الوحدة الثامنة: الاحتمال Probability

قسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

8–1: المتغيرات العشوائية المتقطعة.

جزء 1: المتغير العشوائي.

جزء 2: المتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة).

جزء 3: التوزيع الاحتمالي.

جزء 4: بيان دالة التوزيع الاحتمالي.

جزء 5: التوقع (الوسط) والتباين للمتغيرات العشوائية المتقطعة.

جزء 6: دالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي متقطع.

جزء 7: بيان دالة التوزيع التراكمي.

جزء 8: توزيع ذات الحدين.

جزء 9: التوقع والتباين لتوزيع ذات الحدين.

8–2: المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة).

جزء 1: التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل (المستمر).

جزء 2: التوزيع الاحتمالي المنتظم لمتغير عشوائي متصل (مستمر).

جزء 3: التوزيع الاحتمالي الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$.

مقدمة الوحدة

تؤدّي الكثير من العمليات إلى نتائج ترتكز بقسم كبير منها أو كليًّا على الحظ. ولكن من الضروري اتخاذ قرارات حتى وإن لم نكن متأكدين من النتائج.

يأخذ علم الاحتمال أهمّية متزايدة في عالمنا الحاضر وعلى جميع الأصعدة: الهندسة، الأحياء، الاقتصاد...

يستخدم مربو الأسماك في الأحواض علم الاحتمال لمعرفة عدد الأسماك في الحوض كونهم لا يستطيعون عدّها بطريقة مباشرة. تقوم إحدى هذه الطرق على أخذ ألف سمكة مثلًا من الحوض ووضع علامة تسمح بالتعرف عليها، ثم إعادتها إلى الحوض. بعد مدّة من الزمن تؤخذ من جديد ألف سمكة من الحوض وتعد السمكات الموسومة ولنقل أن عددها مئة. وهذا يسمح بتقدير عدد الأسماك: احتمال أخذ مئة سمكة من ألف يعني أن عدد الأسماك في الحوض هو عشرة آلاف. هذه الطريقة تعطي فكرة غير دقيقة عن عدد الأسماك ولكنها كافية. ويمكن التأكيد بأن عدد الأسماك في الحوض يتخطّى بكثير الخمسة آلاف سمكة.

هذه الطريقة مستخدمة أيضًا في مجال اختبار الجودة. تخيلوا معملًا لصنع الأسهم النارية يريد التحقق من أن 95% من منتجاته صالحة. الطريقة التي عرضت أعلاه تصلح لهذا الاختبار.

ماذا يحدث عند تكرار تجربة عشوائية عددًا كبيرًا من المرّات؟ هل يمكن استخلاص معلومة؟

يقول قانون الأعداد الكبيرة بأن احتمال حصول حدث عشوائي يقترب أكثر فأكثر من احتماله النظري مع ازدياد مرّات إعادة التجربة العشوائية.

من الأفكار التي ينبغي مناقشتها: الفرق بين الاحتمالات النظرية والاحتمالات التطبيقية.

الوحدة الثامنة

الاحتمال

Probability

مشروع الوحدة: أهمية استخدام علم الاحتمالات المستند على إحصاءات سابقة للوصول إلى استنتاجات مفيدة.

1 مقدمة المشروع: في إحدى رحلات الخطوط الجوية التي يتم خلالها استخدام طائرة تتسع لِـ 213 راكبًا، تقوم الشركة ببيع أكثر من 213 بطاقة لأنه معروف من رحلات سابقة أن بعض الركاب ممن سبق أن حجزوا بطاقات سفر قد يتخلفون عن الرحلة.

2 الهدف: تهتم الشركة بأن يكون عدد الركاب في الرحلة مساويًا لعدد المقاعد المتوفرة على الطائرة أي 213 مقعدًا، لأنّه إذا وجدت مقاعد فارغة على الطائرة خلال الرحلة فإن المردود المادي للرحلة سيتناقص، أما إذا كان عدد الركاب أكبر من عدد المقاعد فإن الشركة ستقوم بدفع تعويض مادي لكل راكب لم يتوفر له مقعد على متن الطائرة وهذا أيضًا سينقص من المردود المادي للرحلة.

3 اللوازم: آلة حاسبة — حاسوب.

4 أسئلة حول التطبيق:

بناءً على إحصاءات سابقة فإن احتمال تخلف راكب واحد عن رحلة جوية هو 0.0975

a أثبت أن عدد البطاقات المباعة للرحلة يجب أن يكون 236 بطاقة حتى يتأمن وجود 213 راكبًا عند انطلاق الرحلة.

b إذا باعت الشركة 240 بطاقة أي 4 بطاقات أكثر مما يلزم لتأمين 213 راكبًا.
أوجد احتمال وجود راكب إضافي لا مقعد له على متن الطائرة.

c إذا كانت الشركة تدفع 200 دينار لكل راكب حجز بطاقة ولم يجد مقعدًا على متن الطائرة للرحلة.
فأوجد احتمال أن تدفع الشركة 1 000 دينار تعويضًا للركاب الذين لم يجدوا لهم مقاعد على متن الطائرة إذا كانت الشركة قد باعت 246 بطاقة.

5 التقرير: ضع تقريرًا مفصّلًا حول المشروع واعرض استخدام خصائص الاحتمال والتوقع في تنفيذه.

دروس الوحدة

المتغيرات العشوائية المتقطعة	المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)
8-1	8-2

138

تستخدم المحاكاة لنمذجة الاحتمالات التطبيقية والقوانين لإيجاد الاحتمالات النظرية. وتسمح كلتا الطريقتين بوضع توقعات أو باتخاذ قرارات حول أحداث في المستقبل.

إن عمر قطعة إلكترونية أو مصباح كهربائي أو درجة حرارة مياه بحيرة هي متغيرات عشوائية تأخذ عددًا لا نهائيًّا من القيم على فترة ما. يُسمّى هذا المتغير متغيرًا متصلًا. لا يمكن في هذه الحالة التكلم عن احتمال حدث بل نتخطى ذلك ونأخذ قيمة المتغير على فترة ونتكلم عن كثافة احتمال. ونربط هنا بين الاحتمال الذي هو عدد ينتمي للفترة $[0,1]$ و $\sum Pi = 1$ من جهة وبين مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالّة f والمحور السيني والتي تساوي 1 أيضًا و f التي يجب أن تكون قيمتها تنتمي للفترة $[0,1]$ على I من جهة ثانية.

مشروع الوحدة

يعالج مشروع الوحدة مشكلة حول حجز بطاقات السفر مع شركات الطيران وكيفية التوفيق بين الربح الأقصى (امتلاء كل مقاعد الطائرة) وبين الخسارة الأقل (دفع تعويض للذين لم يجدوا مقعدًا لهم على الطائرة). تقوم شركات الطيران بحجز مقاعد أكثر من عدد مقاعد الطائرة لأن عددًا من الركاب سيتخلف عن السفر في آخر لحظة.

اسأل الطلاب: كيف يتم حجز المقاعد في الطائرات؟ وكيف تطوّر ليصبح إلكترونيًّا عبر شبكة الإنترنت؟

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

(a) إذا كان X عدد البطاقات المباعة فإن:

$$(1 - 0.0975)X = 213$$

$$\therefore \quad X = 236$$

(b) $$P(X = 1) = {}_4C_1 \times (1 - 0.0975)^1 \times (0.0975)^3$$

$$\approx 0.003346$$

(c) إذا دفعت الشركة 1 000 دينار كويتي فهذا يعني أن

$\frac{1000}{200} = 5$، 5 ركاب إضافيين لم يجدوا لهم مقعدًا على الطائرة من أصل 10 إضافيين.

$$P(Y = 5) = {}_{10}C_5 \times (1 - 0.0975)^5 \times (0.0975)^5$$

$$\approx 0.00133$$

التقرير

اكتب تقريرًا مفصّلًا شارحًا ما قمت به من حسابات مبيّنًا استخدام خصائص الاحتمال في عملك، واعرض ملاحظاتك حول حجز المقاعد في الطائرات واقتراحاتك.

الوحدة الثامنة

Departures

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- استخدمت مبدأ العد والتباديل والتوافيق لعد الطرق الممكنة لإجراء عملية ما.
- تعرفت التجربة العشوائية وفضاء العينة.
- عيّنت احتمالات بعض الأحداث والأحداث المتنافية ومتمم الحدث والأحداث المستقلة.

ماذا سوف تتعلم؟

- تعرف المتغيرات العشوائية المتقطعة والمتصلة.
- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي ودالة التوزيع التراكمي لمتغيّر عشوائي متقطع.
- إيجاد دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائي متصل.

المصطلحات الأساسية

المتغيّر العشوائي المتقطع – التوزيع الاحتمالي – دالة التوزيع الاحتمالي – بيان دالة التوزيع الاحتمالي – توقع المتغيّرات العشوائية المتقطعة – تباين المتغيّرات العشوائية المتقطعة – الانحراف المعياري للمتغيّرات العشوائية المتقطعة – دالة التوزيع التراكمي لمتغيّر عشوائي متقطع – بيان دالة التوزيع التراكمي لمتغيّر عشوائي متقطع – توزيع ذات الحدين – التوقع والتباين والانحراف المعياري لتوزيع ذات الحدين – تجربة برنولي – المتغيّر العشوائي المتصل (المستمر) – التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي المستمر – دالة كثافة الاحتمال – التوزيع الاحتمالي المنتظم لمتغيّر عشوائي مستمر – التوزيع الاحتمالي الطبيعي – حساب الاحتمالات للتوزيع الطبيعي – التوقع والتباين للتوزيع الاحتمالي المنتظم.

أضف إلى معلوماتك

عمل كل من مؤسسي حساب الاحتمالات (كاردانو Cardano، باسكال Pascal، فيرما Fermat، برنولي Bernoulli) على تطوير هذا الحساب وذلك من خلال تجارب نواتجها قابلة للعد.

وبعد ذلك تركز الاهتمام على متغيرات عشوائية يمكن أن تأخذ عددًا لا نهائيًّا من القيم أو كل القيم على فترة من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

بليز باسكال Blaise Pascal
(1623–1662)

بيير دي فيرما Pierre de Fermat
(1665–1601)

139

سلّم التقييم

4	الحسابات كلها صحيحة – استخدام القوانين دقيق – الشروحات واضحة وكاملة – أفكار التقرير واضحة ومتسلسلة – التوصيات صريحة ومعبرة.
3	الحسابات في معظمها صحيحة – بعض الأخطاء في استخدام القوانين – الشروحات واضحة – أفكار التقرير واضحة ومتسلسلة – التوصيات معقولة.
2	الحسابات تحتوي على أخطاء متعدّدة – استخدام القوانين غير واضح – أفكار التقرير غير مترابطة – التوصيات غير دقيقة.
1	معظم عناصر المشروع ناقصة أو غير موجودة.

1–8: المتغيرات العشوائية المتقطعة

1 الأهداف

- يتعرف المتغير العشوائي والمتغير العشوائي المتقطع والتوزيع الاحتمالي.
- يوجد وسط التوزيع الاحتمالي والتباين والانحراف المعياري.
- يتعرف دالة التوزيع التراكمي.
- يتعرف توزيع ذات الحدين وتجربة برنولي.
- يوجد التوقع والتباين لتوزيع ذات الحدين.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

المتغير العشوائي – متغير عشوائي متقطع – التوزيع الاحتمالي – توزيع ذات الحدين – وسط التوزيع الاحتمالي – تباين التوزيع الاحتمالي – دالة التوزيع الاحتمالي – دالة التوزيع التراكمي.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اسأل الطلّاب:

- ما الفرق بين التباديل والتوافيق؟
- احسب: $_{12}C_5$ ، $_{12}C_7$.
- في حالة دحرجة حجر نرد منتظم، ما احتمال الحصول على عدد زوجي؟ وما احتمال الحصول على عدد أكبر من 4؟

5 التدريس

أشر إلى أن التجربة العشوائية هي تجربة لا يمكن معرفة نتيجتها مسبقًا. اطلب إلى الطلاب إعطاء أمثلة عن تجارب عشوائية. ناقش معهم القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي. أشر إلى أن مجموع احتمالات تجربة ما يساوي 1 وهذا يسمح بإيجاد أحد الاحتمالات بمعلومية البقية.

8–1

المتغيرات العشوائية المتقطعة

Discrete Random Variables

سوف تتعلم

- المتغيّر العشوائي المتقطع والتوزيع الاحتمالي.
- توزيع ذات الحدين وتجربة برنولي.
- وسط التوزيع الاحتمالي.
- دالة التوزيع الاحتمالي ودالة التوزيع التراكمي.

المفردات والمصطلحات:

- المتغيّر العشوائي Random Variable
- التوزيع الاحتمالي Distribution Probability
- متغيّر عشوائي متقطع Discrete Random Variable
- توزيع ذات الحدين Binomial Probability Distribution
- وسط التوزيع الاحتمالي Mean of a Probability Distribution
- تباين التوزيع الاحتمالي Variance of a Probability Distribution
- دالة التوزيع الاحتمالي Probability Distribution Function
- دالة التوزيع التراكمي Cumulative Distribution Function

ملاحظة: عندما نقول قطعة نقود نعني أنها قطعة نقود منتظمة واحتمال ظهور الصورة (H) يساوي احتمال ظهور الكتابة (T).

دعنا نفكر ونتناقش

عند إلقاء حجري نرد منتظمين وملاحظة الوجه العلوي.

الحجر الأول مرقم كما يلي:

وجهان مرقمان 0، وجهان مرقمان 1، وجهان مرقمان 2.

الحجر الثاني مرقم كما يلي:

ثلاثة أوجه مرقمة 0، ثلاثة أوجه مرقمة 1.

ليكن E: مجموع العددين الظاهرين على الوجه العلوي.

الحجر الأول / الحجر الثاني

+	0	0	1	1	2	2
0	0	0	1	1	2	2
0	0	0	1	1	2	2
0	0	0	1	1	2	2
1	1	1	2	2	3	3
1	1	1	2	2	3	3
1	1	1	2	2	3	3

1. بيّن أن النتائج الممكنة هي: 3 , 2 , 1 , 0
2. (a) مستخدمًا الجدول المقابل، أوجد احتمال كل من النتائج التالية:
   $P(E=0)$
   $P(E=1)$
   $P(E=2)$
   (b) استنتج احتمال $P(E=3)$
3. (a) إذا كنا نهتم بناتج ضرب العددين الظاهرين على الوجه العلوي، فما النتائج الممكنة؟
   (b) أوجد احتمال كل من النتائج الممكنة.

مقدّمة Introduction

في ما سبق درسنا بعض مفاهيم التجارب العشوائية والاحتمال. ونحن نعلم أن فضاء العيّنة هو مجموعة نواتج التجربة العشوائية والتي غالبًا ما تكون صفات أو مسميات يصعب التعامل معها رياضيًّا.

لذا يقوم الباحث بإقران هذه النواتج الوصفية للتجربة العشوائية بقيم عددية حقيقية تسمى **بالمتغير العشوائي** والذي تتغير قيمته بتغير نتيجة التجربة العشوائية.

فعلى سبيل المثال عند إلقاء قطعة نقود منتظمة مرتين متتاليتين فإن فضاء العينة يكون كالتالي:

$S=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$

140

تمرّن 8–1

المتغيرات العشوائية المتقطعة

Discrete Random Variables

المجموعة A تمارين مقالية

(1) في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين، إذا كان المتغيّر العشوائي X يعبر عن عدد الصور فأوجد:
(a) فضاء العينة (S) وعدد عناصره $n(S)$.
(b) مدى المتغير العشوائي X.
(c) احتمال وقوع كل عنصر من عناصر فضاء العينة (S) : $f(x_i)=P(X=x_i)$
(d) دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

(2) في تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية، أوجد مجموعة القيم للمتغيرات العشوائية التالية وحدد فيما إذا كانت متغيرات عشوائية متقطعة أم لا:
(a) المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الكتابات.
(b) المتغير العشوائي Y الذي يمثل ربع عدد الكتابات.
(c) المتغير العشوائي Z الذي يمثل عدد الكتابات مضافًا له 1.

