميع العليا للمساحة الأساسية S).

d استخدم أطوال الفترات الجزئية: $[8,10]$، $[6,8]$، $[4,6]$، $[2,4]$، كأطوال لأضلاع مستطيلات حيث إن ارتفاع كل مستطيل يحقق: $y = x^2$ وذلك من جهة اليسار لكل فترة جزئية (انظر الشكل 3). احسب قيمة L_5 حيث إن L_5 هو مجموع مساحات المستطيلات الأربعة اليسرى. (تسمى أيضًا المجاميع السفلى للمساحة الأساسية S).

e اكتب متباينة تحدد العلاقة بين R_5، S، L_5.

f استخدم الخطوات السابقة في حالة تقسيم $[0,10]$ إلى 10 أجزاء متساوية الطول. ثم اكتب متباينة تحدد العلاقة بين R_{10}، S، L_{10}.

g أكمل الجدول التالي: حيث n عدد فترات التجزيء.

n	R_n	L_n
5		
10		
20		
50		
100		

اكتب متباينة تحدد العلاقة بين R_n، S، L_n في كل حالة. ماذا تلاحظ؟

5 التقرير: اكتب تقريرًا مفصّلًا يبيّن حساباتك والنتائج التي توصلت إليها. اشرح ماذا يحدث كلما كبرت n بلا حدود $(n \to \infty)$.

شكل (1)

شكل (2)

شكل (3)

دروس الوحدة

التكامل غير المحدد	التكامل بالتعويض	تكامل الدوال المثلثية	الدوال الأسية واللوغاريتمية	التكامل بالتجزيء	التكامل باستخدام الكسور الجزئية	التكامل المحدد
5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6	5-7

10

في النهاية من المفيد الإشارة إلى أنه يوجد عدة تعريفات مستخدمة للتكامل وعدة طرائق ولكن النتيجة تبقى هي نفسها. يمكن الربط بين التكامل المحدد ومساحة منطقة مستوية.

مشروع الوحدة

يوفر مشروع الوحدة فرصة أمام الطلاب للتعرف على كيفية إيجاد قيمة تقريبية لمساحة منطقة محددة بمنحنى دالة $y = x^2$، محور السينات، محور الصادات، المستقيم $x = 10$ وذلك باستخدام قواعد المساحة في الأشكال الهندسية التي تعرّف عليها سابقًا.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

(a)، (b) تحقق من رسومات الطلاب.

(c) $R_5 = 2(2)^2 + 2(4)^2 + 2(6)^2 + 2(8)^2 + 2(10)^2$

$= 440$ units square

(d) $L_5 = 2(2)^2 + 2(4)^2 + 2(6)^2 + 2(8)^2$

$= 240$ units square

(e) من الرسم البياني نلاحظ أن:

$L_5 \le S \le R_5 \Longrightarrow 240 \le S \le 440$

(f) $R_{10} = 1(1)^2 + 1(2)^2 + 1(3)^2 + 1(4)^2 + 1(5)^2$

$+1(6)^2 + 1(7)^2 + 1(8)^2 + 1(9)^2 + 1(10)^2$

$R_{10} = 385$ units square

$L_{10} = 1(1)^2 + 1(2)^2 + 1(3)^2 + 1(4)^2 + 1(5)^2$

$+1(6)^2 + 1(7)^2 + 1(8)^2 + 1(9)^2$

$L_{10} = 285$ units square

$L_{10} \le S \le R_{10} \Longrightarrow 285 \le S \le 385$

(g) تحقق من حسابات الطلاب.

التقرير

اكتب تقريرًا مفصّلًا يبيّن كافة الحسابات والنتائج التي حصلت عليها والمتباينات التي تربط بين المجاميع. اعرض عملك أمام زملائك، ناقش معهم ما توصلت إليه، أعد النظر ببعض النتائج إذا كان ذلك ضروريًّا.

الوحدة الخامسة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

تعلمت:

- تحديد الفترات التي تكون عليها الدالة معرفة.
- تحديد الفترات التي تكون عليها الدالة متصلة.
- إيجاد متوسط معدل التغير لدالة على فترة معينة.
- إيجاد معدل التغير اللحظي لدالة في لحظة معينة.
- إيجاد ميل المماس عند نقطة لبيان الدالة.
- إيجاد ميل الخط العمودي على المماس عند نقطة لبيان الدالة.
- إيجاد مشتقة دالة على الفترة التي تكون فيها معرّفة ومتصلة.
- دراسة سلوك بيان الدالة باستخدام مشتقتها.
- إيجاد القيم القصوى المحلية والمطلقة لدالة على فترة معينة.
- إيجاد المشتقة الثانية ومن الرتب العليا.
- دراسة تقعر منحنى الدالة.
- اختبار المشتقة الثانية.

ماذا سوف تتعلم؟

- تعرّف المشتقة العكسية لدالة متصلة والربط مع مشتقة هذه الدالة.
- استخدام التكامل غير المحدد وجدول التكاملات وخواص التكامل.
- إيجاد تكامل الدوال المثلثية.
- إيجاد مشتقة دالة أسيّة ومشتقتها العكسية.
- إيجاد مشتقة دالة لوغاريتمية ومشتقتها العكسية.
- حساب التكامل بالتعويض.
- حساب التكاملات باستخدام التجزيء.
- تفكيك حدودية نسبية إلى كسور جزئية.
- إيجاد تكاملات بعض الدوال النسبية.
- تعرف التكامل المحدد وخواصه.

المصطلحات الأساسية

التكامل غير المحدد – مشتقة عكسية – ثابت التكامل – تكامل الدوال المثلثية – مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية – تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية – قابلية الاشتقاق – قاعدة القوى للتكامل – التكامل بالتعويض والتجزيء – الكسور الجزئية – عوامل خطية ومن الدرجة الثانية – التكامل المحدد – خواص التكامل المحدد – التفسير البياني للتكامل المحدد – المساحة.

أضف إلى معلوماتك

عمر الخيّام وأبو الوفاء البوزجاني زادا على بحوث الخوارزميّ في الجبر زيادة تعدّ أساسًا لعلاقة الجبر بالهندسة، وقد مهّدت لعلماء أوروبا بالهندسة التحليليّة التي قادت إلى التكامل والتفاضل، وعليه قامت أكثر الاختراعات والاكتشافات العلميّة.

حساب التكامل: تستطيع أن تعتبر أن ثابت بن قرّة والكوهي ومن بعدهما ابن الهيثم، قد ساهموا في نشأة حساب التكامل الحديث. دفعهم إلى ذلك حساب حجم المجسّم الناشئ عن دوران قطعة من قطع مكافئ حول محور ما.

ابتكر ثابت بن قرّة، ولأوّل مرّة في تاريخ البشريّة، نوعًا من الحساب يُكافئ حساب التكامل الذي نعرفه في الوقت الحاضر، وذلك قبل نيوتن بمئات السنين. أمّا نوع التكامل الذي أحرزه فهو من نوع $\int_0^a x^n\,dx$ قيمة أسيّة تساوي الوحدة، أي التكامل $M\int_a^b x\,dx$ عندما تعرض لحساب عزم كتلة قضيب متجانس ساكن بالنسبة إلى أحد المحاور. وأثبت أن العزم الكليّ يساوي مجموع العزوم الأولية.

عمر الخيام: عالم وفيلسوف وشاعر، تخصص في الرياضيات والفلك واللغة والفقه. وهو أول من اخترع طريق حساب المثلثات والمعادلات الجبرية من الدرجة الثالثة.

11

	سلّم التقييم
4	الحسابات دقيقة بالكامل – المتباينات صحيحة – الجدول مكتمل – التقرير مفصل وواضح – النتائج واقعية ومعقولة.
3	الحسابات بمعظمها دقيقة – المتباينات صحيحة – أخطاء طفيفة في الجدول – التقرير مفصل – معظم النتائج واقعية ومقبولة.
2	أخطاء كثيرة في الحسابات – المتباينات غير دقيقة – الجدول غير مكتمل – التقرير غير منظم وغير مفصل – النتائج لا ترتبط بالمعطيات.
1	معظم عناصر المشروع ناقصة أو غير موجودة.

5–1: التكامل غير المحدد

1 الأهداف

- يوجد المشتقة العكسية.
- يوجد التكامل غير المحدد.
- يتعرف مصطلحات التكامل ورموزه ويستخدمها.
- يتعرف قواعد التكامل غير المحدد.
- يتعرف خواص التكامل غير المحدد.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

مشتقة عكسية – تكامل غير محدد – قاعدة القوى – خاصية الضرب بعدد ثابت – خاصية الجمع والطرح.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب إيجاد مشتقات الدوال التالية:

(a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ **(b)** $f(x) = x^2 - 4x + 10$

(c) $f(x) = x^2 - 4x$ **(d)** $f(x) = \sin 4x + 5$

(e) $f(x) = \sin 4x - 8$ **(f)** $f(x) = \sin 4x$

اسألهم ملاحظة النتائج التي حصلوا عليها.

5 التدريس

بعد الأمثلة في فقرة التمهيد وفقرة «دعنا نفكر ونتناقش»، ناقش مع الطلاب نظرية (1) التي تعطي فكرة واضحة للطلاب بأن المشتقة العكسية لدالة متصلة ليست واحدة.

وأن العلاقة: $G(x) = F(x) + C$ تعبّر بشكل واضح عن مفهوم المشتقة العكسية للدالة حيث القيمة الثابتة C تحدث هذا الفرق كما أن النظرية (2) وبيان الدوال المرفقة مع قيم الثابت C توفر للطالب فرصة مهمة لملاحظة عدد من المشتقات العكسية لدالة واحدة.

في المثال (1)

يبدأ هذا المثال بدالة واحدة معروفة F ومشتقتها دالة محددة f والأهم في هذا المثال هو كتابة الصورة العامة للدالة F حيث يضاف الثابت C.

5–1

التكامل غير المحدد

Indefinite Integral

دعنا نفكر ونتناقش

أكمل الجداول التالية:

a

المشتقة $F'(x) =$	الدالة $F(x) =$
	$x^2 - 1$
	$x^2 + 5$
	$x^3 + 4$
	$x^3 - 2$

b

المشتقة $F'(x) =$	الدالة $F(x) =$
$2x$	
$3x^2$	
5	
x^3	

c هل يمكن إيجاد $F(x)$ أخرى في الجزء b بحيث يكون لها المشتقة نفسها؟

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» في الجزء a أوجدنا F' مشتقة دالة معلومة F باستخدام قواعد الاشتقاق، أمّا في الجزء b أوجدنا دالة F بمعلومية مشتقتها F' وذلك بعكس ما تمّ في الجزء a وتسمى الدالة F مشتقة عكسية (دالة مقابلة).

تعريف: المشتقة العكسية **Antiderivative**

تسمى الدالة F مشتقة عكسية للدالة f المعرفة على مجالها I.

إذا كان: $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

استنادًا إلى هذا التعريف:

إذا كان $f(x) = x$ فيمكن أن تكون: $F(x) = \frac{x^2}{2}$ مشتقة عكسية للدالة f.

لأن: $F'(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)x^{2-1}$

$= x = f(x)$ باستخدام قاعدة القوى لاشتقاق الدالة

وأيضًا يمكن أن تكون $F(x) = \frac{x^2}{2} + 4$ مشتقة عكسية لها لأن $F'(x) = x = f(x)$ (مشتقة الثابت تساوي الصفر)،

كما أن $F(x) = \frac{x^2}{2} + 50$ يمكن أن تكون مشتقة عكسية أخرى لها لأن $F'(x) = x = f(x)$.

ملاحظة: سنتعامل في دراستنا مع دوال متصلة على فترات معينة.

سوف تتعلم

- المشتقة العكسية.
- التكامل غير المحدد.
- مصطلحات التكامل ورموزه.
- قواعد التكامل غير المحدد.
- خواص التكامل غير المحدد.

المفردات والمصطلحات:

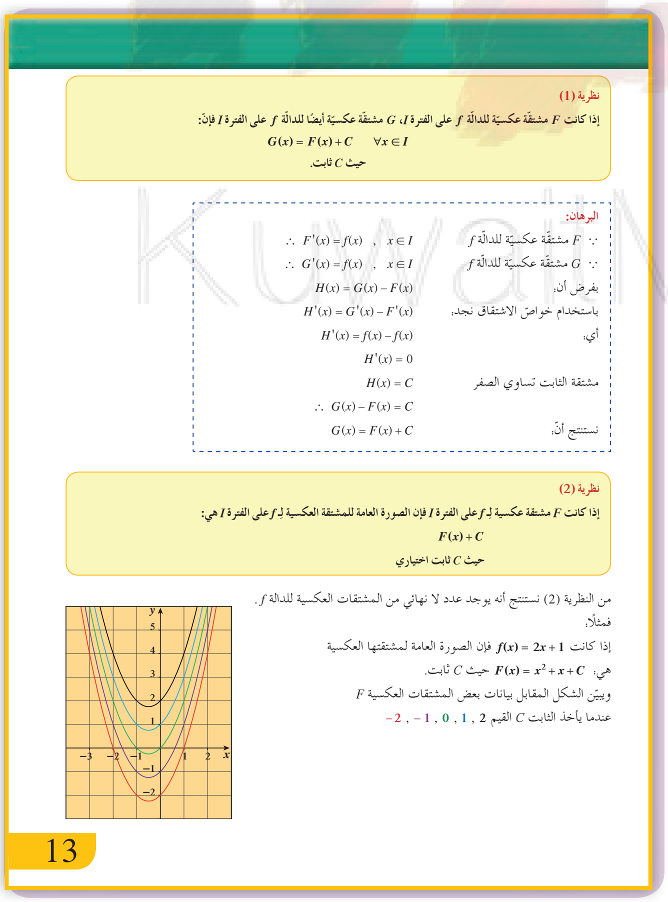
- مشتقة عكسية Antiderivative
- تكامل غير محدد Indefinite Integral
- قاعدة القوى Power Rule
- خاصية الضرب بعدد ثابت Constant Multiple Property
- خاصية الجمع والطرح Sum and Difference Property

هل تعلم؟

- يستطيع المهندس قياس معدل التغير لتسرب الماء من الخزان، ولكنه يريد معرفة كمية الماء التي تتسرب من هذا الخزان خلال فترة محددة من الزمن.
- يستطيع عالم الأحياء معرفة معدل التغير لتزايد مجتمع من الجراثيم ولكنه بحاجة لاستنتاج حجم هذا التزايد خلال فترة محددة من الزمن.

عن هذه المسائل يمكن الإجابة بإيجاد مشتقة عكسية لدالة تمثل تسرب الماء من الخزان ومشتقة عكسية لدالة تمثل تزايد مجتمع من الجراثيم.

12



نظرية (1)

إذا كانت F مشتقّة عكسيّة للدالّة f على الفترة I، G مشتقّة عكسيّة أيضًا للدالّة f على الفترة I فإنّ:

$$G(x) = F(x) + C \qquad \forall x \in I$$

حيث C ثابت.

البرهان:

∵ F مشتقّة عكسيّة للدالّة f	$\therefore\ F'(x) = f(x) \quad , \quad x \in I$
∵ G مشتقّة عكسيّة للدالّة f	$\therefore\ G'(x) = f(x) \quad , \quad x \in I$
بفرض أن:	$H(x) = G(x) - F(x)$
باستخدام خواصّ الاشتقاق نجد:	$H'(x) = G'(x) - F'(x)$
أي:	$H'(x) = f(x) - f(x)$
	$H'(x) = 0$
مشتقة الثابت تساوي الصفر	$H(x) = C$
	$\therefore\ G(x) - F(x) = C$
نستنتج أنّ:	$G(x) = F(x) + C$

نظرية (2)

إذا كانت F مشتقة عكسية لِـ f على الفترة I فإن الصورة العامة للمشتقة العكسية لِـ f على الفترة I هي:

$$F(x) + C$$

حيث C ثابت اختياري

من النظرية (2) نستنتج أنه يوجد عدد لا نهائي من المشتقات العكسية للدالة f.

فمثلًا:

إذا كانت $f(x) = 2x + 1$ فإن الصورة العامة لمشتقتها العكسية

هي: $F(x) = x^2 + x + C$ حيث C ثابت.

ويبيّن الشكل المقابل بيانات بعض المشتقات العكسية F عندما يأخذ الثابت C القيم 2 , 1 , 0 , -1 , -2

13

في المثال (2)

مشابه للمثال (1) حيث يجب إثبات أن: $F'(x) = f(x)$.

اشرح للطلاب التكامل غير المحدد. ركّز لديهم فكرة التعريف على أن التكامل غير المحدد هو «مجموعة كل المشتقات العكسية» اكتب على السبورة: $\int f(x)dx = F(x) + C$. أكّد لهم أن $\int$ هو رمز للتكامل وأن dx تعبّر في الأساس عن متغير التكامل x وأنه عندما نكامل $f(x)d(x)$ نحصل على مجموعة كافة المشتقات العكسية أي بإضافة C.

اكتب قواعد التكامل وخواص التكامل غير المحدد أخبرهم أنه لا يمكن إيجاد تكامل لدوال مع متغيرين معًا وأن: $\int f(x) \bullet g(x)\,dx \neq \int f(x)\,dx \bullet \int g(x)\,dx$

ومثله $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx}$

في الأمثلة (3), (4), (5)

تطبيقات مباشرة على قواعد وخواص التكامل غير المحدد. تأكد دائمًا من ملاحظة الطلاب لـ: $\int f(x)dx = F(x) + C$

في المثال (6)

يوفّر هذا المثال فرصة أمام الطلاب لتطبيق قاعدة القوى وإيجاد التكامل غير المحدد، حيث يتعرف على كيفية تحويل الجذور إلى قوى ثم استخدام القاعدة.

في المثال (7)

يبيّن هذا المثال كيفية استخدام معطيات محددة لإيجاد قيمة واحدة للثابت C أي مشتقة عكسية واحدة.

في المثال (8)

تطبيق التكامل غير المحدد مع معطيات محددة لإيجاد الزمن الذي تصل فيه الكرة إلى أعلى ارتفاع إذا ألقيت من سطح برج والزمن الذي سوف تستغرقه بعد ذلك لتصل إلى الأرض.

6 الربط

يوفر المثال (8) فرصة أمام الطلاب لربط عجلة جاذبية الأرض $(a(t) = 9.8\ \text{m/s}^2)$، حيث يستخدم التكامل غير المحدد لإيجاد سرعة الكرة بعدما ألقيت إلى الأعلى، ومن ثم يوجد التكامل غير المحدد لسرعة الكرة.

ملاحظة:
إذا طُلب إيجاد مشتقة عكسية للدالة f فيمكن اعتبار $C = 0$.

مثال (1)

أثبت أن: $F(x) = x^3 + 5x + 3$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 3x^2 + 5$ ثم اكتب الصورة العامة للمشتقة العكسية.

الحل:

$$F(x) = x^3 + 5x + 3$$
$$F'(x) = 3x^2 + 5$$
$$= f(x)$$

$\therefore$ F هي مشتقة عكسية للدالة f

الصورة العامة للمشتقة العكسية هي:

$F(x) = x^3 + 5x + C$ حيث C ثابت

حاول أن تحل

1 أثبت أن: $F(x) = 5 - \frac{1}{3}x^3$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = -x^2$ ثم اكتب مشتقة عكسية أخرى لها.

تذكر:
مشتقة الثابت C هي صفر.

مثال (2)

أثبت أن: $F(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$

الحل:

$$F(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$
$$F'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$$
$$= f(x)$$

$\therefore$ F هي مشتقة عكسية للدالة f

حاول أن تحل

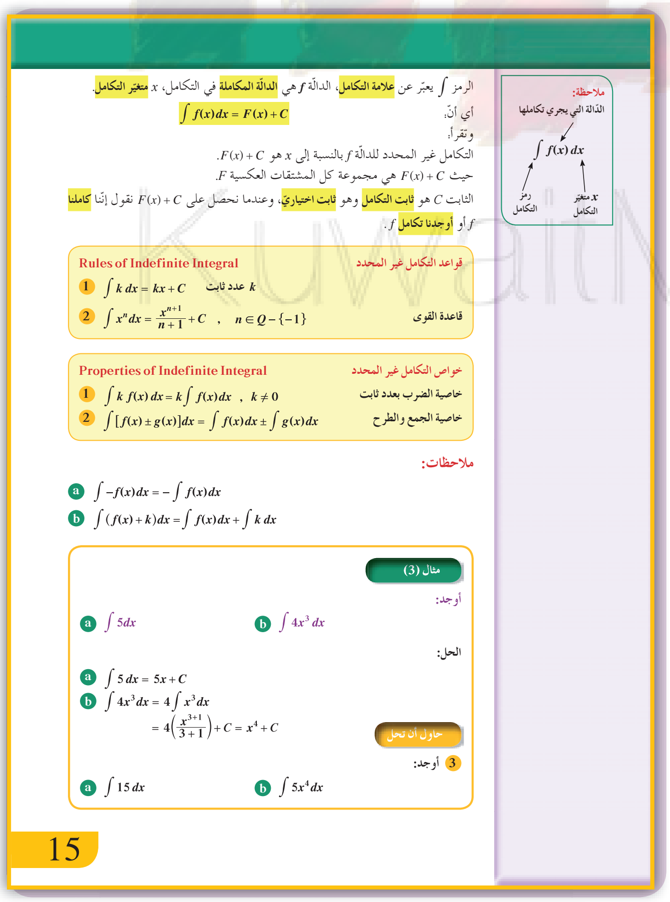
2 أثبت أن: $F(x) = \frac{x^3+1}{x^2}$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$

تعريف: التكامل غير المحدد **Indefinite Integral**

التكامل غير المحدد للدالّة f بالنسبة إلى x هو مجموعة كل المشتقّات العكسيّة F، ويكتب على الصورة:

$$\int f(x)\,dx$$

14



ملاحظة:
الدّالة التي يجري تكاملها
$\int f(x)\,dx$
رمز التكامل
x متغيّر التكامل

الرمز $\int$ يعبّر عن **علامة التكامل**، الدالّة f هي **الدالّة المكاملة** في التكامل، x **متغيّر التكامل**.

أي أنّ: $\int f(x)dx = F(x) + C$

وتقرأ:

التكامل غير المحدد للدالّة f بالنسبة إلى x هو $F(x) + C$.

حيث $F(x) + C$ هي مجموعة كل المشتقات العكسية F.

الثابت C هو **ثابت التكامل** وهو **ثابت اختياريّ**، وعندما نحصل على $F(x) + C$ نقول إنّنا **كاملنا** f أو **أوجدنا تكامل** f.

قواعد التكامل غير المحدد **Rules of Indefinite Integral**

1 $\int k\,dx = kx + C$ k عدد ثابت

2 قاعدة القوى $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \in Q - \{-1\}$

خواص التكامل غير المحدد **Properties of Indefinite Integral**

1 خاصية الضرب بعدد ثابت $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)dx \quad , \quad k \neq 0$

2 خاصية الجمع والطرح $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

ملاحظات:

a $\int -f(x)dx = -\int f(x)dx$

b $\int (f(x) + k)dx = \int f(x)dx + \int k\,dx$

مثال (3)

أوجد:

a $\int 5dx$ b $\int 4x^3\,dx$

الحل:

a $\int 5\,dx = 5x + C$

b $\int 4x^3 dx = 4\int x^3 dx$
$= 4\left(\frac{x^{3+1}}{3+1}\right) + C = x^4 + C$

حاول أن تحل

3 أوجد:

a $\int 15\,dx$ b $\int 5x^4 dx$

15

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في إيجاد التكامل وخاصة مع $f(x) = x^n$. اكتب على السبورة أن: $f'(x) = nx^{n-1}$

ولكن: $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

أعط أمثلة متعددة واطلب إليهم ملاحظة الفرق في كل مرة.

8 التقييم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من قدرتهم في التعامل مع الدالة العكسية، وقواعد التكامل غير المحدد وخواصه.

اختبار سريع

1 أثبت أن $F(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 4x^3 - 6x + 2$

ثم اكتب الصورة العامة للمشتقة العكسية.

$F(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$

$F'(x) = 4x^3 - 6x + 2 = f(x)$

$\therefore$ F هي مشتقة عكسية للدالة f

الصورة العامة للمشتقة العكسية هي:

$F(x) = x^4 - 3x^2 + 2x + C$

2 أوجد: $\int \sqrt[3]{x^2}\, dx$.

$\int x^{\frac{2}{3}}\, dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$

3 أوجد: $\int \left(x^3 + \frac{1}{x^2} + 4\right)dx$.

$= \int x^3\, dx + \int x^{-2}\, dx + 4\int dx$

$= \frac{x^{3+1}}{3+1} + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 4x + C$

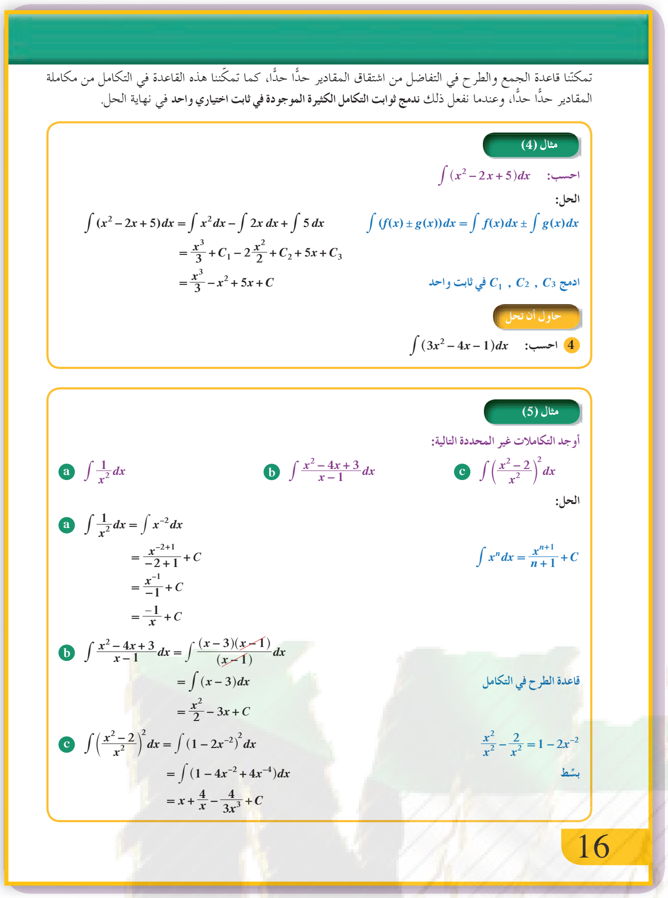
$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{x} + 4x + C$

4 أوجد: $\int \left(\frac{x^2+3}{x^3}\right)^2 dx$.

$\int (x^{-1} + 3x^{-3})^2\, dx$

$= \int x^{-2}\, dx + 9\int x^{-6}\, dx + 6\int x^{-4}\, dx$

$= -\frac{1}{x} - \frac{9}{5x^5} - \frac{2}{x^3} + C$



تمكّننا قاعدة الجمع والطرح في التفاضل من اشتقاق المقادير حدًّا حدًّا، كما تمكّننا هذه القاعدة في التكامل من مكاملة المقادير حدًّا حدًّا، وعندما نفعل ذلك **ندمج ثوابت التكامل الكثيرة الموجودة في ثابت اختياري واحد** في نهاية الحل.

مثال (4)

احسب: $\int (x^2 - 2x + 5)dx$

الحل:

$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

$\int (x^2 - 2x + 5)dx = \int x^2 dx - \int 2x\, dx + \int 5\, dx$

$= \frac{x^3}{3} + C_1 - 2\frac{x^2}{2} + C_2 + 5x + C_3$

ادمج C_3 , C_2 , C_1 في ثابت واحد

$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C$

حاول أن تحل

4 احسب: $\int (3x^2 - 4x - 1)dx$

مثال (5)

أوجد التكاملات غير المحددة التالية:

a $\int \frac{1}{x^2}dx$ b $\int \frac{x^2-4x+3}{x-1}dx$ c $\int \left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)^2 dx$

الحل:

a $\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$= \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C$

$= \frac{x^{-1}}{-1} + C$

$= \frac{-1}{x} + C$

b $\int \frac{x^2-4x+3}{x-1}dx = \int \frac{(x-3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}dx$

قاعدة الطرح في التكامل

$= \int (x-3)dx$

$= \frac{x^2}{2} - 3x + C$

c $\int \left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)^2 dx = \int (1-2x^{-2})^2 dx$

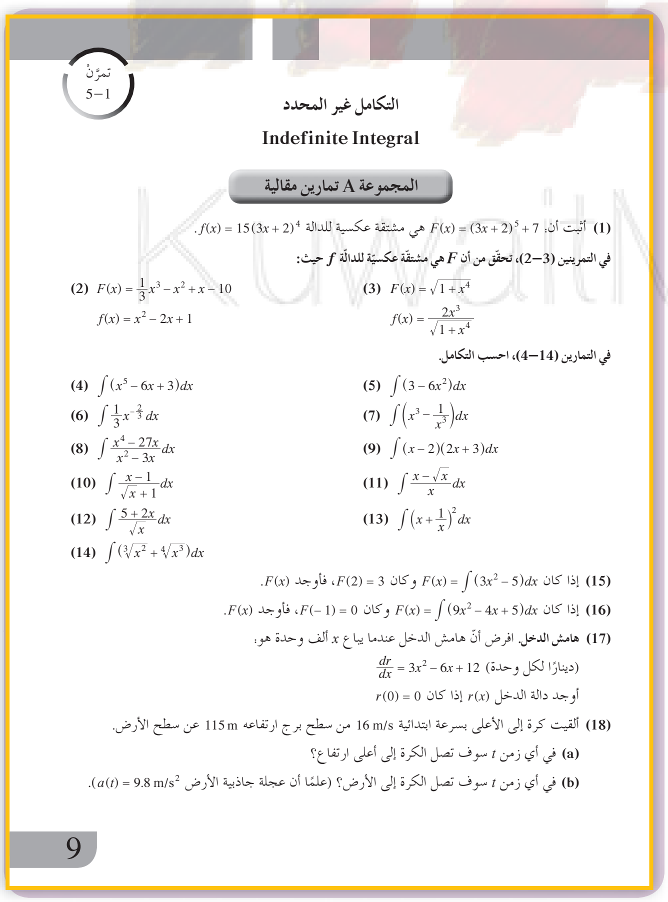
$\frac{x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2} = 1 - 2x^{-2}$

بسّط

$= \int (1 - 4x^{-2} + 4x^{-4})dx$

$= x + \frac{4}{x} - \frac{4}{3x^3} + C$

16



تمرَّنْ 5−1

التكامل غير المحدد

Indefinite Integral

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أثبت أن: $F(x) = (3x+2)^5 + 7$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = 15(3x+2)^4$.

في التمرينين (3−2)، تحقّق من أن F هي مشتقّة عكسيّة للدالّة f حيث:

(2) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 10$, $f(x) = x^2 - 2x + 1$

(3) $F(x) = \sqrt{1+x^4}$, $f(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$

في التمارين (14−4)، احسب التكامل.

