الوحدة السادسة: هندسة الدائرة

Geometry of a Circle

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

٦ - ١(أ): الدائرة، ٦ - ١(ب): مماس الدائرة

جزء ١: العلاقة بين المماس ونصف قطر الدائرة.

جزء ٢: العلاقة بين مماسين من نقطة واحدة خارج الدائرة.

٦ - ٢: الأوتار والأقواس

جزء ١: العلاقة بين الأوتار المتطابقة والأقواس المقابلة لها والزاوايا المركزية.

جزء ٢: خصائص الخطوط المستقيمة التي تمر في مركز الدائرة.

٦ - ٣: الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

جزء ١: الزوايا المركزية - الزوايا المحيطية - الزوايا المماسية على الدائرة.

جزء ٢: العلاقة بين قياس الزاوية المركزية والزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.

جزء ٣: العلاقة بين قياس الزاوية المماسية وقياس القوس المحصور بين ضلعيها.

٦ - ٤: الدائرة: الأوتار المتقاطعة، المماس

جزء ١: الأوتار المتقاطعة.

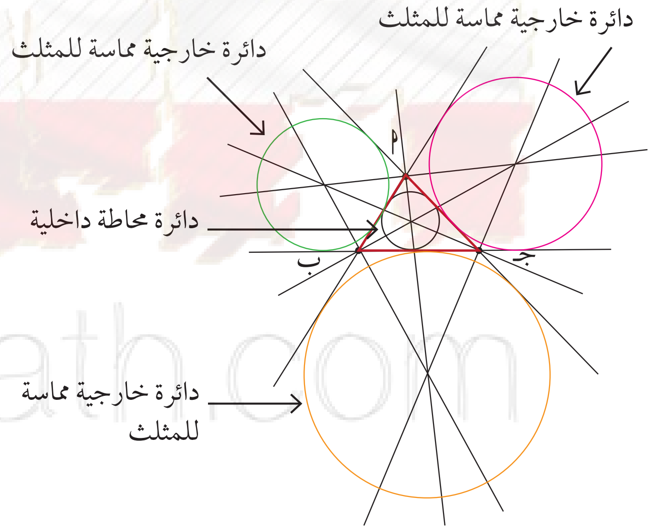
جزء ٢: المماس.

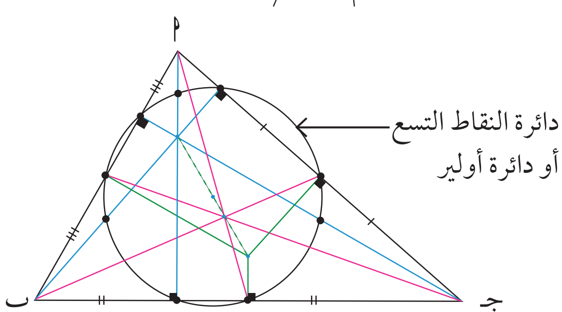
جزء ٣: العلاقة بين وترين متقاطعين في الدائرة .

جزء ٤: العلاقة بين طول القطعة المماسية المحصورة بين نقطة خارج الدائرة ونقطة المماس والقاطع على الدائرة.

مقدمة الوحدة

تعتبر الدائرة واحدة من أهم الأشكال الهندسية التي أعطاها علماء الرياضيات اهتمامًا خاصًّا، وبنوا عليها مسائل مهمة، وتوسعوا كثيرًا في خصائصها ومميزاتها. ثم أكمل المهندسون المعماريون والفنانون وأخصائيو التصاميم العمل مع الدائرة، فجاءت إبداعاتهم قببًا نصف كروية تعلو سطوح القصور الكبيرة، وأقواسًا تعلو الشبابيك والأبواب، وسطوحًا دائرية تعلو أيضًا الشبابيك والأبواب وأبراج القلاع إلى جانب ما نراه في تصاميم الزينة والرسوم والفنون كلها. والأهم من ذلك هو ما شغل علماء الرياضيات في العلاقة بين المضلعات والدائرة، فكانت الدائرة المحاطة بالمضلع والدائرة المحيطة بمضلع. فمثلًا، يوجد رباعي دائري ورباعي غير دائري، خماسي دائري وخماسي غير دائري، سداسي دائري وسداسي غير دائري ...





الدائرة الداخلية والدوائر الخارجية لمثلث.

(أ) الدائرة الداخلية لمثلث أو الدائرة المحاطة بمثلث:
Inscribed Circle of a triangle

هي أكبر دائرة تمس أضلاع المثلث من داخله، ويكون

الوحـدة السـادسـة

هندسة الدائرة

Geometry of a Circle

مشروع الوحدة: أهمية الدائرة في تصميم الزينة والزخارف الهندسية

١ مقدمة المشروع: منذ قرون عديدة، استخدم الفنانون بساطة الدائرة ورونقها في التزيين. بعضهم صنع أنماطًا في الدائرة مستفيدًا من عدم وجود بداية لها أو نهاية. وبعضهم الآخر استفاد من كثرة خطوط التناظر فيها لينتج خدعًا بصرية.

٢ الهدف: ابحث عن بعض التقنيات المستخدمة خلال العصور الماضية لإنتاج الفن الدائري عندما استخدم الفنانون الدائرة كأفضل طريقة لبلوغ أهدافهم في التزيين.

٣ اللوازم: أوراق رسم، شبكة مربعات، أقلام تلوين، قلم، فرجار.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ عيّن نقطة الأصل على شبكة مربعات (دون رسم المحاور).

ب ارسم ٤ دوائر مراكزها (٠، ٥)، (٥، ٠)، (−٥، ٠)، (٠، −٥) بنصف قطر يساوي $٥\sqrt{٢}$. مستخدمًا المراكز نفسها، ارسم ٤ دوائر بنصف قطر يساوي $٤\sqrt{٢}$.
صل بين المراكز الأربعة لتشكل مربعًا ولوّنه بالأحمر.
صل بين نقاط تقاطع الدوائر الكبرى والدوائر الصغرى ولوّن الشكل بالأخضر. امح الأقواس، ولوّن تصميمك.