(3) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.1	0.3	K	0.2	0.3

فأوجد قيمة K.

(4) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه هو: $\{1,2,3,4\}$ وكان $f(1)=0.1$ ، $f(3)=0.4$ ، $f(4)=0.2$.
فأوجد $f(2)$، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

(5) صندوق يحوي 10 كرات متماثلة منها 6 كرات حمراء و4 كرات بيضاء سحبت 5 كرات عشوائيًّا معًا من الصندوق. إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد الكرات البيضاء.
فأوجد ما يلي:
(a) عدد عناصر فضاء العينة $n(S)$.
(b) مدى المتغير العشوائي X.
(c) احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.
(d) دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

55

شدّد على أهمية جدول التوزيع الاحتمالي لأنه يعطي فكرة واضحة عن كل الاحتمالات.

راجع مع الطلاب شروط تجربة ذات الحدين مركّزًا على معلمتي التجربة. اشرح للطلاب معنى التوزيع التراكمي.

في المثال (1)

يأخذ المتغيّر X القيم من 0 إلى 2، لأن الحصول على صورة في الرمية الأولى لا يمنع الحصول على صورة أيضًا في الرمية الثانية فالحدثان مستقلان.

نستخدم (a) للإجابة عن (b) و(c).

في المثالين (2), (3)

تحقق من استيعاب الطلاب لمعطيات المسألة قبل البدء في الحل. أشر إلى ترابط الأسئلة الأربعة، وأوضح أهمية تمثيل دالة التوزيع الاحتمالي في جدول.

في المثالين (4), (5)

استخدام شرطي دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغيّر العشوائي المتقطع X لإيجاد القيم المفقودة.

في المثال (6)

ذكّر الطلاب بمفهومي التوافيق والتباديل وخاصة دور ترتيب العناصر في عملية العد، مما يسمح للطلاب خلال عملهم على المثال (6) معرفة سبب استخدام التوافيق وليس التباديل.

في المثالين (7), (8)

يستخدم الطلاب صيغ التوقع والتباين والانحراف المعياري للمتغيّر العشوائي X للإجابة عن الأسئلة المطلوبة.

في المثالين (9), (10)

يستخدم الطلاب خواص دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X، لإيجاد القيم المفقودة. ناقش مع الطلاب الفرق بين النقطة المملوءة والنقطة الفارغة في بيان دالة التوزيع التراكمي.

فمثلًا إذا اقتصرت ملاحظتنا على **عدد الصور** التي ظهرت في كل عنصر من عناصر فضاء العينة S والتي هي كالتالي: 2، 1، 1، 0 على الترتيب نكون قد أقرنّا كل عنصر من عناصر فضاء العينة بعدد حقيقي كما هو موضّح في الجدول التالي:

عدد الصور في كل عنصر	عناصر فضاء العينة S
2	(H, H)
1	(H, T)
1	(T, H)
0	(T, T)

وسوف نرمز للمتغير العشوائي بالرمز X وعليه فإن مدى X هو: $\{0, 1, 2\}$

المتغيّر العشوائي **Random Variable**

تعريف: المتغير العشوائي **Random Variable**

هو دالة مجالها فضاء العينة لتجربة عشوائية S ومجالها المقابل هو $\mathbb{R}$ ومداها مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$

حيث $X : S \longrightarrow \mathbb{R}$

(X هو المتغير العشوائي لتجربة عشوائية، S فضاء العينة، $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية).

في المثال السابق نلاحظ ما يلي:

1. مجال المتغير العشوائي X هو: $S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$
2. المجال المقابل للمتغير العشوائي هو $\mathbb{R}$.
3. المدى للمتغير العشوائي X هو: $\{2, 1, 0\}$ ويرمز له بالرمز $X(S)$

يوجد عدة أنواع من المتغيرات العشوائية، سوف تدرس نوعين فقط منها وهما:

1. المتغيرات العشوائية **المتقطعة** (المنفصلة).
2. المتغيرات العشوائية **المتصلة** (المستمرة).

وسوف نستخدم X، Y، ... كرمز للمتغيرات العشوائية وx، y ... لقيم هذه المتغيرات.

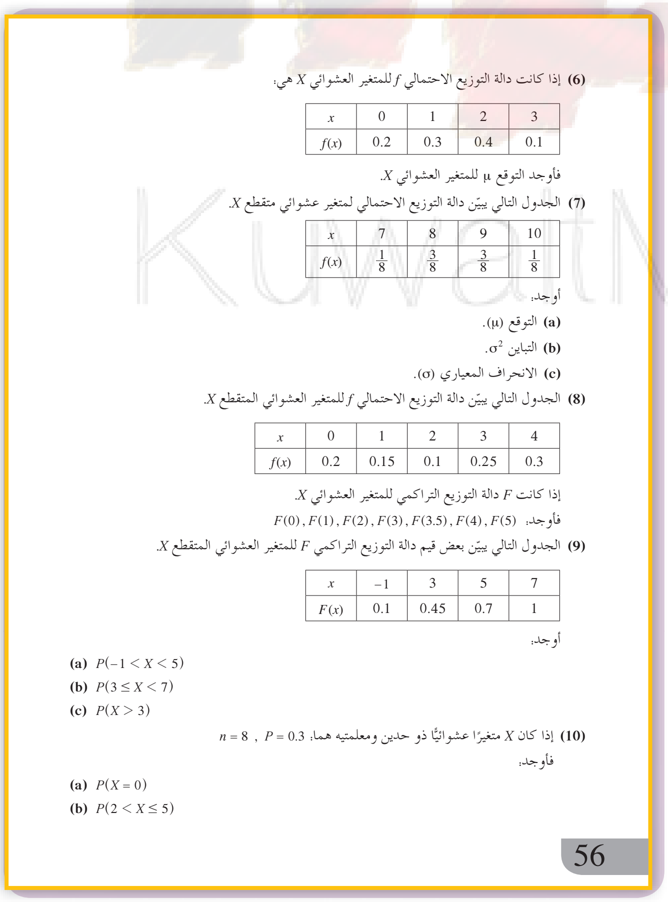
المتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة) **Discrete Random Variables**

كما ذكرنا سابقًا أن المتغيرات العشوائية تنقسم إلى عدة أنواع منها متغيرات عشوائية متقطعة (منفصلة) ومتغيرات عشوائية متصلة (مستمرة) وسنتناول كل منهما بالتفصيل:

تعريف: المتغير العشوائي المتقطع **Discrete Random Variable**

يكون المتغير العشوائي X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا إذا كانت مجموعة القيم الممكنة له (المدى) $X(S)$ هي مجموعة متقطعة أي قابلة للعد، من الأعداد الحقيقية سواء أكانت منتهية أم غير منتهية.

141



(6) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.2	0.3	0.4	0.1

فأوجد التوقع μ للمتغير العشوائي X.

(7) الجدول التالي يبيّن دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع X.

x	7	8	9	10
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

أوجد:

(a) التوقع (μ).

(b) التباين σ^2.

(c) الانحراف المعياري (σ).

(8) الجدول التالي يبيّن دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.2	0.15	0.1	0.25	0.3

إذا كانت F دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X.

فأوجد: $F(0), F(1), F(2), F(3), F(3.5), F(4), F(5)$

(9) الجدول التالي يبيّن بعض قيم دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	-1	3	5	7
$F(x)$	0.1	0.45	0.7	1

أوجد:

(a) $P(-1 < X < 5)$

(b) $P(3 \leq X < 7)$

(c) $P(X > 3)$

(10) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا ذو حدين ومعلمتيه هما: $n = 8\ ,\ P = 0.3$

فأوجد:

(a) $P(X = 0)$

(b) $P(2 < X \leq 5)$

56

في المثال (11)

تطبيق مباشر لإيجاد الاحتمال في تجربة ذات الحدين.
تحقّق من حسن تعامل الطلاب مع جدول الاحتمالات في توزيع ذات الحدين.

في المثالين (12), (13)

يبيّن المثالان كيف نوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري لتوزيع ذات الحدين. أشر إلى الحاجة لاستخدام الآلة الحاسبة لإيجاد الانحراف المعياري.

6 الربط

كل أمثلة هذا الدرس ترتبط مباشرة بالحياة اليومية.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

من الأخطاء الشائعة في هذا الدرس عدم إيجاد احتمالات كل قيم المتغير العشوائي، وفي تجربة ذات الحدين عدم الانتباه إلى وجود نتيجتين فقط. وقد يخطئ في عدم القدرة على التمييز بين جدول التوزيع الاحتمالي وجدول التوزيع التراكمي. اطلب إليهم التحقق من أن مجموع الاحتمالات في جدول التوزيع الاحتمالي يساوي 1 وأنه إذا كان للتجربة العشوائية أكثر من ناتجين فلا تكون تجربة ذات الحدين.


مثال (1)

في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين، أوجد مجموعة القيم للمتغيرات العشوائية التالية، ثم حدّد فيما إذا كانت متغيرات عشوائية متقطعة أم لا.

a المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الصور.

b المتغير العشوائي Y الذي يمثل مربع عدد الصور.

c المتغير العشوائي Z الذي يمثل عدد الصور مطروحًا منه عدد الكتابات.

الحل:

a $S = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$

عناصر مدى المتغير العشوائي X	عناصر فضاء العينة S
2	(H,H)
1	(H,T)
1	(T,H)
0	(T,T)

∴ مدى المتغير العشوائي: $X(S) = \{0, 1, 2\}$

نوع المتغير العشوائي X: متقطع

b

عناصر مدى المتغير العشوائي Y	عناصر فضاء العينة S
$(2)^2 = 4$	(H,H)
$(1)^2 = 1$	(H,T)
$(1)^2 = 1$	(T,H)
$(0)^2 = 0$	(T,T)

∴ مدى المتغير العشوائي: $Y(S) = \{0, 1, 4\}$

نوع المتغير العشوائي Y: متقطع

c

عناصر مدى المتغير العشوائي Z	عناصر فضاء العينة S
$2 - 0 = 2$	(H,H)
$1 - 1 = 0$	(H,T)
$1 - 1 = 0$	(T,H)
$0 - 2 = -2$	(T,T)

∴ مدى المتغير العشوائي: $Z(S) = \{-2, 0, 2\}$

نوع المتغير العشوائي Z: متقطع

142


حاول أن تحل

1 في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين، أوجد مجموعة القيم للمتغيرات العشوائية التالية وحدّد فيما إذا كانت متغيرات عشوائية متقطعة أم لا.

a المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الكتابات.

b المتغير العشوائي Y الذي يمثل مكعب عدد الكتابات.

c المتغير العشوائي Z الذي يمثل عدد الكتابات مطروحًا منه 2.

التوزيع الاحتمالي Probability Distribution

تعلمنا سابقًا أن المتغير العشوائي المتقطع هو دالة مداها مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ قابلة للعد. ونبحث الآن في احتمال وقوع كل عنصر من عناصر فضاء العينة المناظر لكل عنصر من عناصر المدى.

تعريف: دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متقطعًا مداه $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$

فإن دالة التوزيع الاحتمالي f تعرف كالتالي:

$f(x_i) = P(X = x_i) \quad , \quad i = 1, 2, 3, ...$

ويمكن تمثيلها بالجدول التالي:

x_i	x_1	x_2	.....
$f(x_i)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	.....

أي أن مجموعة النقاط في المستوى الإحداثي التي تمثل الأزواج المرتبة $(x_i , P(x_i))$ تسمى دالة التوزيع الاحتمالي Probability Distribution Function.

مثال (2)

في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة، المتغير العشوائي X يعبر عن: الجذر التربيعي للعدد الظاهر على الوجه العلوي عندما يكون الجذر التربيعي عددًا كليًا والصفر لغير ذلك.

فأوجد:

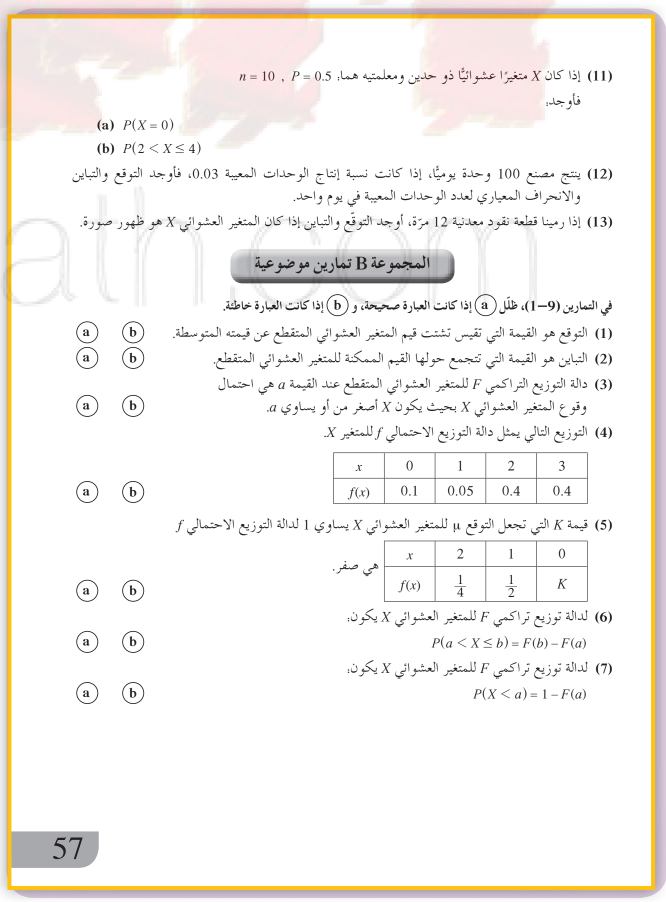
a فضاء العينة (S) وعدد عناصره $n(S)$.

b مدى المتغير العشوائي X.

c احتمال وقوع كل عنصر من عناصر فضاء العينة (S): $f(x_i) = P(X = x_i)$

d دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

143


(11) إذا كان X متغيرًا عشوائيًا ذو حدين ومعلمتيه هما: $n = 10$ ، $P = 0.5$

فأوجد:

(a) $P(X = 0)$

(b) $P(2 < X \leq 4)$

(12) ينتج مصنع 100 وحدة يوميًا، إذا كانت نسبة إنتاج الوحدات المعيبة 0.03، فأوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري لعدد الوحدات المعيبة في يوم واحد.

(13) إذا رمينا قطعة نقود معدنية 12 مرّة، أوجد التوقّع والتباين إذا كان المتغير العشوائي X هو ظهور صورة.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–9)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) التوقع هو القيمة التي تقيس تشتت قيم المتغير العشوائي المتقطع عن قيمته المتوسطة. (a) (b)

(2) التباين هو القيمة التي تتجمع حولها القيم الممكنة للمتغير العشوائي المتقطع. (a) (b)

(3) دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع عند القيمة a هي احتمال وقوع المتغير العشوائي X بحيث يكون X أصغر من أو يساوي a. (a) (b)

(4) التوزيع التالي يمثل دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير X. (a) (b)

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.1	0.05	0.4	0.4

(5) قيمة K التي تجعل التوقع μ للمتغير العشوائي X يساوي 1 لدالة التوزيع الاحتمالي f هي صفر. (a) (b)

x	2	1	0
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	K

(6) لدالة توزيع تراكمي F للمتغير العشوائي X يكون، $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ (a) (b)

(7) لدالة توزيع تراكمي F للمتغير العشوائي X يكون، $P(X < a) = 1 - F(a)$ (a) (b)

57

8 التقييم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» وتحقق من تمكنهم من المفاهيم الواردة ومن الدقة في الحسابات.