(4) $\int (x^5 - 6x + 3)dx$

(5) $\int (3 - 6x^2)dx$

(6) $\int \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\, dx$

(7) $\int \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)dx$

(8) $\int \frac{x^4 - 27x}{x^2 - 3x}dx$

(9) $\int (x-2)(2x+3)dx$

(10) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$

(11) $\int \frac{x-\sqrt{x}}{x}dx$

(12) $\int \frac{5+2x}{\sqrt{x}}dx$

(13) $\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

(14) $\int (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^3})dx$

(15) إذا كان $F(x) = \int (3x^2 - 5)dx$ وكان $F(2) = 3$، فأوجد $F(x)$.

(16) إذا كان $F(x) = \int (9x^2 - 4x + 5)dx$ وكان $F(-1) = 0$، فأوجد $F(x)$.

(17) **هامش الدخل.** افرض أنّ هامش الدخل عندما يباع x ألف وحدة هو:

$\frac{dr}{dx} = 3x^2 - 6x + 12$ (دينارًا لكل وحدة)

أوجد دالة الدخل $r(x)$ إذا كان $r(0) = 0$

(18) ألقيت كرة إلى الأعلى بسرعة ابتدائية 16 m/s من سطح برج ارتفاعه 115 m عن سطح الأرض.

(a) في أي زمن t سوف تصل الكرة إلى أعلى ارتفاع؟

(b) في أي زمن t سوف تصل الكرة إلى الأرض؟ (علمًا أن عجلة جاذبية الأرض $a(t) = 9.8\ m/s^2$).

9

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a)، (b)، (c) تحقق من إجابات الطلاب.

«حاول أن تحل»

1 $F'(x) = 0 - x^2 = -x^2 = f(x)$

$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + C$

2 $F'(x) = 1 - 2x^{-3} = 1 - \frac{2}{x^3} = f(x)$

3 (a) $\int 15dx = 15x + C$

(b) $\int 5x^4 dx = x^5 + C$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5—1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $F(x) = x^{-3}$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = -3x^{-4}$ (a) (b)

(2) $\int(-x^{-3} + x - 1)dx = \frac{1}{2}x^{-2} + \frac{1}{2}x^2 - x + C$ (a) (b)

(3) $\int \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{x} + C$ (a) (b)

(4) إذا كانت: $f'(x) = \frac{1}{x^2} + x$ ، $f(2) = 1$، فإن: $f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ (a) (b)

(5) إذا كانت: $F(0) = 400$ ، $F(x) = \int(3x^2 - 12x + 15)dx$، فإن: $F(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 400$

(a) (b)

في التمارين (12—6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\int \frac{4}{3}\sqrt[3]{t^2}\,dt =$

(a) $\frac{3t^{\frac{5}{3}}}{5} + C$ (b) $\frac{4t^{\frac{5}{3}}}{5} + C$

(c) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{t^5} + C$ (d) $4\sqrt[3]{t^5} + C$

(7) $\int\left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx =$

(a) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x}(x^{\frac{4}{3}} + 5) + C$ (b) $\frac{3}{5}x^{\frac{2}{3}}(x^{-\frac{2}{3}} + 5) + C$

(c) $\frac{5}{3}\sqrt[3]{x}(x^{\frac{4}{3}} + 5) + C$ (d) $\frac{5}{3}x^{\frac{4}{3}}(x^{\frac{2}{3}} + 5) + C$

(8) إذا كان: $x = -1$ ، $y = -5$ ، $\frac{dy}{dx} = x^{-\frac{2}{3}}$ فإنّ y تساوي:

(a) $-\frac{x^2}{3} - \frac{14}{3}$ (b) $3x^{\frac{1}{3}} + 2$

(c) $3x^{\frac{1}{3}} - 2$ (d) $3x^{\frac{1}{3}}$

(9) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x}}dx =$

(a) $\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + C$ (b) $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} + C$

(c) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} + C$ (d) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{1}{2}} + C$

10

(10) $\int \sqrt{x}(2 + x^2)dx =$

(a) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$ (b) $\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$

(c) $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$ (d) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$

(11) $\int \frac{2 + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}dx =$

(a) $x^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$ (b) $4x^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$

(c) $x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}} + C$ (d) $4x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}} + C$

(12) $\int\left(\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} + 2\right)^2 dx =$

(a) $x^2 + C$ (b) $2x + C$

(c) $\frac{x^2}{2} + 2x + C$ (d) $\frac{1}{3}x^3 + C$

11

حاول أن تحل

5 أوجد التكاملات غير المحددة التالية:

(a) $\int(2x-3)(x+4)dx$ (b) $\int \frac{x^2 + 5x + 4}{x+1}dx$ (c) $\int\left(\frac{3x^2 - x}{x}\right)^2 dx$

مثال (6)

أوجد:

(a) $\int \sqrt{x}\,dx$ (b) $\int \sqrt[5]{x^2}\,dx$ (c) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$

الحل:

(a) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$ $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$

(b) $\int \sqrt[5]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{5}}dx = \frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + C$ $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$= \frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}} + C = \frac{5}{7}x\sqrt[5]{x^2} + C$

(c) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}dx = \int \frac{\cancel{(\sqrt[3]{x}+1)}(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)dx}{\cancel{(\sqrt[3]{x}+1)}}$ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$= \int(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)dx$

$= \int(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} + 1)dx$ قاعدة الجمع والطرح

$= \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + x + C$

$= \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + x + C$

حاول أن تحل

6 أوجد:

(a) $\int x\sqrt{x}\,dx$ (b) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ (c) $\int \frac{x^2 - 3x}{\sqrt[3]{x}}dx$

17


يمكن تحديد واحدة من المشتقات العكسية عندما يتوفر شرط يمكننا من إيجاد قيمة الثابت C.

مثال (7)

إن كان: $F(x) = \int (2x-3)dx$ ، $F(3) = 2$ فأوجد $F(x)$

الحل:

$$F(x) = \int (2x-3)dx = \int 2xdx - \int 3dx$$
$$= x^2 - 3x + C$$

لإيجاد قيمة الثابت C نستخدم القيمة المعطاة: $F(3) = 2$

عوِّض عن x بـ 3 وعن $F(3)$ بـ 2

$$2 = (3)^2 - 3(3) + C$$
$$2 = 9 - 9 + C$$

ومنه $C = 2$

فيكون: $F(x) = x^2 - 3x + 2$

حاول أن تحل

7 إذا كان: $F(x) = \int (2x+5)dx$ ، $F(-1) = 0$ فأوجد $F(x)$

مثال (8)

ألقيت كرة إلى الأعلى بسرعة ابتدائية 15 m/s من سطح برج ارتفاعه 140 m عن سطح الأرض.

a في أي زمن t سوف تصل الكرة إلى أعلى ارتفاع؟

b في أي زمن t سوف تصل الكرة إلى الأرض؟ (علمًا بأن عجلة الجاذبية الأرضية $a(t) = 9.8\ m/s^2$)

الحل:

a بما أن الكرة ألقيت إلى الأعلى فإن الحركة رأسية ونختار الاتجاه الموجب إلى الأعلى.
في الزمن t ثانية المسافة فوق سطح الأرض هي $s(t)$ والسرعة المتجهة $v(t)$ هي تناقصية وبالتالي العجلة سالبة لذا:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -9.8$$

بمكاملة الطرفين بالنسبة إلى t
$$v(t) = \int a(t)dt = \int -9.8dt$$
$$v(t) = -9.8t + C$$

ولكن $v(0) = 15$ لذا: $15 = -9.8(0) + C$

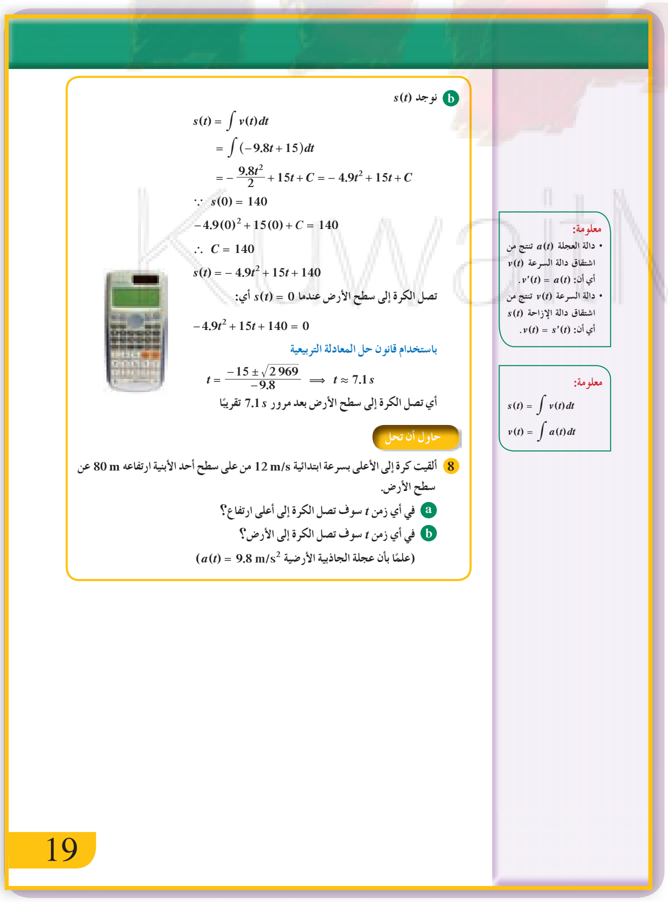
ومنه: $C = 15$

ويكون: $v(t) = -9.8t + 15$

تصل الكرة إلى أعلى ارتفاع عندما $v(t) = 0$

$$-9.8t + 15 = 0 \Longrightarrow t = \frac{15}{9.8}$$
$$t \approx 1.53\,s$$

18


b نوجد $s(t)$

$$s(t) = \int v(t)dt$$
$$= \int (-9.8t+15)dt$$
$$= -\frac{9.8t^2}{2} + 15t + C = -4.9t^2 + 15t + C$$
$$\because\ s(0) = 140$$
$$-4.9(0)^2 + 15(0) + C = 140$$
$$\therefore\ C = 140$$
$$s(t) = -4.9t^2 + 15t + 140$$

تصل الكرة إلى سطح الأرض عندما $s(t) = 0$ أي:

$$-4.9t^2 + 15t + 140 = 0$$

باستخدام قانون حل المعادلة التربيعية

$$t = \frac{-15 \pm \sqrt{2\,969}}{-9.8} \Longrightarrow t \approx 7.1\,s$$

أي تصل الكرة إلى سطح الأرض بعد مرور 7.1 s تقريبًا

معلومة:
- دالة العجلة $a(t)$ تنتج من اشتقاق دالة السرعة $v(t)$ أي أن: $v'(t) = a(t)$.
- دالة السرعة $v(t)$ تنتج من اشتقاق دالة الإزاحة $s(t)$ أي أن: $v(t) = s'(t)$.

معلومة:
$s(t) = \int v(t)dt$
$v(t) = \int a(t)dt$

حاول أن تحل

8 ألقيت كرة إلى الأعلى بسرعة ابتدائية 12 m/s من على سطح أحد الأبنية ارتفاعه 80 m عن سطح الأرض.

a في أي زمن t سوف تصل الكرة إلى أعلى ارتفاع؟

b في أي زمن t سوف تصل الكرة إلى الأرض؟

(علمًا بأن عجلة الجاذبية الأرضية $a(t) = 9.8\ m/s^2$)

19

4 $\int 3x^2dx - \int 4x\,dx - \int dx = x^3 - 2x^2 - x + C$

5 **(a)** $\int (2x^2 + 5x - 12)dx$

$$= \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 12x + C$$

(b) $\int \frac{(x+1)(x+4)}{(x+1)}dx = \int (x+4)dx$

$$= \frac{x^2}{2} + 4x + C$$

(c) $\int (3x-1)^2dx = \int (9x^2 - 6x + 1)dx$

$$= 3x^3 - 3x^2 + x + C$$

6 **(a)** $\int x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$

(b) $\int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C$

(c) $\int \left(x^{\frac{5}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}}\right)dx = \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} - \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$

7 $F(x) = x^2 + 5x + C$

$$0 = 1 - 5 + C \Longrightarrow C = 4$$

$$F(x) = x^2 + 5x + 4$$

8 **(a)** $V(t) = \int -9.8dt = -9.8t + C$

$$12 = -9.8(0) + C \Longrightarrow C = 12$$

فيكون: $V(t) = -9.8t + 12$

تصل الكرة إلى أعلى ارتفاع عند $V(t) = 0$

ومنه: $t \approx 1.22\,s$

(b) $s(t) = \int (-9.8t + 12)dt = -4.9t^2 + 12t + C$

ولكن: $s(0) = 80$

فيكون: $80 = -4.9(0)^2 + 12(0) + C$

$$C = 80$$

$$\therefore s(t) = -4.9t^2 + 12t + 80$$

تصل الكرة إلى الأرض عند $s(t) = 0$ أي:

$$-4.9t^2 + 12t + 80 = 0$$

$$t = \frac{-6 \pm \sqrt{428}}{-4.9} \Longrightarrow t \approx 5.45\,s$$

2—5: التكامل بالتعويض

1 الأهداف

• يتعرف قاعدة التكامل بالتعويض ويستخدمها.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

التكامل بالتعويض.

3 الأدوات والوسائل

حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عمّا يلي:

(a) أثبت أن $F(x) = (2x+1)^{\frac{3}{2}}$ هي مشتقة عكسية للدالة:
$f(x) = 3\sqrt{2x+1}$

(b) هل يوجد علاقة بين $F(x) = \frac{1}{6}(x^3-2)^3$
و $f(x) = \frac{3}{2}x^2(x^3-2)^2$ ؟
حدّد نوع العلاقة إن وجدت.

(c) أثبت أن $F(x) = (x^2-5x+3)^2$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = 2(2x-5)(x^2-5x+3)$ ، ثم أوجد:
$\int (4x-10)(x^2-5x+3)dx$ حيث $F(0) = 9$

5 التدريس

اعرض أمام الطلاب أمثلة متعددة على غرار فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» وذلك لتركيز فكرة الربط بين دالة ومشتقتها ثم اعرض قاعدة التكامل بالتعويض:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

وإذا كان: $u = g(x)$ ، $du = g'(x)dx$

فإن: $\int f(u)du = F(u) + C$

ومن ثم الانتقال إلى التكامل غير المحدد والربط في القاعدة: $\int (g(x))^n g'(x)dx$ ، حيث نحصل على الإجابة التالية:

$$\int (g(x))^n g'(x)dx = \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1} + C$$

أخبرهم أن هذه القاعدة تسهل عليهم عملية التكامل في حالات كثيرة وخاصة أن ذلك يعتمد على الخبرة والمهارة.

5–2

التكامل بالتعويض

Integration by Substitution

سوف تتعلم
• التكامل بالتعويض.

المفردات والمصطلحات:
• التكامل بالتعويض
Integration by substitution

دعنا نفكر ونتناقش

a أثبت أن: $F(x) = \frac{1}{5}(x^2+1)^5$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 2x(x^2+1)^4$

b استفد من a في إيجاد $\int 2x(x^2+1)^4 dx$

c ما العلاقة بين $2x$, x^2+1؟

d ضع $g(x) = x^2+1$ ثم أوجد $g'(x)$.

e اكتب التكامل في b وناتجه باستخدام الرموز في d.

f ماذا تلاحظ؟

في بعض الأحيان لا تمكننا القواعد الأساسية للتكامل غير المحدد من إيجاد تكامل دالة ما كما لاحظنا في فقرة «دعنا نفكر ونتناقش».

ولإيجاد هذا التكامل نتعامل مع متغير جديد. نستبدل المتغير x بالمتغير u بهدف استخدام القواعد الأساسية للتكامل غير المحدد.

فمثلًا لإيجاد: $\int 2x\sqrt{4+x^2}\,dx$

نرمز للمجذور بـ u أي $u = 4+x^2$ ثم نفاضل لنحصل على: $du = 2x\,dx$ وبالتالي نكتب:

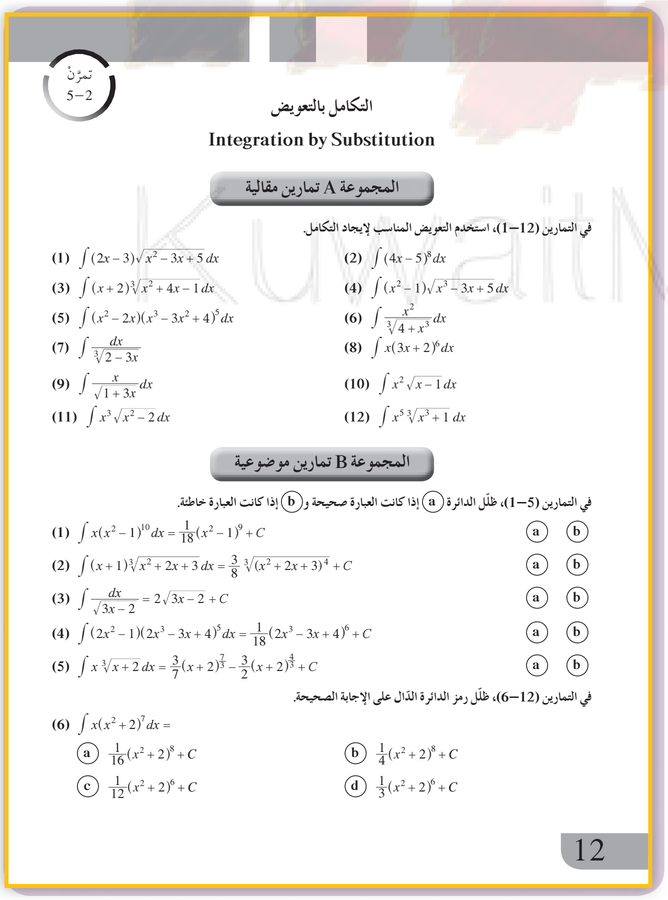
$$\int 2x\sqrt{4+x^2}\,dx = \int \sqrt{4+x^2}(2x\,dx) = \int \sqrt{u}\,du$$
$$= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{2}{3}(4+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{2}{3}(4+x^2)\sqrt{4+x^2} + C$$

معلومة:
إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق بدلالة المتغير x فإن التفاضل هو:
$\frac{df}{dx} = f'(x)$
$df = f'(x)dx$

قاعدة التكامل بالتعويض — Rule of Integration by Substitution

إذا كانت F هي مشتقة عكسية للدالة f فإن:
$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$
وإذا كان $u = g(x)$ ، $du = g'(x)dx$ فإن:
$\int f(u)du = F(u) + C$

20



تمرَّنْ 5–2

التكامل بالتعويض

Integration by Substitution

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1—12)، استخدم التعويض المناسب لإيجاد التكامل.

(1) $\int (2x-3)\sqrt{x^2-3x+5}\,dx$
(2) $\int (4x-5)^8 dx$
(3) $\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\,dx$
(4) $\int (x^2-1)\sqrt{x^3-3x+5}\,dx$
(5) $\int (x^2-2x)(x^3-3x^2+4)^5 dx$
(6) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{4+x^3}}dx$
(7) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}$
(8) $\int x(3x+2)^6 dx$
(9) $\int \frac{x}{\sqrt{1+3x}}dx$
(10) $\int x^2\sqrt{x-1}\,dx$
(11) $\int x^3\sqrt{x^2-2}\,dx$
(12) $\int x^5\sqrt[3]{x^3+1}\,dx$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—5)، ظلّل الدائرة a إذا كانت العبارة صحيحة و b إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int x(x^2-1)^{10}dx = \frac{1}{18}(x^2-1)^9 + C$ a b
(2) $\int (x+1)\sqrt[3]{x^2+2x+3}\,dx = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^4} + C$ a b
(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2}} = 2\sqrt{3x-2} + C$ a b
(4) $\int (2x^2-1)(2x^3-3x+4)^5 dx = \frac{1}{18}(2x^3-3x+4)^6 + C$ a b
(5) $\int x\sqrt[3]{x+2}\,dx = \frac{3}{7}(x+2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{2}(x+2)^{\frac{4}{3}} + C$ a b

في التمارين (6—12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\int x(x^2+2)^7 dx =$
a $\frac{1}{16}(x^2+2)^8 + C$
b $\frac{1}{4}(x^2+2)^8 + C$
c $\frac{1}{12}(x^2+2)^6 + C$
d $\frac{1}{3}(x^2+2)^6 + C$

12

في الأمثلة (3) ,(2) ,(1)

تطبيق مباشر على قاعدة التعويض حيث نلاحظ قيمة $(g(x))^n$ ومشتقة $g(x)$ وهي $g'(x)$ كما يمكن الاستفادة من كتابة $u = g(x)$ واستخدام التفاضل لنحصل على: $du = g'(x)dx$ علمًا أن $g'(x)$ هي مشتقة $g(x)$ كما يجب تنبيه الطلاب إلى إشارات أو قيم ثابتة قد تظهر أثناء استخدام التفاضل مثل:

$$F(x) = \int \frac{(\sqrt{x}+2)^3}{\sqrt{x}} dx$$

نأخذ:

$$u = \sqrt{x} + 2 \Longrightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

ولذا:

$$2du = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

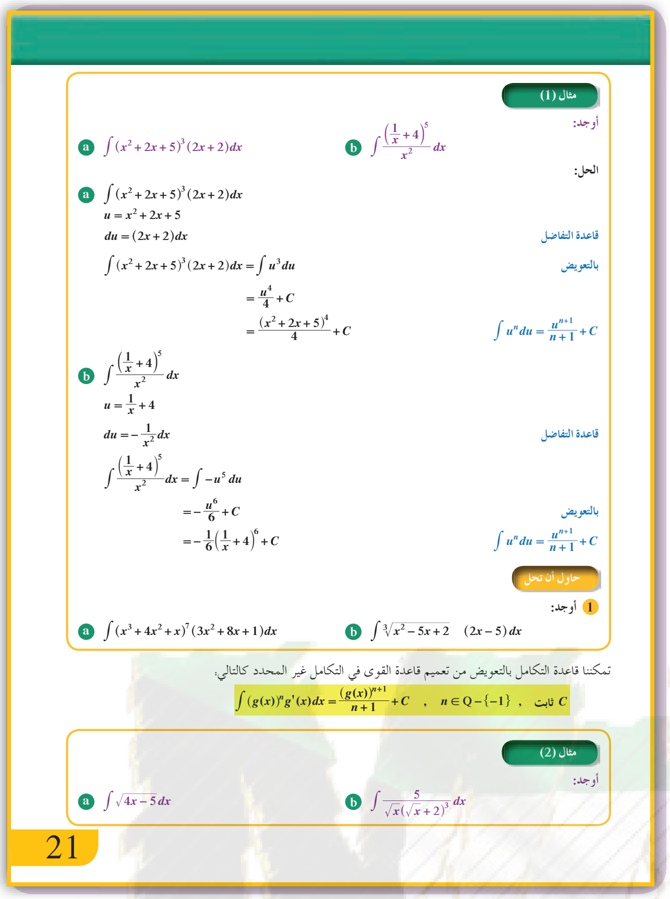
ويصبح:

$$F(x) = 2\int u^3 du = \frac{1}{2}(\sqrt{x}+2)^4 + C$$

ويمكن ملاحظة ذلك في معظم الأمثلة.

في المثال (4)

قد يجد الطلاب صعوبة في هذا المثال كون العلاقة بين دالة ومشتقتها غير ظاهرة مباشرة، ولكن أهميته تكمن في أنه يفتح أمام الطلاب أبوابًا واسعة للتعامل مع التكامل بالتعويض، إذ يوجد ربط بين x^2 و x^4 كما يوجد أيضًا ربط بين x^2 ومشتقتها $2x$.



مثال (1)

أوجد:

a $\int (x^2+2x+5)^3(2x+2)dx$ b $\int \frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^5}{x^2} dx$

الحل:

a $\int (x^2+2x+5)^3(2x+2)dx$

$u = x^2+2x+5$

قاعدة التفاضل $du = (2x+2)dx$

بالتعويض $\int (x^2+2x+5)^3(2x+2)dx = \int u^3 du$

$= \frac{u^4}{4} + C$

$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ $= \frac{(x^2+2x+5)^4}{4} + C$

b $\int \frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^5}{x^2} dx$

$u = \frac{1}{x} + 4$

قاعدة التفاضل $du = -\frac{1}{x^2}dx$

$\int \frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^5}{x^2} dx = \int -u^5 du$

بالتعويض $= -\frac{u^6}{6} + C$

$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ $= -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x}+4\right)^6 + C$

حاول أن تحل

1 أوجد:

a $\int (x^3+4x^2+x)^7(3x^2+8x+1)dx$ b $\int \sqrt[3]{x^2-5x+2}\quad(2x-5)dx$

تمكننا قاعدة التكامل بالتعويض من تعميم قاعدة القوى في التكامل غير المحدد كالتالي:

$\int (g(x))^n g'(x)dx = \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \in Q - \{-1\} \quad ,$ ثابت C

مثال (2)

أوجد:

a $\int \sqrt{4x-5}\, dx$ b $\int \frac{5}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^3} dx$

21

6 الربط «إثرائي»

يتدفق الماء في خزان بمعدل $\sqrt{3t+4}\ \text{cm}^3/\text{min}$. إذا افترضنا أن الخزان كان فارغًا عند $t = 0$، فما كمية الماء المتدفقة في الخزان بعد مرور 7 دقائق؟

بما أن معدل حجم الماء المتدفق في الخزان متغير بدلالة الزمن t لذا $\frac{dv}{dt} = \sqrt{3t+4}$ ومنه:

$$V(t) = \int \sqrt{3t+4}\,dt$$

$$u = 3t + 4$$

$$du = 3dt \Longrightarrow dt = \frac{1}{3}du$$

$$V(t) = \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{9}(3t+4)^{\frac{3}{2}} + C$$

ولكن بما أن الخزان كان فارغًا عند $t = 0$ فيكون $V(0) = 0$

$$0 = \frac{2}{9}(0+4)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$C = -\frac{16}{9}$$

أي أن: $V(t) = \frac{2}{9}(3t+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{16}{9}$

كمية الماء المتدفقة في الخزان بعد مرور 7 دقائق هي:

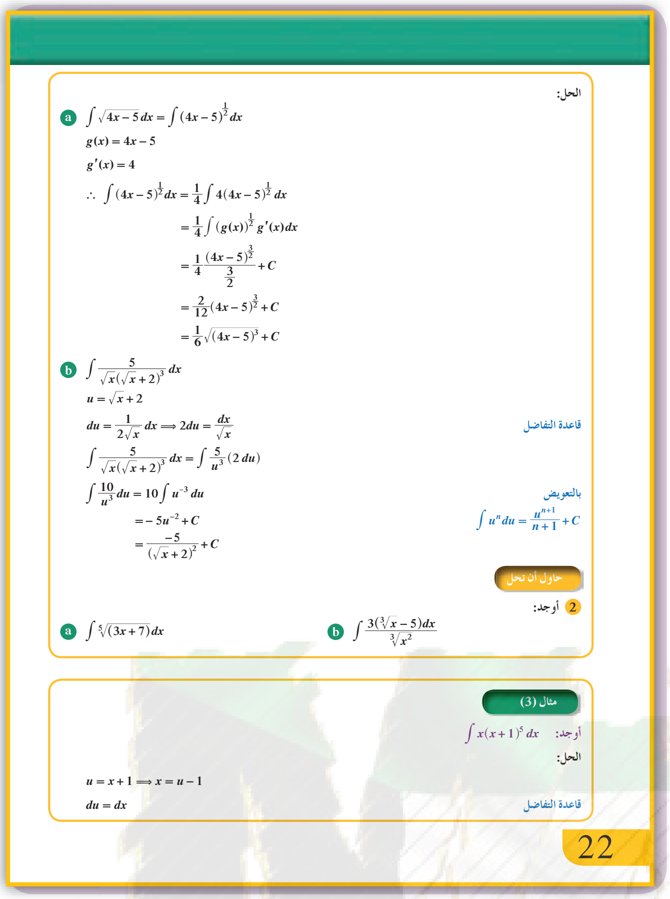
$$V(7) = \frac{2}{9}(21+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{16}{9} = \frac{234}{9} = 26\ \text{cm}^3$$

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في اختيار المتغير عند التعويض، ساعدهم في الربط بين المتغير الجديد لإيجاد التفاضل والوصول إلى إحدى قواعد التكامل.

8 التقييم

تابع الطلاب في عملهم مع فقرات «حاول أن تحل» لتلاحظ إمكانياتهم في اختيار التعويض المناسب للمتغير وإيجاد التكامل.


الحل:

ⓐ $\int \sqrt{4x-5}\,dx = \int (4x-5)^{\frac{1}{2}}dx$

$g(x) = 4x - 5$

$g'(x) = 4$

$\therefore\ \int (4x-5)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{4}\int 4(4x-5)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$= \frac{1}{4}\int (g(x))^{\frac{1}{2}} g'(x)dx$

$= \frac{1}{4}\frac{(4x-5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{2}{12}(4x-5)^{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{1}{6}\sqrt{(4x-5)^3} + C$

ⓑ $\int \frac{5}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^3}\,dx$

$u = \sqrt{x} + 2$

قاعدة التفاضل $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Longrightarrow 2du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$\int \frac{5}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^3}\,dx = \int \frac{5}{u^3}(2\,du)$

بالتعويض $\int \frac{10}{u^3}du = 10\int u^{-3}\,du$

$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ $= -5u^{-2} + C$

$= \frac{-5}{(\sqrt{x}+2)^2} + C$

حاول أن تحل

2 أوجد:

ⓐ $\int \sqrt[5]{(3x+7)}\,dx$ ⓑ $\int \frac{3(\sqrt[3]{x}-5)dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

مثال (3)

أوجد: $\int x(x+1)^5\,dx$

الحل:

$u = x + 1 \Longrightarrow x = u - 1$

قاعدة التفاضل $du = dx$

22

بالتعويض

$$\int x(x+1)^5dx = \int (u-1)u^5du = \int (u^6-u^5)du = \frac{u^7}{7}-\frac{u^6}{6}+C = \frac{(x+1)^7}{7}-\frac{(x+1)^6}{6}+C$$

$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C$

حاول أن تحل

3 أوجد: $\int x(2x-1)^3dx$

مثال (4)

أوجد: $\int x^5\sqrt{4-x^2}\,dx$

الحل:

$u=4-x^2 \Longrightarrow x^2=4-u$

قاعدة التفاضل

$du=-2x\,dx \Longrightarrow x\,dx=-\frac{1}{2}du$

$x^5=x^4\cdot x$

$$\int \sqrt{4-x^2}(x^4)(x\,dx) = \int \sqrt{4-x^2}(x^2)^2(x\,dx)$$

بالتعويض

$$= \int \sqrt{u}(4-u)^2\left(-\frac{1}{2}du\right)$$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$$= \int -\frac{1}{2}\sqrt{u}(16-8u+u^2)du$$
$$= \int \left(-8u^{\frac{1}{2}}+4u^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}u^{\frac{5}{2}}\right)du$$
$$= \frac{-8}{\frac{3}{2}}u^{\frac{3}{2}}+\frac{4u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}+C$$
$$= \frac{-16}{3}u^{\frac{3}{2}}+\frac{8}{5}u^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{7}u^{\frac{7}{2}}+C$$
$$= -\frac{16}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{8}{5}(4-x^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{7}(4-x^2)^{\frac{7}{2}}+C$$

حاول أن تحل

4 أوجد: $\int x^5\sqrt{3+x^2}\,dx$

23

اختبار سريع

1 استخدم التعويض لإيجاد كلّ مما يلي:

(a) $\int \sqrt{x}\left(x^{\frac{3}{2}}+4\right)^2dx$

$u=x^{\frac{3}{2}}+4 \Longrightarrow du=\frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx$

$\Longrightarrow \sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}du$

$\int \sqrt{x}\left(x^{\frac{3}{2}}+4\right)^2dx=\frac{2}{3}\int u^2du$

$=\frac{2}{9}\left(x^{\frac{3}{2}}+4\right)^3+C$

(b) $\int (6x-9)(x^2-3x-1)^{-4}dx$

$u=x^2-3x-1 \Longrightarrow du=(2x-3)dx$

$\Longrightarrow 3du=(6x-9)dx$

$\int (6x-9)(x^2-3x-1)^{-4}dx$

$=3\int u^{-4}du=-(x^2-3x-1)^{-3}+C$

(c) $\int x^2(x+1)^3dx$

$u=x+1 \Longrightarrow x=u-1$

$du=dx$

$\int x^2(x+1)^3dx=\int (u-1)^2u^3dx$

$=\frac{1}{6}(x+1)^6-\frac{2}{5}(x+1)^5+\frac{1}{4}(x+1)^4+C$

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a) $F'(x)=\frac{1}{5}(5)(2x)(x^2+1)^4$

$=2x(x^2+1)^4=f(x)$

(b) $\int 2x(x^2+1)^4dx=\int F'(x)dx=F(x)+C$

(c) $(x^2+1)'=2x$

(d) $g(x)=x^2+1 \Longrightarrow g'(x)=2x$

(e) $\int 2x(x^2+1)^4dx=\int (g(x))^4g'(x)dx$

$=\frac{1}{5}(x^2+1)^5+C=F(x)+C$

(f) إذا كانت الدالة المكاملة هي عبارة عن: دالتين مضروبتين ببعضهما بعضًا وكانت إحدى هاتين الدالتين هي مشتقة للثانية فيمكن الاستفادة من هذه العلاقة واستخدام متغير يربط بين الدالة ومشتقتها.