جـ اتبع الخطوات التالية لتصميم نمط من الفن الإسلامي من القرن الرابع عشر.

الخطوة ١: ارسم دائرة ومربعًا رؤوسه على الدائرة، ثم ارسم قطريه. ارسم الشكل الناتج عن دوران المربع بزاوية ٤٥° حول مركز الدائرة.

الخطوة ٢: ارسم دائرة داخلية محاطة بالمربعين.

الخطوة ٣: ارسم في كل مربع جميع الأقطار.

الخطوة ٤: ارسم منصفات الزوايا المركزية، ثم عين نقاط التقاطع الثماني لهذه المنصفات مع الدائرة الداخلية.

الخطوة ٥: اجمع هذه النقاط لتحصل على مربعين محاطين بالدائرة الصغرى كما يبين الرسم، ثم لون لتحصل على التصميم المطلوب.

٥ التقرير: ضع تقريرًا مفصلًا حول تنفيذ المشروع مستفيدًا من دروس الوحدة، واعرض التصاميم التي حصلت عليها.

دروس الوحدة

الدائرة	مماس الدائرة	الأوتار والأقواس	الزوايا المركزية والزوايا المحيطية	الدائرة: الأوتار المتقاطعة، المماس
٦-١(أ)	٦-١(ب)	٦-٢	٦-٣	٦-٤

١٠

مركزها نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث.

(ب) الدائرة الخارجية المماسة لمثلث:
Escribed Circle of a triangle

هي دائرة تمس أحد أضلاع المثلث من الخارج وتمس امتداد الضلعين الآخرين لهذا المثلث، ويكون مركزها نقطة تلاقي منصف زاوية داخلية بمنصفي الزاويتين الخارجيتين الأخريين في المثلث.

ملاحظة: لكل مثلث ثلاث دوائر خارجية مماسة.

دائرة النقاط التسع أو دائرة أولير: Euler's Circle

هي دائرة مميزة في المثلث تعود إلى عالم الرياضيات أولير (Euler) حيث إنها تمر من خلال تسع نقاط مميزة في المثلث، تقع ست نقاط منها على المثلث (إذا لم يكن منفرج الزاوية) والنقاط التسع موزعة كما يلي:

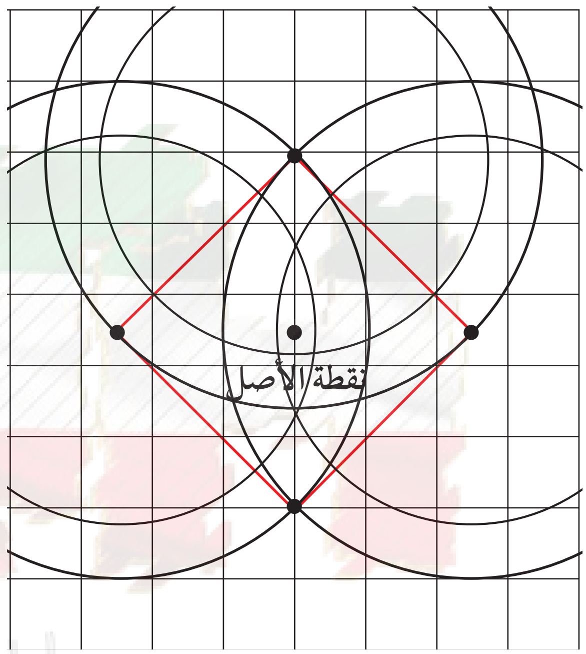
- ثلاث نقاط، كل منها منتصف ضلع من أضلاع المثلث.
- ثلاث نقاط، كل منها نقطة التقاء الارتفاع المرسوم من رأس المثلث بالضلع المقابل.
- ثلاث نقاط، كل منها منتصف القطعة المستقيمة التي تصل رأس المثلث بنقطة تقاطع ارتفاعات المثلث.

مشروع الوحدة

أسئلةٌ حول التطبيق:

شجع الطلاب على إجراء أبحاث تتناول الرسوم وتصاميم الزينة والهندسة المعمارية (أبراج وقصور وجوامع وكنائس ...)، وعرض هذه الابحاث، ثم التركيز على دور الدوائر وأنصاف الدوائر والأقواس من الدوائر.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»



تحقق من عمل الطلاب

سلّم التقييم	
٤.	الرسوم دقيقة. الألوان معبرة ومتناسقة. القياسات صحيحة. التقرير واضح.
٣.	معظم الرسوم دقيقة. الألوان معبرة ومتناسقة إلى حد ما. أخطاء قليلة في القياسات. التقرير مقبول.
٢.	بعض الرسوم دقيقة. الألون باهتة ومتناسقة إلى حد ما. أخطاء عديدة في القياسات. التقرير بحاجة إلى تعديلات.
١.	معظم عناصر المشروع ناقصة وبحاجة إلى إعادة.

الوحدة السادسة

اين انت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت إيجاد محيط دائرة ومساحتها.
- تعلمت إثبات تطابق المثلثات وخصائص العناصر المتناظرة وتشابه المثلثات وبعض القطع المميزة في المثلث.
- تعلمت خصائص المثلث قائم الزاوية، ومنها نظرية فيثاغورث.

ماذا سوف تتعلم؟

- سوف تستخدم العلاقة بين المماس ونصف قطر الدائرة المار بنقطة التماس لحل المسائل.
- سوف تستخدم العلاقة بين مماسين من نقطة واحدة في حل مسائل حياتية.
- سوف تستخدم الأوتار المتطابقة والأقواس والزوايا المركزية لحل مسائل في الدائرة.
- سوف تتعرف خصائص المستقيمات والقطع المستقيمة التي تمر بمركز الدائرة والتي لا تمر بمركز الدائرة.
- سوف تتعرف العلاقة بين الزاوية المركزية والزاوية المحيطية المشتركة في القوس نفسه.
- سوف تتعرف العلاقة بين الزاوية المماسية والقوس المحصور بين ضلعيها.
- سوف تتعرف العلاقة ما بين الزاوية المماسية والزاوية المحيطية والقوس المشترك بينهما.
- سوف تتعرف العلاقة بين وترين متقاطعين في الدائرة والعلاقة بين طول المماس وطول القطع.
- سوف تتعرف خصائص الشكل الرباعي الدائري.