اختبار سريع

1 يحتوي كيس على 6 قطع من الشوكولاتة بالحليب و4 قطع من الشوكولاتة المرّة. تحب سلمى الشوكولاتة بالحليب، من دون النظر في الكيس أخذت سلمى 5 حبات من الشوكولاتة معًا. إذا كان X يمثل عدد قطع الشوكولاتة بالحليب التي أخذتها سلمى، فأوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير X، ثم وسط هذا التوزيع.

x_i	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{42}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{42}$

$\mu = 3$

2 يعمل كريم نادلًا في أحد المطاعم. لاحظ أن 30% من الزبائن يقدمون له بدل خدمة. إذا دخل المطعم فترة الظهر 20 شخصًا، فما احتمال أن يترك له 8 منهم بدل خدمة؟

$${}_{20}C_8 \times (0.3)^8 \times (0.7)^{12} \approx 0.1144$$

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1 $0 + 0 = 0 \ , \ 0 + 1 = 1 \ , \ 1 + 0 = 1 \ , \ 1 + 1 = 2 \ ,$

$2 + 0 = 2 \ , \ 0 + 2 = 2 \ , \ 2 + 1 = 3 \ , \ 1 + 2 = 3$

2 **(a)** $P(E = 0) = \frac{1}{6} \ , \ P(E = 1) = \frac{1}{3} \ ,$

$P(E = 2) = \frac{1}{3}$

(b) $P(E = 3) = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$

3 **(a)** النتائج الممكنة: $0,1,2$

(b) $P(P = 0) = \frac{2}{3} \ , \ P(P = 1) = \frac{1}{6} \ ,$

$P(P = 2) = \frac{1}{6}$

تذكر:

$P(A) = \frac{A \text{ عدد عناصر}}{S \text{ عدد عناصر}}$

الحل:

a فضاء العينة: $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

عدد عناصر فضاء العينة: $n(S) = 6$

b

عناصر فضاء العينة S	عناصر مدى المتغير العشوائي X
1	1
2	0
3	0
4	2
5	0
6	0

$\therefore$ مدى المتغيّر العشوائي: $X = \{0,1,2\}$

c $\because \ f(x_i) = P(X = x_i)$

$\therefore \ f(0) = P(X = 0) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$f(1) = P(X = 1) = \frac{1}{6}$

$f(2) = P(X = 2) = \frac{1}{6}$

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

حاول أن تحل

2 عند رمي حجر نرد مرة واحدة، إذا كان المتغير العشوائي X يعبّر عن: «مربع العدد الظاهر مطروحًا منه 1 عندما يكون العدد الظاهر أصغر من 4، و -1 لغير ذلك».

فأوجد:

a فضاء العينة S وعدد عناصر فضاء العينة $n(S)$.

b مدى المتغير العشوائي X.

c احتمال وقوع كل عنصر من عناصر فضاء العينة S.

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

لاحظ في مثال (2) أن: $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$

144

مثال (3)

عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية، إذا كان المتغير العشوائي X يعبّر عن «عدد الكتابات».

فأوجد ما يلي:

a فضاء العينة (S) وعدد عناصره $n(S)$.

b مدى المتغير العشوائي X.

c احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

الحل:

a فضاء العينة:

$S = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(H,T,T),$
$(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$

$n(S) = 8$

b

عناصر فضاء العينة S	عدد الكتابات في كل عنصر
(H,H,H)	0
(H,H,T)	1
(H,T,H)	1
(T,H,H)	1
(H,T,T)	2
(T,H,T)	2
(T,T,H)	2
(T,T,T)	3

$\therefore$ مدى المتغيّر العشوائي: $X = \{0 , 1 , 2 , 3\}$

c $P(X = 0) = \frac{1}{8}$

$P(X = 1) = \frac{3}{8}$

$P(X = 2) = \frac{3}{8}$

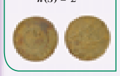
$P(X = 3) = \frac{1}{8}$

d دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

تذكر:

في تجربة عشوائية، عند رمي قطعة نقود m من المرّات فإن عدد عناصر فضاء العينة $n(S) = 2^m$



معلومة:

كانت الروبية الهندية العملة المتداولة في دولة الكويت وذلك لفترة تزيد عن مئة وعشرين عامًا، وفي 17 مايو 1961 انتهى تعامل دولة الكويت بهذه العملة بناءً على قاعدة التسوية مع المصرف المركزي الهندي التالية: 1 000 روبية = 75 دينارًا كويتيًا.

أي 1 روبية = 75 فلسًا أو 13.33 روبية تعادل دينارًا واحدًا.

145

«حاول أن تحل»

1 (a) $S = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$

$\therefore$ مدى المتغير العشوائي $X(S) = \{0,1,2\}$

نوع المتغيّر العشوائي X: متقطع.

(b) مدى المتغيّر العشوائي: $Y(S) = \{0,1,8\}$

نوع المتغيّر العشوائي Y: متقطع.

(c) مدى المتغيّر العشوائي: $Z(S) = \{-2,-1,0\}$

نوع المتغيّر العشوائي Z: متقطع.

2 (a) فضاء العينة: $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

عدد عناصر فضاء العينة: $n(S) = 6$

(b) مدى المتغيّر العشوائي: $X = \{-1,0,3,8\}$

(c) $f(-1) = P(X=-1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$f(0) = P(X=0) = \frac{1}{6}$

$f(3) = P(X=3) = \frac{1}{6}$

$f(8) = P(X=8) = \frac{1}{6}$

حاول أن تحل

3 عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية، إذا كان المتغير العشوائي X يعبر عن «عدد الصور»، فأوجد ما يلي:

a فضاء العينة (S) وعدد عناصره $n(S)$.

b مدى المتغير العشوائي X.

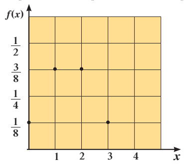
c احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

لاحظ في مثال (3) أن: $P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) = 1$

بيان دالة التوزيع الاحتمالي Graph of Probability Distribution Function

دالة التوزيع الاحتمالي هي مجموعة نقاط المستوى التي تمثل الأزواج المرتبة $(x_i, f(x_i))$ وبالتالي فإن بيان دالة التوزيع الاحتمالي عبارة عن نقاط يمكن تمثيلها في المستوى الإحداثي، والشكل التالي يبيّن تمثيل الدالة في مثال 3.



ملاحظة هامة:

دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X تحقق الشرطين:

1 $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$

2 مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالي f تساوي الواحد الصحيح. $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\ldots = 1$

مثال (4)

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	-2	1	2	3
$f(x)$	0.3	0.1	k	0.2

فأوجد قيمة k.

الحل:

$\because$ مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالي f تساوي الواحد الصحيح

146

$\therefore f(-2)+f(1)+f(2)+f(3) = 1$

$0.3+0.1+k+0.2 = 1$

$k = 1-0.6$

$k = 0.4$

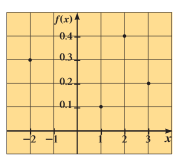
حاول أن تحل

4 إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.35	0.15	0.1	0.2	k

فأوجد قيمة k.

الشكل التالي يمثّل دالة التوزيع الاحتمالي في مثال 4.



لاحظ أن قيم المتغير العشوائي X يمكن أن تكون سالبة.

مثال (5)

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متقطعًا مداه هو: $\{-2,-1,0,1\}$

وكان $f(-2) = f(-1) = 0.3 \;,\; f(1) = 0.2$

أوجد $f(0)$، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

الحل:

$\because f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1) = 1$

$\therefore 0.3+0.3+f(0)+0.2 = 1$

$f(0) = 1-0.8$

$= 0.2$

147

---

(8) مدرسة فيها عدد الطلبة 300 طالب فإذا كانت نسبة النجاح 0.6 فإن التوقع لعدد الطلبة الناجحين هو 150 طالبًا. (a) (b)

(9) عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية فإن $n(S) = 6$. (a) (b)

في التمارين (10—21)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(10) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	-1	0	1	2
$f(x)$	0.2	0.2	K	0.2

فإن قيمة K هي:

(a) 0.2 (b) 0 (c) 0.4 (d) 0.3

(11) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	1	2	3
$f(x)$	K	$2K$	$2K$

فإن قيمة K تساوي:

(a) 0.5 (b) 0.2 (c) 1 (d) 0.4

في التمارين (12—14)، استخدم الجدول التالي:

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.2	0.4	0.1	0.3

حيث f هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع X.

(12) $F(-1)$

(a) 0 (b) 0.2 (c) 0.4 (d) 0.6

(13) $F(1.5)$

(a) 0.4 (b) 0.2 (c) 0 (d) 0.6

(14) $F(4)$

(a) 0.2 (b) 0.1 (c) 0.4 (d) 1

58

(d) جدول دالة التوزيع الاحتمالي f

x	-1	0	3	8
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

3 **(a)** فضاء العينة:

$S=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),$
$(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$

$n(S)=8$

(b) مدى المتغير العشوائي: $X=\{0,1,2,3\}$

(c) $P(X=0)=\frac{1}{8}$

$P(X=1)=\frac{3}{8}$

$P(X=2)=\frac{3}{8}$

$P(X=3)=\frac{1}{8}$

(d)

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

∴ دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	0.3	0.3	0.2	0.2

حاول أن تحل

5 إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه هو: $\{0,1,2,3\}$

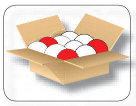
وكان: $f(0)=0.1\ ,\ f(1)=0.6\ ,\ f(2)=0.15$

فأوجد $f(3)$، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

مثال (6)

صندوق يحتوي على 10 كرات متماثلة منها 7 كرات بيضاء و3 كرات حمراء. سحبت أربع كرات عشوائيًّا معًا من الصندوق. إذا كان المتغير العشوائي X يمثّل عدد الكرات الحمراء.

فأوجد ما يلي:



a عدد عناصر فضاء العينة $n(S)$.

b مدى المتغير العشوائي X.

c احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

الحل:

a عدد عناصر فضاء العينة (S): $n(S)={}_{10}C_4=210$

b عدد الكرات الحمراء التي يمكن سحبها كالتالي:

لدينا 4 حالات:

- أن تكون كل الكرات المسحوبة بيضاء.

∴ عدد الكرات الحمراء المسحوبة = صفر ⟵ $X=0$

- أن تكون الكرات المسحوبة منها 3 كرات بيضاء وواحدة حمراء ⟵ $X=1$
- أن تكون الكرات المسحوبة منها 2 كرة بيضاء و2 كرة حمراء ⟵ $X=2$
- أن تكون الكرات المسحوبة منها 1 كرة بيضاء و3 كرات حمراء ⟵ $X=3$

∴ مدى المتغير العشوائي X هو: $\{0,1,2,3\}$

c $P(X=0)=\frac{{}_7C_4\times{}_3C_0}{{}_{10}C_4}=\frac{35}{210}$

$P(X=1)=\frac{{}_7C_3\times{}_3C_1}{{}_{10}C_4}=\frac{105}{210}$

$P(X=2)=\frac{{}_7C_2\times{}_3C_2}{{}_{10}C_4}=\frac{63}{210}$

$P(X=3)=\frac{{}_7C_1\times{}_3C_3}{{}_{10}C_4}=\frac{7}{210}$

تذكر:

إذا كان

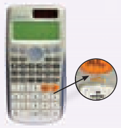
$n\ ,\ r\in\mathbb{Z}^+\ ,\ n\geqslant r$

1 ${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$

${}_nP_r=\frac{n!}{(n-r)!}$

2 ${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}$

${}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$



d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X:

x	0	1	2	3	المجموع
$f(x)$	$\frac{35}{210}$	$\frac{105}{210}$	$\frac{63}{210}$	$\frac{7}{210}$	1

حاول أن تحل

6 صندوق يحتوي على 10 كرات متماثلة منها 7 كرات بيضاء و3 كرات حمراء. سحبت عشوائيًّا 3 كرات معًا من الصندوق. إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد الكرات البيضاء،

فأوجد ما يلي:

a عدد عناصر فضاء العينة (S).

b مدى المتغير العشوائي X.

c احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

d دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

التوقع (الوسط) والتباين للمتغيرات العشوائية المتقطعة
Expectation and Variance for Discrete Random Variables

التوقع (الوسط) للمتغير العشوائي المتقطع X هو أحد مقاييس النزعة المركزية ويرمز له بالرمز μ.

وهو القيمة التي تتجمع حولها القيم الممكنة للمتغير العشوائي المتقطع، و**التباين** (σ^2) هو القيمة التي تقيس تشتت قيم المتغير العشوائي المتقطع عن قيمته المتوسطة، وبالتالي فإن التوقع والتباين يلخصان أهم صفات المتغيرات العشوائية وسوف ندرس كلًّا من التوقع والتباين لكل من المتغيرات العشوائية المتقطعة.

أولًا: التوقع (الوسط) للمتغير العشوائي المتقطع Expectation for Discrete Random Variable

تعريف:

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا له دالة التوزيع الاحتمالي f،

مدى X: $X(S)=\{x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ldots\}$

فإن التوقع (μ) للمتغير العشوائي X يعطى بالصيغة التالية:

$$\mu=\Sigma\, x_i\, f(x_i)$$

أي أن:

$$\mu=x_1 f(x_1)+x_2 f(x_2)+x_3 f(x_3)+\ldots$$

(15) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا دالة توزيع الاحتمالي f هي:

x	0	1	2
$f(x)$	0.25	0.50	0.25

فإن التوقع له يساوي:

(a) 1 (b) 1.25 (c) 1.5 (d) 0.5

(16) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا لدالة التوزيع الاحتمالي f وكان التوقع = 0.5 ، $\sum x^2 f(x)=4.25$،
فإن الانحراف المعياري هو:

(a) 4 (b) 2 (c) 3.75 (d) 1

(17) إذا كانت بعض قيم دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي X معطاة في الجدول التالي:

x	0	1	2	3
$F(x)$	0.1	0.3	0.7	1

فإن $f(2)$ تساوي:

(a) 0.7 (b) 0.3 (c) 0.4 (d) 1

(18) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X هي:

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$

فإن التوقع μ للمتغير العشوائي X يساوي:

(a) 1 (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{7}{9}$ (d) 0

(19) عند إلقاء قطعة نقود منتظمة أربع مرات متتالية فإن التباين σ^2 للمتغير العشوائي X «ظهور صورة» يساوي:

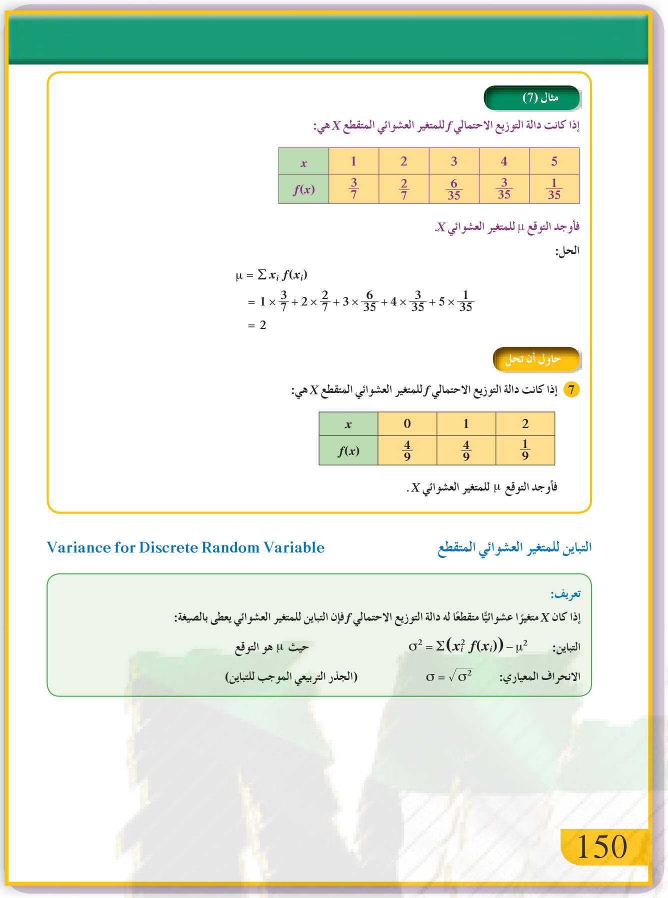
(a) 2 (b) 1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 4

(20) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا يأخذ القيم 1.5 , 1 , -1 وكان: $P(X=-1)=0.6\ ,\ P(X=1)=0.3$
فإن $P(X>0)$ يساوي:

(a) 0.6 (b) 0.9 (c) 0.4 (d) 0.7

(21) ينتج مصنع سيارات 200 سيارة في الشهر. إذا كانت نسبة السيارات المعيبة 0.02 فإن التوقع لعدد السيارات المعيبة المنتجة في الشهر يساوي:

(a) 2 (b) 4 (c) 20 (d) 40



مثال (7)

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X هي:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{1}{35}$

فأوجد التوقع μ للمتغير العشوائي X.