«حاول أن تحل»

1 **(a)** $u = x^3 + 4x^2 + x$

$du = (3x^2 + 8x + 1)dx$

$\int (x^3 + 4x^2 + x)^7 (3x^2 + 8x + 1)dx$

$= \int u^7 du = \frac{1}{8}(x^3 + 4x^2 + x)^8 + C$

(b) $u = x^2 - 5x + 2 \Longrightarrow du = (2x - 5)dx$

$\int (x^2 - 5x + 2)^{\frac{1}{3}} (2x - 5)dx$

$= \int u^{\frac{1}{3}} du = \frac{3}{4}(x^2 - 5x + 2)^{\frac{4}{3}} + C$

2 **(a)** $u = 3x + 7 \Longrightarrow du = 3dx$

$\int (3x + 7)^{\frac{1}{5}} dx = \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{5}} du$

$= \frac{5}{18}(3x + 7)^{\frac{6}{5}} + C$

(b) $u = x^{\frac{1}{3}} - 5 \Longrightarrow du = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$

$\Longrightarrow 3du = \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

$\int \frac{3(\sqrt[3]{x} - 5)}{\sqrt[3]{x^2}}dx = 9\int u\, du = \frac{9}{2}(\sqrt[3]{x} - 5)^2 + C$

3 $u = 2x - 1 \Longrightarrow du = 2dx$

$x = \frac{u + 1}{2}$

$\frac{1}{4}\int (u + 1)u^3 du = \frac{1}{4}\int (u^4 + u^3)du$

$= \frac{1}{20}(2x - 1)^5 + \frac{1}{16}(2x - 1)^4 + C$

4 $u = x^2 + 3 \Longrightarrow du = 2x\, dx$

$x^2 = u - 3$

$\int x^4 \cdot x\sqrt{x^2 + 3}\, dx = \frac{1}{2}\int (u - 3)^2 (u^{\frac{1}{2}})du$

$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{5}{2}} du - 3\int u^{\frac{3}{2}} du + \frac{9}{2}\int u^{\frac{1}{2}} du$

$= \frac{1}{7}(x^2 + 3)^{\frac{7}{2}} - \frac{6}{5}(x^2 + 3)^{\frac{5}{2}} + 3(x^2 + 3)^{\frac{3}{2}} + C$

(7) $\int \frac{x - 1}{\sqrt{x - 1}} dx =$

(a) $\frac{1}{3}(x - 1)^{\frac{2}{3}} + C$ (b) $\frac{2}{3}(x - 1)^{\frac{3}{2}} + C$

(c) $\frac{2}{3}(x - 1)^{\frac{2}{3}} + C$ (d) $\frac{3}{2}(x - 1)^{\frac{2}{3}} + C$

(8) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x + 1}} =$

(a) $\frac{2}{9}(3x + 1)^{\frac{2}{3}} + C$ (b) $\frac{2}{3}(3x + 1)^{\frac{2}{3}} + C$

(c) $2(3x + 1)^{\frac{2}{3}} + C$ (d) $\frac{1}{2}(3x + 1)^{\frac{2}{3}} + C$

(9) $\int \frac{(2 + \sqrt{x})^{12}}{\sqrt{x}} dx =$

(a) $\frac{13}{2}(2 + \sqrt{x})^{13} + C$ (b) $\frac{2}{13}(2 + \sqrt{x})^{13} + C$

(c) $\frac{1}{26}(2 + \sqrt{x})^{13} + C$ (d) $\frac{1}{22}(2 + \sqrt{x})^{11} + C$

(10) $\int \frac{(x + 1)}{\sqrt[3]{x^2 + 2x + 3}} dx =$

(a) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2 + 2x + 3)^2} + C$ (b) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x^2 + 2x + 3)^2} + C$

(c) $3\sqrt[3]{(x^2 + 2x + 3)^2} + C$ (d) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2 + 2x + 3} + C$

(11) $\int \frac{x}{\sqrt{x + 1}} dx =$

(a) $\frac{3}{2}\sqrt{(x + 1)^3} - 2\sqrt{x + 1} + C$ (b) $\frac{2}{3}\sqrt{(x + 1)^3} - \frac{1}{2}\sqrt{x + 1} + C$

(c) $\frac{2}{3}\sqrt{(x + 1)^3} - 2\sqrt{x + 1} + C$ (d) $\frac{2}{3}\sqrt{(x + 1)^3} + 2\sqrt{x + 1} + C$

(12) إذا كانت: $F(x) = \int (x + 1)(2x^2 + 4x - 1)dx$ ، $F(-2) = \frac{9}{8}$، فإن: $F(x)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{8}(2x^2 + 4x - 1)^2 + \frac{5}{4}$ (b) $\frac{1}{8}(2x^2 + 4x - 1)^2 + 1$

(c) $\frac{1}{4}(2x^2 + 4x - 1)^2 + 1$ (d) $4(2x^2 + 4x - 1)^2 - 1$

13

3–5: تكامل الدوال المثلثية

1 الأهداف

- يتعرف قواعد المكاملة المثلثية ويستخدمها.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

قواعد المكاملة المثلثية.

3 الأدوات والوسائل

حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

4 التمهيد

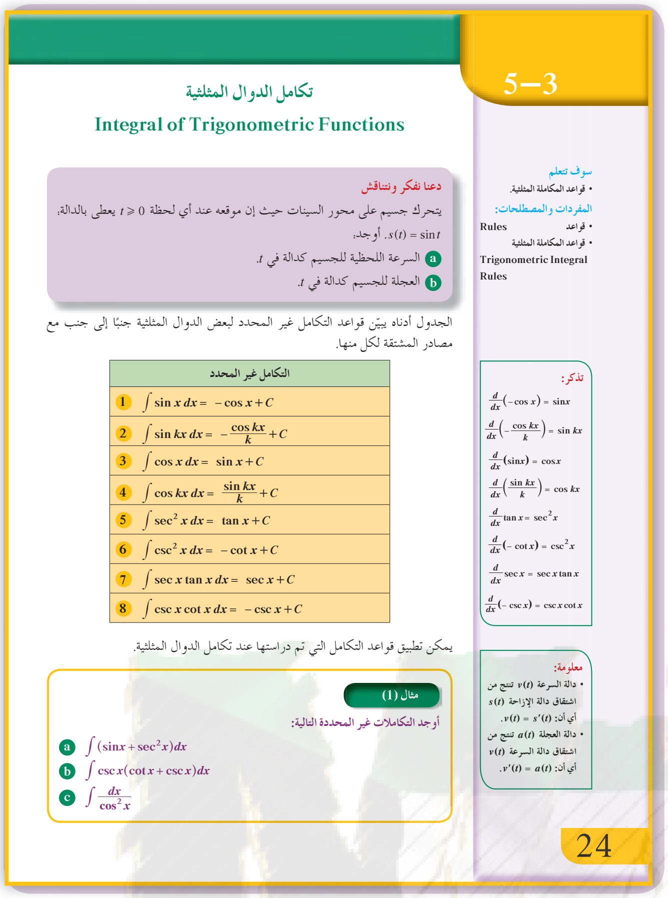
اطلب إلى الطلاب الإجابة عمّا يلي:

(1) أوجد مشتقة كل دالة ممّا يلي:

(a) $f(x) = \sin 5x$ **(b)** $g(x) = \cos(-3x)$

5 التدريس

لإيجاد التكامل غير المحدد يجب التأكد من أن الطلاب قد تمكنوا من الربط بين كل دالة مثلثية ومشتقتها، كونه لا يوجد قاعدة واحدة تربط الدوال المثلثية بعضها لذا من المهم تذكر الاشتقاق لهذه الدوال، ثم الانتقال إلى جدول التكامل غير المحدد الموجود في كتاب الطالب ص (24).



5–3

تكامل الدوال المثلثية

Integral of Trigonometric Functions

سوف تتعلم
- قواعد المكاملة المثلثية.

المفردات والمصطلحات:
- قواعد Rules
- قواعد المكاملة المثلثية Trigonometric Integral Rules

دعنا نفكر ونتناقش

يتحرك جسيم على محور السينات حيث إن موقعه عند أي لحظة $t \geqslant 0$ يعطى بالدالة: $s(t) = \sin t$. أوجد:

a السرعة اللحظية للجسيم كدالة في t.

b العجلة للجسيم كدالة في t.

الجدول أدناه يبيّن قواعد التكامل غير المحدد لبعض الدوال المثلثية جنبًا إلى جنب مع مصادر المشتقة لكل منها.

التكامل غير المحدد
1 $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
2 $\int \sin kx\, dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$
3 $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
4 $\int \cos kx\, dx = \frac{\sin kx}{k} + C$
5 $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$
6 $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$
7 $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$
8 $\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$

تذكر:

$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$

$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos kx}{k}\right) = \sin kx$

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin kx}{k}\right) = \cos kx$

$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

$\frac{d}{dx}(-\cot x) = \csc^2 x$

$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

$\frac{d}{dx}(-\csc x) = \csc x \cot x$

يمكن تطبيق قواعد التكامل التي تم دراستها عند تكامل الدوال المثلثية.

معلومة:
- دالة السرعة $v(t)$ تنتج من اشتقاق دالة الإزاحة $s(t)$ أي أن: $v(t) = s'(t)$.
- دالة العجلة $a(t)$ تنتج من اشتقاق دالة السرعة $v(t)$ أي أن: $v'(t) = a(t)$.

مثال (1)

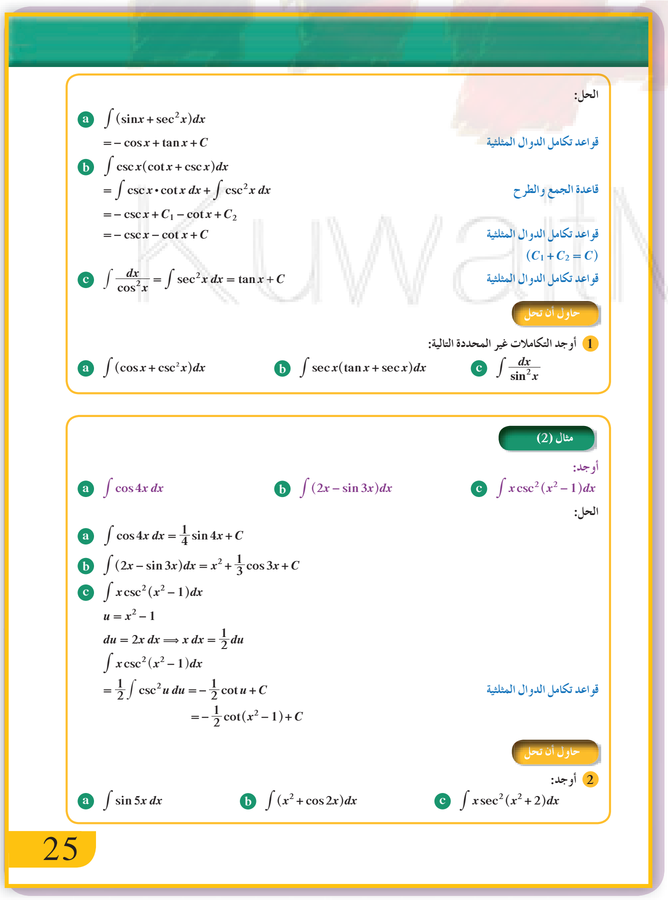
أوجد التكاملات غير المحددة التالية:

a $\int (\sin x + \sec^2 x)dx$

b $\int \csc x(\cot x + \csc x)dx$

c $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$

24



الحل:

a $\int (\sin x + \sec^2 x)dx$

$= -\cos x + \tan x + C$ — قواعد تكامل الدوال المثلثية

b $\int \csc x(\cot x + \csc x)dx$

$= \int \csc x \cdot \cot x\, dx + \int \csc^2 x\, dx$ — قاعدة الجمع والطرح

$= -\csc x + C_1 - \cot x + C_2$

$= -\csc x - \cot x + C$ — قواعد تكامل الدوال المثلثية $(C_1 + C_2 = C)$

c $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$ — قواعد تكامل الدوال المثلثية

حاول أن تحل

1 أوجد التكاملات غير المحددة التالية:

a $\int (\cos x + \csc^2 x)dx$ b $\int \sec x(\tan x + \sec x)dx$ c $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$

مثال (2)

أوجد:

a $\int \cos 4x\, dx$ b $\int (2x - \sin 3x)dx$ c $\int x\csc^2(x^2 - 1)dx$

الحل:

a $\int \cos 4x\, dx = \frac{1}{4}\sin 4x + C$

b $\int (2x - \sin 3x)dx = x^2 + \frac{1}{3}\cos 3x + C$

c $\int x\csc^2(x^2 - 1)dx$

$u = x^2 - 1$

$du = 2x\, dx \Longrightarrow x\, dx = \frac{1}{2}du$

$\int x\csc^2(x^2 - 1)dx$

$= \frac{1}{2}\int \csc^2 u\, du = -\frac{1}{2}\cot u + C$ — قواعد تكامل الدوال المثلثية

$= -\frac{1}{2}\cot(x^2 - 1) + C$

حاول أن تحل

2 أوجد:

a $\int \sin 5x\, dx$ b $\int (x^2 + \cos 2x)dx$ c $\int x\sec^2(x^2 + 2)dx$

25

في المثالين (1), (2)

الحلول في هذه الأمثلة تستند مباشرة على الجدول في ص (24) واستخدام قاعدة التعويض عند الحاجة.

في الأمثلة (5) ,(4) ,(3)

نستخدم فيها التكامل بالتعويض لنصل بعد ذلك إلى أحد التكاملات الموجودة في الجدول من كتاب الطالب ص (24). من المهم جدًّا تنبيه الطلاب إلى الربط بين الدوال المثلثية ومشتقاتها عند استخدام التكامل بالتعويض.

6 الربط

لا يوجد.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب بين اشتقاق الدوال المثلثية وتكاملها.
ساعد الطلاب بعدة أمثلة في التغلب على مثل هذه الأخطاء. اعرض على سبيل الإيضاح ما يلي:

(a) $(\cos x)' = -\sin x$

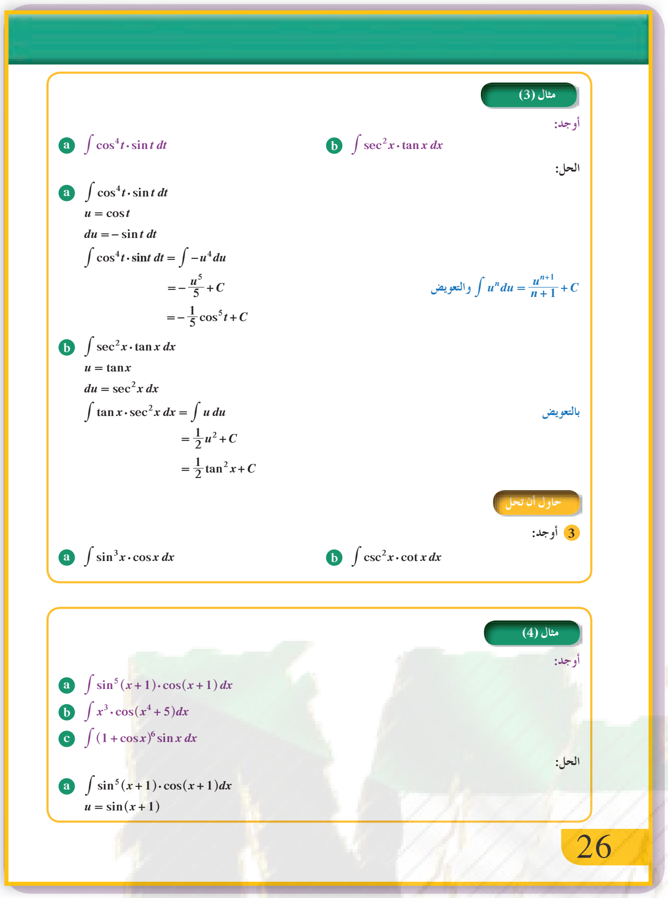
$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

(b) $(\sin x)' = \cos x$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

8 التقييم

تابع عمل الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتلاحظ كيفية تفاعلهم مع تكامل الدوال المثلثية وكيفية استخدام التكامل بالتعويض.



مثال (3)

أوجد:

a $\int \cos^4 t \cdot \sin t\, dt$ b $\int \sec^2 x \cdot \tan x\, dx$

الحل:

a $\int \cos^4 t \cdot \sin t\, dt$

$u = \cos t$

$du = -\sin t\, dt$

$\int \cos^4 t \cdot \sin t\, dt = \int -u^4 du$

$= -\frac{u^5}{5} + C$ والتعويض $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

$= -\frac{1}{5}\cos^5 t + C$

b $\int \sec^2 x \cdot \tan x\, dx$

$u = \tan x$

$du = \sec^2 x\, dx$

$\int \tan x \cdot \sec^2 x\, dx = \int u\, du$ بالتعويض

$= \frac{1}{2}u^2 + C$

$= \frac{1}{2}\tan^2 x + C$

حاول أن تحل

3 أوجد:

a $\int \sin^3 x \cdot \cos x\, dx$ b $\int \csc^2 x \cdot \cot x\, dx$

مثال (4)

أوجد:

a $\int \sin^5(x+1) \cdot \cos(x+1)\, dx$

b $\int x^3 \cdot \cos(x^4+5) dx$

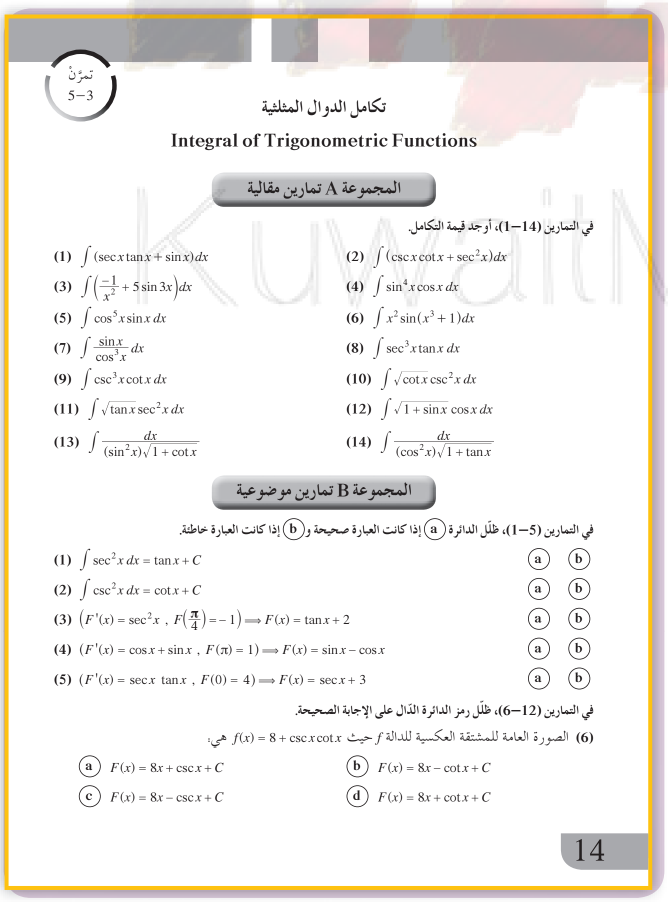
c $\int (1+\cos x)^6 \sin x\, dx$

الحل:

a $\int \sin^5(x+1) \cdot \cos(x+1) dx$

$u = \sin(x+1)$

26



تمرَّنْ 3–5

تكامل الدوال المثلثية

Integral of Trigonometric Functions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (14–1)، أوجد قيمة التكامل.

(1) $\int (\sec x \tan x + \sin x) dx$ (2) $\int (\csc x \cot x + \sec^2 x) dx$

(3) $\int \left(\frac{-1}{x^2} + 5\sin 3x\right) dx$ (4) $\int \sin^4 x \cos x\, dx$

(5) $\int \cos^5 x \sin x\, dx$ (6) $\int x^2 \sin(x^3+1) dx$

(7) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$ (8) $\int \sec^3 x \tan x\, dx$

(9) $\int \csc^3 x \cot x\, dx$ (10) $\int \sqrt{\cot x} \csc^2 x\, dx$

(11) $\int \sqrt{\tan x} \sec^2 x\, dx$ (12) $\int \sqrt{1+\sin x} \cos x\, dx$

(13) $\int \frac{dx}{(\sin^2 x)\sqrt{1+\cot x}}$ (14) $\int \frac{dx}{(\cos^2 x)\sqrt{1+\tan x}}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$ (a) (b)

(2) $\int \csc^2 x\, dx = \cot x + C$ (a) (b)

(3) $\left(F'(x) = \sec^2 x\ ,\ F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1\right) \Longrightarrow F(x) = \tan x + 2$ (a) (b)

(4) $(F'(x) = \cos x + \sin x\ ,\ F(\pi) = 1) \Longrightarrow F(x) = \sin x - \cos x$ (a) (b)

(5) $(F'(x) = \sec x\ \tan x\ ,\ F(0) = 4) \Longrightarrow F(x) = \sec x + 3$ (a) (b)

في التمارين (12–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) الصورة العامة للمشتقة العكسية للدالة f حيث $f(x) = 8 + \csc x \cot x$ هي:

(a) $F(x) = 8x + \csc x + C$ (b) $F(x) = 8x - \cot x + C$

(c) $F(x) = 8x - \csc x + C$ (d) $F(x) = 8x + \cot x + C$

14

اختبار سريع

1 أوجد:

(a) $\int \sin\left(\frac{5}{2}x\right)dx$

$= -\frac{2}{5}\cos\left(\frac{5}{2}x\right) + C$

(b) $\int \cos(5-3x)dx$

$u = 5-3x \Longrightarrow du = -3dx$

$-\frac{1}{3}\int \cos u\, du = -\frac{1}{3}\sin(5-3x) + C$

(c) $\int x\sin(2-x^2)dx$

$u = 2-x^2 \Longrightarrow du = -2x\,dx$

$-\frac{1}{2}\int \sin u\, du = \frac{1}{2}\cos(2-x^2) + C$

(d) $\int \sin^5(3x)\cos(3x)dx$

$u = \sin(3x) \Longrightarrow du = 3\cos(3x)dx$

$\frac{1}{3}\int u^5 du = \frac{1}{18}\sin^6(3x) + C$

(e) $\int \csc^2(3x)dx$

$u = 3x \Longrightarrow du = 3\,dx$

$\frac{1}{3}\int \csc^2 u\, du = -\frac{1}{3}\cot(3x) + C$

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a) $V(t) = s'(t) = (\sin t)' = \cos t$

(b) $a(t) = V'(t) = (\cos t)' = -\sin t$

«حاول أن تحل»

1 (a) $\sin x - \cot x + C$

(b) $\sec x + \tan x + C$

(c) $-\cot x + C$

$du = \cos(x+1)dx$ — قاعدة التفاضل

$\int \sin^5(x+1)\cdot\cos(x+1)\,dx$

$= \int u^5 du = \frac{1}{6}u^6 + C$ — بالتعويض

$= \frac{1}{6}\sin^6(x+1) + C$

b $\int x^3\cdot\cos(x^4+5)dx$

$u = x^4 + 5$

$du = 4x^3dx \Longrightarrow x^3dx = \frac{1}{4}du$ — قاعدة التفاضل

$\int \cos(x^4+5)\cdot x^3dx = \frac{1}{4}\int \cos u\, du$ — بالتعويض

$= \frac{1}{4}\sin u + C$

$= \frac{1}{4}\sin(x^4+5) + C$

c $\int (1+\cos x)^6 \sin x\, dx$

$g(x) = 1+\cos x \quad , \quad g'(x) = -\sin x$

$\int (1+\cos x)^6\sin x\,dx = -\int (g(x))^6 g'(x)dx$ — قاعدة التفاضل

$= -\frac{(g(x))^7}{7} + C$

$= \frac{-1}{7}(1+\cos x)^7 + C$

حاول أن تحل

4 أوجد:

a $\int \cos^3(2x-3)\cdot\sin(2x-3)dx$

b $\int x^2\cdot\sin(x^3-1)dx$

c $\int (3+\sin 2x)^5 \cos 2x\, dx$

مثال (5)

أوجد: $\int \sec^4 x \tan x\, dx$

الحل:

$u = \sec x$

$du = \sec x \tan x\, dx$

27

---

(7) $\int \csc(5x)\cot(5x)dx =$

(a) $\frac{1}{5}\csc(5x) + C$	(b) $\csc(5x) + C$
(c) $\frac{1}{5}\cot(5x) + C$	(d) $-\frac{1}{5}\csc(5x) + C$

(8) $\int \sqrt[3]{\cot x}\csc^2 x\, dx =$

(a) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\cot x)^4} + C$	(b) $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\cot x)^4} + C$
(c) $-\frac{3}{4}\sqrt[4]{(\cot x)^3} + C$	(d) $3\sqrt[3]{(\cot x)^4} + C$

(9) إذاكانت $y_{\theta=0} = -3 \quad , \quad \frac{dy}{d\theta} = \sin\theta$ فإنّ y تساوي:

(a) $-\cos\theta$	(b) $2-\cos\theta$
(c) $-2-\cos\theta$	(d) $4-\cos\theta$

(10) $\int \sec^5 x\tan x\, dx =$

(a) $\frac{5}{3}\sec^5 x + C$	(b) $\frac{1}{5}\sec^6 x + C$
(c) $\frac{1}{5}\sec^5 x + C$	(d) $-\frac{5}{3}\sec^5 x + C$

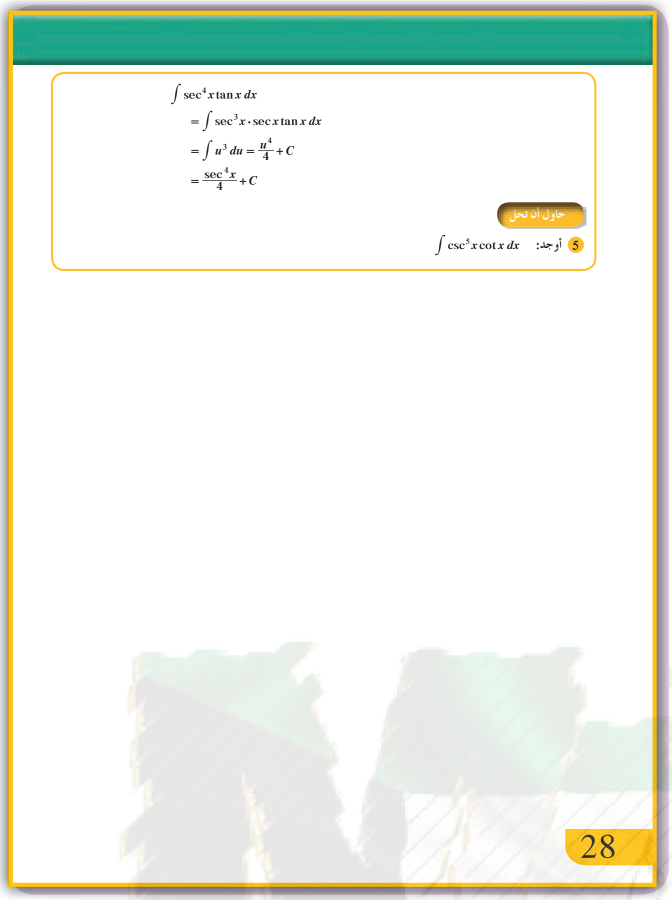
(11) $\int \frac{\csc^2 x}{\sqrt[3]{2+\cot x}}dx =$

(a) $\frac{3}{2}(2+\cot x)^{\frac{2}{3}} + C$	(b) $-\frac{3}{2}(2+\cot x)^{\frac{2}{3}} + C$
(c) $-2\sqrt{2+\cot x} + C$	(d) $\frac{4}{3}(2+\cot x)^{\frac{4}{3}} + C$

(12) $\int \frac{\sin(4x)}{\cos^5(4x)}dx =$

(a) $-\frac{1}{16}\cos^{-4}(4x) + C$	(b) $\frac{1}{16}\cos^{-4}(4x) + C$
(c) $-\cos^{-4}(4x) + C$	(d) $\cos^{-4}(4x) + C$

15



$$\int \sec^4 x \tan x \, dx$$
$$= \int \sec^3 x \cdot \sec x \tan x \, dx$$
$$= \int u^3 \, du = \frac{u^4}{4} + C$$
$$= \frac{\sec^4 x}{4} + C$$

حاول أن تحل

5 أوجد: $\int \csc^5 x \cot x \, dx$

28

2 (a) $-\frac{1}{5}\cos 5x + C$

(b) $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\sin 2x + C$

(c) $u = x^2 + 2 \Longrightarrow du = 2x \, dx$

$$\frac{1}{2}\int \sec^2 u \, du = \frac{1}{2}\tan(x^2 + 2) + C$$

3 (a) $u = \sin x \Longrightarrow du = \cos x \, dx$

$$\int u^3 \, du = \frac{1}{4}\sin^4 x + C$$

(b) $u = \cot x \Longrightarrow du = -\csc^2 x \, dx$

$$-\int u \, du = -\frac{1}{2}\cot^2 x + C$$

4 (a) $u = \cos(2x - 3) \Longrightarrow du = -2\sin(2x - 3)dx$

$$-\frac{1}{2}\int u^3 du = -\frac{1}{8}\cos^4(2x - 3) + C$$

(b) $u = x^3 - 1 \Longrightarrow du = 3x^2 \, dx$

$$\frac{1}{3}\int \sin u \, du = -\frac{1}{3}\cos(x^3 - 1) + C$$

(c) $u = 3 + \sin 2x \Longrightarrow du = 2\cos 2x \, dx$

$$\frac{1}{2}\int u^5 \, du = \frac{1}{12}(3 + \sin 2x)^6 + C$$

5 (a) $u = \csc x \Longrightarrow du = -\csc x \cot x \, dx$

$$\int \csc^4 x(\csc x \cot x)dx = -\int u^4 du$$
$$= -\frac{1}{5}\csc^5 x + C$$

4–5: الدوال الأسية واللوغاريتمية

1 الأهداف

- يوجد مشتقة الدالة الأسية.
- يوجد مشتقة الدالة اللوغاريتمية.
- يوجد تكامل الدالة الأسية.
- يوجد تكامل الدالة اللوغاريتمية.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

دالة أسية – دالة لوغاريتمية.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن السؤال التالي:

(1) أوجد مشتقة الدالة f باستخدام تعريف المشتقة حيث: $f(x) = x^2 - 1$.