أضف إلى معلوماتك

تتميز الأوتار المتقاطعة عند نقطة داخل الدائرة أو خارج الدائرة بعلاقات محددة تربط بين أطوال أجزائها. يمكنك إيجاد هذه العلاقات باستخدام ما تعلمته سابقًا عن المثلثات المتطابقة والمثلثات المتشابهة. المعارف التي سوف تكتسبها من هذه الوحدة لها تطبيقات عديدة في التصوير، والهندسة المعمارية، والهندسة المدنية، والصور المتحركة.

المصطلحات الأساسية

مماس الدائرة - أوتار - أقواس - زاوية مركزية - زاوية محيطية - أوتار متقاطعة - القاطع - رباعي دائري - زاويتان متقابلتان - زاويتان متكاملتان.

١١

٦ـ١: [أ] الدائرة
[ب] مماس الدائرة

١ الأهداف

- يرسم مماسًّا من نقطة موجودة على الدائرة.
- يوجد العلاقة بين المماس ونصف قطر الدائرة المار بنقطة التماس ويستخدمها في حل المسائل.
- يوجد العلاقة بين مماسين من نقطة خارج الدائرة ويستخدمها في حل المسائل.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

مماس للدائرة – شعاع مماس – قطعة مماسية – نقطة التماس – نصف قطر التماس.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة – فرجار – منقلة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

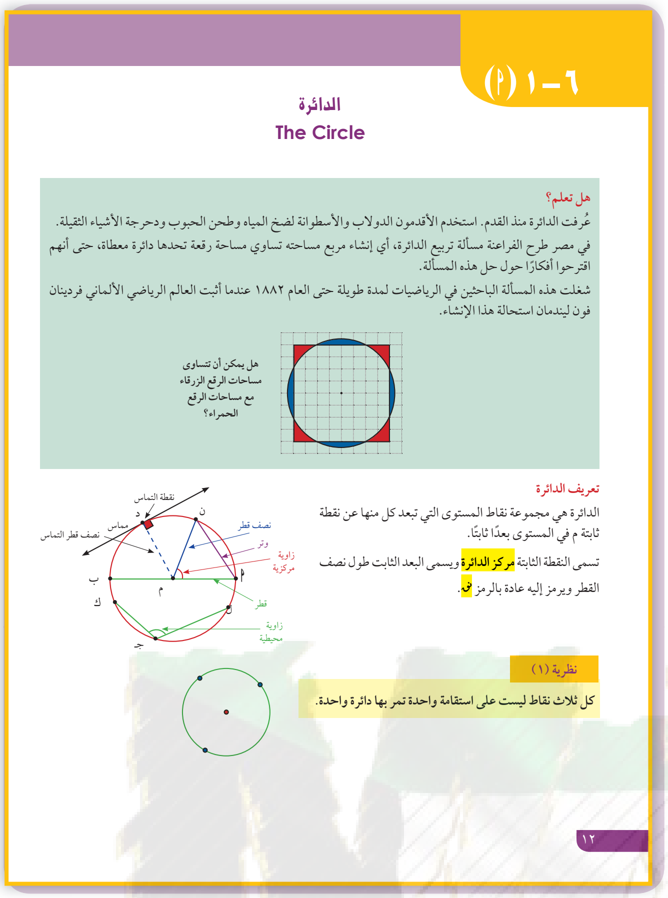
اسأل الطلاب:

- كيف تُعرِّف الدائرة؟ قطرها؟ نصف قطرها؟
- هل المثلث أ ب جـ، حيث أ ب = ٢٤ سم
ب جـ = ٧ سم، أ جـ = ٢٥ سم هو قائم الزاوية؟
- ما مجموع قياس الزوايا في الشكل الرباعي؟
- ما منصف الزاوية؟
- ما خاصية نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية في المثلث؟

٥ التدريس

وضِّح للطلاب من خلال عملية الانسحاب مستخدمًا مثلثًا خشبيًّا (أو بلاستيكيًّا) قائم الزاوية كيف أن نصف قطر الدائرة يكون متعامدًا مع المستقيم الذي هو مماس عند نقطة موجودة على الدائرة (نظرية ٢).

أخبرهم أن هذا ليس برهانًا علميًّا ولكن يعطي فكرة عن هذه العلاقة بين المماس ونصف القطر في نقطة تقاطعها على الدائرة. أكّد لهم أن البرهان في النظرية (٢) يعتمد على افتراض معكوس ما هو مطلوب إيجاده «البرهان غير المباشر» (Indirect Proof). وهو كما يلي:


٦ – ١ (أ)

الدائرة
The Circle

هل تعلم؟
عُرفت الدائرة منذ القدم. استخدم الأقدمون الدولاب والأسطوانة لضخ المياه وطحن الحبوب ودحرجة الأشياء الثقيلة.
في مصر طرح الفراعنة مسألة تربيع الدائرة، أي إنشاء مربع مساحته تساوي مساحة رقعة تحدها دائرة معطاة، حتى أنهم اقترحوا أفكارًا حول حل هذه المسألة.
شغلت هذه المسألة الباحثين في الرياضيات لمدة طويلة حتى العام ١٨٨٢ عندما أثبت العالم الرياضي الألماني فردينان فون ليندمان استحالة هذا الإنشاء.

تعريف الدائرة
الدائرة هي مجموعة نقاط المستوى التي تبعد كل منها عن نقطة ثابتة م في المستوى بعدًا ثابتًا.
تسمى النقطة الثابتة **مركز الدائرة** ويسمى البعد الثابت طول نصف القطر ويرمز إليه عادة بالرمز نق.

نظرية (١)
كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة.