الحل:

$$\mu = \sum x_i f(x_i)$$
$$= 1\times\frac{3}{7} + 2\times\frac{2}{7} + 3\times\frac{6}{35} + 4\times\frac{3}{35} + 5\times\frac{1}{35}$$
$$= 2$$

حاول أن تحل

7 إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X هي:

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

فأوجد التوقع μ للمتغير العشوائي X.

التباين للمتغير العشوائي المتقطع Variance for Discrete Random Variable

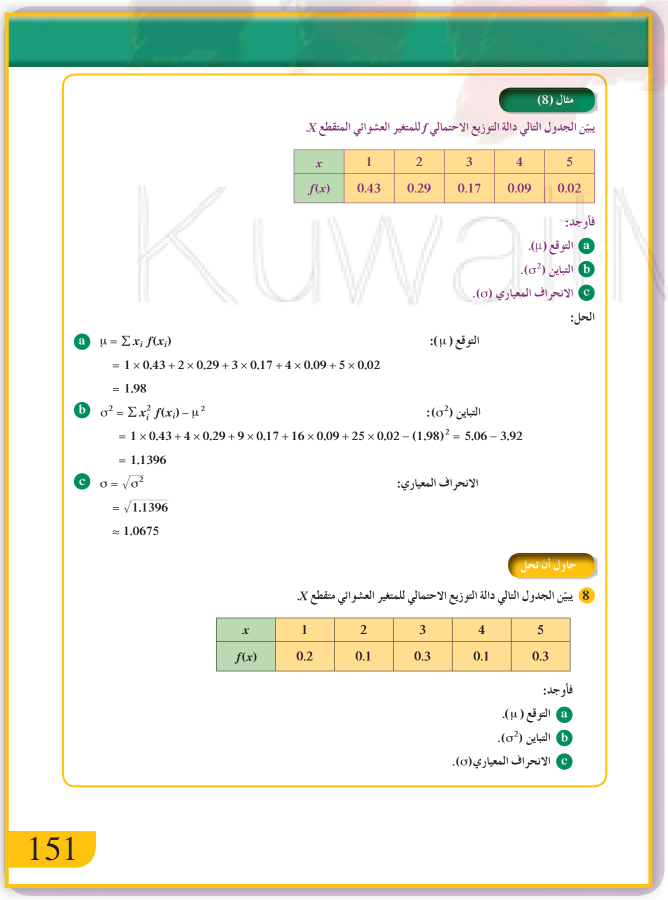
تعريف:

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا له دالة التوزيع الاحتمالي f فإن التباين للمتغير العشوائي يعطى بالصيغة:

التباين: $\sigma^2 = \sum\left(x_i^2 f(x_i)\right) - \mu^2$ حيث μ هو التوقع

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ (الجذر التربيعي الموجب للتباين)

150



مثال (8)

يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.43	0.29	0.17	0.09	0.02

فأوجد:

a التوقع (μ).

b التباين (σ^2).

c الانحراف المعياري (σ).

الحل:

a التوقع (μ):
$$\mu = \sum x_i f(x_i)$$
$$= 1\times 0.43 + 2\times 0.29 + 3\times 0.17 + 4\times 0.09 + 5\times 0.02$$
$$= 1.98$$

b التباين (σ^2):
$$\sigma^2 = \sum x_i^2 f(x_i) - \mu^2$$
$$= 1\times 0.43 + 4\times 0.29 + 9\times 0.17 + 16\times 0.09 + 25\times 0.02 - (1.98)^2 = 5.06 - 3.92$$
$$= 1.1396$$

c الانحراف المعياري:
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$
$$= \sqrt{1.1396}$$
$$\approx 1.0675$$

حاول أن تحل

8 يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي متقطع X.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.2	0.1	0.3	0.1	0.3

فأوجد:

a التوقع (μ).

b التباين (σ^2).

c الانحراف المعياري(σ).

151

4 $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = 1$

$0.35+0.15+0.1+0.2+K = 1$

$K = 1-0.8$

$= 0.2$

5 $f(3) = 1-(0.1+0.6+0.15)$

$= 1-0.85$

$= 0.15$

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.1	0.6	0.15	0.15

6 **(a)** عدد عناصر فضاء العينة (S):

$n(S) = {}_{10}C_3 = 120$

(b) مدى المتغير العشوئي X هو: $\{0,1,2,3\}$

(c)
$$P(X=0) = \frac{{}_3C_3 \times {}_7C_0}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{120}$$
$$P(X=1) = \frac{{}_3C_2 \times {}_7C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{21}{120} = \frac{7}{40}$$
$$P(X=2) = \frac{{}_3C_1 \times {}_7C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{63}{120} = \frac{21}{40}$$
$$P(X=3) = \frac{{}_3C_0 \times {}_7C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{35}{120} = \frac{7}{24}$$

(d)

x	0	1	2	3	المجموع
$f(x)$	$\frac{1}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{35}{120}$	1

7 $\mu = \Sigma x_i\, f(x_i)$

$= 0 \times \frac{4}{9} + 1 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{1}{9}$

$= \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

8 (a) $\mu = \Sigma x_i\, f(x_i)$

$= 1 \times 0.2 + 2 \times 0.1 + 3 \times 0.3 + 4 \times 0.1$

$+ 5 \times 0.3 = 3.2$

(b) $\sigma^2 = \Sigma x_i^2 f(x_i) - \mu^2$

$= 1 \times 0.2 + 4 \times 0.1 + 9 \times 0.3 + 16$

$\times 0.1 + 25 \times 0.3 - (3.2)^2$

$= 12.4 - 10.24 = 2.16$

(c) $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2.16}$

≈ 1.47

دالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي متقطع

Cumulative Distribution Function for a Discrete Random Variable

درسنا بالتفصيل دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X.
وبيّنا أن دالة التوزيع الاحتمالي f تحقق الشرطين:

1. $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$
2. $\Sigma f(x_i) = 1$

ونتعرض الآن لدالة أخرى للمتغير العشوائي المتقطع X وهي دالة التوزيع التراكمي.

تعريف:

دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع عند القيمة a هي احتمال وقوع المتغير العشوائي X بحيث يكون X أصغر من أو يساوي a

أي أن: $F(a) = P(X \leqslant a)$

لاحظ أن مجال دالة التوزيع التراكمي F هو $\mathbb{R}$ وأن المجال المقابل يساوي المدى $[0,1]$

تذكر:
نرمز لدالة التوزيع الاحتمالي بالرمز f.
ونرمز لدالة التوزيع التراكمي بالرمز F.

مثال (9)

الجدول التالي يبيّن دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	3	4	5
$f(x)$	0.5	0.3	0.2

إذا كانت F دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X.

فأوجد: $F(2)$, $F(3)$, $F(4)$, $F(4.5)$, $F(5)$, $F(7)$

الحل:

$F(2) = P(X \leqslant 2) = 0$

$F(3) = P(X \leqslant 3) = P(X < 3) + P(X = 3)$

$= 0 + 0.5$

$= 0.5$

$F(4) = P(X \leqslant 4)$

$= P(X < 4) + P(X = 4)$

$= P(3) + P(4)$

$= 0.5 + 0.3$

$= 0.8$

$F(4.5) = P(X \leqslant 4.5)$

$= P(X < 4.5) + P(X = 4.5)$

$= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 4.5)$

$= 0.5 + 0.3 + 0$

$= 0.8$

$F(5) = P(X \leqslant 5)$

$= P(X < 5) + P(X = 5)$

$= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$

$= 0.5 + 0.3 + 0.2$

$= 1$

$F(7) = P(X \leqslant 7)$

$= P(X < 7) + P(X = 7)$

$= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 7)$

$= 0.5 + 0.3 + 0.2 + 0$

$= 1$

حاول أن تحل

9 الجدول التالي يبيّن دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.43	0.29	0.17	0.09	0.02

إذا كانت F دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X.

فأوجد: $F(0)$, $F(1)$, $F(3.5)$, $F(4)$, $F(5)$, $F(8)$

بيان دالة التوزيع التراكمي Graph of Cumulative Distribution Function

دالة التوزيع التراكمي هي دالة مجالها $\mathbb{R}$ ومجالها المقابل = المدى = $[0,1]$ وبالتالي فإن بيانها عبارة عن شعاعين وقطع مستقيمة.

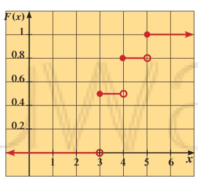
في مثال 9 السابق نضع جدول التوزيع التراكمي:

x	3	4	5
$F(x)$	0.5	0.8	1

$\therefore$ دالة التوزيع التراكمي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 3 \\ 0.5 & : \quad 3 \leqslant x < 4 \\ 0.8 & : \quad 4 \leqslant x < 5 \\ 1 & : \quad x \geqslant 5 \end{cases}$$

وبيانها:



بعض خواص دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X:

1. $P(X > a) = 1 - P(X \leqslant a) = 1 - F(a)$
2. $P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)$
3. $P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b)$
   $= P(a < X < b)$
   $= P(a \leqslant X \leqslant b)$

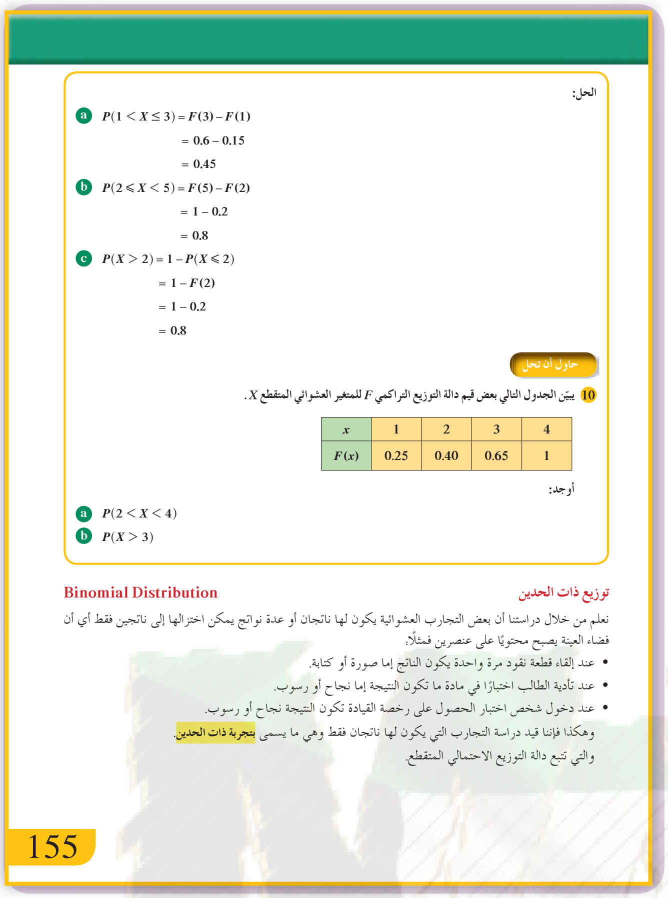
مثال (10)

الجدول التالي يبيّن بعض قيم دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	1	2	3	5
$F(x)$	0.15	0.2	0.6	1

أوجد:

a. $P(1 < X \leqslant 3)$
b. $P(2 \leqslant X < 5)$
c. $P(X > 2)$


الحل:

a) $P(1 < X \le 3) = F(3) - F(1)$

$= 0.6 - 0.15$

$= 0.45$

b) $P(2 \leqslant X < 5) = F(5) - F(2)$

$= 1 - 0.2$

$= 0.8$

c) $P(X > 2) = 1 - P(X \leqslant 2)$

$= 1 - F(2)$

$= 1 - 0.2$

$= 0.8$

حاول أن تحل

10 يبيّن الجدول التالي بعض قيم دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	1	2	3	4
$F(x)$	0.25	0.40	0.65	1

أوجد:

a) $P(2 < X < 4)$

b) $P(X > 3)$

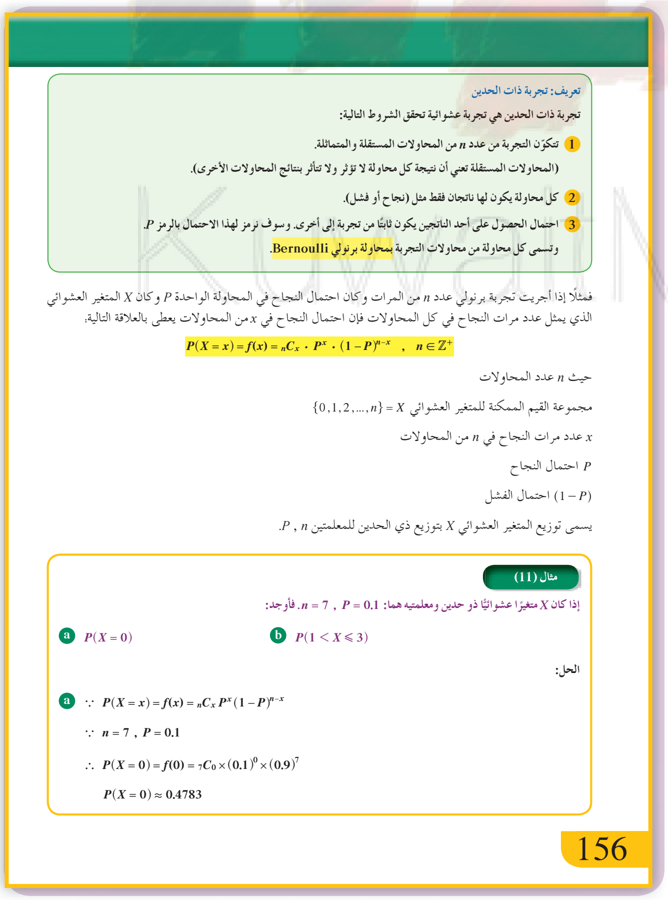
توزيع ذات الحدين **Binomial Distribution**

نعلم من خلال دراستنا أن بعض التجارب العشوائية يكون لها ناتجان أو عدة نواتج يمكن اختزالها إلى ناتجين فقط أي أن فضاء العينة يصبح محتويًا على عنصرين فمثلًا:

- عند إلقاء قطعة نقود مرة واحدة يكون الناتج إما صورة أو كتابة.
- عند تأدية الطالب اختبارًا في مادة ما تكون النتيجة إما نجاح أو رسوب.
- عند دخول شخص اختبار الحصول على رخصة القيادة تكون النتيجة نجاح أو رسوب.