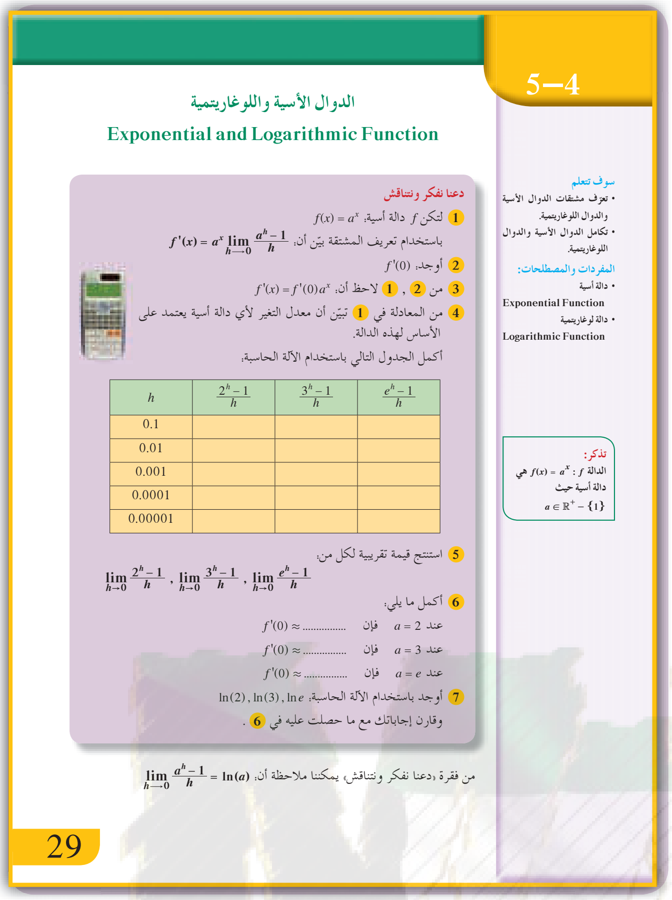
5 التدريس

ذكّر الطلاب بمشتقة الدالة: $f(x) = x^n$ مع التركيز على أن الأساس هو المتغير x والأس هو عدد ثابت حقيقي n، ثم اعرض أمامهم القاعدتين (1)، (2) ليجدوا الفرق بين مشتقة $f(x) = x^n$ ومشتقة $f(x) = a^x$ وأيضًا مشتقة $f(x) = e^x$ كما أنهم سوف يتفهموا الفرق بين مشتقة $f(x) = u^n$ ومشتقة $f(x) = a^u$ وأيضًا مشتقة $f(x) = e^u$ حيث u دالة في x قابلة للاشتقاق.

في المثالين (1) , (2)

يساعدان الطلاب في تطبيق القاعدتين (1)، (2) لجهة إيجاد مشتقات دوال أسية حيث الأساس عدد ثابت والأس دالة في x قابلة للاشتقاق.

ألفت انتباه الطلاب إلى القاعدة (3) وذلك لفهم مشتقة دالة لوغاريتم طبيعي.



5–4

الدوال الأسية واللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Function

سوف تتعلم

- تعرّف مشتقات الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية.
- تكامل الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية.

المفردات والمصطلحات:

- دالة أسية Exponential Function
- دالة لوغاريتمية Logarithmic Function

تذكر: الدالة $f : f(x) = a^x$ هي دالة أسية حيث $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

دعنا نفكر ونتناقش

1 لتكن f دالة أسية: $f(x) = a^x$

باستخدام تعريف المشتقة بيّن أن: $f'(x) = a^x \lim\limits_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$

2 أوجد: $f'(0)$

3 من 2 , 1 لاحظ أن: $f'(x) = f'(0)a^x$

4 من المعادلة في 1 تبيّن أن معدل التغير لأي دالة أسية يعتمد على الأساس لهذه الدالة.

أكمل الجدول التالي باستخدام الآلة الحاسبة:

h	$\frac{2^h - 1}{h}$	$\frac{3^h - 1}{h}$	$\frac{e^h - 1}{h}$
0.1			
0.01			
0.001			
0.0001			
0.00001			

5 استنتج قيمة تقريبية لكل من:

$$\lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h} , \lim_{h \to 0} \frac{3^h - 1}{h} , \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

6 أكمل ما يلي:

عند $a = 2$ فإن $f'(0) \approx$ ....

عند $a = 3$ فإن $f'(0) \approx$ ....

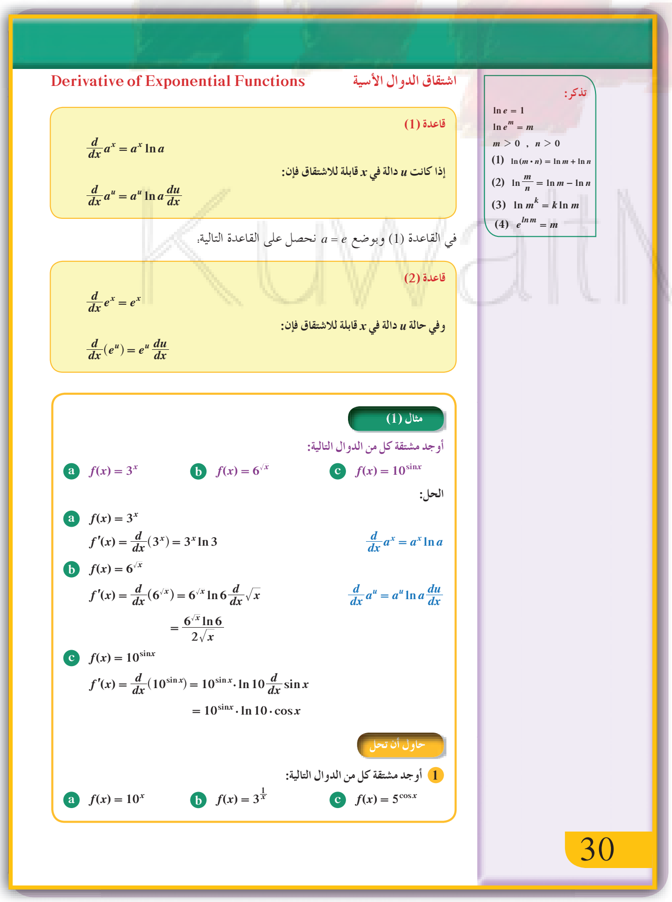
عند $a = e$ فإن $f'(0) \approx$ ....

7 أوجد باستخدام الآلة الحاسبة: $\ln(2), \ln(3), \ln e$

وقارن إجاباتك مع ما حصلت عليه في 6 .

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» يمكننا ملاحظة أن: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln(a)$

29



اشتقاق الدوال الأسية Derivative of Exponential Functions

تذكر:

$\ln e = 1$

$\ln e^m = m$

$m > 0 \ , \ n > 0$

(1) $\ln(m \cdot n) = \ln m + \ln n$

(2) $\ln \frac{m}{n} = \ln m - \ln n$

(3) $\ln m^k = k \ln m$

(4) $e^{\ln m} = m$

قاعدة (1)

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$$

إذا كانت u دالة في x قابلة للاشتقاق فإن:

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

في القاعدة (1) وبوضع $a = e$ نحصل على القاعدة التالية:

قاعدة (2)

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

وفي حالة u دالة في x قابلة للاشتقاق فإن:

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

مثال (1)

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a $f(x) = 3^x$ b $f(x) = 6^{\sqrt{x}}$ c $f(x) = 10^{\sin x}$

الحل:

a $f(x) = 3^x$

$f'(x) = \frac{d}{dx}(3^x) = 3^x \ln 3$ $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$

b $f(x) = 6^{\sqrt{x}}$

$f'(x) = \frac{d}{dx}(6^{\sqrt{x}}) = 6^{\sqrt{x}} \ln 6 \frac{d}{dx}\sqrt{x}$ $\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$

$= \frac{6^{\sqrt{x}} \ln 6}{2\sqrt{x}}$

c $f(x) = 10^{\sin x}$

$f'(x) = \frac{d}{dx}(10^{\sin x}) = 10^{\sin x} \cdot \ln 10 \frac{d}{dx} \sin x$

$= 10^{\sin x} \cdot \ln 10 \cdot \cos x$

حاول أن تحل

1 أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a $f(x) = 10^x$ b $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ c $f(x) = 5^{\cos x}$

30

في المثال (3)

يعرض أمام الطلاب أنواعًا مختلفة لدوال لوغاريتمية طبيعية تتضمن متغيرات في x قابلة للاشتقاق وبالتالي يمكن تطبيق القاعدة (3).

في المثال التوضيحي

تكمن أهمية هذا المثال كونه يوفّر للطلاب فرصة في فهم كيفية إيجاد مشتقة: $f(x) = \ln|x|$ وهي: $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ في الحالتين $x > 0$ أو $x < 0$ وبالتالي القاعدة (4) وما ينتج عنها لجهة التكامل غير المحدد. ساعد الطلاب على فهم جدول التكامل غير المحدد للدوال الأسية واللوغاريتمية في كتاب الطالب ص (33).

في المثالين (5), (4)

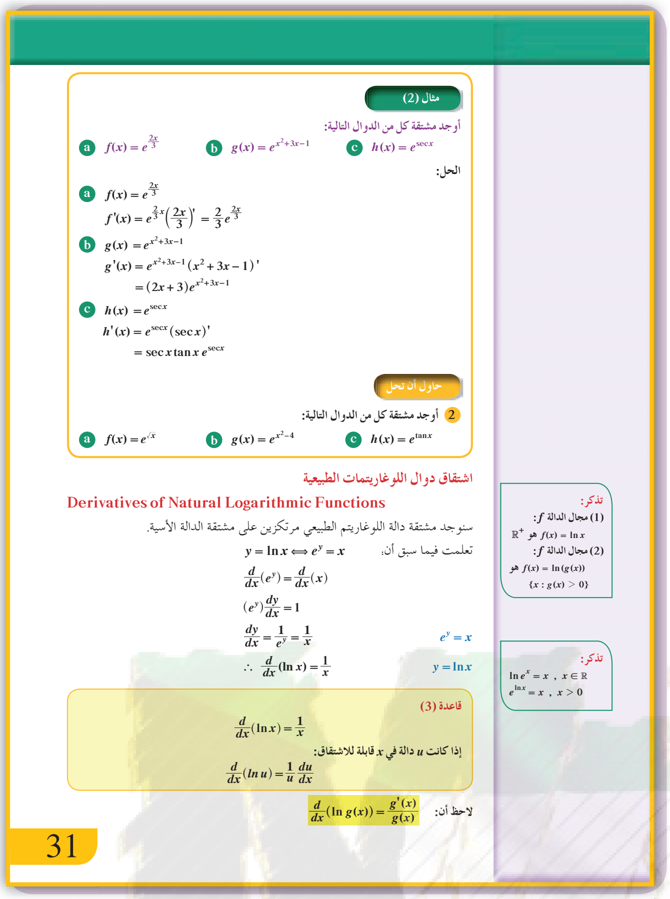
تطبيق مباشر على جدول التكامل غير المحدد للدوال الأسية واللوغاريتمية مع استخدام قاعدة التفاضل والتعويض عند الضرورة.

في المثال (6)

نستخدم التعويض في هذا المثال لإيجاد ربط بين البسط والمقام في الدالة $f(x) = \tan x$، ومن ثم استنتاج أن التكامل غير المحدد للدالة المثلثية $\tan x$ هو لوغاريتم طبيعي.

6 الربط

لا يوجد.



مثال (2)

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a $f(x) = e^{\frac{2x}{3}}$ b $g(x) = e^{x^2+3x-1}$ c $h(x) = e^{\sec x}$

الحل:

a $f(x) = e^{\frac{2x}{3}}$, $f'(x) = e^{\frac{2x}{3}}\left(\frac{2x}{3}\right)' = \frac{2}{3}e^{\frac{2x}{3}}$

b $g(x) = e^{x^2+3x-1}$, $g'(x) = e^{x^2+3x-1}(x^2+3x-1)' = (2x+3)e^{x^2+3x-1}$

c $h(x) = e^{\sec x}$, $h'(x) = e^{\sec x}(\sec x)' = \sec x \tan x\, e^{\sec x}$

حاول أن تحل

2 أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ b $g(x) = e^{x^2-4}$ c $h(x) = e^{\tan x}$

اشتقاق دوال اللوغاريتمات الطبيعية

Derivatives of Natural Logarithmic Functions

سنوجد مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي مرتكزين على مشتقة الدالة الأسية.

تعلمت فيما سبق أن: $y = \ln x \Longleftrightarrow e^y = x$

$\frac{d}{dx}(e^y) = \frac{d}{dx}(x)$

$(e^y)\frac{dy}{dx} = 1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$ ($e^y = x$)

$\therefore \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$ ($y = \ln x$)

قاعدة (3)

$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

إذا كانت u دالة في x قابلة للاشتقاق:

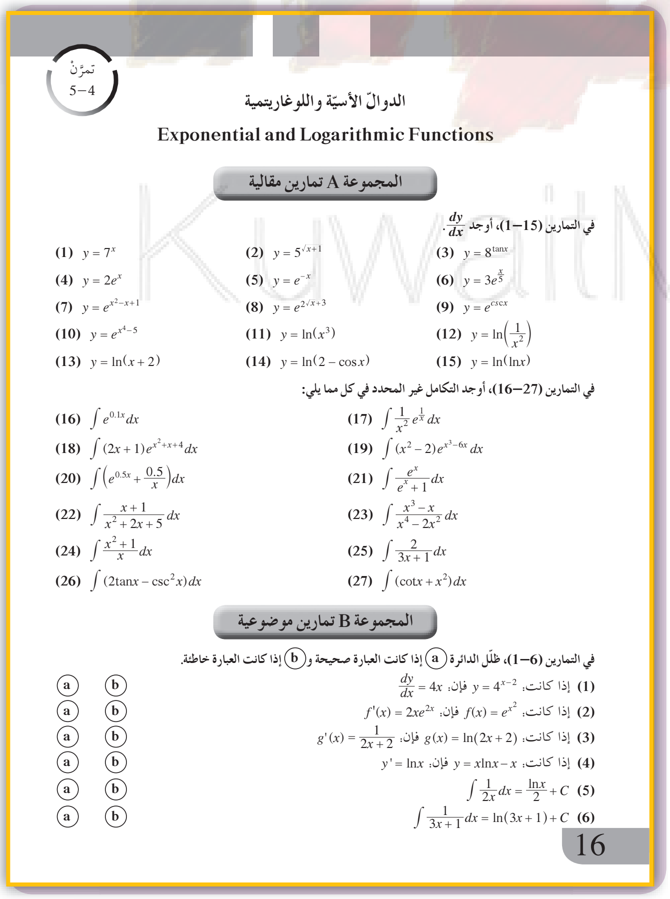
$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

لاحظ أن: $\frac{d}{dx}(\ln g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

تذكر: (1) مجال الدالة f: $f(x) = \ln x$ هو $\mathbb{R}^+$ (2) مجال الدالة f: $f(x) = \ln(g(x))$ هو $\{x : g(x) > 0\}$

تذكر: $\ln e^x = x,\ x \in \mathbb{R}$ ، $e^{\ln x} = x,\ x > 0$

31



تمرّن 5-4

الدوالّ الأسيّة واللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Functions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–15)، أوجد $\frac{dy}{dx}$:

(1) $y = 7^x$ (2) $y = 5^{\sqrt{x+1}}$ (3) $y = 8^{\tan x}$

(4) $y = 2e^x$ (5) $y = e^{-x}$ (6) $y = 3e^{\frac{x}{3}}$

(7) $y = e^{x^2-x+1}$ (8) $y = e^{2\sqrt{x}+3}$ (9) $y = e^{\csc x}$

(10) $y = e^{x^4-5}$ (11) $y = \ln(x^3)$ (12) $y = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$

(13) $y = \ln(x+2)$ (14) $y = \ln(2-\cos x)$ (15) $y = \ln(\ln x)$

في التمارين (16–27)، أوجد التكامل غير المحدد في كل مما يلي:

(16) $\int e^{0.1x}dx$ (17) $\int \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$

(18) $\int (2x+1)e^{x^2+x+4}dx$ (19) $\int (x^2-2)e^{x^3-6x}dx$

(20) $\int \left(e^{0.5x}+\frac{0.5}{x}\right)dx$ (21) $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$

(22) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}dx$ (23) $\int \frac{x^3-x}{x^4-2x^2}dx$

(24) $\int \frac{x^2+1}{x}dx$ (25) $\int \frac{2}{3x+1}dx$

(26) $\int (2\tan x - \csc^2 x)dx$ (27) $\int (\cot x + x^2)dx$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–6)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت: $y = 4^{x-2}$ فإن: $\frac{dy}{dx} = 4x$ (a) (b)

(2) إذا كانت: $f(x) = e^{x^2}$ فإن: $f'(x) = 2xe^{2x}$ (a) (b)

(3) إذا كانت: $g(x) = \ln(2x+2)$ فإن: $g'(x) = \frac{1}{2x+2}$ (a) (b)

(4) إذا كانت: $y = x\ln x - x$ فإن: $y' = \ln x$ (a) (b)

(5) $\int \frac{1}{2x}dx = \frac{\ln x}{2} + C$ (a) (b)

(6) $\int \frac{1}{3x+1}dx = \ln(3x+1) + C$ (a) (b)

16

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطالب في إيجاد مشتقة الدالة $f(x) = \ln|x|$ ، فيكتب $f'(x) = \frac{1}{|x|}$ ، أو في إيجاد مشتقة الدالة $f(x) = \ln|u|$ فيكتب $f'(x) = \frac{u'}{|u|}$.

اشرح لهم أسباب كتابة $f'(x) = \frac{1}{x}$ أو $f'(x) = \frac{u'}{u}$

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يجيبون عن الأسئلة في فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من قدرتهم على التعامل مع مشتقات وتكامل الدوال اللوغاريتمية والأسية.

اختبار سريع

1 أوجد مشتقة كل دالّة:

(a) $f(x) = \ln(6x)$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x}$

(b) $f(x) = \ln(kx)$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x}$

$k \neq 0$ (ثابت)

(c) $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2 - 2x}\right)$ $\quad f'(x) = \frac{x-1}{x^2 - 2x}$

$x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

(d) $f(x) = e^{2x^2}$

$f'(x) = 4xe^{2x^2}$

(e) $f(x) = 4e^{\sin(x^2+3x)}$

$f'(x) = 4(2x+3)\cos(x^2+3x)\,e^{\sin(x^2+3x)}$

2 أوجد التكامل غير المحدد:

(a) $F(x) = \int \frac{(2x-3)dx}{x^2 - 3x + 7}$

$F(x) = \ln|x^2 - 3x + 7| + C$

(b) $F(x) = \int \sin x\, e^{\cos x}\, dx$

$F(x) = -e^{\cos x} + C$

مثال (3)

أوجد مشتقات كل من الدوال التالية:

a $f(x) = \ln x^2$ $\quad$ b $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

c $h(x) = \ln\sqrt{x}$ $\quad$ d $k(x) = \ln(\cos x)$

الحل:

a $f'(x) = \frac{1}{x^2}\cdot\frac{d}{dx}(x^2) = \frac{1}{x^2}\cdot 2x = \frac{2}{x}$

b $g'(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = x\cdot\frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{x}$

c $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$

d $k'(x) = \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{d}{dx}(\cos x) = \frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$

حاول أن تحل

3 أوجد مشتقات كلّ من الدوال التالية:

a $f(x) = \ln(2x + x^3)$ $\quad$ b $g(x) = \ln\frac{1}{2x+1}$

c $h(x) = \ln(1 + \sqrt{3}x)$ $\quad$ d $h(x) = \ln(\sin x)$

مثال توضيحي

إذا كان f دالة: $f(x) = \ln|x|$

فأوجد $f'(x)$

الحل:

$$f(x) = \ln|x| \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} \ln x & : x > 0 \\ \ln(-x) & : x < 0 \end{cases}$$

$f(x) = \ln x \qquad : x > 0$

قاعدة $\quad f'(x) = \frac{1}{x} \qquad (1)$

$f(x) = \ln(-x) \qquad : x < 0$

$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx} \quad f'(x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x} \qquad (2)$

من (2) , (1) نجد أن:

$f'(x) = \frac{1}{x}$

32

قاعدة (4)

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$$

تكامل بعض الدوال الأسية واللوغاريتمية

Integrals of some Exponential and Logarithmic Functions

علمنا أن: $\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$ ومنها تكون المشتقة العكسية هي:

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

والجدول التالي يبيّن تكامل بعض الدوال الأسية واللوغاريتمية حيث: $u = g(x)$

التكامل غير المحدد	قاعدة المشتقة
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\frac{d}{dx}e^x = e^x$
$\int u'e^u\,dx = e^u + C$	$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx} = u'e^u$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\frac{d}{dx}\ln\lvert x\rvert = \frac{1}{x}$
$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln\lvert u\rvert + C$	$\frac{d}{dx}\ln\lvert u\rvert = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}$

لاحظ أن: $\int \frac{g'(x)dx}{g(x)} = \ln|g(x)| + C$

مثال (4)

أوجد:

a $\int 2e^x\,dx$ $\quad$ b $\int 2x\cdot e^{x^2+3}dx$

الحل:

a $\int 2e^x dx = 2\int e^x dx$
$= 2e^x + C$

b $\int 2x\cdot e^{x^2+3}dx$

$u = x^2 + 3$

$du = 2x\,dx$

$\int 2x\,e^{x^2+3}dx = \int e^u du$
$= e^u + C$

$\therefore \int 2x\,e^{x^2+3}dx = e^{x^2+3} + C$

حاول أن تحل

4 أوجد:

a $\int e^{3x}dx$ $\quad$ b $\int (2x-1)e^{x^2-x+3}dx$

33

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1 $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a^x \cdot a^h - ax}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a^h - 1}{h}$

2 $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a^{0+h} - a^0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a^h - 1}{h}$

3 $f'(x) = a^x \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a^h - 1}{h} = f'(0) \cdot a^x$

4 تحقق من عمل الطلاب في إكمال الجدول.

5 ، 6 ، 7 تابع عمل الطلاب وتأكد من النتائج.

«حاول أن تحل»

1 (a) $f'(x) = 10^x \ln 10$

(b) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} 3^{\frac{1}{x}} \ln 3$

(c) $f'(x) = -\sin x \times 5^{\cos x} \cdot \ln 5$

2 (a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$

(b) $g'(x) = 2xe^{x^2-4}$

(c) $h'(x) = \sec^2 x \cdot e^{\tan x}$

3 (a) $f'(x) = \dfrac{2 + 3x^2}{2x + x^3}$

(b) $g'(x) = \dfrac{-2}{2x + 1}$

(c) $h'(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}\,x}$

(d) $h'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

4 (a) $\int e^{3x}\,dx = \dfrac{1}{3} e^{3x} + C$

(b) $\int (2x - 1) e^{x^2 - x + 3}\,dx$

$= e^{x^2 - x + 3} + C$

مثال (5)

أوجد:

a $\int \frac{3}{2x+5}\,dx$

b $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7}\,dx$

c $\int \frac{x^2-5x+6}{x}\,dx$

الحل:

a $\int \frac{3}{2x+5}\,dx$

$u = 2x + 5$

قاعدة التفاضل $du = 2dx \Longrightarrow dx = \frac{1}{2}du$

بالتعويض $\int \frac{3}{2x+5}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{3}{2}\ln|u| + C$

$= \frac{3}{2}\ln|2x+5| + C$

b $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7}\,dx$

$u = x^2 + 3x + 7$

قاعدة التفاضل $du = (2x+3)dx$

بالتعويض $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

$= \ln|x^2+3x+7| + C$

c $\int \frac{x^2-5x+6}{x}\,dx = \int \left(\frac{x^2}{x} - \frac{5x}{x} + \frac{6}{x}\right)dx$

$= \int \left(x - 5 + \frac{6}{x}\right)dx$

$= \frac{x^2}{2} - 5x + 6\ln|x| + C$

حاول أن تحل

5 أوجد:

a $\int \frac{-5}{3x-2}\,dx$

b $\int \frac{3t^2-6t}{t^3-3t^2+8}\,dt$

c $\int \frac{x^3+4}{x}\,dx$

34

في التمارين (7–14)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) إذا كانت $y = e^{-5x}$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a e^{-5x} b $-e^{-5x}$

c $-5e^{-5x}$ d $5e^{-5x}$

(8) إذا كانت $y = x^2e^x - xe^x$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a $e^x(x^2+x-1)$ b $e^x(x^2-x)$

c $2xe^x - e^x$ d $e^x(x^2+2x+1)$

(9) إذا كانت $y = (\ln x)^2$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a $\frac{\ln x}{x}$ b $\frac{2\ln x}{x}$

c $\frac{x\ln x}{2}$ d $\frac{2\ln^2 x}{x}$

(10) إذا كانت $y = \ln\left(\frac{10}{x}\right)$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a $-\frac{10}{x}$ b $\frac{10}{x}$

c $\frac{1}{x}$ d $-\frac{1}{x}$

(11) إذا كانت $y = \ln(x^2+1)$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a $\frac{x}{x^2+1}$ b $\frac{2}{x^2+1}$

c $\frac{2x}{x^2+1}$ d $-\frac{2x}{x^2+1}$

(12) $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx =$

a $2\ln(x^2+1) + C$ b $\ln(x^2+1) + C$

c $\frac{x^2}{x^2+1} + C$ d $\frac{x}{\frac{1}{3}x^2+1} + C$

(13) $\int \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx =$

a $\frac{e^x-e^{-x}}{2} + C$ b $\frac{e^x+e^{-x}}{2} + C$

c $\frac{e^{-x}-e^x}{2} + C$ d $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2} + C$

(14) $\int \frac{e^x}{e^x-4}\,dx =$

a $-\frac{1}{2}(e^x-4) + C$ b $\ln|e^x-4| + C$

c $-\ln|e^x-4| + C$ d $\frac{1}{2}\ln|e^x-4| + C$

17

يتضمن تكامل دالة الظل (tangent) الدالة اللوغاريتمية كما هو مبيّن في المثال التالي. وهذا أيضًا صحيح في دالة مقلوب ظل الزاوية (cotangent).

مثال (6)

أوجد: $\int \tan x \, dx$

الحل:

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$g(x) = \cos x$$

قاعدة التفاضل $g'(x) = -\sin x$

بالتعويض

$$\int \tan x \, dx = \int -\frac{g'(x)}{g(x)} dx$$

$$= -\ln|g(x)| + C$$

$$= -\ln|\cos x| + C$$

$$= \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + C$$

$$= \ln|\sec x| + C$$

حاول أن تحل

6 أوجد: $\int \cot x \, dx$

35

5 (a) $\int \frac{-5}{3x-2} dx = -\frac{5}{3} \ln|3x-2| + C$

(b) $\int \frac{3t^2 - 6t}{t^3 - 3t^2 + 8} dt = \ln|t^3 - 3t^2 + 8| + C$

(c) $\int \left(x^2 + \frac{4}{x}\right) dx = \frac{x^3}{3} + 4\ln|x| + C$

6 $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

$$u = \sin x \Longrightarrow du = \cos x \, dx$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|\sin x| + C$$

5–5: التكامل بالتجزيء

1 الأهداف

• يتعرف قاعدة التكامل بالتجزيء ويطبقها.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

بالتجزيء.

3 الأدوات والوسائل

حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

أوجد المشتقة لكل دالة:

(a) $f(x) = x\sqrt{x+2}$

(b) $g(x) = xe^{2x}$

(c) $h(x) = x\cos x$

أوجد:

(a) $\int x^2 e^{x^3+2}\,dx$

(b) $\int x\sqrt[3]{(x-1)^2}\,dx$

5 التدريس

يعتبر التكامل بالتجزيء من إحدى الطرائق المهمة التي تساعد على تخطي بعض الصعوبات عند حساب التكامل. إن تطبيق القاعدة: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ يتوقف بالدرجة الأولى على حسن اختيار u و dv من الدالة التي المطلوب مكاملتها. من الممكن ألا يكون الاختيار في البدء ملائمًا، لأن الهدف الأساسي هو الحصول على $\int v du$ قابلة للتكامل بسهولة، لذا شجع الطلاب على المحاولة أكثر من مرة في اختيار كل من u و dv.

5–5

سوف تتعلم
• التكامل بالتجزيء.

المفردات والمصطلحات:
• بالتجزيء By Parts

التكامل بالتجزيء
Integration by Parts

دعنا نفكر ونتناقش

1 هل يمكنك إيجاد: $\int x\sin x\,dx$ مستخدمًا ما تعلمته في البنود السابقة؟

2 لتكن الدالة f: $f(x) = x\sin x$

a أوجد: $f'(x)$ ، $f''(x)$

b اكتب $f(x)$ بدلالة $\cos x$ و $f''(x)$ فقط.

c أوجد مشتقة عكسية F للدالة f وتحقق من إجابتك.

عند إيجاد تكامل بعض الدوال نواجه بعض الصعوبات لذلك نبحث عن طرائق بديلة تساعدنا في حل ذلك وإحدى هذه الطرائق التكامل بالتجزيء.