١٢


مثال (١)
علم الآثار: وجد عالم آثار قطعًا صغيرة من جرة خزفية بالإضافة إلى قطعة كبيرة دائرية الشكل من فوهة الجرة. كيف تستطيع مساعدة العالم لإعادة ترميم الجرة، وذلك بإيجاد مركز وطول نصف قطر القطعة الدائرية الكبيرة؟
الحل:
المعطيات: جزء من فوهة الجرة الدائرية.
المطلوب: إيجاد مركز الدائرة وطول نصف قطرها.
العمل: نأخذ ٣ نقاط أ، ب، جـ على قوس الدائرة المرسومة والتي تمثل جزءًا من فوهة الجرة.
نرسم محورًا لكل من $\overline{أب}$، $\overline{ب جـ}$، اللذان يتقاطعان في نقطة و.
البرهان: ∵ $\overleftrightarrow{ول}$ محور $\overline{أب}$
∴ وب = وأ (١)
∵ $\overleftrightarrow{ون}$ محور $\overline{ب جـ}$
∴ وب = وجـ (٢)
من (١)، (٢) نستنتج أن النقطة و هي مركز الدائرة.
∴ طول $\overline{وأ}$ = طول نصف قطر الدائرة.

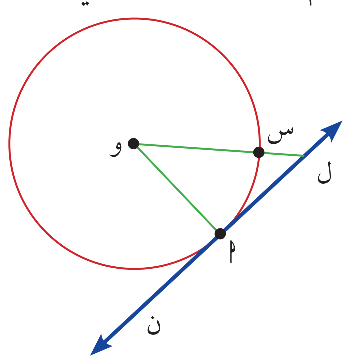
حاول أن تحل
١ استخدم المفهوم السابق في مثال (١) لإثبات برهان نظرية (١) وتحديد مركز الدائرة المحيطة بمثلث قائم الزاوية.

استنتاج
في الشكل المقابل، $\overline{أب} \perp \overline{ب جـ}$.
بفرض أن المستقيم $\overleftrightarrow{أجـ}$ يمر بالنقطة أ عموديًّا على $\overleftrightarrow{ب جـ}$.
يصبح مجموع قياسات زوايا Δأب جـ أكبر من ١٨٠° (ق ($\hat{ب}$) + ق ($\hat{جـ}$) = ١٨٠°)
وهذا يتناقض مع النظرية: مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°
∴ $\overleftrightarrow{أجـ}$ ليس عموديًّا على $\overleftrightarrow{ب جـ}$.
استنتاج ١: من نقطة خارج مستقيم يوجد مستقيم وحيد يمر بهذه النقطة وعمودي على المستقيم المعلوم.
لاحظ أنه في Δأب جـ، أب < أجـ مهما كان موضع النقطة جـ على المستقيم (جـ لا تنطبق على ب).
استنتاج ٢: أقصر بعد بين نقطة ومستقيم هو البعد العمودي.
كلما ابتعدت جـ عن ب على المستقيم أصبح طول $\overline{أجـ}$ أكبر.

١٣

المعطى: دائرة مركزها و، المستقيم ن مماس للدائرة في ٲ، وٲ نصف قطر التماس.

المطلوب: إثبات أن المستقيم ن ⊥ وٲ



البرهان:

الخطوة ١: لنفرض العكس، أي أن المستقيم ن ليس متعامدًا مع وٲ.

سوف نثبت أن هذا الافتراض يوصلنا إلى تناقض.

الخطوة ٢: إذا لم تكن وٲ متعامدة مع المستقيم ن، فإنه توجد قطعة مستقيمة أخرى متعامدة مع المستقيم ن.

ولتكن ول، تقطع الدائرة في س، أي أن ق(ولٲ) = ٩٠°

∴ ول = وس + س ل = وٲ + س ل

∴ ول < وٲ

ولكن وٲ وتر للمثلث ولٲ قائم الزاوية ل وهذا يناقض الفرض.

الخطوة ٣: الافتراض أن المستقيم ن ليس متعامدًا مع وٲ هو افتراض خطأ. وبالتالي فإن المستقيم ن ⊥ وٲ صحيح.


٦-١ (ب)

مماس الدائرة
Tangent of the Circle

عمل تعاوني
- استخدم الفرجار لرسم دائرة مركزها و.
- من نقطة د خارج الدائرة ارسم مستقيمًا يتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة فقط ولتكن ٲ.
- ارسم القطعة وٲ.

١ ما قياس الزاوية دٲو؟
٢ قارن نتيجتك بنتائج زملائك في الفصل.
٣ ضع تخمينًا حول العلاقة بين المستقيم الذي يقطع الدائرة في نقطة واحدة ونصف قطر الدائرة المار في هذه النقطة.

سوف تتعلم
- استخدام العلاقة بين المماس ونصف قطر الدائرة المار بنقطة التماس
- استخدام العلاقة بين مماسين من نقطة واحدة خارج الدائرة

المماس للدائرة هو مستقيم في المستوي يتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة.
نقطة التقاطع تسمى نقطة التماس.
ٲد مماس.
ٲد شعاع مماس.
ٲد قطعة مماسية
ٲو نصف قطر التماس

نظرية (٢)
المماس عمودي على نصف قطر التماس.
إذا كان مستقيم مماسًّا لدائرة، فإنه يكون متعامدًا مع نصف القطر المار بنقطة التماس.
أي أن وٲ ⊥ دٲ.

١٤


مثال (٢)
في الشكل المقابل مل ، من مماسان للدائرة التي مركزها و.
أوجد قياس الزاوية ل م ن.
الحل:
المعطيات: مل ، من مماسان للدائرة التي مركزها و.
المطلوب: إيجاد قياس الزاوية ل م ن
البرهان:
∵ مل مماس
ول نصف قطر التماس
∴ ق(م ل و) = ٩٠°
وبالمثل: ق(م ن و) = ٩٠° نظرية
ل م ن و شكل رباعي
∴ ق(ل) + ق(ن) + ق(م) + ق(و) = ٣٦٠°
٩٠° + ٩٠° + س° + ١١٧° = ٣٦٠° بالتعويض
٢٩٧° + س° = ٣٦٠° بالتبسيط
س° = ٦٣°
∴ ق(ل م ن) = ٦٣°

حاول أن تحل
٢ في الشكل المقابل، ٲد مماس للدائرة التي مركزها و.
أوجد قيمة س°.