وهكذا فإننا قيد دراسة التجارب التي يكون لها ناتجان فقط وهي ما يسمى **بتجربة ذات الحدين**.
والتي تتبع دالة التوزيع الاحتمالي المتقطع.

155


تعريف: تجربة ذات الحدين

تجربة ذات الحدين هي تجربة عشوائية تحقق الشروط التالية:

1 تتكوّن التجربة من عدد n من المحاولات المستقلة والمتماثلة.
(المحاولات المستقلة تعني أن نتيجة كل محاولة لا تؤثر ولا تتأثر بنتائج المحاولات الأخرى).

2 كل محاولة يكون لها ناتجان فقط مثل (نجاح أو فشل).

3 احتمال الحصول على أحد الناتجين يكون ثابتًا من تجربة إلى أخرى. وسوف نرمز لهذا الاحتمال بالرمز P.
وتسمى كل محاولة من محاولات التجربة **بمحاولة برنولي Bernoulli**.

فمثلًا إذا أجريت تجربة برنولي عدد n من المرات وكان احتمال النجاح في المحاولة الواحدة P وكان X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد مرات النجاح في كل المحاولات فإن احتمال النجاح في x من المحاولات يعطى بالعلاقة التالية:

$$P(X = x) = f(x) = {}_nC_x \cdot P^x \cdot (1-P)^{n-x} \quad , \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

حيث n عدد المحاولات

مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي $X = \{0, 1, 2, ..., n\}$

x عدد مرات النجاح في n من المحاولات

P احتمال النجاح

$(1-P)$ احتمال الفشل

يسمى توزيع المتغير العشوائي X بتوزيع ذي الحدين للمعلمتين n , P.

مثال (11)

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا ذو حدين ومعلمتيه هما: $P = 0.1$, $n = 7$. فأوجد:

a) $P(X = 0)$ b) $P(1 < X \leqslant 3)$

الحل:

a) $\because\ P(X = x) = f(x) = {}_nC_x\, P^x (1-P)^{n-x}$

$\because\ n = 7\ ,\ P = 0.1$

$\therefore\ P(X = 0) = f(0) = {}_7C_0 \times (0.1)^0 \times (0.9)^7$

$P(X = 0) \approx 0.4783$

156

9 $F(0) = P(X \le 0) = 0$

$F(1) = P(X \le 1) = 0.43$

$F(2) = P(X \le 2) = 0.43 + 0.29 = 0.72$

$F(3.5) = P(X \le 3.5) = 0.43 + 0.29 + 0.17 = 0.89$

$F(4) = P(X \le 4) = 0.43 + 0.29 + 0.17 + 0.09$

$= 0.98$

$F(5) = P(X \le 5) = 0.98 + 0.02 = 1$

$F(8) = P(X \le 8)$

$= P(X < 8) + P(X = 8)$

$= 1 + 0$

$= 1$

10 **(a)** $P(2 < X < 4) = F(4) - F(2)$

$= 1 - 0.4 = 0.6$

(b) $P(X > 3) = 1 - P(X \le 3)$

$= 1 - F(3)$

$= 1 - 0.65 = 0.35$

11 **(a)** $P(X = 1) = f(1)$

$= {}_6C_1 \times (0.6)^1 \times (0.4)^5$

$= \dfrac{576}{15\,625}$

(b) $P(2 < X \leqslant 4) = P(X = 3) + P(X = 4)$

$= f(3) + f(4)$

$f(3) = {}_6C_3 \times (0.6)^3 \times (0.4)^3$

$= 0.27648$

$f(4) = {}_6C_4 \times (0.6)^4 \times (0.4)^2$

$= 0.31104$

$P(2 < X \leqslant 4) = 0.58752$

12 عدد السيارات المصنعة في اليوم الواحد: $n = 350$

نسبة إنتاج السيارات المعيبة في اليوم الواحد:

$p = 0.02$

التوقع: $\mu = np = 350(0.02) = 7$

التباين: $\sigma^2 = np(1-p) = 350(0.02)(0.98) = 6.86$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{6.86}$

≈ 2.619

13 $n = 8\ ,\ p = \frac{1}{2}\ ,\ 1-p = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

التوقع: $\mu = np = 8 \times \frac{1}{2} = 4$

التباين: $\sigma^2 = np(1-p) = 8 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 2$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{2}$

≈ 1.4

حاول أن تحل

11 إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا ذو حدين ومعلمتيه هما:

$n = 6$ ، $P = 0.6$ فأوجد:

a $P(X = 1)$

b $P(2 < X \leqslant 4)$

التوقع والتباين لتوزيع ذات الحدين Expectation and Variance for Binomial Distribution

درسنا كيفية إيجاد التوقع والتباين للمتغير العشوائي المتقطع والآن نتعرّض لإيجاد التوقع والتباين لتوزيع ذات الحدين.

التوقع: $\mu = nP$

التباين: $\sigma^2 = nP(1-P)$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{nP(1-P)}$

مثال (12)

ينتج مصنع سيارات 200 سيارة يوميًّا، إذا كانت نسبة إنتاج السيارات المعيبة 0.01 فأوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري لعدد السيارات المعيبة في يوم واحد.

الحل:

عدد السيارات المصنعة في اليوم الواحد $n = 200$

نسبة إنتاج السيارات المعيبة في اليوم الواحد $P = 0.01$

التوقع: $\mu = nP = 200(0.01) = 2$

التباين: $\sigma^2 = nP(1-P) = 200(0.01)(0.99) = 1.98$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{1.98}$

≈ 1.4071

حاول أن تحل

12 ينتج مصنع سيارات 350 سيارة يوميًّا، إذا كانت نسبة إنتاج السيارات المعيبة 0.02 فأوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري لعدد السيارات المعيبة في يوم واحد.

حل آخر:

$P(X = 0) = f(0)$

$\because\ n = 7\ ,\ P = 0.1\ ,\ X = 0$

نبحث في جدول الاحتمالات في توزيع ذات الحدين صفحة (172) عن قيمة $f(0)$ (لأنها دالة توزيع احتمالي متقطع) فنجد أن:

$f(0) = 0.478$

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: $f(x)$

		P										
n	x	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
2	0	0.902	0.810	0.640	0.490	0.360	0.250	0.160	0.090	0.040	0.010	0.002
	1	0.095	0.180	0.320	0.420	0.480	0.500	0.480	0.420	0.320	0.180	0.095
	2	0.002	0.010	0.040	0.090	0.160	0.250	0.360	0.0490	0.0640	0.0810	0.0902
7	0	0.698	0.478	0.210	0.082	0.028	0.008	0.002				
	1	0.257	0.372	0.367	0.247	0.131	0.055	0.017	0.004			
	2	0.041	0.124	0.275	0.318	0.261	0.164	0.077	0.025			
	3	0.004	0.023	0.115	0.227	0.290	0.273	0.194	0.097	0.004		
	4		0.003	0.029	0.097	0.194	0.273	0.290	0.227	0.029	0.003	
	5			0.004	0.025	0.077	0.164	0.261	0.318	0.115	0.023	0.004
	6				0.004	0.017	0.055	0.131	0.247	0.275	0.124	0.041
	7					0.002	0.008	0.028	0.082	0.367	0.372	0.257
										0.210	0.478	0.698

b $P(1 < X \leqslant 3) = P(X = 2) + P(X = 3)$

$= f(2) + f(3)$

$f(2) = {}_7C_2 \times (0.1)^2 \times (0.9)^5 \Longrightarrow f(2) \approx 0.1240$

$f(3) = {}_7C_3 \times (0.1)^3 \times (0.9)^4 \Longrightarrow f(3) \approx 0.0230$

$P(1 < X \leqslant 3) \approx 0.1240 + 0.0230 \Longrightarrow P(1 < X \leqslant 3) \approx 0.1470$

حل آخر:

$P(1 < X \leqslant 3) = P(X = 2) + P(X = 3)$

$= f(2) + f(3)$

$\because\ n = 7\ ,\ P = 0.1$

نبحث في الجدول نفسه

عندما: $x = 2 \longrightarrow f(2) = 0.1240$

عندما: $x = 3 \longrightarrow f(3) = 0.0230$

$\therefore\ P(X \leqslant 3) = f(2) + f(3)$

$= 0.1240 + 0.0230 = 0.1470$

مثال (13)

في تجربة إلقاء قطعة نقود 5 مرات. أوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري إذا كان المتغير العشوائي X هو ظهور صورة.

الحل:

ظهور الصورة: X ، $n = 5$

P هو احتمال ظهور صورة

$P = \frac{1}{2}\ ,\ 1-P = \frac{1}{2}$

التوقع: $\mu = nP$

$= 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$

التباين: $\sigma^2 = nP(1-P)$

$= 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{5}{4}$

$= 1.25$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{n\,P(1-P)} = \sqrt{1.25}$

≈ 1.1180

حاول أن تحل

13 في تجربة إلقاء قطعة نقود 8 مرات. أوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري إذا كان المتغير العشوائي X هو ظهور كتابة.

2–8: المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)

1 الأهداف

- يتعرف المتغير العشوائي المتصل ودالة كثافة الاحتمال.
- يوجد التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل.
- يتعرف التوزيع الاحتمالي المنتظم.
- يتعرف التوزيع الاحتمالي الطبيعي.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

متغيّر عشوائي متصل – توزيع احتمالي متصل – توزيع احتمالي منتظم – توزيع احتمالي طبيعي.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اسأل الطلاب: ارسم بيان الدالة $y = 2x$ على الفترة $[0, 3]$، ثم أوجد مساحة المثلث المكون من $y = 2x$، محور السينات، $x = 1$.

8–2

المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)
Continuous Random Variables

سوف تتعلم
- المتغيّر العشوائي المتصل.
- التوزيع الاحتمالي المتصل.
- التوزيع الاحتمالي المنتظم.
- التوزيع الاحتمالي الطبيعي.

المفردات والمصطلحات:
- متغيّر عشوائي متصل Continuous Random Variable
- توزيع احتمالي متصل Continuous Probability Distribution
- توزيع احتمالي منتظم Regular Probability Distribution
- توزيع احتمالي طبيعي Natural Probability Distribution

دعنا نفكر ونتناقش

(a) حدّد المتغير العشوائي المتقطع والمتغير العشوائي غير المتقطع فيما يلي:
1. عدد الأهداف في مباريات كرة القدم.
2. عدد الأولاد والبنات في الأسرة.
3. أطوال مجموعة من طلاب المرحلة الثانوية.
4. الحرارة القصوى في منطقة معينة.

(b) ما الفرق بين المدى للمتغير العشوائي المتقطع والغير المتقطع؟

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» تبيّن لنا أن مدى المتغير العشوائي المتقطع (المنفصل) X هو مجموعة قيم متقطعة قابلة للعد والمدى للمتغير العشوائي غير المتقطع هو مجموعة قيم غير قابلة للعد ويسمى هذا النوع من المتغير العشوائي بـ «**المتغير العشوائي المتصل**».

تعريف: المتغير العشوائي المتصل Continuous Random Variable

هو المتغير التي تكون مجموعة القيم الممكنة له عبارة عن فترة من الأعداد الحقيقية أي أن مدى المتغير العشوائي المتصل $X = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}$ وهي مجموعة غير قابلة للعد.

أمثلة عن المتغيرات العشوائية المتصلة:
- كتلة مجموعة طلاب بالكيلوجرام أعمارهم من (15–20) سنة.
- درجة حرارة جسم الإنسان خلال يوم كامل.
- المسافة المقطوعة لسيارة خلال وحدة الزمن.
- كمية الحليب التي تنتجها البقرة في اليوم باللتر.

160

تمرَّنْ 8–2

المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)
Continuous Random Variables

المجموعة A تمارين مقالية

(1) إذا كان X متغيّرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & : \quad 0 \le x \le 5 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(a) $P(0 \le X \le 5)$ **(b)** $P(X = 3)$
(c) $P(X \le 2)$ **(d)** $P(X > 2)$

(2) إذا كان X متغيّرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & : \quad 2 \le x \le 4 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(a) $P(2 \le X \le 4)$ **(b)** $P(X \ge 2.5)$

(3) إذا كان X متغيّرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}x & : \quad 0 \le x \le 3 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(a) $P(0 \le X \le 3)$ **(b)** $P(X < 1)$ **(c)** $P(X \ge 1)$

(4) لتكن الدالة f:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & : \quad -1 \le x \le 5 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

(a) أثبت أن الدالة f هي دالة كثافة احتمال.
(b) أثبت أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.
(c) أوجد $P(0 < X \le 3)$.
(d) أوجد التوقّع والتباين للدالة f.

60

5 التدريس

ناقش مع الطلاب فكرة المتغيرات المتصلة واطلب إليهم إعطاء أمثلة حياتية حول متغيرات متصلة.

شدّد على تعريف التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل.

اشرح كل من النقاط الثلاث: f متصلة على الفترة I، $f > 0$، المساحة المحددة تساوي العدد الصحيح 1.

اسأل الطلاب: كيف يمكن إيجاد المساحة المحددة بين بيان الدالة $y = \frac{1}{4}$ والمحور السيني والمستقيمين $x = 0$، $x = 4$؟

أشر إلى أنه نحسب مساحة المستطيل حيث بعديه 4 و $\frac{1}{4}$.

نبّه الطلاب إلى:

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b)$$
$$= P(a < X < b) \ldots$$

أي أنه إذا كانت الفترة مغلقة أو مفتوحة فالاحتمال هنا لا يتغيّر لأن احتمال قيمة معزولة للمتغير X تساوي الصفر.

في المثالين (1), (2)

يعتبر هذان المثالان تطبيق مباشر لمفهوم التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل يهدف إلى تركيز خواص دالة كثافة الاحتمال عند الطالب. في المثال (1) مساحة المنطقة هي مساحة مستطيل بينما في المثال (2) فهي مساحة مثلث.

في المثال (3)

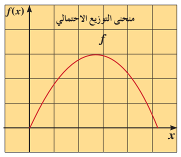
يعتبر هذا المثال تطبيق مباشر وسهل على مفهوم التوزيع الاحتمالي المنتظم لمتغير عشوائي متصل وإيجاد التوقع والتباين.

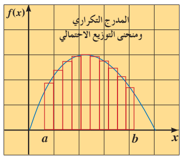
في المثالين (4), (5)

تحقق من أن الطلاب يجيدون استخدام جدولي التوزيع الطبيعي المعياري (z) رقم (4) ورقم (5) لحساب الاحتمالات.

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل (المستمر)
Probability Distribution for a Continuous Random Variable

يمكن تمثيل بيانات المتغير العشوائي الكمي المستمر على شكل مدرج تكراري نسبي. فنجد أن شكل هذا المدرج هو أقرب وصف لمنحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل. وكلما صغر طول الفئة حصلنا على رسم أدق للمنحنى الخاص بدالة احتمال المتغير المستمر كما في الشكل التالي:





والمساحة تحت منحنى التوزيع الاحتمالي هي عبارة عن مجموع الاحتمالات الكلية للمتغير العشوائي المتصل X، ولذلك فإن هذه المساحة **تساوي الواحد الصحيح**.

نسمي الدالة $f(x)$ **بدالة كثافة الاحتمال** للمتغير العشوائي المتصل (المستمر).

خواص دالة كثافة الاحتمال $f(x)$

1. $f(x)$ هي دالة متصلة على مجالها.
2. $f(x) \geqslant 0$ لكل قيم x التي تنتمي لمجال الدالة.
3. قيمة المساحة المحددة بمنحنى الدالة $f(x)$ ومحور السينات تساوي الواحد الصحيح.
4. يمكن إيجاد الاحتمال $P(a \leq X \leq b)$ بحساب المساحة تحت المنحنى f بين القيمة a, b من الشكل السابق.
5. تنعدم المساحة المظللة في الشكل السابق إذا كان $a = b$
أي أنه لأي متغير عشوائي متصل فإن: $P(X = a) = 0$

مثال (1)

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & : 1 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

a. $P(1 < X \leqslant 5)$
b. $P(X < 3)$
c. $P(X \geqslant 1.5)$
d. $P(X = 2)$

ملاحظة: مساحة المنطقة تحت المنحنى لا تتأثر بنوع الفترة.