قاعدة حاصل الضرب في صورة التكامل Product Rule in Integral Form

عندما تكون u و v دالتين في x قابلتين للتفاضل، فإن قاعدة حاصل الضرب في التفاضل تفيد بما يلي:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

بمكاملة كل من الطرفين بالنسبة إلى x:

$$\int \frac{d}{dx}(uv)\,dx = \int\left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right)dx$$

وبإعادة الترتيب نصل إلى المعادلة التكاملية:

$$\int\left(u\frac{dv}{dx}\right)dx = \int\left(\frac{d(uv)}{dx}\right)dx - \int\left(v\frac{du}{dx}\right)dx$$
$$= uv - \int\left(v\frac{du}{dx}\right)dx$$

وعند كتابة هذه المعادلة بالصورة التفاضلية الأبسط نحصل على القاعدة التالية:

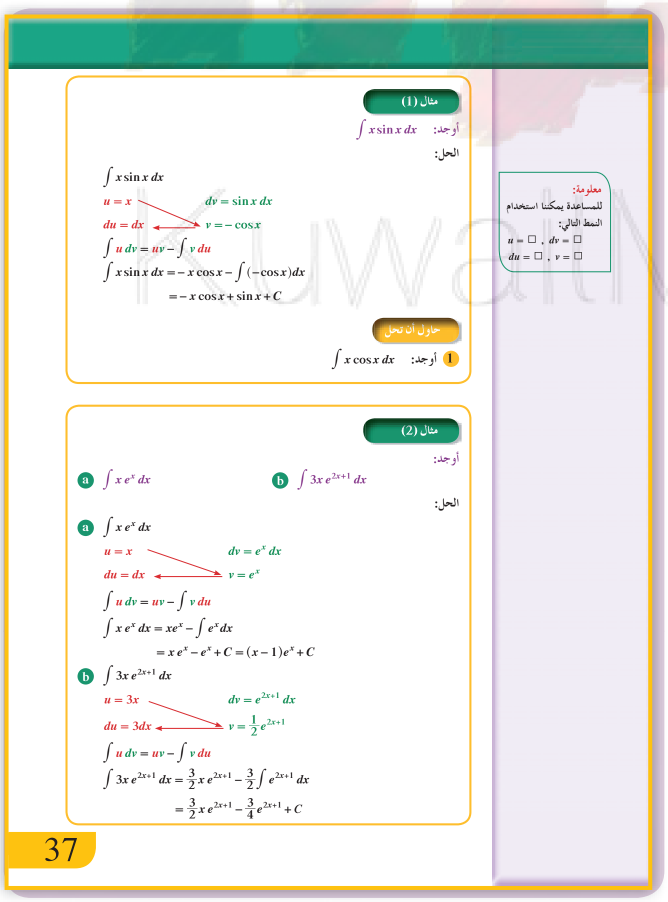
قاعدة التكامل بالتجزيء Integration by Parts Formula

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

تعبّر هذه القاعدة عن $\int u\,dv$ بدلالة تكامل آخر هو $\int v\,du$.

باختيار **ملائم** للمتغيّرين u , v، يمكن حساب التكامل الثاني بطريقة أسهل من حساب التكامل الأول، وهذا هو السبب في أهميّة القاعدة.

36



مثال (1)

أوجد: $\int x\sin x\,dx$

الحل:

$\int x\sin x\,dx$

$u = x \qquad dv = \sin x\,dx$

$du = dx \qquad v = -\cos x$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int x\sin x\,dx = -x\cos x - \int(-\cos x)dx$

$= -x\cos x + \sin x + C$

حاول أن تحل

1 أوجد: $\int x\cos x\,dx$

معلومة:
للمساعدة يمكننا استخدام النمط التالي:
$u = \square \; , \; dv = \square$
$du = \square \; , \; v = \square$

مثال (2)

أوجد:

a $\int x e^x\,dx$

b $\int 3x e^{2x+1}\,dx$

الحل:

a $\int x e^x\,dx$

$u = x \qquad dv = e^x\,dx$

$du = dx \qquad v = e^x$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int x e^x\,dx = xe^x - \int e^x dx$

$= x e^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$

b $\int 3x e^{2x+1}\,dx$

$u = 3x \qquad dv = e^{2x+1}\,dx$

$du = 3dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x+1}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int 3x e^{2x+1}\,dx = \frac{3}{2}x e^{2x+1} - \frac{3}{2}\int e^{2x+1}\,dx$

$= \frac{3}{2}x e^{2x+1} - \frac{3}{4}e^{2x+1} + C$

37

في الأمثلة (1), (2), (3), (4)

تساعد هذه الأمثلة الطلاب وترشدهم إلى كيفية اختيار u، dv مقارنة مع كل دالة يتوجب تكاملها. ناقش معهم خيارات مختلفة في بعض الأمثلة لقيم u، dv والنتائج التي سيتم التوصل إليها.

على سبيل المثال، في المثال (1) إذا كان الاختيار هو:

$$u = \sin x \qquad dv = x\,dx$$

$$du = \cos x\,dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int x \sin x\,dx = \frac{x^2}{2}\sin x - \frac{1}{2}\int x^2 \cos x\,dx$$

فالتكامل الذي نحصل عليه هو أصعب من التكامل الأساسي.

ويمكن اتباع هذه الطريقة بتجربة خيارات مختلفة عن الحلول الموجودة، فيلاحظ عندئذ الطلاب أن الخبرة والمهارة صفتان مهمتان في تطبيق قاعدة التجزيء.

في الأمثلة (5), (6), (7)

يلاحظ الطلاب أن في هذه الأمثلة استخدمنا تطبيق قاعدة التكامل بالتجزيء مرتين. أخبرهم أنه في بعض التكاملات قد نحتاج إلى استخدام قاعدة التجزيء ثلاث مرات وأكثر وذلك بحسب التكامل الذي نتعامل معه، مع ملاحظة اختلاف مثال (7) عن مثالي (5)، (6) وذلك لظهور التكامل المطلوب بعد تطبيق القاعدة للمرة الثانية.

6 الربط

لا يوجد.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تطبيق قاعدة التجزيء عند سوء اختيار u، dv الذي لا تساعد في إيجاد التكامل.

اطلب إليهم أخذ الوقت الكافي لاختيار مناسب لـ u و dv.

حاول أن تحل

2 أوجد:

a $\int (x-3)e^{x-3}\,dx$ b $\int 4x\,e^{-5x}\,dx$

تذكر: $\int dx = x + C$

مثال (3)

أوجد: $\int \ln(x+1)\,dx$

الحل:

$\int \ln(x+1)\,dx$

$u = \ln(x+1) \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x+1}dx \qquad v = x$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\begin{aligned}\int \ln(x+1)\,dx &= x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}dx\\ &= x\ln(x+1) - \int \frac{x+1-1}{x+1}dx\\ &= x\ln(x+1) - \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx\\ &= x\ln(x+1) - x + \ln|x+1| + C\\ &= x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) + C\end{aligned}$$

لاحظ $x+1>0$

حاول أن تحل

3 أوجد: $\int \ln x\,dx$

مثال (4)

أوجد: $\int x \ln x\,dx$

الحل:

$\int x\ln x\,dx$

$u = \ln x \qquad dv = x\,dx$

$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

38

تمرَّنْ 5-5

التكامل بالتجزيء

Integration by Parts

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–14)، أوجد التكامل.

(1) $\int x\cos(3x)\,dx$ (2) $\int x\sin(5x)\,dx$

(3) $\int x\,e^{x-3}\,dx$ (4) $\int (x-5)e^{x-5}\,dx$

(5) $\int \ln\sqrt[4]{x}\,dx$ (6) $\int \ln(2x-1)\,dx$

(7) $\int (2x+1)\ln(x+1)\,dx$ (8) $\int \frac{\ln(x)}{x^2}dx$

(9) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$ (10) $\int x^2 \ln x^2\,dx$

(11) $\int (x^2-2x)\cos x\,dx$ (12) $\int (x^2+3x)\sin x\,dx$

(13) $\int x^2 e^{x+1}\,dx$ (14) $\int x^2 e^{2x-3}\,dx$

(15) $\int (\ln(x))^2\,dx$ (16) $\int e^{2x}\sin x\,dx$

(17) $\int \sin(\ln x)\,dx$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int x\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos 2x + C$ (a) (b)

(2) $\int x\sin(\pi x)\,dx = -\frac{x}{\pi}\cos(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x) + C$ (a) (b)

(3) $\int x\,e^{6x}\,dx = \frac{1}{6}x\,e^{6x} - \frac{1}{36}e^{6x} + C$ (a) (b)

(4) $\int x\,e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} + e^{-x} + C$ (a) (b)

(5) $\int x\sec^2 x\,dx = x\tan x - \ln|\sec x| + C$ (a) (b)

18

8 التقييم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من حسن اختيارهم في تطبيق قاعدة التكامل بالتجزيء.

اختبار سريع

أوجد:

(a) $\int 2xe^{-3x}\,dx$

$u = 2x \qquad dv = e^{-3x}\,dx$

$du = 2dx \qquad v = -\frac{1}{3}e^{-3x}$

$$\int 2xe^{-3x}\,dx = -\frac{2}{3}x\,e^{-3x} + \frac{2}{3}\int e^{-3x}\,dx$$

$$= -\frac{2}{3}xe^{-3x} - \frac{2}{9}e^{-3x} + C$$

(b) $\int x\cos 3x\,dx$

$u = x \qquad dv = \cos 3x\,dx$

$du = dx \qquad v = \frac{1}{3}\sin 3x$

$$\int x\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}x\sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3x\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C$$

(c) $\int (2x+5)\ln(2x+5)dx$

$u = \ln(2x+5) \qquad dv = (2x+5)dx$

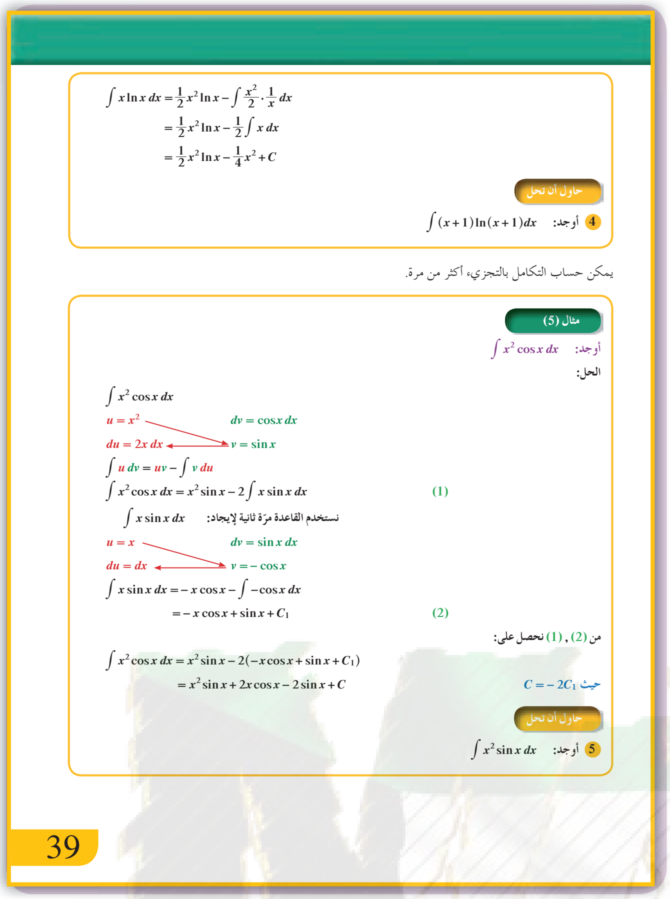
$du = \frac{2}{2x+5}dx \qquad v = x^2+5x$

$$\int (2x+5)\ln(2x+5)\,dx$$

$$= (x^2+5x)\ln(2x+5) - \int \frac{2x^2+10x}{2x+5}dx$$

$$= (x^2+5x)\ln(2x+5) - \int\left(x + \frac{5}{2} - \frac{\frac{25}{2}}{2x+5}\right)dx$$

$$= (x^2+5x)\ln(2x+5) - \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{2} + \frac{25}{4}\ln|2x+5| + C$$



$$\int x\ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

حاول أن تحل

4 أوجد: $\int (x+1)\ln(x+1)dx$

يمكن حساب التكامل بالتجزيء أكثر من مرة.

مثال (5)

أوجد: $\int x^2\cos x\,dx$

الحل:

$\int x^2\cos x\,dx$

$u = x^2 \qquad dv = \cos x\,dx$

$du = 2x\,dx \qquad v = \sin x$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx \qquad (1)$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية لإيجاد: $\int x\sin x\,dx$

$u = x \qquad dv = \sin x\,dx$

$du = dx \qquad v = -\cos x$

$\int x\sin x\,dx = -x\cos x - \int -\cos x\,dx$

$= -x\cos x + \sin x + C_1 \qquad (2)$

من (1), (2) نحصل على:

$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - 2(-x\cos x + \sin x + C_1)$

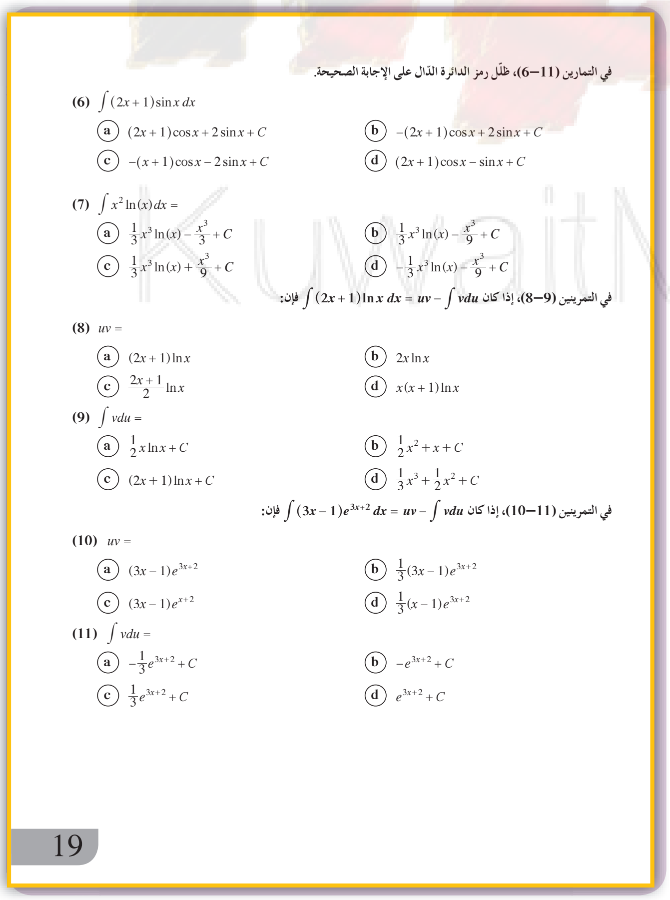
$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$

حيث $C = -2C_1$

حاول أن تحل

5 أوجد: $\int x^2\sin x\,dx$

39



في التمارين (6–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\int (2x+1)\sin x\,dx$

- (a) $(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$
- (b) $-(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$
- (c) $-(x+1)\cos x - 2\sin x + C$
- (d) $(2x+1)\cos x - \sin x + C$

(7) $\int x^2\ln(x)dx =$

- (a) $\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{3} + C$
- (b) $\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$
- (c) $\frac{1}{3}x^3\ln(x) + \frac{x^3}{9} + C$
- (d) $-\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$

في التمرينين (8–9)، إذا كان $\int (2x+1)\ln x\,dx = uv - \int v\,du$ فإن:

(8) $uv =$

- (a) $(2x+1)\ln x$
- (b) $2x\ln x$
- (c) $\frac{2x+1}{2}\ln x$
- (d) $x(x+1)\ln x$

(9) $\int v\,du =$

- (a) $\frac{1}{2}x\ln x + C$
- (b) $\frac{1}{2}x^2 + x + C$
- (c) $(2x+1)\ln x + C$
- (d) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$

في التمرينين (10–11)، إذا كان $\int (3x-1)e^{3x+2}\,dx = uv - \int v\,du$ فإن:

(10) $uv =$

- (a) $(3x-1)e^{3x+2}$
- (b) $\frac{1}{3}(3x-1)e^{3x+2}$
- (c) $(3x-1)e^{x+2}$
- (d) $\frac{1}{3}(x-1)e^{3x+2}$

(11) $\int v\,du =$

- (a) $-\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$
- (b) $-e^{3x+2} + C$
- (c) $\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$
- (d) $e^{3x+2} + C$

19

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1 من الصعب إيجاد تكامل يتضمن ضرب دالتين حيث $f(x) = x$ ، $g(x) = \sin x$ أي: $\int f(x) \cdot g(x)\, dx$ ، لأن قواعد التكامل تخبرنا بعدم فصل التكامل في حالة ضرب دالتين.

2 **(a)** $f'(x) = \sin x + x \cos x$

$f''(x) = \cos x + \cos x - x \sin x$

$= 2 \cos x - x \sin x$

(b) $f''(x) = 2\cos x - f(x) \Longrightarrow f(x) = 2\cos x - f''(x)$

$(f(x) = x \sin x)$

(c) $\int f(x)\, dx = 2 \int \cos x\, dx - \int f''(x)\, dx$

$F(x) = 2 \sin x - f'(x)$

$F(x) = 2\sin x - \sin x - x\cos x + C$

$F(x) = \sin x - x \cos x + C$

للتحقق نوجد مشتقة $F(x)$

$F'(x) = \cos x - \cos x + x \sin x = x \sin x = f(x)$

«حاول أن تحل»

1 $u = x \qquad dv = \cos x\, dx$

$du = dx \qquad v = \sin x$

$\int x \cos x\, dx = x \sin x - \int \sin x\, dx$

$= x \sin x + \cos x + C$

2 **(a)** $u = x - 3 \qquad dv = e^{x-3}\, dx$

$du = dx \qquad v = e^{x-3}$

$\int (x-3) e^{x-3}\, dx = (x-3)e^{x-3} - \int e^{x-3} dx$

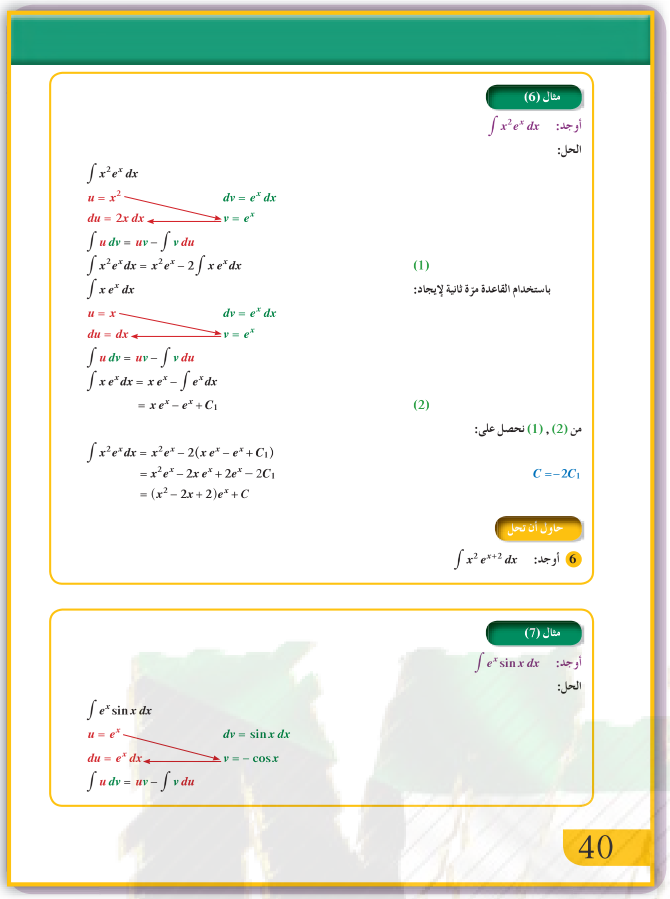
$= (x-3)e^{x-3} - e^{x-3} + C$

(b) $u = 4x \qquad dv = e^{-5x}\, dx$

$du = 4dx \qquad v = -\frac{1}{5} e^{-5x}$

$\int 4x\, e^{-5x}\, dx = -\frac{4}{5} x\, e^{-5x} + \frac{4}{5} \int e^{-5x}\, dx$

$= -\frac{4}{5} x\, e^{-5x} - \frac{4}{25} e^{-5x} + C$


مثال (6)

أوجد: $\int x^2 e^x\, dx$

الحل:

$\int x^2 e^x\, dx$

$u = x^2 \qquad dv = e^x\, dx$

$du = 2x\, dx \qquad v = e^x$

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$

$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x\, e^x dx \qquad (1)$

باستخدام القاعدة مرّة ثانية لإيجاد: $\int x\, e^x\, dx$

$u = x \qquad dv = e^x\, dx$

$du = dx \qquad v = e^x$

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$

$\int x\, e^x dx = x\, e^x - \int e^x dx$

$= x\, e^x - e^x + C_1 \qquad (2)$

من (2) , (1) نحصل على:

$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x\, e^x - e^x + C_1)$

$= x^2 e^x - 2x\, e^x + 2e^x - 2C_1$

$= (x^2 - 2x + 2)e^x + C$

$C = -2C_1$

حاول أن تحل

6 أوجد: $\int x^2\, e^{x+2}\, dx$

مثال (7)

أوجد: $\int e^x \sin x\, dx$

الحل:

$\int e^x \sin x\, dx$

$u = e^x \qquad dv = \sin x\, dx$

$du = e^x\, dx \qquad v = -\cos x$

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$

40

3 $u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \dfrac{dx}{x} \qquad v = x$

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int dx$$

$$= x \ln x - x + C$$

4 $u = \ln(x+1) \qquad dv = (x+1)dx$

$du = \dfrac{1}{x+1}dx \qquad v = \dfrac{x^2}{2} + x$

$$\int (x+1)\ln(x+1)dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+2x}{x+1}dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \left(x+1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln(x+1) - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln(x+1) + C$$

حل آخر:

$u = \ln(x+1) \qquad dv = (x+1)dx$

$du = \dfrac{1}{x+1}dx \qquad v = \dfrac{1}{2}(x+1)^2$

$$\frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}(x+1)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int (x+1)dx$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}(x+1)^2 + C$$

5 $u = x^2 \qquad dv = \sin x\, dx$

$du = 2x\, dx \qquad v = -\cos x$

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\, dx$$

تطبيق قاعدة التكامل بالتجزيء مرة ثانية:

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$$

6 $u = x^2 \qquad dv = e^{x+2}dx$

$du = 2x\, dx \qquad v = e^{x+2}$

$$\int x^2 e^{x+2}dx = x^2 e^{x+2} - 2\int x e^{x+2}dx$$

تطبيق قاعدة التكامل بالتجزيء مرة ثانية:

$$\int x^2 e^{x+2}dx = x^2 e^{x+2} - 2x e^{x+2} + 2e^{x+2} + C$$

$$= (x^2 - 2x + 2)e^{x+2} + C$$

7 $u = e^x \qquad dv = \cos x\, dx$

$du = e^x dx \qquad v = \sin x$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

$$\int e^x \sin x\, dx = -e^x\cos x - \int -e^x \cos x\, dx$$

$$= -e^x\cos x + \int e^x\cos x\, dx \qquad (1)$$

باستخدام القاعدة مرّة ثانية لإيجاد: $\int e^x \cos x\, dx$

$u = e^x \qquad dv = \cos x\, dx$

$du = e^x dx \qquad v = \sin x$

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx \qquad (2)$$

نعوّض (2) في (1) :

$$\int e^x \sin x\, dx = -e^x\cos x + e^x \sin x - \int e^x\sin x\, dx$$

$$2\int e^x \sin x\, dx = e^x(\sin x - \cos x)$$

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$$

حاول أن تحل

7 أوجد: $\int e^x \cos x\, dx$

41

تطبيق قاعدة التكامل بالتجزيء مرة ثانية:

$u = e^x \qquad dv = \sin x\, dx$

$du = e^x dx \qquad v = -\cos x$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \left(-e^x\cos x + \int e^x \cos x\, dx\right)$$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x + e^x\cos x - \int e^x \cos x\, dx$$

$$2\int e^x \cos x\, dx = e^x(\sin x + \cos x)$$

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C$$

5–6: التكامل باستخدام الكسور الجزئية

❶ الأهداف

- يكتب حدودية نسبية على صورة كسور جزئية.
- يستخدم الكسور الجزئية لإيجاد تكامل حدودية نسبية.

❷ المفردات والمفاهيم الجديدة

كسور جزئية – تفكيك – عامل خطي.

❸ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

❹ التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(1) اكتب كل تعبير مما يلي على صورة كسر واحد:

(a) $\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x+1}$

(b) $\dfrac{3x}{x^2-1}-\dfrac{4x+1}{x}$

(c) $\dfrac{2x}{(x-2)^2}+\dfrac{5x+2}{x^2+1}$

(2) احسب التكاملات التالية:

(a) $\displaystyle\int \frac{3dx}{x+2}$

(b) $\displaystyle\int \frac{2dx}{3x-5}$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(4-5x)^2}$

5–6

التكامل باستخدام الكسور الجزئية

Integration Using Partial Fractions

سوف تتعلم

- مقدمة عن الكسور الجزئية.
- مقامات لها عوامل خطية.

المفردات والمصطلحات:

- كسور جزئية Partial Fractions
- تفكيك Expand
- عامل خطي Linear Factor

دعنا نفكر ونتناقش

ⓐ لتكن الدالة f: $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{2}{x+2}$

اكتب $f(x)$ على الصورة: $f(x)=\dfrac{r(x)}{h(x)}$

حيث $h(x)$ هو المقام المشترك.

ⓑ لتكن الدالة g: $g(x)=\dfrac{x^2+8x-4}{x(x^2-4)}$

نأخذ: $\dfrac{x^2+8x-4}{x(x-2)(x+2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x+2}$

1. اضرب طرفي المعادلة في x ثم بسّط وعوّض عن x بالصفر. استنتج قيمة A.
2. اضرب طرفي المعادلة في $x-2$ ثم بسّط وعوّض عن x بـ 2 استنتج قيمة B.
3. اضرب طرفي المعادلة في $x+2$ ثم بسّط وعوّض عن x بـ -2 استنتج قيمة C.

ⓒ ما العلاقة بين $f(x)$ و $g(x)$؟

درسنا في ما سبق أن أي كثيرة حدود عواملها حقيقية قد يمكننا تحليلها إلى عوامل خطية (من الدرجة الأولى) وعوامل من الدرجة الثانية (تربيعية) ليس لها أصفار حقيقية (ليس لها جذور حقيقية).

يمكننا استخدام ذلك في إيجاد تكامل لحدوديات نسبية وسوف تقتصر دراستنا على تكامل الحدوديات النسبية التي يمكن تحليل المقام فيها إلى عوامل خطيّة.

أولًا: المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية (عوامل من الدرجة الأولى) غير مكررة

المقام $h(x)$ عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية غير مكررة.

لتكن $f(x)=\dfrac{r(x)}{h(x)}$ حيث المقام $h(x)$ على الصورة:

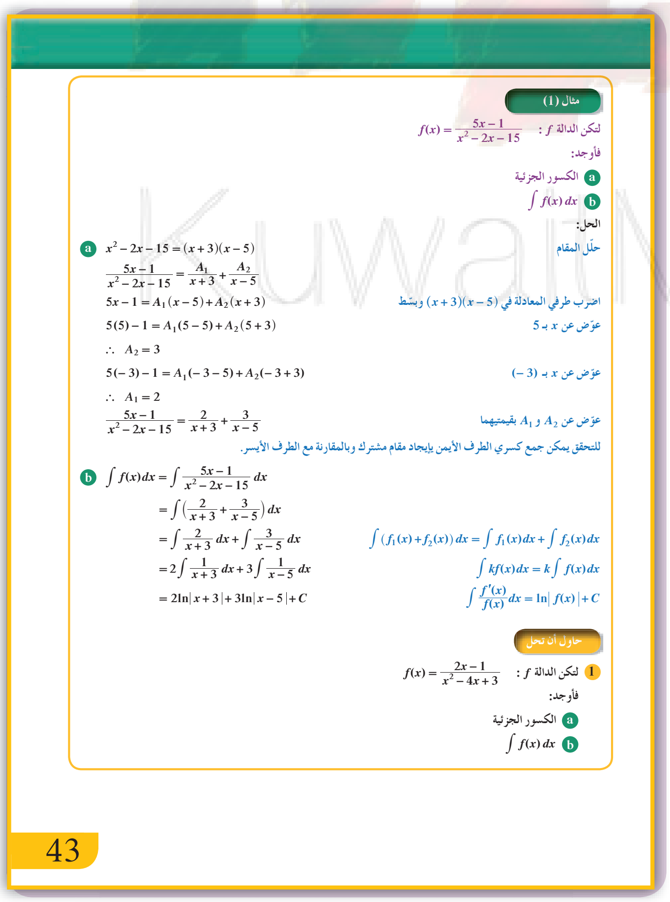
$$h(x)=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\ldots(a_kx+b_k)$$

حيث لا يوجد عوامل مكررة ولا يوجد عامل ثابت مضروب بآخر.

في هذه الحالة تكون الدالة f على صورة كسور جزئية كالتالي:

$$\frac{r(x)}{h(x)}=\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{a_2x+b_2}+\ldots+\frac{A_k}{a_kx+b_k}$$

42



مثال (1)

لتكن الدالة f : $f(x)=\dfrac{5x-1}{x^2-2x-15}$

فأوجد:

ⓐ الكسور الجزئية

ⓑ $\int f(x)\,dx$

الحل:

ⓐ حلّل المقام: $x^2-2x-15=(x+3)(x-5)$

$$\frac{5x-1}{x^2-2x-15}=\frac{A_1}{x+3}+\frac{A_2}{x-5}$$

اضرب طرفي المعادلة في $(x+3)(x-5)$ وبسّط: $5x-1=A_1(x-5)+A_2(x+3)$

عوّض عن x بـ 5: $5(5)-1=A_1(5-5)+A_2(5+3)$

$\therefore\ A_2=3$

عوّض عن x بـ (-3): $5(-3)-1=A_1(-3-5)+A_2(-3+3)$

$\therefore\ A_1=2$

عوّض عن A_2 و A_1 بقيمتيهما: $\dfrac{5x-1}{x^2-2x-15}=\dfrac{2}{x+3}+\dfrac{3}{x-5}$

للتحقق يمكن جمع كسري الطرف الأيمن بإيجاد مقام مشترك وبالمقارنة مع الطرف الأيسر.

ⓑ
$$\int f(x)dx=\int\frac{5x-1}{x^2-2x-15}\,dx$$
$$=\int\left(\frac{2}{x+3}+\frac{3}{x-5}\right)dx$$
$$=\int\frac{2}{x+3}\,dx+\int\frac{3}{x-5}\,dx \qquad \int(f_1(x)+f_2(x))\,dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx$$
$$=2\int\frac{1}{x+3}\,dx+3\int\frac{1}{x-5}\,dx \qquad \int kf(x)dx=k\int f(x)dx$$
$$=2\ln|x+3|+3\ln|x-5|+C \qquad \int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$$

حاول أن تحل

1. لتكن الدالة f : $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-4x+3}$

فأوجد:

ⓐ الكسور الجزئية

ⓑ $\int f(x)\,dx$

43

5 التدريس

رأينا سابقًا أنه ليس في جميع الأحوال يمكن إجراء التكامل عندما تكون دالة التكامل هي ضرب عدة دوال أو قسمة لدالتين.