مثال (٣) تطبيق حياتي
يمثل المخطط إطاري الدراجة.
أوجد دجـ المسافة بين محوري هذين الإطارين.
إذا كان ٲد = ٣٢ سم ، ب جـ = ٤٠ سم ، ٲب = ٩٦ سم.

١٥

في المثال (٢)، إذا تحركت م في المستوي بحيث م و = ثابت، فإن قياس الزاوية م ثابت لا يتغير.

في المثال (٣)، ساعد الطلاب على فهم الخطوط المستقيمة الإضافية في الرسم، والتي استخدمت لإيجاد الحل.

ٲب مماس مشترك للدائرتين، د ٲ ب هـ هو مستطيل.

شجع الطلاب على التعامل دائمًا بموضوعية مع الإنشاءات الهندسية باستخدام المسطرة والفرجار لما لها من أهمية في دقة أعمالهم مستقبلًا.

اسأل الطلاب: ما عدد المماسات على دائرة ما والتي تمر في نقطة معينة؟

ساعدهم على الوصول إلى فكرة أن عدد المماسات مرتبط بموقع النقطة بالنسبة إلى الدائرة.

إذا كانت النقطة داخل الدائرة فلا مماسات ممكنة، بينما إذا كانت النقطة على الدائرة فهناك مماس واحد، ولكن يمكن رسم مماسين للدائرة من نقطة خارج الدائرة. دعّم ذلك برسوم على السبورة.

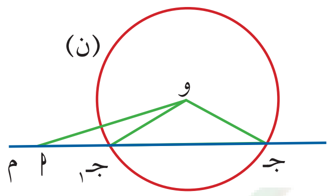
قبل البدء بالمثال (٤) ناقش مع الطلاب طريقة الحل في النظرية (٣) حيث تعتمد على افتراض أنه يوجد زاويتان قائمتان في مثلث واحد وهذا خطأ.

لإثبات النظرية (٣) سنفرض وجود نقطتي تقاطع بين المستقيم م والدائرة التي مركزها و ثم نبرهن أن النقطتين منطبقتان.

المعطى: المستقيم م متعامد مع وجـ ، النقطة جـ تنتمي إلى الدائرة.

المطلوب: إثبات أن المستقيم م مماس للدائرة.

البرهان: لنفرض وجود نقطتي تقاطع جـ، جـ$_1$ بين المستقيم والدائرة (أ نقطة على المستقيم).

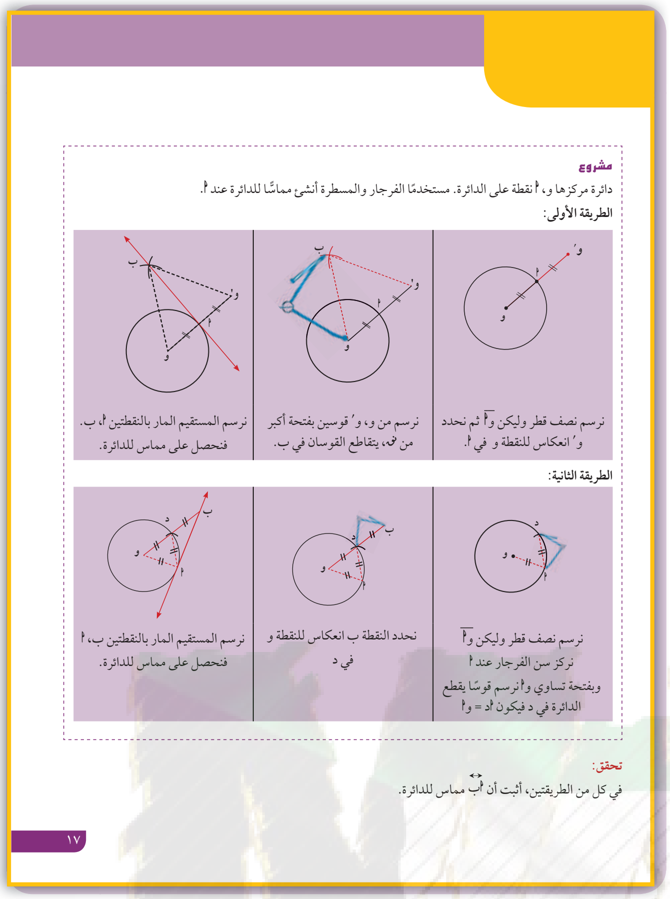


المثلثان وجـأ، وجـ$_1$أ قائما الزاوية في جـ، جـ$_1$.