161

---

(5) الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم وهي معرّفة كما يلي:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{7} & : 0 \leq x \leq 7 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

(a) أثبت أن الدالة f هي دالة كثافة احتمال.
(b) أوجد $(0 \leq X \leq \frac{7}{8})$.
(c) أوجد التوقّع والتباين للدالة f.

(6) إذا كان z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

(a) $P(z \leq 2.16)$ (b) $P(z \geq 2.51)$ (c) $P(1.5 \leq z \leq 2.4)$

(7) إذا كان z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري فأوجد:

(a) $P(z \leq -0.64)$ (b) $(-1.7 \leq z \leq 2.85)$ (c) $P(-1.23 \leq z \leq 0.68)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–7)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) نسبة الرطوبة خلال شهر هو متغير عشوائي متصل. (a) (b)

(2) عدد أحرف كلمات كتاب هو متغير عشوائي متصل. (a) (b)

(3) إذا كانت الدالة f معرفة كالتالي:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & : 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$
فإن الدالة f هي دالة كثافة احتمال. (a) (b)

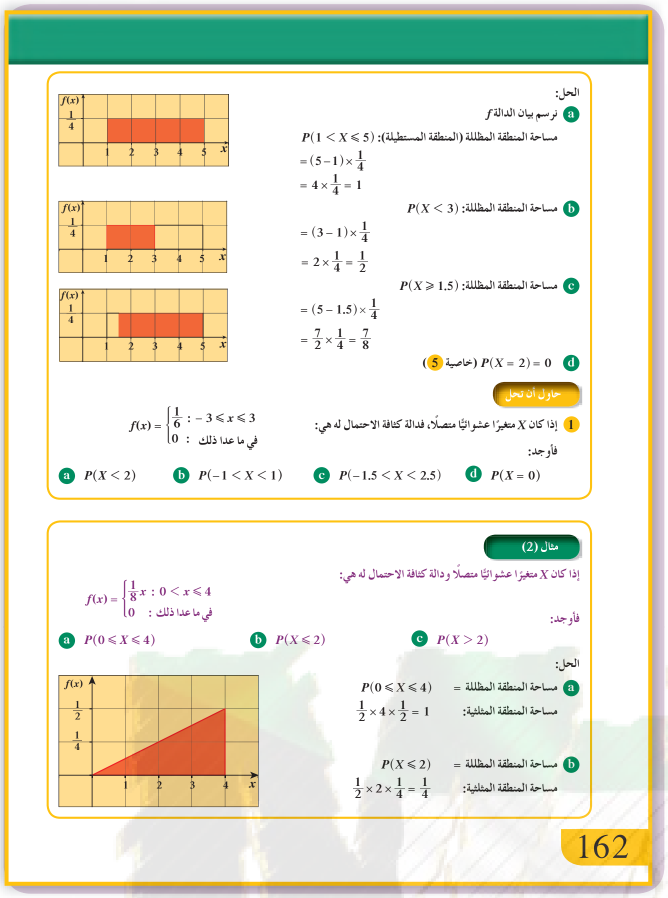
(4) إذا كانت X متغيرًا عشوائيًا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:
$$f(x) = \begin{cases} 2 & : 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$
فإن $P(X \geq 2) = 1$ (a) (b)

(5) إذا كانت الدالة f هي دالة كثافة احتمال تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم معرّفة كما يلي:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & : 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$
فإن التباين للدالة f هو $\sigma^2 = \frac{3}{4}$. (a) (b)

(6) من خواص التوزيع الطبيعي أنه متماثل حول $x = \mu$. (a) (b)

(7) المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي الواحد. (a) (b)

61



الحل:

(a) نرسم بيان الدالة f

مساحة المنطقة المظللة (المنطقة المستطيلة): $P(1 < X \leqslant 5)$

$= (5-1) \times \frac{1}{4}$

$= 4 \times \frac{1}{4} = 1$

(b) مساحة المنطقة المظللة: $P(X < 3)$

$= (3-1) \times \frac{1}{4}$

$= 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

(c) مساحة المنطقة المظللة: $P(X \geqslant 1.5)$

$= (5-1.5) \times \frac{1}{4}$

$= \frac{7}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$

(d) $P(X = 2) = 0$ (خاصية 5)

حاول أن تحل

1 إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا، فدالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & : -3 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(a) $P(X < 2)$ (b) $P(-1 < X < 1)$ (c) $P(-1.5 < X < 2.5)$ (d) $P(X = 0)$

مثال (2)

إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x & : 0 < x \leqslant 4 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(a) $P(0 \leqslant X \leqslant 4)$ (b) $P(X \leqslant 2)$ (c) $P(X > 2)$

الحل:

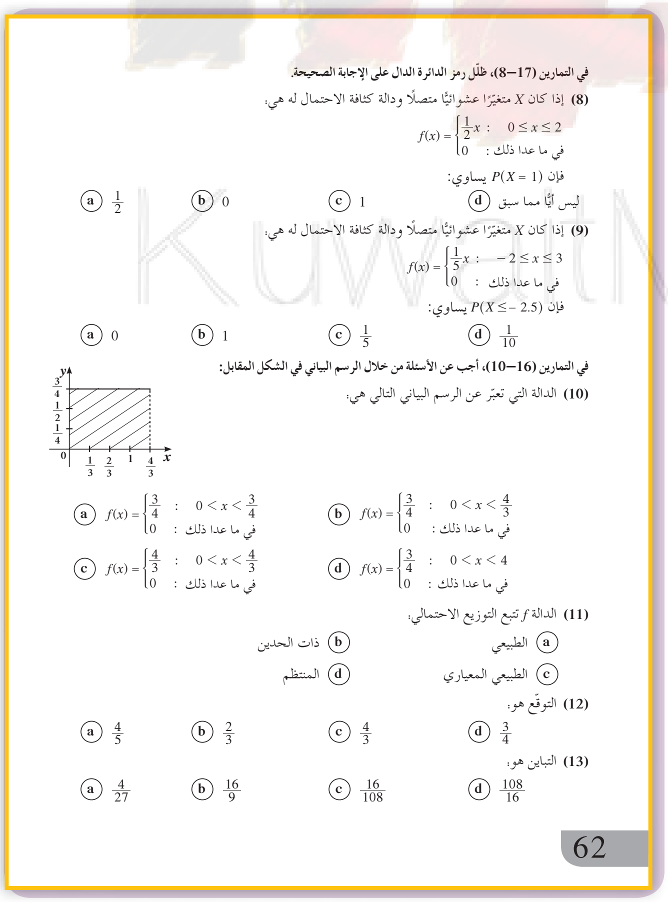
(a) مساحة المنطقة المظللة $= P(0 \leqslant X \leqslant 4)$

مساحة المنطقة المثلثية: $\frac{1}{2} \times 4 \times \frac{1}{2} = 1$

(b) مساحة المنطقة المظللة $= P(X \leqslant 2)$

مساحة المنطقة المثلثية: $\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

162



في التمارين (8–17)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(8) إذا كان X متغيّرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & : 0 \le x \le 2 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فإن $P(X = 1)$ يساوي:

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 0 (c) 1 (d) ليس أيًّا مما سبق

(9) إذا كان X متغيّرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}x & : -2 \le x \le 3 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فإن $P(X \le -2.5)$ يساوي:

(a) 0 (b) 1 (c) $\frac{1}{5}$ (d) $\frac{1}{10}$

في التمارين (10–16)، أجب عن الأسئلة من خلال الرسم البياني في الشكل المقابل:

(10) الدالة التي تعبّر عن الرسم البياني التالي هي:

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} & : 0 < x < \frac{3}{4} \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} & : 0 < x < \frac{4}{3} \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3} & : 0 < x < \frac{4}{3} \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} & : 0 < x < 4 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

(11) الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي:

(a) الطبيعي (b) ذات الحدين (c) الطبيعي المعياري (d) المنتظم

(12) التوقّع هو:

(a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{4}{3}$ (d) $\frac{3}{4}$

(13) التباين هو:

(a) $\frac{4}{27}$ (b) $\frac{16}{9}$ (c) $\frac{16}{108}$ (d) $\frac{108}{16}$

62

6 الربط

يبيّن المثالان (1)، (2) الترابط بين هذا الدرس وكل الوحدة مع الحياة اليومية.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في إيجاد الاحتمالات وخاصة في التمييز بين الإشارتين $<$ ، $>$.

كما قد يجدون صعوبة في استخدام جدولي التوزيع الطبيعي المعياري، أعطهم بعض الأمثلة لتجنب ذلك.

8 التقييم

راقب الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل» وتحقق من صحة عملهم ودقته.

اختبار سريع

1 إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & : -3 \le x \le 1 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(a) $P(-1 \le X \le 1)$ $\quad 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

(b) $P(X = 0)$ $\quad 0$

2 لتكن الدالة f:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & : -1 \le x \le 4 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

(a) أثبت أن الدالة هي دالة كثافة احتمال.

$5 \times \frac{1}{5} = 1$

(b) أثبت أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

$\frac{1}{b-a} = \frac{1}{4-(-1)} = \frac{1}{5}$

(c) أوجد التوقع والتباين للدالة f.

التوقع: $\mu = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}$

التباين: $\sigma^2 = \frac{(4-(-1))^2}{12} = \frac{25}{12}$

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a) 1 متغيّر عشوائي متقطع.

2 متغيّر عشوائي متقطع.

3 متغيّر عشوائي غير متقطع.

4 متغيّر عشوائي غير متقطع.

(b) المدى للمتغير العشوائي المتقطع هو مجموعة قيم متقطعة قابلة للعد، أمّا المدى للمتغيّر العشوائي غير المتقطع فهو مجموعة قيم غير قابلة للعد.

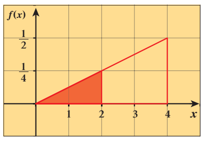
«حاول أن تحل»

1 (a) $P(X < 2) = (2 - (-3)) \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

(b) $P(-1 < X < 1) = (1 + 1) \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

(c) $P(-1.5 < X < 2.5) = (2.5 + 1.5) \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

(d) $P(X = 0) = 0$



c مساحة المنطقة غير المظللة من المثلث: $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$

$= 1 - \frac{1}{4}$

$= \frac{3}{4}$

حاول أن تحل

2 إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا، ودالة كثافة الاحتمال له هي: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & : 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

فأوجد:

a $P(X < 1)$ b $P(X \geqslant 1)$ c $P(X = 1)$

التوزيع الاحتمالي المنتظم لمتغير عشوائي متصل (مستمر)

Regular Probability Distribution for a Random Continuous Variable

تعريف:

دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الاحتمالي المنتظم على $[a, b]$ هي: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & : a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

– التوقع (الوسط) للتوزيع الاحتمالي المنتظم هو: $\mu = \frac{a+b}{2}$

– التباين للتوزيع الاحتمالي المنتظم هو: $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

مثال (3)

لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & : 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

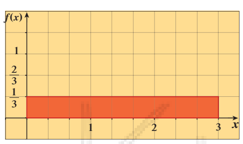
a أثبت أن الدالة هي دالة كثافة احتمال.

b أثبت أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

c أوجد $P(1 < X \leqslant 3)$

d أوجد التوقع والتباين للدالة f.

الحل:



a لإثبات أن الدالة f هي دالة كثافة احتمال يجب إثبات أن المساحة تحت المنحنى تساوي 1:

المساحة تحت المنحنى من الشكل هي

مساحة المنطقة المستطيلة = الطول × العرض

$= 3 \times \frac{1}{3} = 1$

$\therefore$ الدالة f هي دالة كثافة احتمال.

b لإثبات أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم يجب أن تكون الدالة على الصورة:

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & : a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

$\because\ a = 0\ ,\ b = 3 \Longrightarrow b - a = 3 - 0 = 3$

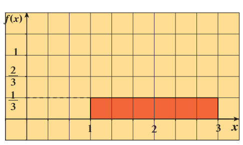
$\therefore\ \frac{1}{b-a} = \frac{1}{3}$

وبالتالي: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & : 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

أي أن f هي دالة تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

c مساحة المنطقة المظللة: $P(1 \leqslant X \leqslant 3)$

$= 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$



d التوقع: $\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$

التباين: $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

حاول أن تحل

3 لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & : 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

a أثبت أن الدالة f هي دالة كثافة احتمال.

b أثبت أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

c أوجد: $P(2 < X \leqslant 3)$

d أوجد التوقع والتباين للدالة f .

(14) $P\left(X < \frac{4}{6}\right) =$

ⓐ $\frac{1}{3}$ ⓑ $\frac{1}{4}$ ⓒ $\frac{1}{6}$ ⓓ $\frac{1}{2}$

(15) $P\left(X > \frac{4}{12}\right) =$

ⓐ $\frac{2}{6}$ ⓑ $\frac{6}{2}$ ⓒ $\frac{3}{4}$ ⓓ 1

(16) $P(0 < X < 1) =$

ⓐ $\frac{4}{5}$ ⓑ $\frac{1}{3}$ ⓒ 1 ⓓ $\frac{3}{4}$

(17) إذا كان z يتبع التوزيع الطبيعي فإن: $P(0 \leq z \leq 2.35)$ يساوي:

ⓐ 0.9906 ⓑ 0.5 ⓒ 0.4906 ⓓ 0.218

2 (a) $P(X < 1) = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

(b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

(c) $P(X = 1) = 0$

3 (a) مساحة المنطقة المستطيلة: $\frac{1}{2} \times (3 - 1) = 1$

$\therefore$ الدالة f هي دالة كثافة احتمال.

(b) $\frac{1}{b-a} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$

إذاً f دالة تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم فهي على الصورة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & : \ -a \leq x \leq b \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

(c) $P(2 < X \leq 3) = (3 - 2) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(d) التوقع: $\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$

التباين: $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{2^2}{12} = \frac{1}{3}$

4 (a) $P(z \leq 0.95) = 0.82894$

(b) $P(z > 0.71) = 1 - P(z \leq 0.71)$

$= 1 - 0.76115$

$= 0.23885$

(c) $P(1.45 \leqslant z \leqslant 3.26)$

$= P(z \leqslant 3.26) - P(z \leqslant 1.45)$

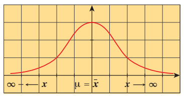
$= 0.99944 - 0.92647$

$= 0.07297$

التوزيع الاحتمالي الطبيعي $N(\mu , \sigma^2)$ Natural Probability Distribution $N(\mu , \sigma^2)$

يعتبر التوزيع الاحتمالي الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة وقد سبق أن درسنا منحنى التوزيع الطبيعي وخواصه والتي منها:

- المتوسط الحسابي = الوسيط = المنوال.
- يكون بيان المنحنى على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول محوره $(x = \mu)$.
- يمتد المنحنى من طرفيه إلى $-\infty$ وإلى ∞ (لا يقطع محور السينات).
- المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح (وحدة مساحة).
- المستقيم الرأسي $\mu = \bar{x}$ يقسم المساحة تحت المنحنى إلى قطعتين متماثلتين مساحة كل منهما تساوي نصف (نصف وحدة مساحة).

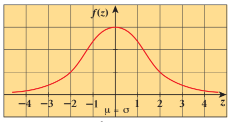


منحنى التوزيع الطبيعي $N(\mu , \sigma^2)$

التوزيع الطبيعي المعياري $N(0 , 1)$

إذا كان المتوسط الحسابي للتوزيع الطبيعي $\mu = 0$ والانحراف المعياري $\sigma = 1$ يسمى التوزيع الطبيعي **بالتوزيع الطبيعي المعياري**.