وهنا تكمن أهمية هذا الدرس فهو يفتح أمام الطلاب أفقًا واسعة لإيجاد تكامل دوال تتضمن حدوديات نسبية وذلك بتجزئتها إلى كسور بسيطة كما في فقرة «دعنا نفكر ونتناقش»، ثم إيجاد تكاملها استنادًا إلى ما سبق وتعلموه.

أكّد للطلاب على أن دراستنا سوف تقتصر على بعض الحالات كما توضح الأمثلة.

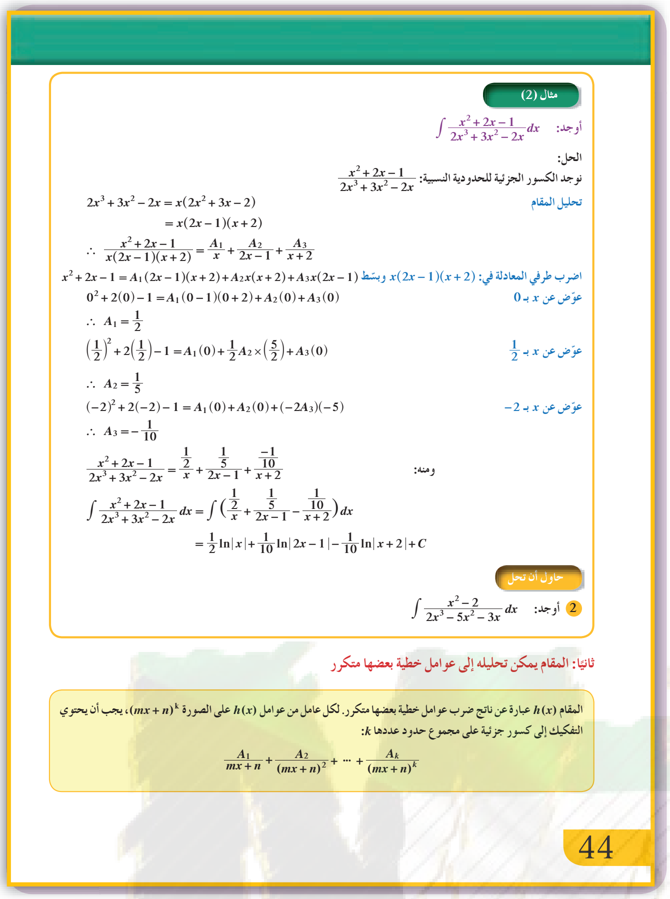
في المثالين (2), (1)

ركّز انتباه الطلاب أنه يجب أولًا تحليل المقام إلى عوامل خطية مختلفة، وبالتالي كل مقام هو عامل خطي. نأخذ كسرًا يتكون من هذا المقام على أن يكون بسطه قيمة ثابتة. ولإيجاد كل قيمة ثابتة في البسط نعوض x بأصفار العوامل الخطية، ثم نستخدم الكسور البسيطة التي حصلنا عليها لإيجاد تكامل الدالة وذلك باستخدام القاعدة:

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

في المثالين (4), (3)

لاحظ إنه بالإمكان تعميم التجزئة على الكسور شرط أن تبقى درجة البسط أصغر من درجة المقام، ويمكن تحليل المقام إلى عوامل خطية، وبالتالي كل مقام من العوامل الخطية يكون مقام لكسر بسطه قيمة ثابتة. والفارق في هذين المثالين أن المقام يحتوي على عوامل خطية بعضها متكرر، لذا يجب أن يحتوي التفكيك إلى كسور جزئية على مجموع حدود عددها K إذا كان العامل الخطي المتكرر له أس يساوي K، ثم نستخدم قواعد التكامل التي تعلمناها.


مثال (2)

أوجد: $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$

الحل:

نوجد الكسور الجزئية للحدودية النسبية: $\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}$

تحليل المقام

$$2x^3+3x^2-2x = x(2x^2+3x-2)$$
$$= x(2x-1)(x+2)$$
$$\therefore \frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{2x-1} + \frac{A_3}{x+2}$$

اضرب طرفي المعادلة في: $x(2x-1)(x+2)$ وبسّط

$$x^2+2x-1 = A_1(2x-1)(x+2)+A_2x(x+2)+A_3x(2x-1)$$

عوّض عن x بـ 0

$$0^2+2(0)-1 = A_1(0-1)(0+2)+A_2(0)+A_3(0)$$
$$\therefore A_1 = \frac{1}{2}$$

عوّض عن x بـ $\frac{1}{2}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)-1 = A_1(0)+\frac{1}{2}A_2\times\left(\frac{5}{2}\right)+A_3(0)$$
$$\therefore A_2 = \frac{1}{5}$$

عوّض عن x بـ -2

$$(-2)^2+2(-2)-1 = A_1(0)+A_2(0)+(-2A_3)(-5)$$
$$\therefore A_3 = -\frac{1}{10}$$

ومنه:

$$\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} = \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{5}}{2x-1} + \frac{\frac{-1}{10}}{x+2}$$
$$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{5}}{2x-1} - \frac{\frac{1}{10}}{x+2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{10}\ln|2x-1| - \frac{1}{10}\ln|x+2| + C$$

حاول أن تحل

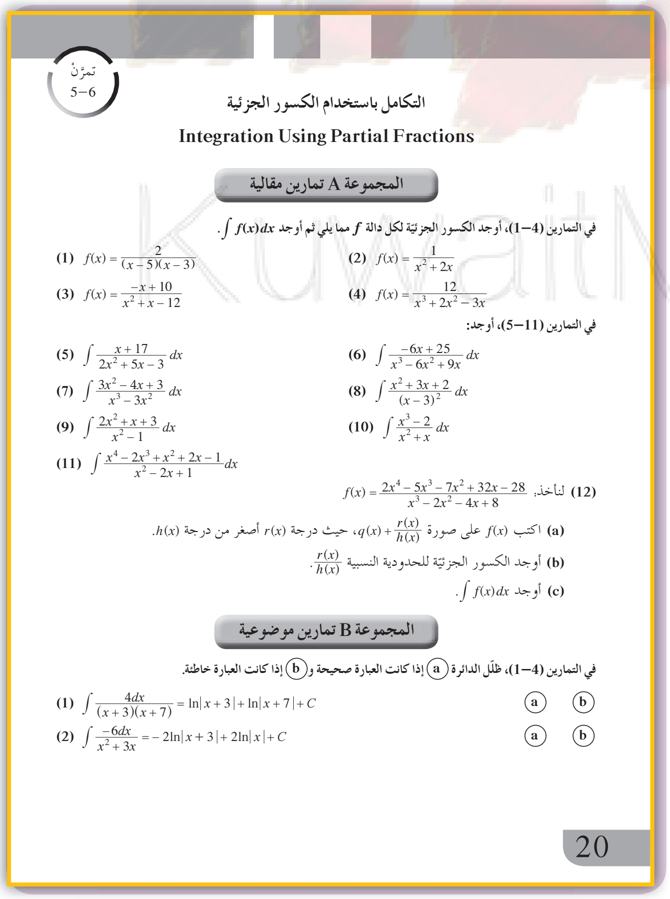
2 أوجد: $\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}dx$

ثانيًا: المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية بعضها متكرر

المقام $h(x)$ عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية بعضها متكرر. لكل عامل من عوامل $h(x)$ على الصورة $(mx+n)^k$، يجب أن يحتوي التفكيك إلى كسور جزئية على مجموع حدود عددها k:

$$\frac{A_1}{mx+n} + \frac{A_2}{(mx+n)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(mx+n)^k}$$

44


تمرَّنْ 5−6

التكامل باستخدام الكسور الجزئية

Integration Using Partial Fractions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1—4)، أوجد الكسور الجزئيّة لكل دالة f مما يلي ثم أوجد $\int f(x)dx$.

(1) $f(x) = \frac{2}{(x-5)(x-3)}$ (2) $f(x) = \frac{1}{x^2+2x}$

(3) $f(x) = \frac{-x+10}{x^2+x-12}$ (4) $f(x) = \frac{12}{x^3+2x^2-3x}$

في التمارين (5—11)، أوجد:

(5) $\int \frac{x+17}{2x^2+5x-3}dx$ (6) $\int \frac{-6x+25}{x^3-6x^2+9x}dx$

(7) $\int \frac{3x^2-4x+3}{x^3-3x^2}dx$ (8) $\int \frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2}dx$

(9) $\int \frac{2x^2+x+3}{x^2-1}dx$ (10) $\int \frac{x^3-2}{x^2+x}dx$

(11) $\int \frac{x^4-2x^3+x^2+2x-1}{x^2-2x+1}dx$

(12) لنأخذ: $f(x) = \frac{2x^4-5x^3-7x^2+32x-28}{x^3-2x^2-4x+8}$

(a) اكتب $f(x)$ على صورة $q(x)+\frac{r(x)}{h(x)}$، حيث درجة $r(x)$ أصغر من درجة $h(x)$.

(b) أوجد الكسور الجزئيّة للحدودية النسبية $\frac{r(x)}{h(x)}$.

(c) أوجد $\int f(x)dx$.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—4)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int \frac{4dx}{(x+3)(x+7)} = \ln|x+3| + \ln|x+7| + C$ (a) (b)

(2) $\int \frac{-6dx}{x^2+3x} = -2\ln|x+3| + 2\ln|x| + C$ (a) (b)

20

في الأمثلة (7), (6), (5)

أرشد الطلاب إلى حالة مهمة وهي عندما تكون درجة بسط الحدودية النسبية أكبر أو تساوي درجة مقامها، عند ذلك نبدأ أولًا بقسمة البسط على المقام باستخدام القسمة المطولة، فنحصل على الشكل التالي:

$$f(x) = q(x) + \frac{P(x)}{h(x)}$$

حيث $\deg p(x) < \deg h(x)$

وبالتالي تطبق الكسور الجزئية على $\frac{P(x)}{h(x)}$

مثال ذلك: $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 5}{x^2 + 5x + 4}$

باستخدام القسمة المطولة نجد:

$$f(x) = x - 3 + \frac{11x + 7}{(x+1)(x+4)}$$

ونكتب:

$$f(x) = x - 3 + \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+4}$$

نوجد:

$$A = -\frac{4}{3} \ , \ B = \frac{37}{3}$$

فتصبح:

$$f(x) = x - 3 - \frac{4}{3(x+1)} + \frac{37}{3(x+4)}$$

أكد للطلاب على وجود طرق أخرى للقسمة في بعض الحالات.

6 الربط

لا يوجد.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تجزئة الكسور، أكّد لهم أن درجة البسط يجب أن تكون دائمًا أصغر من درجة المقام وأن كل مقام هو عامل خطي يجب أن يكون بسطه قيمة ثابتة.

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من تمكنهم من تجزئة الكسور إلى كسور جزئية.

مثال (3)

أوجد: $\int \frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}dx$

الحل:

نوجد الكسور الجزئية للحدودية النسبية $\frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}$

حلّل المقام:

$x^3-4x^2+4x = x(x^2-4x+4) = x(x-2)^2$

تفكك $(x-2)^2$ إلى حدّين

$\therefore \frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{(x-2)^2}$ (1)

اضرب كلًّا من طرفي المعادلة في $x(x-2)^2$

$-x^2+2x+4 = A_1(x-2)^2 + A_2x(x-2) + A_3x$

نضع في المعادلة $x = 2$ فنحصل على $A_3 = 2$

نضع في المعادلة $x = 0$ فنحصل على $A_1 = 1$

ثم نعوّض في المعادلة عن $A_1 = 1$، $A_3 = 2$، وإحدى قيم x ولتكن $x = 1$ لإيجاد A_2

$-(1)^2+2(1)+4 = 1(1-2)^2 + A_2(1)(1-2) + (2)(1)$

$-1+2+4 = (-1)^2 + A_2(-1) + 2$

$\therefore A_2 = -2$

لدينا: $A_1 = 1 \ , \ A_2 = -2 \ , \ A_3 = 2$

التعويض في المعادلة (1) يعطي:

$$\frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x} = \frac{1}{x} + \frac{-2}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}$$

$$\int \frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-2}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}\right)dx$$

$$= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{-2}{x-2}dx + \int \frac{2}{(x-2)^2}dx$$

$$= \int \frac{1}{x}dx - 2\int \frac{1}{x-2}dx + 2\int \frac{1}{(x-2)^2}dx$$

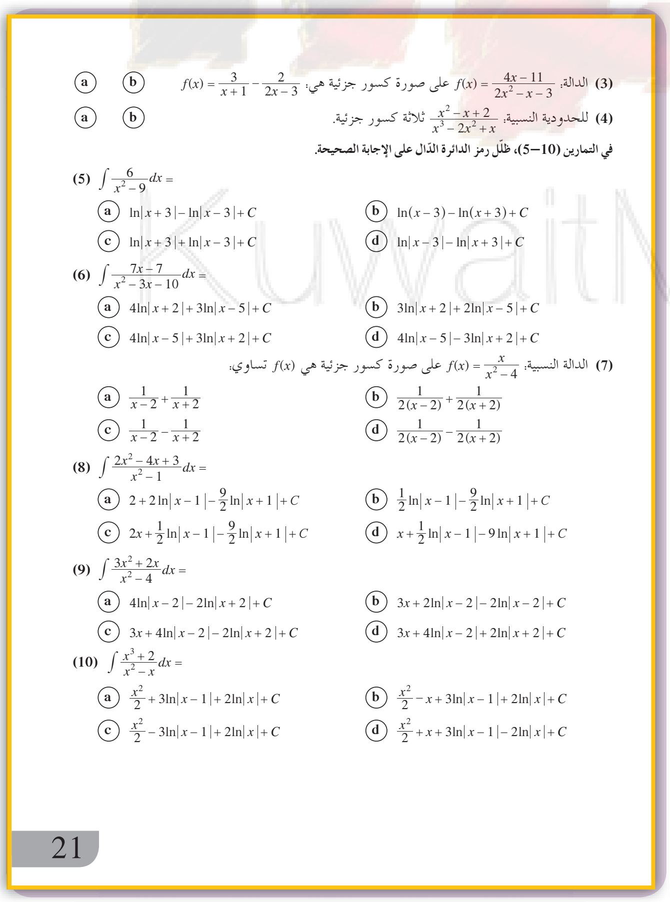
$$= \ln|x| - 2\ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C$$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$

حاول أن تحل

3 أوجد: $\int \frac{4x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x}dx$

45



(3) الدالة: $f(x) = \frac{4x-11}{2x^2-x-3}$ على صورة كسور جزئية هي: $f(x) = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{2x-3}$ ⓐ ⓑ

(4) للحدودية النسبية: $\frac{x^2-x+2}{x^3-2x^2+x}$ ثلاثة كسور جزئية. ⓐ ⓑ

في التمارين (10–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) $\int \frac{6}{x^2-9}dx =$

ⓐ $\ln|x+3| - \ln|x-3| + C$ ⓑ $\ln(x-3) - \ln(x+3) + C$

ⓒ $\ln|x+3| + \ln|x-3| + C$ ⓓ $\ln|x-3| - \ln|x+3| + C$

(6) $\int \frac{7x-7}{x^2-3x-10}dx =$

ⓐ $4\ln|x+2| + 3\ln|x-5| + C$ ⓑ $3\ln|x+2| + 2\ln|x-5| + C$

ⓒ $4\ln|x-5| + 3\ln|x+2| + C$ ⓓ $4\ln|x-5| - 3\ln|x+2| + C$

(7) الدالة النسبية: $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ على صورة كسور جزئية هي $f(x)$ تساوي:

ⓐ $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}$ ⓑ $\frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{2(x+2)}$

ⓒ $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$ ⓓ $\frac{1}{2(x-2)} - \frac{1}{2(x+2)}$

(8) $\int \frac{2x^2-4x+3}{x^2-1}dx =$

ⓐ $2 + 2\ln|x-1| - \frac{9}{2}\ln|x+1| + C$ ⓑ $\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{9}{2}\ln|x+1| + C$

ⓒ $2x + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{9}{2}\ln|x+1| + C$ ⓓ $x + \frac{1}{2}\ln|x-1| - 9\ln|x+1| + C$

(9) $\int \frac{3x^2+2x}{x^2-4}dx =$

ⓐ $4\ln|x-2| - 2\ln|x+2| + C$ ⓑ $3x + 2\ln|x-2| - 2\ln|x-2| + C$

ⓒ $3x + 4\ln|x-2| - 2\ln|x+2| + C$ ⓓ $3x + 4\ln|x-2| + 2\ln|x+2| + C$

(10) $\int \frac{x^3+2}{x^2-x}dx =$

ⓐ $\frac{x^2}{2} + 3\ln|x-1| + 2\ln|x| + C$ ⓑ $\frac{x^2}{2} - x + 3\ln|x-1| + 2\ln|x| + C$

ⓒ $\frac{x^2}{2} - 3\ln|x-1| + 2\ln|x| + C$ ⓓ $\frac{x^2}{2} + x + 3\ln|x-1| - 2\ln|x| + C$

21

اختبار سريع

اكتب الكسور التالية على صورة كسور جزئية، ثم أوجد التكامل غير المحدد:

(a) $\dfrac{2x-3}{x^2+5x+4}$

$$\frac{2x-3}{x^2+5x+4}=\frac{2x-3}{(x+1)(x+4)}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{x+4}$$

$$=\frac{-\frac{5}{3}}{x+1}+\frac{\frac{11}{3}}{x+4}$$

$$\int\frac{2x-3}{x^2+5x+4}dx=-\frac{5}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{11}{3}\int\frac{dx}{x+4}$$

$$=-\frac{5}{3}\ln|x+1|+\frac{11}{3}\ln|x+4|+C$$

(b) $\dfrac{x^2-5}{(x-1)(x+1)^2}$

$$\frac{x^2-5}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{A_3}{x+1}$$

$$=\frac{-1}{x-1}+\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{2}{x+1}$$

$$\int\frac{x^2-5}{(x-1)(x+1)^2}dx$$

$$=-\ln|x-1|-\frac{2}{x+1}+2\ln|x+1|+C$$

(c) $\displaystyle\int\frac{x^3-4x^2+6}{x^2-5x+4}dx$

$$\frac{x^3-4x^2+6}{x^2-5x+4}=x+1+\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x-4}$$

$$\int\frac{x^3-4x^2+6}{x^2-5x+4}dx$$

$$=\int x\,dx+\int dx-\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{x-4}$$

$$=\frac{x^2}{2}+x-\ln|x-1|+2\ln|x-4|+C$$

مثال (4)

أوجد: $\displaystyle\int\frac{3+x+x^2}{x^3+2x^2}dx$

الحل:

تحليل المقام إلى عوامل خطية $\qquad x^3+2x^2=x^2(x+2)$

$$\therefore\ \frac{3+x+x^2}{x^3+2x^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x+2}$$

اضرب كلًّا من طرفي المعادلة في: $x^2(x+2)$ ثم بسّط $\qquad 3+x+x^2=A_1x(x+2)+A_2(x+2)+A_3x^2$

عوّض عن x بـ 0 $\qquad 3+0+0^2=A_1(0)+A_2(0+2)+A_3(0)^2$

$$\therefore\ A_2=\frac{3}{2}$$

عوّض عن x بـ -2 $\qquad 3-2+(-2)^2=A_1(0)+A_2(0)+A_3(-2)^2$

$$\therefore\ A_3=\frac{5}{4}$$

نعوّض في المعادلة عن: $A_2=\frac{3}{2}$ ، $A_3=\frac{5}{4}$ وإحدى قيم x ولتكن $x=1$ لإيجاد قيمة A_1

$$3+1+(1)^2=3A_1+\frac{3}{2}(3)+\frac{5}{4}\times(1)^2$$

$$\therefore\ A_1=-\frac{1}{4}$$

$$\int\frac{3+x+x^2}{x^3+2x^2}dx=\int\left(\frac{-\frac{1}{4}}{x}+\frac{\frac{3}{2}}{x^2}+\frac{\frac{5}{4}}{x+2}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{3}{2x}+\frac{5}{4}\ln|x+2|+C$$

حاول أن تحل

4 أوجد: $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^3+4x^2}dx$

عندما تكون درجة البسط في الحدودية النسبية $f(x)=\dfrac{r(x)}{h(x)}$ مساوية أو أكبر من درجة المقام، نوجد أولًا ناتج القسمة $q(x)$ باستخدام القسمة المطولة ثم نكتب الدالة على الصورة: $f(x)=q(x)+\dfrac{p(x)}{h(x)}$ حيث $p(x)$ هو الباقي.

46

مثال (5)

أوجد: $\displaystyle\int\frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}dx$

الحل:

$\because$ درجة البسط = درجة المقام

$\therefore$ نبدأ بقسمة البسط على المقام باستخدام القسمة المطولة

ناتج القسمة $\longrightarrow 1$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x^2-4x+4 & x^2-3x+7 \\ & -\left(x^2-4x+4\right) \\ \hline & x+3 \end{array}$$

الباقي $\longrightarrow x+3$

$$\frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}=1+\frac{x+3}{(x-2)^2}$$

الحدودية النسبية $\qquad \dfrac{x+3}{(x-2)^2}=\dfrac{A_1}{x-2}+\dfrac{A_2}{(x-2)^2}$

نضرب كلًّا من طرفي المعادلة في $(x-2)^2$ ثم نبسّط $\qquad x+3=A_1(x-2)+A_2$

عوّض عن x بـ 2 $\qquad 2+3=A_1(0)+A_2$

$$\therefore\ A_2=5$$

نعوّض في المعادلة عن $A_2=5$ وإحدى قيم x ولتكن $x=1$ لإيجاد قيمة A_1 .

$$1+3=-A_1+5$$

$$\therefore\ A_1=1$$

$$\int\frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}dx=\int\left(1+\frac{1}{x-2}+\frac{5}{(x-2)^2}\right)dx$$

$$=x+\ln|x-2|-\frac{5}{x-2}+C$$

حاول أن تحل

5 (a) هل يمكن حل مثال (5) بطريقة أخرى.

(b) أوجد: $\displaystyle\int\frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2}dx$

47

إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(c) – (a) تحقق من عمل الطلاب.

«حاول أن تحل»

1 (a) $\dfrac{2x-1}{x^2-4x+3}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-3}$

$=\dfrac{-\frac{1}{2}}{x-1}+\dfrac{\frac{5}{2}}{x-3}$

(b) $\displaystyle\int\frac{2x-1}{x^2-4x+3}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{5}{2}\int\frac{dx}{x-3}$

$=-\dfrac{1}{2}\ln|x-1|+\dfrac{5}{2}\ln|x-3|+C$

2 $\displaystyle\int\frac{x^2-2}{x(2x+1)(x-3)}dx=\int\left(\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{2x+1}+\frac{A_3}{x-3}\right)dx$

$\displaystyle=\int\left(\frac{\frac{2}{3}}{x}-\frac{1}{2x+1}+\frac{\frac{1}{3}}{x-3}\right)dx$

$=\dfrac{2}{3}\ln|x|-\dfrac{1}{2}\ln|2x+1|+\dfrac{1}{3}\ln|x-3|+C$

3 $g(x)=\dfrac{4x^2-4x+1}{x(x^2-2x+1)}=\dfrac{A_1}{x}+\dfrac{A_2}{(x-1)^2}+\dfrac{A_3}{x-1}$

$=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{3}{x-1}$

$\displaystyle\int g(x)\,dx=\ln|x|-\frac{1}{x-1}+3\ln|x-1|+C$

4 $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^2(x+4)}dx=\int\left(\frac{A_1}{x^2}+\frac{A_2}{x}+\frac{A_3}{x+4}\right)dx$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2}-\frac{1}{16}\int\frac{dx}{x}+\frac{17}{16}\int\frac{dx}{x+4}$

$=-\dfrac{1}{4x}-\dfrac{1}{16}\ln|x|+\dfrac{17}{16}\ln|x+4|+C$

5 (a) $\displaystyle\int\frac{x^2-3x-x+x+4+3}{(x-2)^2}dx$

$\displaystyle=\int\frac{x^2-4x+4+x+3}{(x-2)^2}dx$

$\displaystyle=\int\frac{(x-2)^2+x+3}{(x-2)^2}dx=\int\left(1+\frac{x-2+5}{(x-2)^2}\right)dx$

$\displaystyle=\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{2(x-2)}{x^2-4x+4}dx+5\int\frac{dx}{(x-2)^2}$

$=x+\dfrac{1}{2}\ln|(x-2)^2|-\dfrac{5}{x-2}+C$

$=x+\ln|x-2|-\dfrac{5}{x-2}+C$

مثال (6)

أوجد: $\displaystyle\int\frac{2x^3-9x^2+25}{x^2-6x+8}dx$

الحل:

$\because$ درجة البسط 3 ودرجة المقام 2

$\therefore$ يجب استخدام القسمة المطولة

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x+3 \quad \leftarrow \text{ناتج القسمة} \\
\hline
x^2-6x+8 & 2x^3-9x^2+25 \\
 & -(2x^3-12x^2+16x) \\
\hline
 & 3x^2-16x+25 \\
 & -(3x^2-18x+24) \\
\hline
 & 2x+1 \quad \leftarrow \text{الباقي}
\end{array}$$

ومنه نكتب: $\dfrac{2x^3-9x^2+25}{x^2-6x+8}=2x+3+\dfrac{2x+1}{x^2-6x+8}$

$=2x+3+\dfrac{2x+1}{(x-2)(x-4)}$

نأخذ الحدودية النسبية $\dfrac{2x+1}{(x-2)(x-4)}$

ونكتبها على الصورة: $\dfrac{2x+1}{(x-2)(x-4)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-4}$

نضرب طرفي المعادلة في $(x-2)(x-4)$ ثم نعوّض على الترتيب $x=2$ و $x=4$

نحصل على $A=-\dfrac{5}{2}$ ، $B=\dfrac{9}{2}$

$\dfrac{2x^3-9x^2+25}{x^2-6x+8}=2x+3+\dfrac{-\frac{5}{2}}{x-2}+\dfrac{\frac{9}{2}}{x-4}$

ومنه تكون:

$\displaystyle\therefore\int\frac{2x^3-9x^2+25}{x^2-6x+8}dx=2\int xdx+3\int dx-\frac{5}{2}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{9}{2}\int\frac{dx}{x-4}$

$=x^2+3x-\dfrac{5}{2}\ln|x-2|+\dfrac{9}{2}\ln|x-4|+C$

حاول أن تحل

6 أوجد: $\displaystyle\int\frac{x^3-7x+9}{x^2-3x+2}dx$

48

مثال (7)

أوجد: $\int \frac{x^4 - 2x^3 + 4x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx$

الحل:

$\because$ درجة البسط أكبر من درجة المقام

$\therefore$ نبدأ بقسمة البسط على المقام باستخدام القسمة المطولة

ناتج القسمة $\longleftarrow$ $x - 1$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - x + 1 & x^4 - 2x^3 + 4x + 2 \\ - & x^4 - x^3 - x^2 + x \\ \hline & -x^3 + x^2 + 3x + 2 \\ - & -x^3 + x^2 + x - 1 \\ \hline & 2x + 3 \end{array}$$

الباقي $\longleftarrow$ $2x + 3$

$$\frac{x^4 - 2x^3 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x - 1 + \frac{2x + 3}{(x-1)^2(x+1)}$$

الحدودية النسبية
$$\frac{2x+3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x+1}$$

نضرب كلًّا من طرفي المعادلة في $(x+1)(x-1)^2$ ثم نبسّط
$$2x + 3 = A_1(x-1)(x+1) + A_2(x+1) + A_3(x-1)^2$$

عوّض عن x بـ 1
$$2(1) + 3 = A_1(0) + 2A_2 + A_3(0)$$
$$\therefore\ A_2 = \frac{5}{2}$$

عوّض عن x بـ -1
$$2 \times (-1) + 3 = A_1(0) + A_2(0) + 4A_3$$
$$\therefore\ A_3 = \frac{1}{4}$$

نعوّض في المعادلة عن $A_2 = \frac{5}{2}$، $A_3 = \frac{1}{4}$ وإحدى قيم x ولتكن $x = 0$
$$\therefore\ A_1 = -\frac{1}{4}$$

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 4x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}dx = \int\left(x - 1 + \frac{-\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{5}{2}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{x+1}\right)dx$$
$$= \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{5}{2(x-1)} + \frac{1}{4}\ln|x+1| + C$$

حاول أن تحل

7 أوجد: $\int \frac{2x^4 + 3x^2 - 9}{x^3 - 6x^2 + 9x}\,dx$

49

(b) $$\int\left(1 - \frac{4}{x^2(x-2)}\right)dx$$
$$= \int\left(1 - \left(\frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x-2}\right)\right)dx$$
$$= \int\left(1 - \left(\frac{-2}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}\right)\right)dx$$
$$= x - \frac{2}{x} + \ln|x| - \ln|x-2| + C$$

6 $$\int\left(x + 3 + \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2}\right)dx$$
$$= \int\left(x + 3 - \frac{3}{x-1} + \frac{3}{x-2}\right)dx$$
$$= \frac{x^2}{2} + 3x - 3\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + C$$

7 $$\int\left(2x + 12 + \frac{57x^2 - 108x - 9}{x(x-3)^2}\right)dx$$
$$= \int\left(2x + 12 + \frac{-1}{x} + \frac{60}{(x-3)^2} + \frac{58}{x-3}\right)dx$$
$$= x^2 + 12x - \ln|x| - \frac{60}{(x-3)} + 58\ln|x-3| + C$$

5–7: التكامل المحدد

1 الأهداف

- يربط بين التكامل المحدد والمساحة.
- يتعرف خواص التكامل المحدد ويطبقها.
- يستخدم طرائق التكامل غير المحدد في التكامل المحدد.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

تكامل محدد.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(1) أوجد مساحة:

(a) مثلث قاعدته 6 cm ، وارتفاعه 9 cm.

(b) مستطيل طوله 12 cm ، وعرضه 7 cm.

(c) دائرة طول قطرها 14 cm.

(2) أوجد التكامل:

(a) $\int (x^3 - 2x^2 + 5)dx$

(b) $\int \cos 5x \, dx$

(c) $\int \dfrac{(x-1)\,dx}{x^2 - 2x + 4}$

(d) $\int (x+2)e^{x^2+4x+7}\,dx$

(3) حدد الفترات التي تكون فيها $f(x) \geq 0$ ؛ والفترات التي تكون فيها $f(x) \leq 0$ في كلّ ممّا يلي:

(a) $f(x) = x^2 - x - 20$

(b) $f(x) = x^2 + 4$

(c) $f(x) = 25 - x^2$

5–7

التكامل المحدد

Definite Integral

دعنا نفكر ونتناقش

لنعتبر $f(x) = 2x - 2$ على الفترة $[1\ ,\ 4]$،

من الشكل المقابل، أوجد:

a المشتقة العكسية للدالة $F(x)$.

b $F(1)\ ,\ F(4)$، ثم احسب $F(4) - F(1)$

c مساحة المنطقة A.

d ماذا تلاحظ؟

سوف تتعلم

- التكامل المحدد والمساحة.
- خواص التكامل المحدد.
- قاعدة القوى في صورة التكامل.
- التعويض في التكامل المحدد.