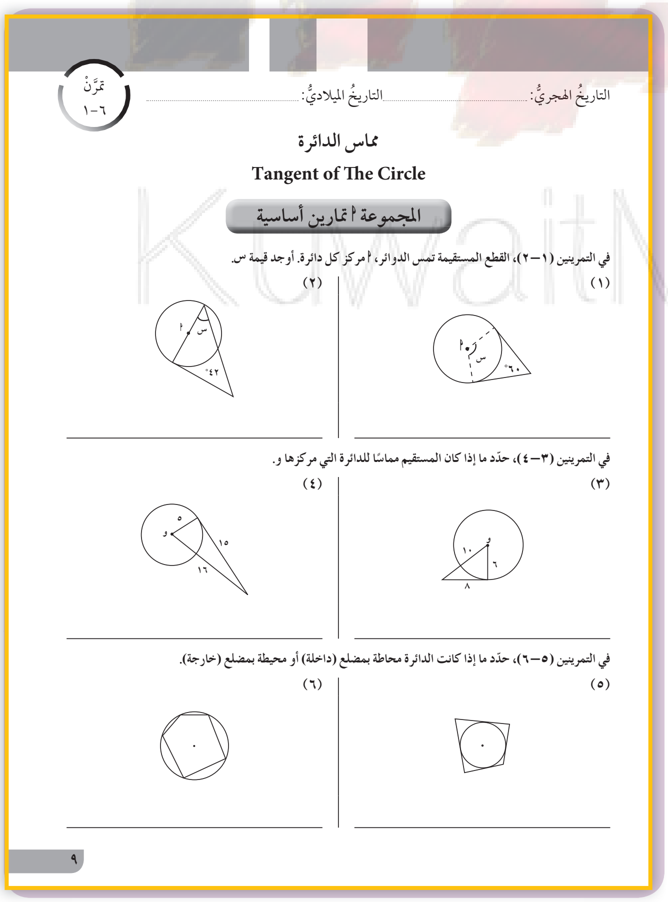
Δو جـ جـ$_1$ فيه زاويتان قائمتان، هذا لا يمكن إلا إذا انطبقت جـ$_1$ على جـ ومنه المستقيم م يقطع الدائرة في نقطة واحدة.

$\therefore$ المستقيم م مماس للدائرة.

في المثال (٤)، قد يطرح بعض الطلاب فكرة استخدام مثلث خشبي (قائم الزاوية) للتحقق من أن $\overleftrightarrow{مل}$ مماس للدائرة. أشر إلى أن هذه الطريقة غير مناسبة إذا كان قياس الزاوية قريبًا من ٩٠°.


مشروع
دائرة مركزها و، أ نقطة على الدائرة. مستخدمًا الفرجار والمسطرة أنشئ مماسًا للدائرة عند أ.
الطريقة الأولى:
نرسم نصف قطر وليكن وأ ثم نحدد و′ انعكاس للنقطة و في أ.
نرسم من و، و′ قوسين بفتحة أكبر من ـــ يتقاطع القوسان في ب.
نرسم المستقيم المار بالنقطتين أ، ب. فنحصل على مماس للدائرة.
الطريقة الثانية:
نرسم نصف قطر وليكن وأ نركز سن الفرجار عند أ وبفتحة تساوي وأ نرسم قوسًا يقطع الدائرة في د فيكون أد = وأ
نحدد النقطة ب انعكاس للنقطة و في د
نرسم المستقيم المار بالنقطتين أ، ب فنحصل على مماس للدائرة.
تحقق:
في كل من الطريقتين، أثبت أن $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة.
١٧

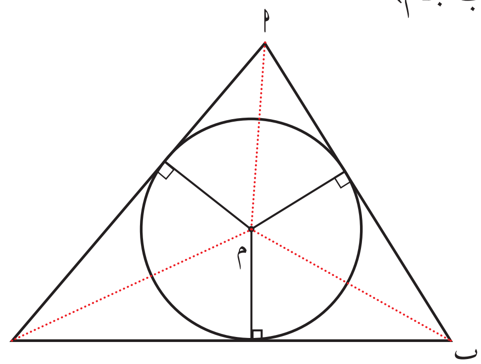

الحل:
المعطيات:
دائرة مركزها جـ، نق = ٤٠ سم
دائرة مركزها د، نق = ٣٢ سم
$\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرتين، أب = ٩٦ سم
المطلوب: إيجاد المسافة د جـ بين محوري الإطارين.
العمل: نرسم دهـ ⊥ جـ ب.
البرهان: دأ ⊥ أب، جـ ب ⊥ أب لماذا؟
∴ الشكل د أ ب هـ مستطيل.
المثلث د هـ جـ قائم الزاوية في هـ
بتطبيق نظرية فيثاغورث:
$(دجـ)^2 = (دهـ)^2 + (هـ جـ)^2$
$(دجـ)^2 = (٩٦)^2 + (٨)^2 = ٩٢٨٠$
باستخدام الآلة الحاسبة
دجـ ≃ ٩٦٫٣٣
المسافة بين محوري الإطارين تساوي ٩٦٫٣٣ سم تقريبًا.
معلومة:
محور الإطار هو المحور الذي يدور حوله الإطار.
حاول أن تحل
٣ يمثل الشكل المقابل مقطعًا لأسطوانتين في معمل الورق. أوجد طول ب جـ إذا كانت الدائرتان متماستين وطول نصف قطريهما ٥٠ سم، ٤٠ سم على الترتيب.
نظرية (٣)
المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته التي تنتمي إلى الدائرة يكون مماسًا لهذه الدائرة عند هذه النقطة.
$\overleftrightarrow{أم}$ مماس للدائرة عند جـ
١٦


التاريخ الهجري: .... التاريخ الميلادي: ....
تمرّن ٦-١
مماس الدائرة
Tangent of The Circle
المجموعة أ تمارين أساسية
في التمرين (١-٢)، القطع المستقيمة تمس الدوائر، أ مركز كل دائرة، أوجد قيمة س.
(١) (٢)
في التمرين (٣-٤)، حدّد ما إذا كان المستقيم مماسًا للدائرة التي مركزها و.
(٣) (٤)
في التمرين (٥-٦)، حدّد ما إذا كانت الدائرة محاطة بمضلع (داخلة) أو محيطة بمضلع (خارجة).
(٥) (٦)
٩

في المثال (٦)، اطلب إليهم إيجاد العلاقة بين نصف قطر الدائرة وطول ضلع المثلث في حالة مثلث متطابق الأضلاع.