الشكل المرسوم يمثل بيان منحنى التوزيع الطبيعي المعياري.



منحنى التوزيع الطبيعي $N(\mu , \sigma^2)$

نعلم أن منحنى التوزيع الطبيعي يتحدد بكل من التوقع μ والتباين لها σ^2 ونظرًا لاختلاف قيم σ^2، μ من توزيع لآخر فإننا نقوم بتحويل أي توزيع طبيعي إلى توزيع طبيعي معياري وفق التحويل $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

وتمّ وضع جداول التوزيع الطبيعي المعياري في نهاية الوحدة للتوزيع الطبيعي $N(\mu , \sigma^2)$.

حساب الاحتمالات للتوزيع الطبيعي $N(\mu , \sigma^2)$

إذا كان للمتغير العشوائي X التوزيع الطبيعي $N(\mu , \sigma^2)$ أي التوزيع الذي توقعه μ وتباينه σ^2 وأردنا حساب احتمالات تتعلق بالمتغير X فإننا نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري المرفق آخر الوحدة باتباع الخطوات الموضحة التالية لإيجاد $P(a \leq X \leq b)$:

1. نوجد القيمة المعيارية المناظرة للقيمة a بالتعويض في العلاقة: $z_1 = \frac{a - \mu}{\sigma}$
   والقيمة المعيارية المناظرة للقيمة b بالتعويض في العلاقة: $z_2 = \frac{b - \mu}{\sigma}$
2. نستخدم العلاقة: $P(a < X \leqslant b) = P(z_1 < z < z_2)$
3. نستخدم أحد جدولي المساحة تحت المنحنى الطبيعي (5) ,(4) لحساب الطرف الأيسر من العلاقة السابقة.

حساب الاحتمالات للتوزيع الطبيعي المعياري $P(z)$

- إذا كانت $a \geqslant z$ أو $a \leqslant z$، حيث $a \geqslant 0$ نستخدم جدول z رقم (4).
- إذا كانت $a \geqslant z$ أو $a \leqslant z$، حيث $a < 0$ نستخدم جدول z رقم (5).

165

مثال (4)

إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

(a) $P(z \leqslant 2.18)$ (b) $P(z \geqslant 2.43)$ (c) $P(1.4 \leqslant z \leqslant 2.6)$

الحل:

(a) $P(z \leqslant 2.18)$ لاحظ أن: $2.18 \geqslant 0$

نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري z رقم (4) صفحة (177) الموجود في نهاية الوحدة.

$P(z \leqslant 2.18) = 0.98537$

(b) $P(z \geqslant 2.43) = 1 - P(z \leqslant 2.43)$

$= 1 - 0.99245$

$= 0.00755$

(c) $P(1.4 \leqslant z \leqslant 2.6)$

$= P(z \leqslant 2.6) - P(z \leqslant 1.4)$

$= 0.99535 - 0.91924$

$= 0.07611$

حاول أن تحل

4. إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

(a) $P(z \leq 0.95)$ (b) $P(z > 0.71)$ (c) $P(1.45 \leqslant z \leqslant 3.26)$

مثال (5)

إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

(a) $P(z \leqslant -0.55)$ (b) $P(-2.2 \leqslant z \leqslant -1.6)$ (c) $P(-1.3 \leqslant z \leqslant 0.28)$

الحل:

(a) $P(z \leqslant -0.55)$ لاحظ أن: $-0.55 \leqslant 0$

نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري z رقم (5) صفحة (178).

$P(z \leqslant -0.55) = 0.29116$

(b) $P(-2.2 \leqslant z \leqslant -1.6) = P(z \leqslant -1.6) - P(z \leqslant -2.2)$

$= 0.0537 - 0.01390$

$= 0.03980$

166

c $P(-1.3 \leqslant z \leqslant 0.28) = P(z \leqslant 0.28) - P(z \leqslant -1.3)$

لاحظ أن: $0.28 \geqslant 0$ لذا نستخدم جدول رقم (4)

وأن $-1.3 \leqslant 0$ لذا نستخدم جدول رقم (5)

$P(z \leqslant 0.28) = 0.61026$

$P(z \leqslant -1.3) = 0.09680$

$P(-1.3 \leqslant z \leqslant 0.28) = 0.61026 - 0.09680$

$= 0.51346$

حاول أن تحل

5 إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

a $P(z \leq -0.12)$ b $P(-3.2 \leq z \leq -0.1)$ c $P(-5.26 \leq z \leq 0.69)$

167

5 **(a)** $P(z \leq -0.12) = 0.45224$

(b) $P(-3.2 \leqslant z \leqslant -0.1)$

$= P(z \leq -0.1) - P(z \leq -3.2)$

$= 0.46017 - 0.00069$

$= 0.45948$

(c) $P(-5.26 \leqslant z \leqslant 0.69)$

$= P(z \leq 0.69) - P(z \leq -5.26)$

$= 0.75490 - 0$

$= 0.7549$

المرشد لحل المسائل

حل «مسألة إضافية»

(a) التوقع: $\mu = 20$

(b) التباين: $\sigma^2 = 4$

(b) $P(X < 19.5) = P\left(z < \dfrac{19.5 - 20}{\sqrt{4}}\right)$

$= P(z < -0.25) = 0.40129$

(c) $P(20 < X < 22) = P(0 < z < 1)$

$= P(1) - P(0)$

$= 0.84134 - 0.50000$

$= 0.34134$

اختبار الوحدة الثامنة

(1) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه هو $\{2,3,4,5\}$ وكان $f(2) = 0.3$ ، $f(3) = 0.2$ ، $f(4) = 0.1$
فأوجد $f(5)$، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

(2) يحتوي صندوق على 8 كرات متماثلة منها: 5 كرات حمراء و3 كرات صفراء سحبت 4 كرات عشوائيًّا معًا من الصندوق. إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد الكرات الصفراء، فأوجد ما يلي:

(a) عدد عناصر فضاء العينة $n(S)$.

(b) مدى المتغير العشوائي X.

(c) احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

(d) دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

(3) يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع X.

x	3	4	5	6
$f(x)$	$\frac{2}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$

أوجد:

(a) التوقع (μ).

(b) التباين (σ^2).

(c) الانحراف المعياري (σ).

(4) يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	2	3	4	5	6
$f(x)$	0.14	0.16	0.35	0.15	0.2

أوجد باستخدام دالة التوزيع التراكمي F: $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$, $F(3.5)$, $F(4)$, $F(5)$, $F(6)$, $F(7)$

(5) ينتج مصنع أجبان 1 250 علبة يوميًّا، إذا كانت نسبة إنتاج العلب الفاسدة 0.04، فأوجد ما يلي لمعرفة عدد العلب الفاسدة في أحد الأيام:

(a) التوقع (μ)

(b) التباين (σ^2).

(c) الانحراف المعياري (σ).

64

(6) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & : \quad -2 \le x \le 3 \\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(a) $P(0 \le X \le 3)$ **(b)** $P(-2 \le X \le 0)$

(c) $P(X = 2)$ **(d)** $P(-1 \le X \le 2)$

(7) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا. دالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}x & : \quad 0 \le x \le \frac{2}{3} \\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(a) $P\left(0 \le X \le \frac{1}{3}\right)$ **(b)** $P\left(X \ge \frac{1}{3}\right)$

(8) الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم وهي معرّفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & : \quad -3 \le x \le 5 \\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

(a) أثبت أن f هي دالة كثافة احتمال.

(b) $P(-1 \le X \le 3)$

(c) أوجد التوقع والتباين للدالة f.

(9) إذا كان z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X، فأوجد:

(a) $P(z \le 2.24)$ **(b)** $P(z \ge 1.52)$ **(c)** $P(1.4 \le z \le 2.6)$

(10) يمثّل المتغير X درجات الطلاب في مادة الرياضيات. إذا كان توزيع هذه الدرجات يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه $\mu = 40$ وانحرافه المعياري $\sigma = 8$ فأوجد:

(a) $P(30 < X < 65)$ **(b)** $P(X \ge 45)$

(11) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0.16	0.24	K	0.15	0.2

فأوجد قيمة K

(12) إذا كان z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري فأوجد:

(a) $P(z \le 1.45)$ **(b)** $P(z > 0.27)$

(c) $P(-1.32 \le z \le 1.75)$ **(d)** $P(-2.87 \le z \le -1.42)$

65

المرشد لحل المسائل

يتبع الراتب السنوي لموظفي شركة كبيرة التوزيع الطبيعي $N(50\,000\ ,\ 400\,000\,000)$

a أوجد التوقع والتباين.

b ما النسبة المئوية للموظفين الذين رواتبهم أقلّ من 000 40 دينار كويتي؟

c ما النسبة المئوية للموظفين الذين رواتبهم بين 000 45 وَ000 65 دينار كويتي؟

d ما النسبة المئوية للموظفين الذين رواتبهم أكثر من 000 70 دينار كويتي؟

الحل:

a التوزيع الطبيعي: $N(50\,000\ ,\ 400\,000\,000)$

توقعه: $\mu = 50\,000$

تباينه: $\sigma^2 = 400\,000\,000$

b $P(x < 40\,000) = P\left(z < \frac{40\,000 - 50\,000}{\sqrt{400\,000\,000}}\right) = P\left(z < -\frac{1}{2}\right)$

باستخدام الجدول (5): $P\left(z < -\frac{1}{2}\right) = 0.30854$

$\therefore$ 30.85% من الموظفين راتبهم أقلّ من 000 40 دينار كويتي.

c $P(45\,000 < x < 65\,000) = P(-0.25 < z < 0.75)$

$= P(z < 0.75) - P(z < -0.25)$

$= 0.77335 - 0.40129$

$= 0.37206$

$\therefore$ 37.21% من الموظفين راتبهم بين 000 65 وَ000 54 دينار كويتي.

d $P(x > 70\,000) = 1 - P(x \le 70\,000)$

$= 1 - P(z < 1)$

$= 1 - 0.84134$

$= 0.15866$

$\therefore$ 15.87% من الموظفين راتبهم أكثر من 000 70 دينار كويتي.

مسألة إضافية

الوقت اللازم لتجميع مكونات سيارة في معمل يتبع التوزيع الطبيعي $N(20,4)$

a أوجد التوقع والتباين.

b ما احتمال أن يتم تجميع السيارة بأقل من 19.5 ساعة؟

c ما احتمال أن يتم تجميع السيارة بوقت يتراوح بين 20 وَ22 ساعة؟

168

تمارين إثرائية

(1) متغير عشوائي X يتبع توزيعًا طبيعيًّا توقعه $\mu = 55$ وتباينه $\sigma^2 = 25$، أوجد:

(a) $P(X > 55)$
(b) $P(X < 50)$
(c) $P(30 < X < 40)$

(2) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	K	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

(a) أوجد K.
(b) ارسم دالة التوزيع الاحتمالي f.
(c) أوجد دالة التوزيع التراكمي F.
(d) ارسم دالة التوزيع التراكمي F.

(3) مدفع يتبع مداه توزيعًا طبيعيًّا توقعه 14 km وتباينه 1 km.
(a) ما احتمال أن تصل القذيفة إلى مسافة أبعد من 15 km؟
(b) ما احتمال أن تصل القذيفة فقط إلى مسافة أقل من 11 km؟
(c) ما احتمال أن تصل القذيفة إلى مسافة بين 13 km, 15 km؟

(4) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا، دالة كثافة الاحتمال له هي:

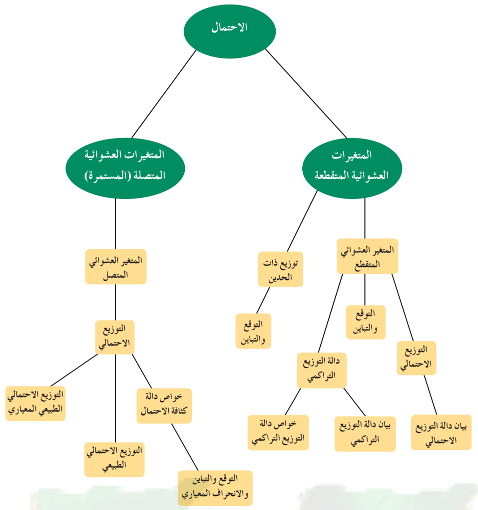
$$f(x) = \begin{cases} 2x & : \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(a) $P\left(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{2}\right)$
(b) $P\left(X \ge \frac{1}{2}\right)$

(5) عند إلقاء حجر نرد منتظم 7 مرات متتالية، أوجد:
(a) احتمال ظهور العدد 2 خمس مرات.
(b) احتمال ظهور العدد 2 مرة واحدة على الأقل.
(c) احتمال ظهور العدد 2 مرة واحدة على الأكثر.

مخطط تنظيمي للوحدة الثامنة



(6) إذا كان z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري فأوجد:

(a) $P(z \le 2.65)$
(b) $P(-2.85 \le z \le -1.96)$
(c) $P(z \ge 1.56)$

(7) يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي f لمتغير عشوائي متقطع X .

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

أوجد:
(a) التوقع (μ).
(b) التباين (σ^2).
(c) الانحراف المعياري (σ).

(8) يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X .

x	3	4	5	6
$f(x)$	0.17	0.24	0.23	0.36

أوجد باستخدام دالة الوزيع التراكمي F: $F(2)$, $F(3)$, $F(4)$, $F(4.5)$, $F(5)$, $F(6)$, $F(6.5)$

ملخص

المتغيّر العشوائي: هو دالة مجالها فضاء العينة S ومجالها المقابل هو $\mathbb{R}$ ومداها مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ حيث $X : S \to \mathbb{R}$
(X هو المتغير العشوائي، S فضاء العينة، $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية).