المفردات والمصطلحات:

- تكامل محدد Definite Integral
- تكامل بالتعويض Integration by Substitution

معلومة: عند كتابة $\int_a^b f(x)\,dx$ يأخذ المتغيّر x كلّ القيم من a إلى b.

التكامل المحدد Definite Integral

تعلمت فيما سبق إنه إذا كانت f دالة متصلة على $[a\ ,b]$ وكانت الدالة F مشتقة عكسية للدالة f فإن التكامل غير المحدد للدالة f هو:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

وفي هذا البند سوف تتعلم التكامل المحدد للدالة f من a إلى b وهو العدد الحقيقي: $F(b) - F(a)$

حيث:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

ويسمّى a, b حدّي التكامل، والقواعد التي سبق ذكرها في التكامل غير المحدد تطبق على التكامل المحدد.

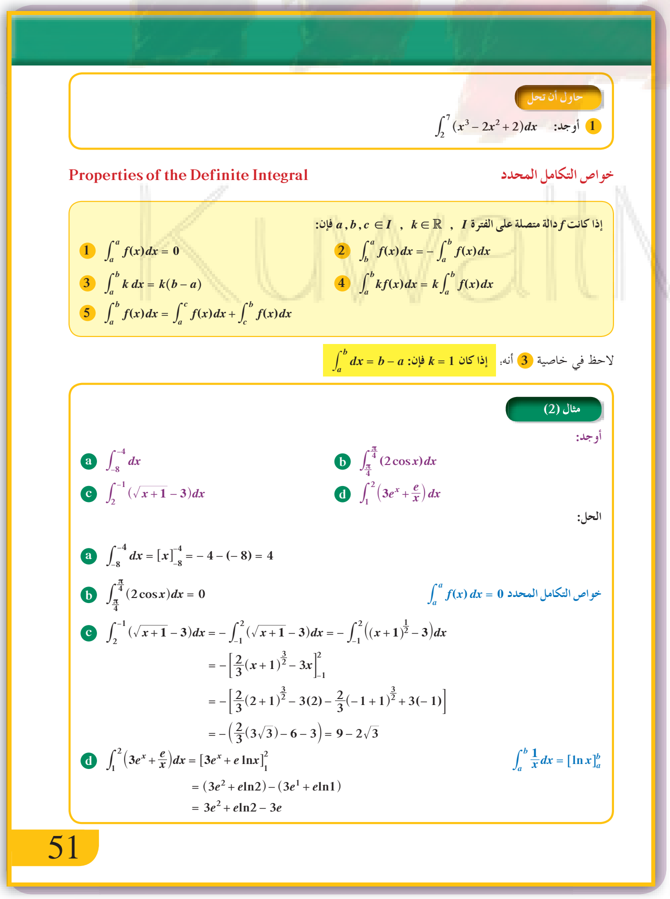
مثال (1)

أوجد التكامل المحدد للدالة: $f(x) = 3x^2 - x + 4$ من $x = -2$ إلى $x = 3$.

الحل:

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx = \int_{-2}^{3}(3x^2 - x + 4)dx$$
$$= \left[x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x\right]_{-2}^{3}$$
$$= \left((3)^3 - \frac{1}{2}(3)^2 + 4(3)\right) - \left((-2)^3 - \frac{1}{2}(-2)^2 + 4(-2)\right)$$
$$= 34.5 + 18 = 52.5$$

50



حاول أن تحل

1 أوجد: $\int_2^7 (x^3 - 2x^2 + 2)dx$

خواص التكامل المحدد Properties of the Definite Integral

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة I ، $k \in \mathbb{R}$ ، $a, b, c \in I$ فإن:

1 $\int_a^a f(x)dx = 0$

2 $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

3 $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$

4 $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

5 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

لاحظ في خاصية 3 أنه: إذا كان $k = 1$ فإن: $\int_a^b dx = b - a$

مثال (2)

أوجد:

a $\int_{-8}^{-4} dx$

b $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos x)dx$

c $\int_2^{-1} (\sqrt{x+1} - 3)dx$

d $\int_1^2 \left(3e^x + \frac{e}{x}\right)dx$

الحل:

a $\int_{-8}^{-4} dx = [x]_{-8}^{-4} = -4 - (-8) = 4$

b $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos x)dx = 0$ — خواص التكامل المحدد $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

c $\int_2^{-1} (\sqrt{x+1} - 3)dx = -\int_{-1}^{2} (\sqrt{x+1} - 3)dx = -\int_{-1}^{2}\left((x+1)^{\frac{1}{2}} - 3\right)dx$
$$= -\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 3x\right]_{-1}^{2}$$
$$= -\left[\frac{2}{3}(2+1)^{\frac{3}{2}} - 3(2) - \frac{2}{3}(-1+1)^{\frac{3}{2}} + 3(-1)\right]$$
$$= -\left(\frac{2}{3}(3\sqrt{3}) - 6 - 3\right) = 9 - 2\sqrt{3}$$

d $\int_1^2 \left(3e^x + \frac{e}{x}\right)dx = [3e^x + e\ln x]_1^2$ — $\int_a^b \frac{1}{x}dx = [\ln x]_a^b$
$$= (3e^2 + e\ln 2) - (3e^1 + e\ln 1)$$
$$= 3e^2 + e\ln 2 - 3e$$

51

5 التدريس

ركّز انتباه الطلاب على العلاقة التي تعطي القيمة العددية للتكامل المحدد كما وردت في كتاب الطالب ص 50، $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ وهي تمثل المشتقة العكسية عند $x = b$ ناقص المشتقة العكسية عند $x = a$.

في المثال (1)

تطبيق مباشر لإيجاد التكامل المحدد باستخدام القاعدة

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

نبّه الطلاب إلى عدم وجود القيمة الثابتة عندما نحسب التكامل المحدد في فترة محددة $[a\,,b]$.

ناقش مع الطلاب خواص التكامل المحدد في ص (51) من كتاب الطالب. ركّز انتباههم على الخاصية (5) حيث إنها تساعد الطلاب في تجزئة التكامل المحدد ضمن شروط معينة على فترة محددة.

في المثال (2)

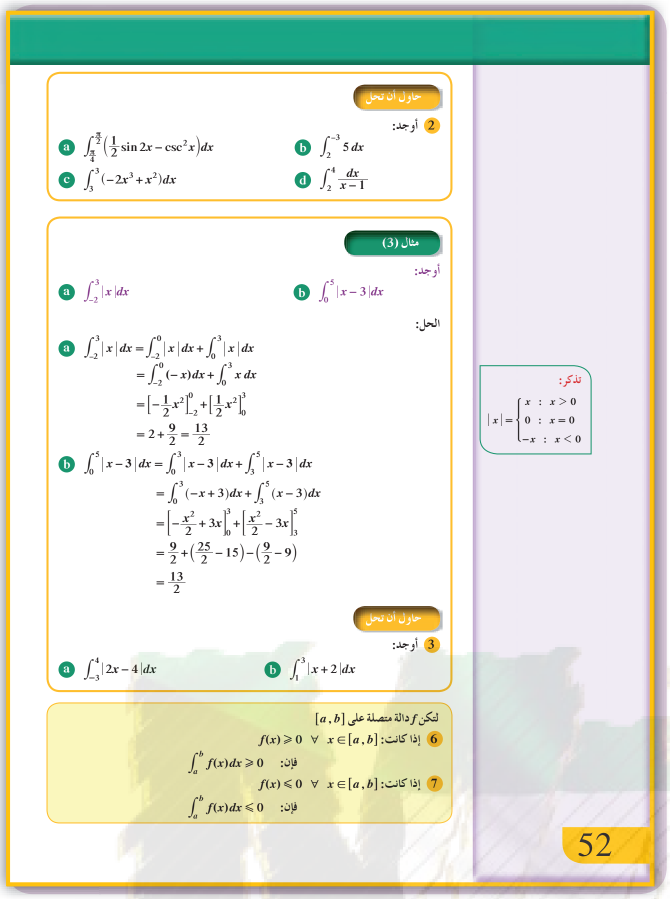
يساعد الطلاب على فهم كيفية استخدام بعض خواص التكامل المحدد الموجودة في الجدول.

في المثال (3)

يبيّن كيفية استخدام الخاصية (5) من الجدول السابق على القيمة المطلقة للمتغير بحيث يتم تجزئة الفترة المحددة، ومن ثم إيجاد التكامل المحدد. ركّز انتباه الطلاب على إشارة $(x-3)$، وبالتالي كيفية تجزئة الفترة $[0\,,5]$.

في المثالين (4), (5)

في هذين المثالين تطبيق مباشر لخواص التكامل المحدد.
في المثال (4)، لاحظ أن $f(x) \geq 0$ في الفترة $[3,5]$ إذًا $\int_3^5 f(x)\,dx \geq 0$. في المثال (5)، لاحظ أنه في الفترة $[1,3]$، $f(x) - g(x) \leq 0$ أي أن $f(x) \leq g(x)$ ومنه $\int_1^3 f(x)\,dx \leq \int_1^3 g(x)\,dx$.



حاول أن تحل

2 أوجد:

a $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin 2x - \csc^2 x\right)dx$ b $\int_2^{-3} 5\,dx$

c $\int_3^3 (-2x^3 + x^2)\,dx$ d $\int_2^4 \frac{dx}{x-1}$

مثال (3)

أوجد:

a $\int_{-2}^3 |x|\,dx$ b $\int_0^5 |x-3|\,dx$

الحل:

a
$$\int_{-2}^3 |x|\,dx = \int_{-2}^0 |x|\,dx + \int_0^3 |x|\,dx = \int_{-2}^0 (-x)\,dx + \int_0^3 x\,dx = \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3 = 2 + \frac{9}{2} = \frac{13}{2}$$

b
$$\int_0^5 |x-3|\,dx = \int_0^3 |x-3|\,dx + \int_3^5 |x-3|\,dx = \int_0^3 (-x+3)\,dx + \int_3^5 (x-3)\,dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 3x\right]_0^3 + \left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_3^5 = \frac{9}{2} + \left(\frac{25}{2} - 15\right) - \left(\frac{9}{2} - 9\right) = \frac{13}{2}$$

تذكر:

$$|x| = \begin{cases} x & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$

حاول أن تحل

3 أوجد:

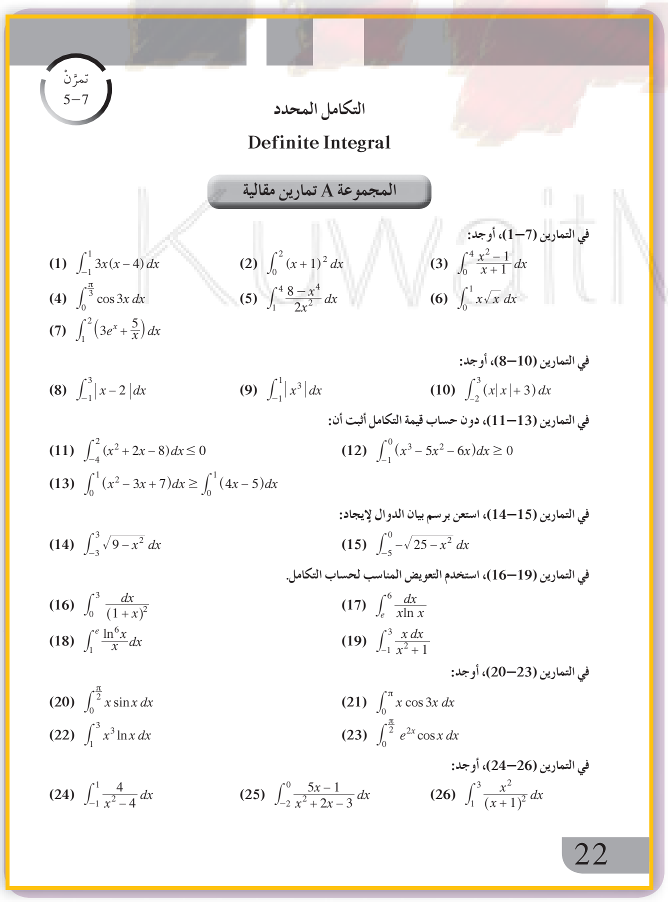
a $\int_{-3}^4 |2x-4|\,dx$ b $\int_1^3 |x+2|\,dx$

لتكن f دالة متصلة على $[a\,,b]$

6 إذا كانت: $f(x) \geqslant 0 \;\; \forall \;\; x \in [a\,,b]$ فإن: $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$

7 إذا كانت: $f(x) \leqslant 0 \;\; \forall \;\; x \in [a\,,b]$ فإن: $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$

52



تمرَّنْ 5−7

التكامل المحدد

Definite Integral

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1−7)، أوجد:

(1) $\int_{-1}^1 3x(x-4)\,dx$ (2) $\int_0^2 (x+1)^2\,dx$ (3) $\int_0^4 \frac{x^2-1}{x+1}\,dx$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 3x\,dx$ (5) $\int_1^4 \frac{8-x^4}{2x^2}\,dx$ (6) $\int_0^1 x\sqrt{x}\,dx$

(7) $\int_1^2 \left(3e^x + \frac{5}{x}\right)dx$

في التمارين (8−10)، أوجد:

(8) $\int_{-1}^3 |x-2|\,dx$ (9) $\int_{-1}^1 |x^3|\,dx$ (10) $\int_{-2}^3 (x|x|+3)\,dx$

في التمارين (11−13)، دون حساب قيمة التكامل أثبت أن:

(11) $\int_{-4}^2 (x^2+2x-8)\,dx \leq 0$ (12) $\int_{-1}^0 (x^3-5x^2-6x)\,dx \geq 0$

(13) $\int_0^1 (x^2-3x+7)\,dx \geq \int_0^1 (4x-5)\,dx$

في التمارين (14−15)، استعن برسم بيان الدوال لإيجاد:

(14) $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ (15) $\int_{-5}^0 -\sqrt{25-x^2}\,dx$

في التمارين (16−19)، استخدم التعويض المناسب لحساب التكامل.

(16) $\int_0^3 \frac{dx}{(1+x)^2}$ (17) $\int_e^6 \frac{dx}{x\ln x}$

(18) $\int_1^e \frac{\ln^6 x}{x}\,dx$ (19) $\int_{-1}^3 \frac{x\,dx}{x^2+1}$

في التمارين (20−23)، أوجد:

(20) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$ (21) $\int_0^{\pi} x\cos 3x\,dx$

(22) $\int_1^3 x^3\ln x\,dx$ (23) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx$

في التمارين (24−26)، أوجد:

(24) $\int_{-1}^1 \frac{4}{x^2-4}\,dx$ (25) $\int_{-2}^0 \frac{5x-1}{x^2+2x-3}\,dx$ (26) $\int_1^3 \frac{x^2}{(x+1)^2}\,dx$

22

في المثالين (7), (6)

يوضّح هذا المثالان علاقة التكامل المحدد بمساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة ومحور السينات والمستقيمين $x = b$، $x = a$.

في المثالين (9), (8)

بيّن للطلاب في هذين المثالين أن طريقة التكامل بالتعويض ترتكز بالدرجة الأولى على مهاراتهم وخبراتهم ومكتسباتهم السابقة، ولا يوجد قاعدة أو قانون عند استخدامها، إذ يتوجب عليهم محاولة إيجاد الربط بين الدالة ومشتقتها باستخدام قواعد الاشتقاق.

نبّه الطلاب إلى أنه عند استخدام التكامل بالتعويض فإن حدود التكامل المحدد سوف تتغير أيضًا حيث إن a تصبح $g(a)$، b تصبح $g(b)$.

في المثالين (11), (10)

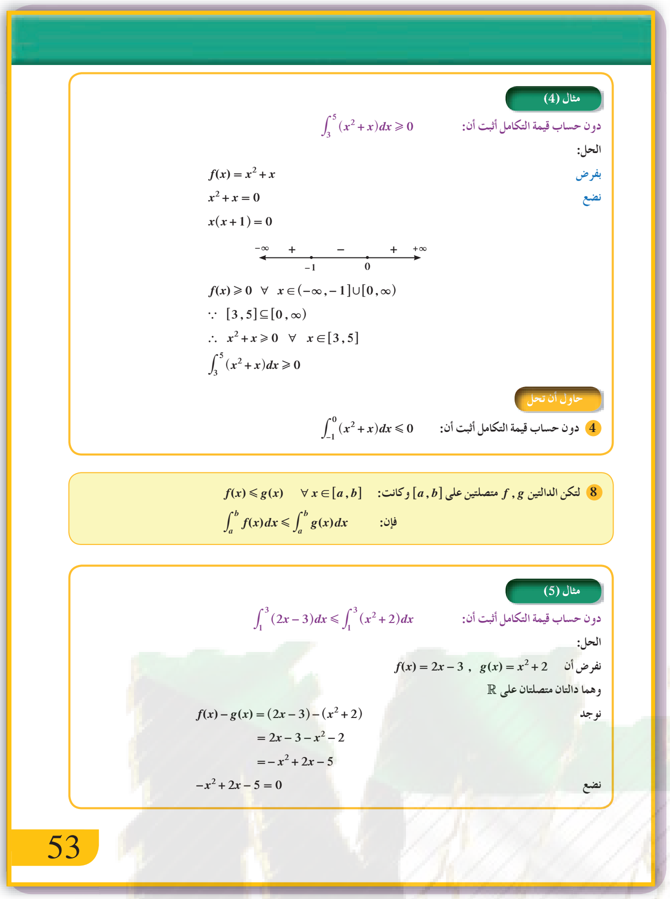
نستخدم التكامل بالتجزيء والتكامل باستخدام الكسور الجزئية، ثم نطبّق التكامل المحدد.

6 الربط

لا يوجد

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في التعويض بحدود التكامل حيث يقومون بالتعويض في الحد الأدنى أولًا ثم الحد الأعلى، وقد يخطئ الطلاب أيضًا باستخدام طريقة التكامل بالتعويض عند إيجاد قيمة التكامل المحدد فلا يقوموا بإجراء التعويض على قيم الحدود a، b. ساعدهم بأمثلة متعددة على استخدام هذه الطريقة مع التنبيه إلى تبديل قيم a، b إلى $g(a)$، $g(b)$ على الترتيب.



مثال (4)

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_3^5 (x^2+x)dx \geqslant 0$

الحل:

بفرض $f(x) = x^2 + x$

نضع $x^2 + x = 0$

$x(x+1) = 0$

$f(x) \geqslant 0 \quad \forall \quad x \in (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$

$\because \quad [3, 5] \subseteq [0, \infty)$

$\therefore \quad x^2 + x \geqslant 0 \quad \forall \quad x \in [3, 5]$

$\int_3^5 (x^2+x)dx \geqslant 0$

حاول أن تحل

4 دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_{-1}^0 (x^2+x)dx \leqslant 0$

8 لتكن الدالتين f , g متصلتين على $[a, b]$ وكانت: $f(x) \leqslant g(x) \quad \forall x \in [a, b]$

فإن: $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$

مثال (5)

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_1^3 (2x-3)dx \leqslant \int_1^3 (x^2+2)dx$

الحل:

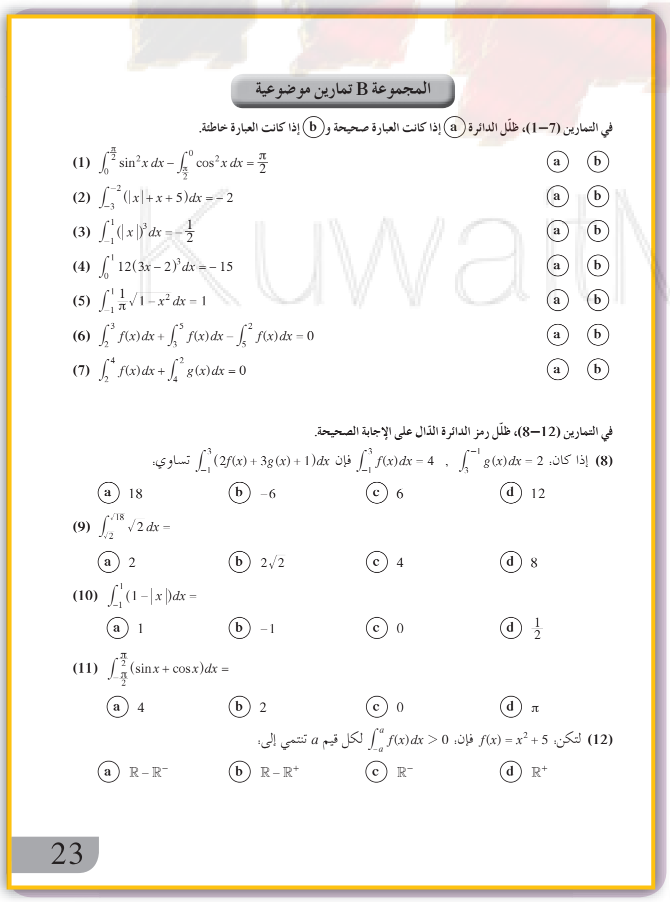
نفرض أن $f(x) = 2x - 3 \ , \ g(x) = x^2 + 2$

وهما دالتان متصلتان على $\mathbb{R}$

نوجد
$$f(x) - g(x) = (2x-3) - (x^2+2)$$
$$= 2x - 3 - x^2 - 2$$
$$= -x^2 + 2x - 5$$

نضع $-x^2 + 2x - 5 = 0$

53



المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—7)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 x\, dx = \frac{\pi}{2}$ (a) (b)

(2) $\int_{-3}^{-2} (|x| + x + 5)dx = -2$ (a) (b)

(3) $\int_{-1}^1 (|x|)^3 dx = -\frac{1}{2}$ (a) (b)

(4) $\int_0^1 12(3x-2)^3 dx = -15$ (a) (b)

(5) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}\, dx = 1$ (a) (b)

(6) $\int_2^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx - \int_5^2 f(x)dx = 0$ (a) (b)

(7) $\int_2^4 f(x)dx + \int_4^2 g(x)dx = 0$ (a) (b)

في التمارين (8—12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(8) إذا كان: $\int_3^{-1} g(x)dx = 2 \ , \ \int_{-1}^3 f(x)dx = 4$ فإن $\int_{-1}^3 (2f(x) + 3g(x) + 1)dx$ تساوي:

(a) 18 (b) -6 (c) 6 (d) 12

(9) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{2}\, dx =$

(a) 2 (b) $2\sqrt{2}$ (c) 4 (d) 8

(10) $\int_{-1}^1 (1 - |x|)dx =$

(a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

(11) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)dx =$

(a) 4 (b) 2 (c) 0 (d) π

(12) لتكن: $f(x) = x^2 + 5$ فإن: $\int_{-a}^a f(x)dx > 0$ لكل قيم a تنتمي إلى:

(a) $\mathbb{R} - \mathbb{R}^-$ (b) $\mathbb{R} - \mathbb{R}^+$ (c) $\mathbb{R}^-$ (d) $\mathbb{R}^+$

23

8 التقييم

تابع بدقة عمل الطلاب في إجراء التكامل مع فقرات «حاول أن تحل» لملاحظة الأخطاء ومساعدتهم على تجنبها.

اختبار سريع

1 أوجد: $\int_{-1}^{1}(2x+3)^2 dx$

$u = 2x+3 \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$

$x = -1 \Longrightarrow u = 1$

$x = 1 \Longrightarrow u = 5$

$\int_1^5 \frac{1}{2}u^2 du = \frac{1}{6}[u^3]_1^5 = \frac{62}{3}$

2 احسب: $I = \int_{-1}^{3}\sqrt{-2x+7}\,dx$

$I = \int_{-1}^{3}(-2x+7)^{\frac{1}{2}}dx$

نأخذ:

$u = -2x+7 \Rightarrow du = -2dx \Rightarrow dx = -\frac{1}{2}du$

عند $x = -1$ نحصل على $u = 9$

عند $x = 3$ نحصل على $u = 1$

$\therefore\ I = \int_9^1 -\frac{1}{2}(u)^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\int_1^9 u^{\frac{1}{2}}du$

$I = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)[u^{\frac{3}{2}}]_1^9 = \frac{1}{3}[u\sqrt{u}]_1^9$

$I = \frac{26}{3}$

3 احسب: $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin^2 x}dx$

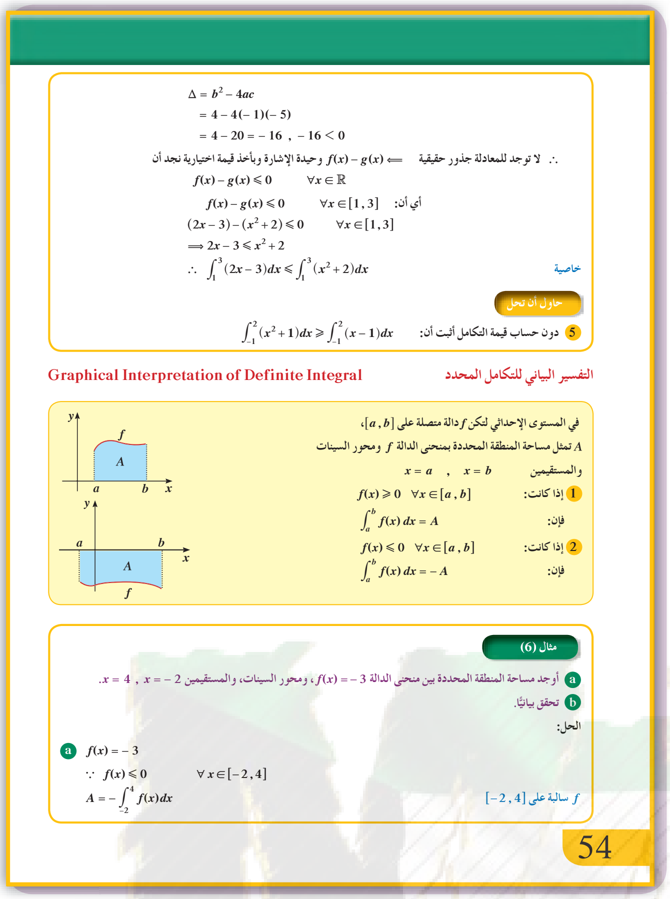
نأخذ:

$u = x \qquad dv = \frac{dx}{\sin^2 x}$

$du = dx \qquad v = -\cot x$

$I = [-x\cot x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + [\ln|\sin x|]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$



$\Delta = b^2 - 4ac$
$= 4 - 4(-1)(-5)$
$= 4 - 20 = -16\ ,\ -16 < 0$

$\therefore$ لا توجد للمعادلة جذور حقيقية $\Longleftarrow$ $f(x)-g(x)$ وحيدة الإشارة وبأخذ قيمة اختيارية نجد أن

$f(x)-g(x) \leqslant 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

أي أن: $f(x)-g(x) \leqslant 0 \qquad \forall x \in [1,3]$

$(2x-3)-(x^2+2) \leqslant 0 \qquad \forall x \in [1,3]$

$\Longrightarrow 2x-3 \leqslant x^2+2$

خاصية $\therefore\ \int_1^3(2x-3)dx \leqslant \int_1^3(x^2+2)dx$

حاول أن تحل

5 دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_{-1}^{2}(x^2+1)dx \geqslant \int_{-1}^{2}(x-1)dx$

التفسير البياني للتكامل المحدد Graphical Interpretation of Definite Integral

في المستوى الإحداثي لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$،
A تمثل مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x=a\ ,\ x=b$

1 إذا كانت: $f(x) \geqslant 0\ \ \forall x \in [a,b]$
فإن: $\int_a^b f(x)\,dx = A$

2 إذا كانت: $f(x) \leqslant 0\ \ \forall x \in [a,b]$
فإن: $\int_a^b f(x)\,dx = -A$

مثال (6)

a أوجد مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة $f(x) = -3$، ومحور السينات، والمستقيمين $x=-2\ ,\ x=4$.

b تحقق بيانيًّا.

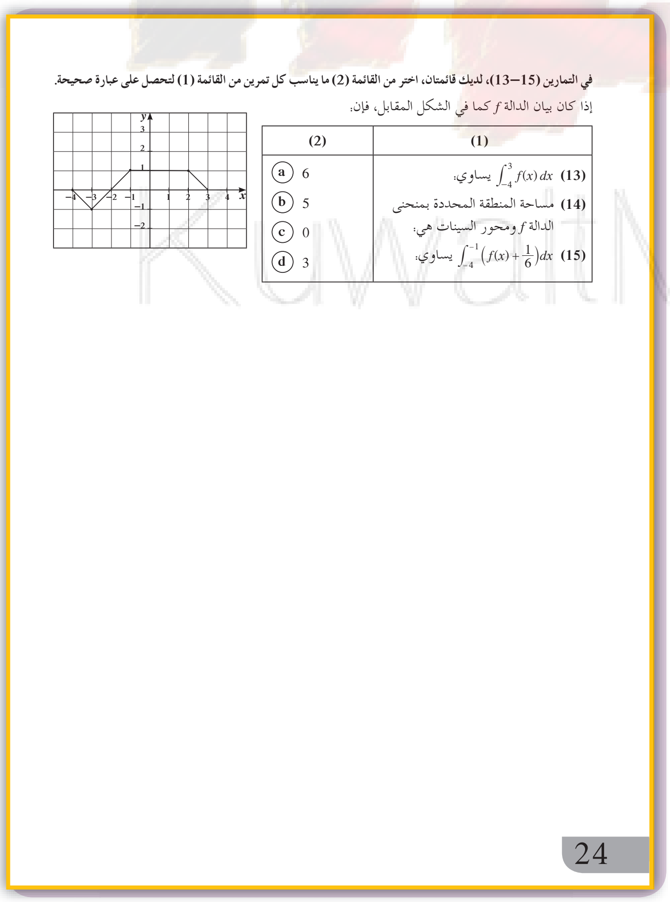
الحل:

a $f(x) = -3$

$\because\ f(x) \leqslant 0 \qquad \forall x \in [-2,4]$

$A = -\int_{-2}^{4} f(x)dx$ $\qquad f$ سالبة على $[-2,4]$

54



في التمارين (15–13)، لديك قائمتان، اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين من القائمة (1) لتحصل على عبارة صحيحة.

إذا كان بيان الدالة f كما في الشكل المقابل، فإن:

(1)	(2)
(13) $\int_{-4}^{3} f(x)\,dx$ يساوي:	a 6
(14) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات هي:	b 5
(15) $\int_{-4}^{-1}\left(f(x)+\frac{1}{6}\right)dx$ يساوي:	c 0
	d 3

24

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a) $F(x) = x^2 - 2x + C$

(b) $F(1) = -1 + C\ ,\ F(4) = 8 + C\ ;\ F(4) - F(1) = 9$

(c) $A = \dfrac{6 \times 3}{2} = \dfrac{18}{2} = 9$ units square

(d) $F(4) - F(1) = A = 9$

«حاول أن تحل»

1 $\left[\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2}{3}x^3 + 2x\right]_2^7 = \dfrac{4\,595}{12}$

2 **(a)** $\left[-\dfrac{1}{4}\cos 2x + \cot x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\dfrac{3}{4}$

(b) $-5[x]_{-3}^{2} = -25$

(c) $\left[-\dfrac{x^4}{2} + \dfrac{x^3}{3}\right]_3^3 = 0$

(d) $[\ln|x-1|]_2^4 = \ln 3$

3 **(a)** $\int_{-3}^{2}(-2x+4)dx + \int_{2}^{4}(2x-4)dx$

$= [-x^2 + 4x]_{-3}^{2} + [x^2 - 4x]_2^4 = 29$

(b) $\int_1^3 |x+2|\,dx = \int_1^3 (x+2)dx = \left[\dfrac{x^2}{2} + 2x\right]_1^3 = 8$

$f(x) = -3$

$= -\int_{-2}^{4} -3\,dx$

$= \int_{-2}^{4} 3\,dx$

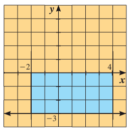
$= 3(4-(-2))$

$= 18$ units squared

b تحقق بيانيًّا:

مساحة المنطقة تساوي مساحة المستطيل الذي بعديه 3، 6 (وحدة طول)

$\therefore\ A = 3 \times 6 = 18$ units squared



حاول أن تحل

6 أوجد قيمة $\int_1^5 (2-2x)dx$ بيانيًّا.