مثلًا:

مساحة المثلث أ ب جـ = مساحة (أ ب م) + مساحة (م أ جـ) + مساحة (ب جـ م)



مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times$ أ ب $\times$ نق $+ \frac{1}{2} \times$ ب جـ $\times$ نق $+ \frac{1}{2} \times$ أ جـ $\times$ نق

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times$ نق $\times$ محيط أ ب جـ

وفي حالة المثلث المتطابق الأضلاع الذي طول ضلعه ل

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times$ ل$^{2} \times$ جا ٦٠ $= \frac{1}{2} \times$ ل$^{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

أيضًا مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times$ نق $\times$ ٣ ل ومنه نق $= \frac{ل\sqrt{3}}{6}$


البرهان:
جـ أ ⊥ أ ب معطى، أ ب قطر لنصف الدائرة د،
∴ جـ أ مماس لنصف الدائرة د،
كذلك جـ هـ ⊥ هـ أ معطى، هـ أ قطر لنصف الدائرة د
∴ جـ هـ مماس لنصف الدائرة د
وبالمثل يمكن إثبات أن أ هـ مماس لنصف الدائرة د، كذلك يمكن إثبات أن هـ جـ مماس لنصف الدائرة د،
كذلك ب جـ مماس لنصف الدائرة د.

معلومة مفيدة:
المماس لدائرة يكون مماسًّا لنصف هذه الدائرة الذي يحوي نقطة التماس.

حاول أن تحل
٥ أكمل النص التالي:
..... مماس للدائرة التي تمر برؤوس المثلث .....

نظرية (٤)
القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.
أ ب ≅ جـ ب

المعطيات:
دائرة مركزها و.
أ، جـ نقطتان على الدائرة.
ب نقطة خارج الدائرة حيث ب أ، ب جـ مماسان للدائرة.
المطلوب: إثبات تطابق ب أ، ب جـ.
العمل: نرسم و أ، و جـ، و ب.

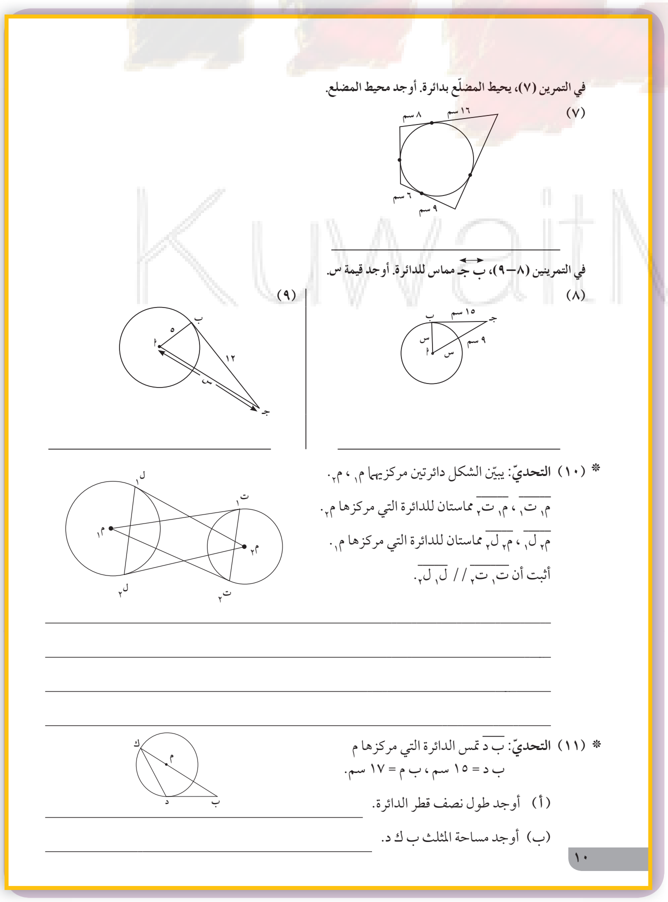
١٩


مثال (٤)
في الشكل المقابل، ن ل = ٧ سم، ل م = ٢٤ سم، ن م = ٢٥ سم.
أثبت أن م ل مماس للدائرة التي مركزها ن.
الحل:
المعطيات: ن ل = ٧ سم، ن م = ٢٥ سم، م ل = ٢٤ سم
المطلوب: إثبات أن م ل مماسًا للدائرة التي مركزها ن
البرهان: باستخدام عكس نظرية فيثاغورث
$(ن ل)^{2} + (ل م)^{2} \stackrel{?}{=} (ن م)^{2}$
$(٧)^{2} + (٢٤)^{2} \stackrel{?}{=} (٢٥)^{2}$ بالتعويض
٦٢٥ = ٦٢٥ بالتبسيط
نستنتج أن المثلث م ل ن قائم في ل.
∴ م ل ⊥ ن ل
∴ م ل مماس للدائرة في النقطة ل. نظرية

حاول أن تحل
٤ في الشكل المقابل، إذا كان ن ل = ٤، ل م = ٧، ن م = ٨،
فهل م ل مماس للدائرة؟ فسّر إجابتك.

مثال (٥)
في الشكل المقابل د١، د٢، د٣، د٤ أنصاف دوائر أقطارها على الترتيب
أ ب، ب جـ، جـ هـ، هـ أ.
حدّد المماسات لأنصاف الدوائر، وفسّر إجابتك
الحل:
المعطيات:
د١، د٢، د٣، د٤ أنصاف دوائر أقطارها على الترتيب
أ ب، ب جـ، جـ هـ، هـ أ.
المطلوب:
تحديد المماسات لأنصاف الدوائر مع تفسير الإجابة.

١٨


في التمرين (٧)، يحيط المضلّع بدائرة. أوجد محيط المضلع.
(٧)
في التمرينين (٨–٩)، ب جـ مماس للدائرة. أوجد قيمة س.
(٨) (٩)
* (١٠) التحدي: يبيّن الشكل دائرتين مركزيهما م١، م٢.
م١ ت١، م٢ ت٢ مماستان للدائرة التي مركزها م٢.
م١ ل١، م٢ ل٢ مماستان للدائرة التي مركزها م١.
أثبت أن ت١ ت٢ // ل١ ل٢.
* (١١) التحدي: ب د تمس الدائرة التي مركزها م
ب د = ١٥ سم، ب م = ١٧ سم.
(أ) أوجد طول نصف قطر الدائرة.
(ب) أوجد مساحة المثلث ب ك د.

١٠

٦ الربط

انظر المثالين (٣) ، (٨) فهما يؤكدان العلاقة والربط بين الدوائر وعجلات الدراجة.