- يكون المتغير العشوائي X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا إذا كانت مجموعة القيم الممكنة له (المدى) $X(S)$: هي مجموعة متقطعة أي قابلة للعد، من الأعداد الحقيقية سواء أكانت منتهية أم غير منتهية.
- إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه $\{x_1 , x_2 , x_3 , ...\}$، فإن دالة التوزيع الاحتمالي f تعرّف كالتالي:
$f(x_i) = P(X = x_i), \; i = 1, 2, 3, 4, ...$
- دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X تحقق الشرطين:

1. $0 \le f(x) \le 1$
2. مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالي f تساوي الواحد الصحيح،
أي أن: $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + ... = 1$

- إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا له دالة التوزيع الاحتمالي f،
مدى $X = \{x_1 , x_2 , x_3 , ...\}$
فإن التوقع للمتغير العشوائي X يكون:
التوقع: $\mu = \sum x_i \, f(x_i)$
أي أن: $\mu = x_1 \, f(x_1) + x_2 \, f(x_2) + x_3 \, f(x_3) + ...$
- إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا له دالة التوزيع الاحتمالي f ، فإن التباين للمتغير العشوائي يعطى بالصيغة:
التباين: $\sigma^2 = \sum x_i^2 \, f(x_i) - \mu^2$ حيث μ هو التوقع.
الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\text{التباين}}$
- دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع عند القيمة a هي احتمال وقوع المتغير العشوائي X بحيث يكون X أصغر من أو يساوي a. أي أن:

1. $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$
2. $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$
3. $P(a \le X < b) = P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$

- يمكن تحويل التوزيع الطبيعي إلى توزيع طبيعي معياري باستخدام:

1. القيمة المعيارية المناظرة للقيمة a: $z_1 = \frac{a-\mu}{\sigma}$
2. القيمة المعيارية المناظرة للقيمة b: $z_2 = \frac{b-\mu}{\sigma}$

- نستخدم الجدول (4) إذا كات a أو b قيمة موجبة.
- نستخدم الجدول (5) إذا كات a أو b قيمة سالبة.
- التوقع للتوزيع الاحتمالي المنتظم: $\mu = \frac{a+b}{2}$
- التباين للتوزيع الاحتمالي المنتظم: $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: $f(x)$

		P										
n	x	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
2	0	0.902	0.810	0.640	0.490	0.360	0.250	0.160	0.090	0.040	0.010	0.002
	1	0.095	0.180	0.320	0.420	0.480	0.500	0.480	0.420	0.320	0.180	0.095
	2	0.002	0.010	0.040	0.090	0.160	0.250	0.360	0.0490	0.0640	0.0810	0.0902
3	0	0.857	0.729	0.512	0.343	0.216	0.125	0.064	0.027	0.008	0.001	
	1	0.135	0.243	0.384	0.441	0.432	0.375	0.288	0.189	0.096	0.027	0.007
	2	0.007	0.027	0.096	0.189	0.288	0.375	0.432	0.441	0.384	0.243	0.135
	3		0.001	0.008	0.027	0.064	0.125	0.216	0.343	0.512	0.729	0.857
4	0	0.815	0.656	0.410	0.240	0.130	0.062	0.026	0.008	0.002		
	1	0.171	0.292	0.410	0.412	0.346	0.250	0.154	0.076	0.026	0.004	
	2	0.014	0.049	0.154	0.265	0.346	0.375	0.346	0.265	0.154	0.049	0.014
	3		0.004	0.026	0.076	0.154	0.250	0.346	0.412	0.410	0.292	0.171
	4			0.002	0.008	0.026	0.062	0.130	0.240	0.410	0.656	0.815
5	0	0.774	0.590	0.328	0.168	0.078	0.031	0.010	0.002			
	1	0.204	0.328	0.410	0.360	0.259	0.156	0.077	0.028	0.006		
	2	0.021	0.073	0.205	0.309	0.346	0.312	0.230	0.132	0.051	0.008	0.001
	3	0.001	0.008	0.051	0.132	0.230	0.312	0.346	0.309	0.205	0.073	0.021
	4			0.006	0.028	0.077	0.156	0.259	0.360	0.410	0.328	0.204
	5				0.002	0.010	0.031	0.078	0.168	0.328	0.590	0.774
6	0	0.735	0.531	0.262	0.118	0.047	0.016	0.004	0.001			
	1	0.232	0.354	0.393	0.303	0.187	0.094	0.037	0.010	0.002		
	2	0.031	0.098	0.246	0.324	0.311	0.234	0.138	0.060	0.015	0.001	
	3	0.002	0.015	0.082	0.185	0.276	0.312	0.276	0.185	0.082	0.015	0.002
	4		0.001	0.015	0.060	0.138	0.234	0.311	0.324	0.246	0.098	0.031
	5			0.002	0.010	0.037	0.094	0.187	0.303	0.393	0.354	0.232
	6				0.001	0.004	0.016	0.047	0.118	0.262	0.531	0.735
7	0	0.698	0.478	0.210	0.082	0.028	0.008	0.002				
	1	0.257	0.372	0.367	0.247	0.131	0.055	0.017	0.004			
	2	0.041	0.124	0.275	0.318	0.261	0.164	0.077	0.025	0.004		
	3	0.004	0.023	0.115	0.227	0.290	0.273	0.194	0.097	0.029	0.003	
	4		0.003	0.029	0.097	0.194	0.273	0.290	0.227	0.115	0.023	0.004
	5			0.004	0.025	0.077	0.164	0.261	0.318	0.275	0.124	0.041
	6				0.004	0.017	0.055	0.131	0.247	0.367	0.372	0.257
	7					0.002	0.008	0.028	0.082	0.210	0.478	0.698

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: $f(x)$

		P										
n	x	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
8	0	0.663	0.430	0.168	0.058	0.017	0.004	0.001				
	1	0.279	0.383	0.336	0.198	0.090	0.031	0.008	0.001			
	2	0.051	0.149	0.294	0.296	0.209	0.109	0.041	0.010	0.001		
	3	0.005	0.033	0.147	0.254	0.279	0.219	0.124	0.047	0.009		
	4		0.005	0.046	0.136	0.232	0.273	0.232	0.136	0.046	0.005	
	5			0.009	0.047	0.124	0.219	0.279	0.254	0.147	0.033	0.005
	6			0.001	0.010	0.041	0.109	0.209	0.296	0.294	0.149	0.051
	7				0.001	0.008	0.031	0.090	0.198	0.336	0.383	0.279
	8					0.001	0.004	0.017	0.058	0.168	0.430	0.663
9	0	0.630	0.387	0.134	0.040	0.010	0.002					
	1	0.299	0.387	0.302	0.156	0.060	0.018	0.004				
	2	0.063	0.172	0.302	0.267	0.161	0.070	0.021	0.004			
	3	0.008	0.045	0.176	0.267	0.251	0.164	0.074	0.021	0.003		
	4	0.001	0.007	0.065	0.172	0.251	0.246	0.167	0.074	0.017	0.001	
	5		0.001	0.017	0.074	0.167	0.246	0.251	0.172	0.066	0.007	0.001
	6			0.003	0.021	0.074	0.164	0.251	0.267	0.176	0.045	0.008
	7				0.004	0.021	0.070	0.161	0.267	0.302	0.172	0.063
	8					0.004	0.018	0.060	0.156	0.302	0.387	0.299
	9						0.002	0.010	0.040	0.134	0.387	0.630
10	0	0.599	0.349	0.107	0.028	0.006	0.001					
	1	0.315	0.387	0.268	0.121	0.040	0.010	0.002				
	2	0.075	0.194	0.302	0.233	0.121	0.044	0.011	0.001			
	3	0.010	0.057	0.201	0.267	0.215	0.117	0.042	0.009	0.001		
	4	0.001	0.011	0.088	0.200	0.251	0.205	0.111	0.037	0.006		
	5		0.001	0.026	0.103	0.201	0.246	0.201	0.103	0.026	0.001	
	6			0.006	0.037	0.111	0.205	0.251	0.200	0.088	0.011	0.001
	7			0.001	0.009	0.042	0.117	0.215	0.267	0.201	0.057	0.010
	8				0.001	0.011	0.044	0.121	0.233	0.302	0.194	0.075
	9					0.002	0.010	0.040	0.121	0.268	0.387	0.315
	10						0.001	0.006	0.028	0.107	0.349	0.599

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: $f(x)$

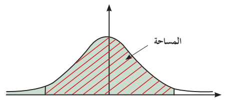
		P										
n	x	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
11	0	0.569	0.314	0.086	0.020	0.004						
	1	0.329	0.384	0.236	0.093	0.027	0.005	0.001				
	2	0.087	0.213	0.295	0.200	0.089	0.027	0.005	0.001			
	3	0.014	0.071	0.221	0.257	0.177	0.081	0.023	0.004			
	4	0.001	0.016	0.111	0.220	0.236	0.161	0.070	0.017	0.002		
	5		0.002	0.039	0.132	0.221	0.226	0.147	0.057	0.010		
	6			0.010	0.057	0.147	0.226	0.221	0.132	0.039	0.002	
	7			0.002	0.017	0.070	0.161	0.236	0.220	0.111	0.016	0.001
	8				0.004	0.023	0.081	0.177	0.257	0.221	0.071	0.014
	9				0.001	0.005	0.027	0.089	0.200	0.295	0.213	0.087
	10					0.001	0.005	0.027	0.093	0.236	0.384	0.329
	11							0.004	0.020	0.086	0.314	0.569
12	0	0.540	0.282	0.069	0.014	0.002						
	1	0.341	0.377	0.206	0.071	0.017	0.003					
	2	0.099	0.230	0.283	0.168	0.064	0.016	0.002				
	3	0.017	0.085	0.236	0.240	0.142	0.054	0.012	0.001			
	4	0.002	0.021	0.133	0.231	0.213	0.121	0.042	0.008	0.001		
	5		0.004	0.053	0.158	0.227	0.193	0.101	0.029	0.003		
	6			0.016	0.079	0.177	0.226	0.177	0.079	0.016		
	7			0.003	0.029	0.101	0.193	0.227	0.158	0.053	0.004	
	8			0.001	0.008	0.042	0.121	0.213	0.231	0.133	0.021	0.002
	9				0.001	0.012	0.054	0.142	0.240	0.236	0.085	0.017
	10					0.002	0.010	0.064	0.168	0.283	0.230	0.099
	11						0.003	0.017	0.071	0.206	0.377	0.341
	12							0.002	0.014	0.069	0.282	0.540

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: $f(x)$

		P										
n	x	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
13	0	0.513	0.254	0.055	0.010	0.001						
	1	0.351	0.367	0.179	0.054	0.011	0.002					
	2	0.111	0.245	0.268	0.139	0.045	0.010	0.001				
	3	0.021	0.100	0.246	0.218	0.111	0.035	0.005	0.001			
	4	0.003	0.028	0.154	0.234	0.184	0.087	0.024	0.003			
	5		0.006	0.069	0.180	0.221	0.157	0.066	0.014	0.001		
	6		0.001	0.023	0.103	0.197	0.209	0.131	0.044	0.006		
	7			0.006	0.044	0.131	0.209	0.197	0.103	0.023	0.001	
	8			0.001	0.014	0.066	0.157	0.221	0.180	0.069	0.006	
	9				0.003	0.024	0.087	0.184	0.234	0.154	0.028	0.003
	10				0.001	0.006	0.035	0.111	0.218	0.246	0.100	0.021
	11					0.001	0.010	0.045	0.139	0.268	0.245	0.111
	12						0.002	0.011	0.054	0.179	0.367	0.351
	13							0.001	0.010	0.055	0.254	0.513
14	0	0.488	0.229	0.044	0.007	0.001						
	1	0.359	0.356	0.154	0.041	0.007	0.001					
	2	0.123	0.257	0.250	0.113	0.032	0.006	0.001				
	3	0.026	0.114	0.250	0.194	0.085	0.022	0.003				
	4	0.004	0.035	0.172	0.229	0.155	0.061	0.014	0.001			
	5		0.008	0.086	0.196	0.207	0.122	0.041	0.007			
	6		0.001	0.032	0.126	0.207	0.183	0.092	0.023	0.002		
	7			0.009	0.062	0.157	0.209	0.157	0.062	0.0009		
	8			0.002	0.023	0.092	0.183	0.207	0.126	0.032	0.001	
	9				0.007	0.041	0.122	0.207	0.196	0.086	0.008	
	10				0.001	0.014	0.061	0.155	0.229	0.172	0.035	0.004
	11					0.003	0.022	0.085	0.194	0.250	0.114	0.026
	12					0.001	0.006	0.032	0.113	0.250	0.257	0.123
	13						0.001	0.007	0.041	0.154	0.356	0.359
	14							0.001	0.007	0.044	0.229	0.488

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: $f(x)$

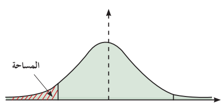
		P										
n	x	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
15	0	0.463	0.206	0.035	0.005							
	1	0.366	0.343	0.132	0.031	0.005						
	2	0.135	0.267	0.231	0.092	0.022	0.003					
	3	0.031	0.129	0.250	0.170	0.063	0.014	0.002				
	4	0.005	0.043	0.188	0.219	0.127	0.042	0.007	0.001			
	5	0.001	0.010	0.103	0.206	0.186	0.092	0.024	0.003			
	6		0.002	0.043	0.147	0.207	0.153	0.061	0.012	0.001		
	7			0.014	0.081	0.177	0.196	0.118	0.035	0.003		
	8			0.003	0.035	0.118	0.196	0.177	0.081	0.014		
	9			0.001	0.012	0.061	0.153	0.207	0.147	0.043	0.002	
	10				0.003	0.024	0.092	0.186	0.206	0.103	0.010	0.001
	11				0.001	0.007	0.042	0.127	0.210	0.188	0.043	0.005
	12					0.002	0.014	0.063	0.170	0.250	0.129	0.031
	13						0.003	0.022	0.092	0.231	0.267	0.135
	14							0.005	0.031	0.132	0.343	0.366
	15								0.005	0.035	0.206	0.463



جدول التوزيع الطبيعي المعياري (z) لحساب قيم المساحات من اليسار

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

جدول (4)



جدول التوزيع الطبيعي المعياري (z) لحساب قيم المساحات من اليسار

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−3.9	0.00005	0.00005	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00003	0.00003
−3.8	0.00007	0.00007	0.00007	0.00006	0.00006	0.00006	0.00006	0.00005	0.00005	0.00005
−3.7	0.00011	0.00010	0.00010	0.00010	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008	0.00008	0.00008
−3.6	0.00016	0.00015	0.00015	0.00014	0.00014	0.00013	0.00013	0.00012	0.00012	0.00011
−3.5	0.00023	0.00022	0.00022	0.00021	0.00020	0.00019	0.00019	0.00018	0.00017	0.00017
−3.4	0.00034	0.00032	0.00031	0.00030	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024
−3.3	0.00048	0.00047	0.00045	0.00043	0.00042	0.00040	0.00039	0.00038	0.00036	0.00035
−3.2	0.00069	0.00066	0.00064	0.00062	0.00060	0.00058	0.00056	0.00054	0.00052	0.00050
−3.1	0.00097	0.00094	0.00090	0.00087	0.00084	0.00082	0.00079	0.00076	0.00074	0.00071
−3.0	0.00135	0.00131	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00111	0.00107	0.00104	0.00100
−2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00139
−2.8	0.00256	0.00248	0.00240	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
−2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.00280	0.00272	0.00264
−2.6	0.00466	0.00453	0.00440	0.00427	0.00415	0.00402	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
−2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.00480
−2.4	0.00820	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
−2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
−2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
−2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
−2.0	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02068	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
−1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.02680	0.02619	0.02559	0.02500	0.02442	0.02385	0.02330
−1.8	0.03593	0.03515	0.03438	0.03362	0.03288	0.03216	0.03144	0.03074	0.03005	0.02938
−1.7	0.04457	0.04363	0.04272	0.04182	0.04093	0.04006	0.03920	0.03836	0.03754	0.03673
−1.6	0.05480	0.05370	0.05262	0.05155	0.05050	0.04947	0.04846	0.04746	0.04648	0.04551
−1.5	0.06681	0.06552	0.06426	0.06301	0.06178	0.06057	0.05938	0.05821	0.05705	0.05592
−1.4	0.08076	0.07927	0.07780	0.07636	0.07493	0.07353	0.07215	0.07078	0.06944	0.06811
−1.3	0.09680	0.09510	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08691	0.08534	0.08379	0.08226
−1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10935	0.10749	0.10565	0.10383	0.10204	0.10027	0.09853
−1.1	0.13567	0.13350	0.13136	0.12924	0.12714	0.12507	0.12302	0.12100	0.11900	0.11702
−1.0	0.15866	0.15625	0.15386	0.15151	0.14917	0.14686	0.14457	0.14231	0.14007	0.13786
−0.9	0.18406	0.18141	0.17879	0.17619	0.17361	0.17106	0.16853	0.16602	0.16354	0.16109
−0.8	0.21186	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
−0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.23270	0.22965	0.22663	0.22363	0.22065	0.21770	0.21476
−0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26435	0.26109	0.25785	0.25463	0.25143	0.24825	0.24510
−0.5	0.30854	0.30503	0.30153	0.29806	0.29460	0.29116	0.28774	0.28434	0.28096	0.27760
−0.4	0.34458	0.34090	0.33724	0.33360	0.32997	0.32636	0.32276	0.31918	0.31561	0.31207
−0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36693	0.36317	0.35942	0.35569	0.35197	0.34827
−0.2	0.42074	0.41683	0.41294	0.40905	0.40517	0.40129	0.39743	0.39358	0.38974	0.38591
−0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43251	0.42858	0.42465
−0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48405	0.48006	0.47608	0.47210	0.46812	0.46414

جدول (5)