مثال (7)

أوجد:

a $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$ **b** $\int_0^3 -\sqrt{9-x^2}\,dx$

الحل:

a $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$

نأخذ: $y = \sqrt{4-x^2}$

$y^2 = 4 - x^2$

$x^2 + y^2 = 4$

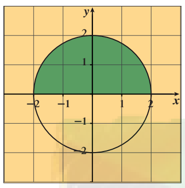
وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 2 وحدة طول.

والدالة: $y = \sqrt{4-x^2}$ تمثل معادلة النصف العلوي للدائرة

مساحة المنطقة المظللة $= \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$

$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi(2)^2$

$= 2\pi$



b $\int_0^3 -\sqrt{9-x^2}\,dx$

نأخذ: $y = -\sqrt{9-x^2}$

$y^2 = 9 - x^2$

$x^2 + y^2 = 9$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها 3 وحدات طول.

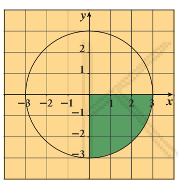
والدالة $y = -\sqrt{9-x^2}$ تمثل معادلة النصف السفلي للدائرة

فيكون:

$\int_0^3 -\sqrt{9-x^2}\,dx = -A$

$= \frac{-1}{4}\pi(3)^2$

$= \frac{-9\pi}{4}$



حاول أن تحل

7 أوجد:

a $\int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}\,dx$ **b** $\int_0^4 -\sqrt{16-x^2}\,dx$

تعلمت في البنود السابقة طرائق عدة لإيجاد التكامل غير المحدد منها التكامل بالتعويض والتكامل بالتجزيء والتكامل بالكسور الجزئية. وتستخدم هذه الطرائق أيضًا في إيجاد التكاملات المحددة.

ويجب مراعاة ما يلي عند استخدام طريقة التعويض في إيجاد التكامل المحدد:

$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$

بفرض $u = g(x)\ ,\ du = g'(x)dx$

ثم كامل بالنسبة لـ u من $u = g(a)$ إلى $u = g(b)$ بحيث يكون:

$\int_c^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \cdot du$

مثال (8)

أوجد: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x\,dx$

الحل:

$u = \tan x\ ,\ du = \sec^2 x\,dx$

عندما $x = 0$ فإن $u = \tan 0 = 0$

عندما $x = \frac{\pi}{4}$ فإن $u = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

4 في الفترة $[-1,0]$ نلاحظ أن $f(x) = x^2 + x \le 0$

وبالتالي دون احتساب التكامل نحصل على:

$$\int_{-1}^{0}(x^2+x)dx \le 0$$

5 نأخذ: $f(x) = x^2+1$ ، $g(x) = x-1$

نوجد:

$$f(x) - g(x) = x^2+1-x+1$$

$$f(x) - g(x) = x^2-x+2$$

نحسب: $\Delta = 1-8 = -7 < 0$

فتكون إشارة x^2-x+2 هي إشارة معامل x^2 أي

$$x^2-x+2 \ge 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ومنه: $x^2+1 \ge x-1 \Longrightarrow f(x)-g(x) \ge 0$

أي: $f(x) \ge g(x)$

$$\therefore \int_{-1}^{2}(x^2+1)dx \ge \int_{-1}^{2}(x-1)dx$$

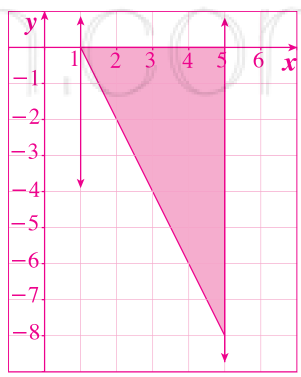
6 نرسم المستقيم $y = -2x+2$ على الفترة $[1,5]$

التكامل المحدد = سالب مساحة

المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f(x) = 2-2x$، محور السينات والمستقيمان $x = 1$، $x = 5$ أي سالب مساحة

المنطقة المظللة وهو مثلث:

$$\therefore \int_{1}^{5}(2-2x)dx = \frac{-1}{2}(4)(8) = -16$$



7 **(a)** $\int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,dx$

نأخذ: $y = \sqrt{25-x^2}$

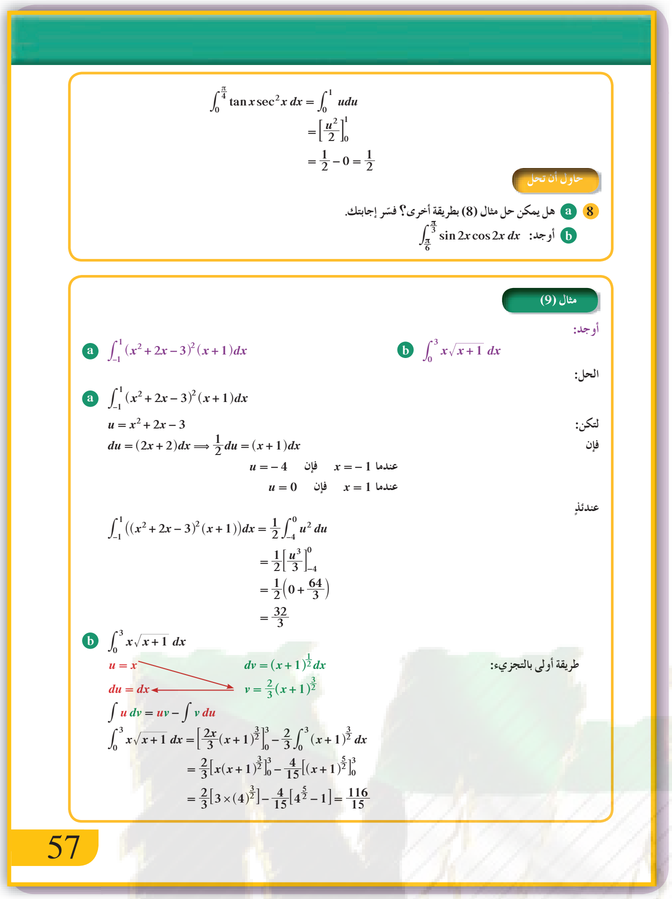
$$y^2 = 25-x^2$$

$x^2+y^2 = 25$ وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل

ونصف قطرها 5 وحدات $\therefore$ $\sqrt{25-x^2}$ تمثل نصف

الدائرة في الفترة $[-5,5]$ فوق محور السينات

$$\therefore \int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi(5)^2 = \frac{25}{2}\pi$$



$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\sec^2 x\,dx = \int_0^1 u\,du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}-0 = \frac{1}{2}$$

حاول أن تحل

8 **a** هل يمكن حل مثال (8) بطريقة أخرى؟ فسّر إجابتك.

b أوجد: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin 2x\cos 2x\,dx$

مثال (9)

أوجد:

a $\int_{-1}^{1}(x^2+2x-3)^2(x+1)dx$ **b** $\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$

الحل:

a $\int_{-1}^{1}(x^2+2x-3)^2(x+1)dx$

لتكن: $u = x^2+2x-3$

فإن $du = (2x+2)dx \Longrightarrow \frac{1}{2}du = (x+1)dx$

عندما $x = -1$ فإن $u = -4$

عندما $x = 1$ فإن $u = 0$

عندئذٍ

$$\int_{-1}^{1}((x^2+2x-3)^2(x+1))dx = \frac{1}{2}\int_{-4}^{0}u^2\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-4}^{0} = \frac{1}{2}\left(0+\frac{64}{3}\right) = \frac{32}{3}$$

b $\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$

طريقة أولى بالتجزيء:

$u = x$ ، $dv = (x+1)^{\frac{1}{2}}dx$

$du = dx$ ، $v = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$

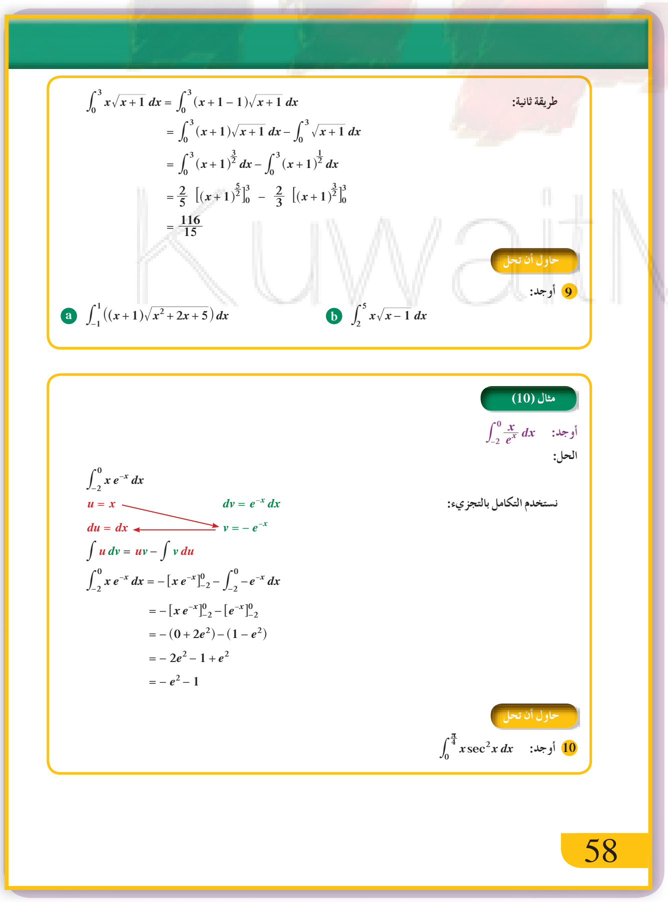
$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx = \left[\frac{2x}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 - \frac{2}{3}\int_0^3(x+1)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[x(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 - \frac{4}{15}\left[(x+1)^{\frac{5}{2}}\right]_0^3$$

$$= \frac{2}{3}\left[3\times(4)^{\frac{3}{2}}\right] - \frac{4}{15}\left[4^{\frac{5}{2}}-1\right] = \frac{116}{15}$$

57



طريقة ثانية:

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx = \int_0^3(x+1-1)\sqrt{x+1}\,dx$$

$$= \int_0^3(x+1)\sqrt{x+1}\,dx - \int_0^3\sqrt{x+1}\,dx$$

$$= \int_0^3(x+1)^{\frac{3}{2}}dx - \int_0^3(x+1)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{2}{5}\left[(x+1)^{\frac{5}{2}}\right]_0^3 - \frac{2}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$$

$$= \frac{116}{15}$$

حاول أن تحل

9 أوجد:

a $\int_{-1}^{1}\left((x+1)\sqrt{x^2+2x+5}\right)dx$ **b** $\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx$

مثال (10)

أوجد: $\int_{-2}^{0}\frac{x}{e^x}dx$

الحل:

$\int_{-2}^{0}x e^{-x}\,dx$

نستخدم التكامل بالتجزيء:

$u = x$ ، $dv = e^{-x}dx$

$du = dx$ ، $v = -e^{-x}$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int_{-2}^{0}x e^{-x}dx = -[x e^{-x}]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0}-e^{-x}dx$$

$$= -[x e^{-x}]_{-2}^{0} - [e^{-x}]_{-2}^{0}$$

$$= -(0+2e^2)-(1-e^2)$$

$$= -2e^2-1+e^2$$

$$= -e^2-1$$

حاول أن تحل

10 أوجد: $\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\sec^2 x\,dx$

58

(b) $\int_0^4 -\sqrt{16-x^2}\,dx$

نأخذ: $y=-\sqrt{16-x^2}$

$y^2=16-x^2$

$x^2+y^2=16$ وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل

ونصف قطرها 4 وحدات $\because$ $-\sqrt{16-x^2}$ تمثل ربع

دائرة في الفترة $[0,4]$ تحت محور السينات

$$\therefore \int_0^4 -\sqrt{16-x^2}\,dx=\frac{-1}{4}\pi(4)^2=-4\pi$$

8 **(a)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$

نستخدم التكامل بالتعويض:

$u=\cos x$

$du=-\sin x\,dx$

$x=0 \Longrightarrow u=1\ ,\ x=\frac{\pi}{4}\Longrightarrow u=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$-\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{du}{u^3}=-\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}u^{-3}du=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{u^2}\right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}$$

وهناك حلول أخرى أيضًا.

(b) $u=\sin 2x \Longrightarrow du=2\cos 2x\,dx$

$x=\frac{\pi}{6}\Longrightarrow u=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ x=\frac{\pi}{3}\Longrightarrow u=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}u\,du=0 \qquad \left(\int_a^a f(x)dx=0\right)$

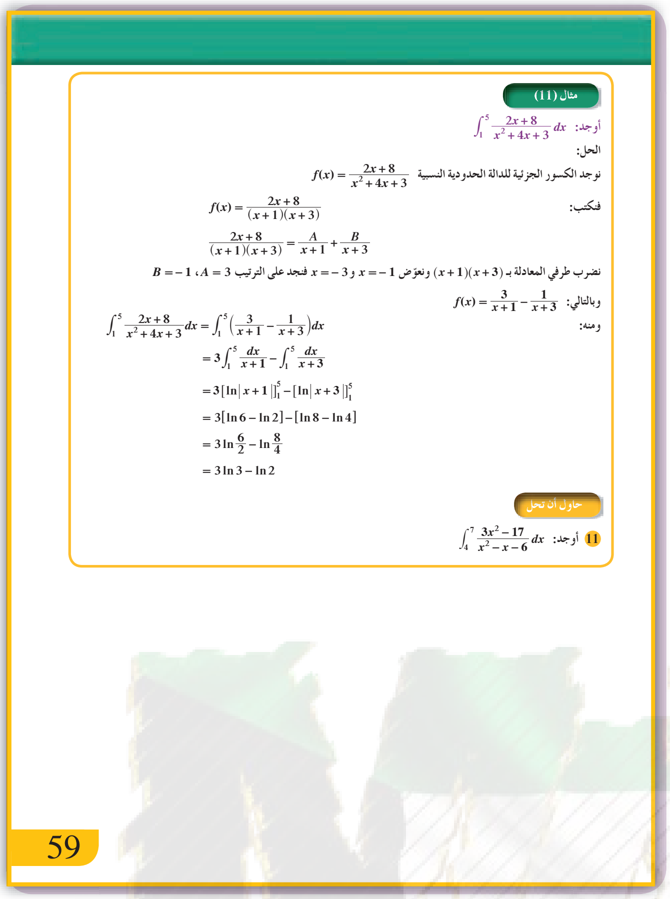
9 **(a)** $u=x^2+2x+5\Rightarrow du=2(x+1)\,dx$

$(x+1)dx=\frac{du}{2}$

$x=-1\Rightarrow u=4$

$x=1\Rightarrow u=8$

$$\therefore \frac{1}{2}\int_4^8 u^{\frac{1}{2}}du=\frac{1}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_4^8$$
$$=\frac{1}{3}(8^{\frac{3}{2}}-4^{\frac{3}{2}})$$
$$=\frac{8}{3}(2\sqrt{2}-1)$$


مثال (11)

أوجد: $\int_1^5 \frac{2x+8}{x^2+4x+3}dx$

الحل:

نوجد الكسور الجزئية للدالة الحدودية النسبية $f(x)=\frac{2x+8}{x^2+4x+3}$

فنكتب: $f(x)=\frac{2x+8}{(x+1)(x+3)}$

$\frac{2x+8}{(x+1)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}$

نضرب طرفي المعادلة بـ $(x+1)(x+3)$ ونعوّض $x=-1$ و $x=-3$ فنجد على الترتيب $A=3$، $B=-1$

وبالتالي: $f(x)=\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x+3}$

ومنه:

$$\int_1^5\frac{2x+8}{x^2+4x+3}dx=\int_1^5\left(\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)dx$$
$$=3\int_1^5\frac{dx}{x+1}-\int_1^5\frac{dx}{x+3}$$
$$=3[\ln|x+1|]_1^5-[\ln|x+3|]_1^5$$
$$=3[\ln 6-\ln 2]-[\ln 8-\ln 4]$$
$$=3\ln\frac{6}{2}-\ln\frac{8}{4}$$
$$=3\ln 3-\ln 2$$

حاول أن تحل

11 أوجد: $\int_4^7\frac{3x^2-17}{x^2-x-6}dx$

59

(b) $u=x-1\Longrightarrow du=dx$

$x=u+1$

$x=2\Longrightarrow u=1$

$x=5\Longrightarrow u=4$

$$\int_1^4(u+1)u^{\frac{1}{2}}du=\int_1^4 u^{\frac{3}{2}}du+\int_1^4 u^{\frac{1}{2}}du$$
$$=\frac{2}{5}[u^{\frac{5}{2}}]_1^4+\frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_1^4=\frac{2}{5}[31]+\frac{2}{3}[7]$$
$$=\frac{256}{15}$$

10 $u=x \qquad dv=\sec^2 x\,dx$

$du=dx \qquad v=\tan x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\sec^2 x\,dx=[x\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$$
$$=[x\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}}+[\ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$$

11 $\int_4^7\frac{3x^2-17}{x^2-x-6}dx=\int_4^7\left(3+\frac{A_1}{x-3}+\frac{A_2}{x+2}\right)dx$

$=3[x]_4^7+2[\ln|x-3|]_4^7+[\ln|x+2|]_4^7$

$=9+4\ln 2+\ln 3-\ln 2=9+3\ln 2+\ln 3$

المرشد لحل المسائل

حل «مسألة إضافية»

(a) بإيجاد الدالة العكسية:

$$\int C(x)\,dx = \int (10x+50)\,dx = 5x^2+50x+k$$

$$C(x) = 5x^2+50x+k$$

$$C(10) = 2\,000$$

ولكن:

$$2\,000 = 500+500+k \Rightarrow k = 1000$$

لذا: $C(x) = 5x^2+50x+1\,000$

(b) $C(20) = 5(20)^2+50(20)+1000 = 4\,000$

التكلفة $= 4\,000$ دينار

المرشد لحل المسائل

إن معدل التغير الشهري في دالة العائدات للمتجر الذي يملكه فهد من بيع سلعة معينة هو $\frac{dR}{dx} = R'(x) = x^2 - x$ حيث x هو عدد الوحدات المباعة شهريًّا من السلعة وR هو العائدات الشهرية من بيع x وحدات من السلعة نفسها بالدينار.

(a) اشرح كيف يمكن لفهد أن يجد الدالة التي تمثل العائدات الشهرية في متجره من بيع السلعة المذكورة.

(b) ما هي عائدات فهد في الشهر الذي يباع خلاله 30 وحدة من السلعة المذكورة؟

الحل:

(a) لإيجاد دالة العائدات فكّر فهد بإيجاد المشتقة العكسية لمعدل التغير الشهري، وهنا قام بوضع $R(x) = \int R'(x)\,dx$ أي $R(x) = \int (x^2-x)\,dx$ مما يعطي دالة العائدات على النحو $R(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C$ مما يجعل وجود الثابت C لغزًا، عندها فكّر وانتبه أنه عندما لا تباع أي وحدة شهريًّا يكون العائد هو 0 أي $R(0) = 0$ مما يعطيه أن $C = 0$ وهنا تأكد أن دالة العائدات الشهرية هي: $R(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$ (دينار) في الشهر عندما يبيع x وحدة.

(b) أما عائدات المتجر من السلعة عندما يبيع فهد 30 وحدة هو:

$$R(30) = \frac{(30)^3}{3} - \frac{(30)^2}{2} = 9\,000 - 450 = 8\,550 \text{ (دينارًا)}$$

مسألة إضافية

إن معدل التغير الأسبوعي في دالة التكلفة لمصنع الإطارات الذي يملكه عيسى عند صنع x إطار أسبوعيًّا هو: $\frac{dC}{dx} = C'(x) = 10x + 50$ حيث $C(x)$ هي التكلفة الأسبوعية من بيع x إطار بالدينار.

(a) اشرح كيف يمكن لعيسى أن يجد الدالة التي تمثل التكلفة الأسبوعية لصنع x إطار علمًا أن التكلفة لصنع 10 إطارات أسبوعيًّا هي 2 000 دينار.

(b) ما هي تكلفة صنع 20 إطارًا في الأسبوع الواحد في مصنع عيسى؟

60

اختبار الوحدة الخامسة

(1) أثبت أن: $F(x) = \frac{1}{3}\sqrt{(2x^2+6x+5)^3} + 8$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = (2x+3)\sqrt{2x^2+6x+5}$.

(2) إذا كان: $F(x) = \int (3x^2-2x)dx$ وكان: $F(2) = 6$، فأوجد $F(x)$.

في التمارين (3—20)، أوجد:

(3) $\int (x+2)\sqrt{x^2+4x+7}\,dx$

(4) $\int \frac{2x-1}{(x^2-x+7)^5}\,dx$

(5) $\int x^2\sqrt[3]{x-3}\,dx$

(6) $\int x^3\sqrt{x^2-8}\,dx$

(7) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$

(8) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx$

(9) $\int \sin x\sqrt[3]{\cos^2 x}\,dx$

(10) $\int \sec^7 x\tan x\,dx$

(11) $\int \left(e^{3x} + \frac{4}{2x-1}\right)dx$

(12) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\,dx$

(13) $\int \frac{x^2-4x}{x^3-6x^2+1}\,dx$

(14) $\int \frac{e^{2x}+x}{e^{2x}+x^2+3}\,dx$

(15) $\int (x^2-4)\cos x\,dx$

(16) $\int \ln(3x+2)\,dx$

(17) $\int 3x\,e^{2x+1}\,dx$

(18) $\int x^2e^{2x-1}\,dx$

(19) $\int \frac{x^2-3x}{x^2-3x-28}\,dx$

(20) $\int \frac{x^4+2x^2+6x}{x^3+4x^2+4x}\,dx$

في التمارين (21—26)، أوجد:

(21) $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$

(22) $\int_{-1}^1 2x\sin(1-x^2)\,dx$

(23) $\int_0^5 |2x-5|\,dx$

(24) $\int_{-6}^0 -\sqrt{36-x^2}\,dx$

(25) $\int_3^5 \frac{x^2-3}{x^2-3x+2}\,dx$

(26) $\int_1^3 \frac{x^3-2x^2+2}{x^3+6x^2+9x}\,dx$

في التمارين (27—29)، دون حساب قيمة التكامل أثبت أن:

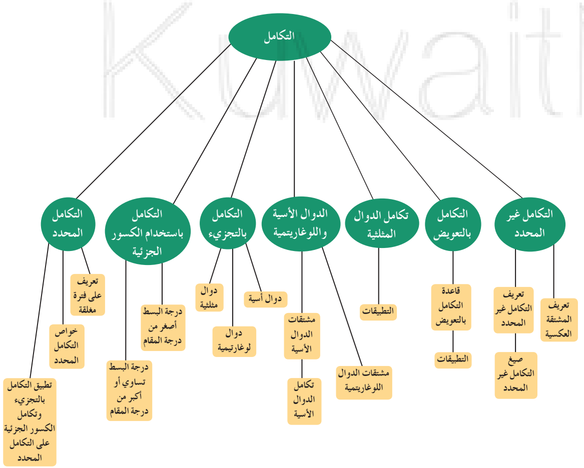
(27) $\int_2^5 (-x^2+7x+8)\,dx \geq 0$

(28) $\int_{-4}^{-2} (x^2+7x+10)\,dx \leq 0$

(29) $\int_{-5}^{-4} (x^2+13x+9)dx \leq \int_{-5}^{-4} (5x-6)dx$

25

مخطط تنظيمي للوحدة الخامسة



ملخص

- التكامل غير المحدد للدالة f بالنسبة إلى x يكتب $\int f(x)\,dx$ ويساوي $F(x)+C$ حيث $F(x)$ هي المشتقة العكسية وC ثابت التكامل.

61

- جدول صيغ التكامل:

قاعدة المشتقّة	التكامل غير المحدد
$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^n \ , \ n\neq -1$	1 $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \ , \ n\neq -1$
$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos kx}{k}\right)=\sin kx$	2 $\int \sin kx\,dx=-\frac{\cos kx}{k}+C$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin kx}{k}\right)=\cos kx$	3 $\int \cos kx\,dx=\frac{\sin kx}{k}+C$
$\frac{d}{dx}\tan x=\sec^2 x$	4 $\int \sec^2 x\,dx=\tan x+C$
$\frac{d}{dx}(-\cot x)=\csc^2 x$	5 $\int \csc^2 x\,dx=-\cot x+C$
$\frac{d}{dx}\sec x=\sec x\tan x$	6 $\int \sec x\tan x\,dx=\sec x+C$
$\frac{d}{dx}(-\csc x)=\csc x\cot x$	7 $\int \csc x\cot x\,dx=-\csc x+C$

قاعدة التكامل بالتعويض $\int f(g(x))g'(x)\,dx=F(g(x))+C$

- خواص التكامل غير المحدد

a $\int (f(x)\pm g(x))\,dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

b $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$

c $\int -f(x)dx=-\int f(x)dx$

d $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$

e $\int f'(x)e^{f(x)}dx=e^{f(x)}+C$

جدول تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

قاعدة المشتقّة	التكامل غير المحدد
$\frac{d}{dx}e^x=e^x$	$\int e^x\,dx=e^x+C$
$\frac{d}{dx}e^u=e^u\frac{du}{dx}=u'e^u$	$\int u'e^u\,dx=e^u+C$
$\frac{d}{dx}\ln|x|=\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$
$\frac{d}{dx}\ln|u|=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}=\frac{u'}{u}$	$\int \frac{u'}{u}dx=\ln|u|+C$

62

- التكامل بالتجزيء: $\int u\,dv=uv-\int v\,du$ حيث u , v دالتين في x قابلتين للتفاضل.
- الكسور الجزئية

تفكيك $\frac{r(x)}{h(x)}$ إلى كسور جزئية.

لكل عامل من $h(x)$ على الصورة $(mx+n)^k$، يجب أن يحتوي التفكيك إلى كسور جزئية على مجموع حدود عددها k :

$$\frac{A_1}{mx+n}+\frac{A_2}{(mx+n)^2}+\dots+\frac{A_k}{(mx+n)^k}$$

لاحظ أنه في حالة $k=1$، فإنه يوجد حد واحد فقط في المجموع.

- تفكيك $\frac{r(x)}{h(x)}$ إلى كسور جزئية

حلّل المقام وحدّد العوامل الخطية لِـ $h(x)$.

- التكامل المحدد

- $\int_a^b f(x)\,dx=\left[\int f(x)\,dx\right]_a^b=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$
- $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du(u=g(x) \ ; \ du=g'(x)\,dx)$

1 إذا f دالة متصلة وموجبة على $[a,b]$، $a<b$، فإن $\int_a^b f(x)dx$ يمثل المساحة المحددة بمنحنى الدالة f، ومحور السينات، والمستقيمين ذات المعادلتين $x=a$, $x=b$.

2 إذا f دالة متصلة وسالبة على $[a,b]$، $a<b$، فإن $-\int_a^b f(x)dx$ يمثل المساحة المحددة بمنحنى الدالة f، ومحور السينات، والمستقيمين ذات المعادلتين $x=a$, $x=b$.

- خواص التكامل المحدد

f دالة متصلة على $[a,b]$

1 $\int_a^a f(x)dx=0$

2 $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$

3 $\int_a^b k\,dx=k(b-a)$

4 $\int_a^b k\,f(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$

5 $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx \ ; \ c\in[a,b]$

6 $f(x)\geqslant 0 \ \forall \ x\in[a,b]\Longrightarrow\int_a^b f(x)dx\geqslant 0$

7 $f(x)\leqslant 0 \ \forall \ x\in[a,b]\Longrightarrow\int_a^b f(x)dx\leqslant 0$

8 f ، g دالتان متصلتان على $[a,b]$ وإذا كان: $f(x)\leqslant g(x)\forall\, x\in[a,b]\Longrightarrow\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b g(x)\,dx$

63

تمارين إثرائية

في التمرينين (2—1)، ارسم بيانيًّا الدالة على الفترة المعطاة، ثمّ أوجد:

(a) تكامل الدالّة على الفترة.

(b) المساحة للمنطقة بين المنحنى ومحور السينات.

(1) $y=-x^2+5x-4 \ , \ [0,2]$

(2) $y=x^2-4x \ , \ [0,5]$

في التمرينين (4—3)، أوجد قيمة y.

(3) $\frac{dy}{dx}=x^2\ln x$

(4) $\frac{dy}{d\theta}=\csc\theta\cot\theta$

(5) أوجد المشتقة العكسية لِـ y باستخدام القيمة الابتدائية: $\frac{d^2y}{dx^2}=2-6x \ , \ y(0)=1 \ , \ y'(0)=4$

(6) **تكلفة الطباعة.** يتكلّف طبع 25 نسخة من إحدى الأوراق 50 دينارًا، ولطبع x نسخة تعطى التكلفة الحديّة بالعلاقة $\frac{dc}{dx}=\frac{2}{\sqrt{x}}$ دينارًا كويتيًّا لكلّ نسخة.
أوجد التكلفة الكلّيّة لطبع 2 500 نسخة.

في التمرينين (8—7)، أوجد التكامل:

(7) $\int x^3e^x\,dx$

(8) $\int x^3\ln x\,dx$

(9) استخدم الكسور الجزئية لتوجد التكاملات التالية:

(a) $\int\frac{x-2}{2x^2-5x+3}dx$

(b) $\int\frac{x^2-9}{(2x+1)(x^2+10x+25)}dx$

(c) $\int\frac{x^4+3x^2-7}{(x-1)(x^2+5x-6)}dx$

في التمرينين (11—10) استعن برسم بيان الدوال لايجاد:

(10) $\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\,dx$

(11) $\int_{-4}^{4}\left(\frac{1}{\pi}-x\right)\sqrt{16-x^2}\,dx$

في التمارين (14—12)، أوجد التكامل المحدد.

(12) $\int_0^2\frac{2x+3}{x^2+5x+4}dx$

(13) $\int_1^3\frac{x^3-6x^2+3}{x^3-6x^2+9x}dx$

(14) $\int_3^5 x^3\sqrt{x^2-4}\,dx$

في التمرينين (16—15)، دون حساب قيمة التكامل أثبت أن:

(15) $\int_0^2(-x^2+9x-18)dx\leq 0$

(16) $\int_{-1}^{2}(x^2+13x+15)dx\geq\int_{-1}^{2}(3x-6)dx$

26