في المثالين أعلاه، لا تتقاطع الدائرتان بينما في حالات أخرى تتقاطع الدائرتان (مثل التروس) وفي هذه الحالة تكون المسافة بين مركزي الدائرتين أصغر من مجموع طولي نصفي القطر.

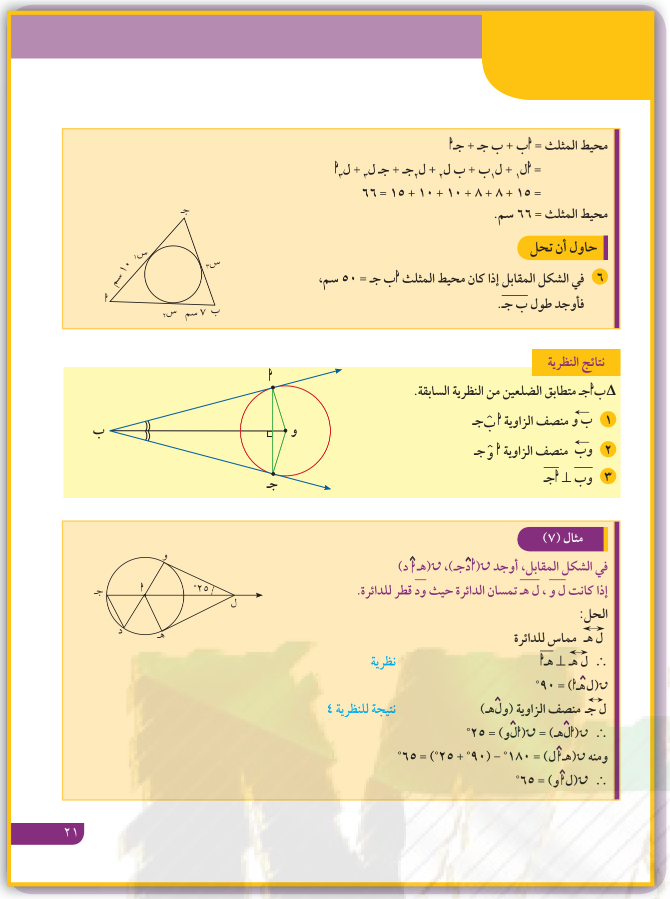
٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يعتقد بعض الطلاب بأنه يمكن إيجاد أكثر من مماس من نقطة على الدائرة.

اشرح لهم أن من نقطة على مستقيم يوجد مستقيم عمودي واحد فقط على هذا المستقيم. وبالتالي لا يوجد إلا مماس واحد من نقطة موجودة على الدائرة.

٨ التقييم

(أ) تابع الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» كونها تعطيك فكرة واضحة عن مدى استيعابهم المفاهيم والمهارات في هذا الدرس.



محيط المثلث = أب + ب جـ + جـ أ

= أل١ + ل١ب + ب ل٢ + ل٢جـ + جـ ل٣ + ل٣أ

= ١٥ + ٨ + ٨ + ١٠ + ١٠ + ١٥ = ٦٦

محيط المثلث = ٦٦ سم.

حاول أن تحل

٦ في الشكل المقابل إذا كان محيط المثلث أ ب جـ = ٥٠ سم، فأوجد طول ب جـ.

نتائج النظرية

Δب أ جـ متطابق الضلعين من النظرية السابقة.

١ ب و منصف الزاوية أ ب جـ

٢ و ب منصف الزاوية أ و جـ

٣ و ب ⊥ أ جـ

مثال (٧)

في الشكل المقابل، أوجد ق(أ د جـ)، ق(هـ أ د)

إذا كانت ل و ، ل هـ تمسان الدائرة حيث و د قطر للدائرة.

الحل:

ل هـ مماس للدائرة

∴ ل هـ ⊥ هـ أ — نظرية

ق(ل هـ أ) = ٩٠°

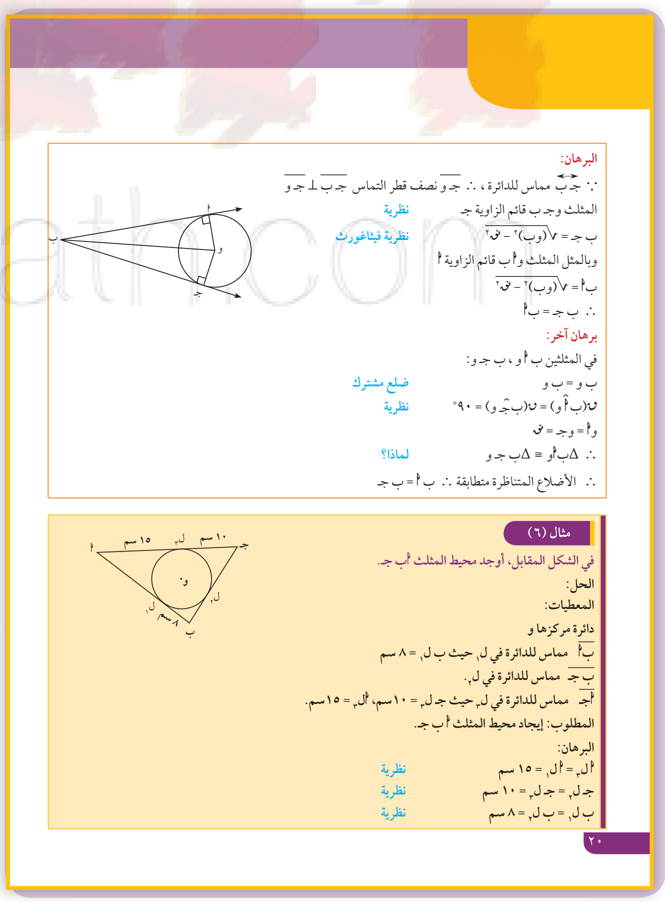
ل جـ منصف الزاوية (و ل هـ) — نتيجة للنظرية ٤

∴ ق(أ ل هـ) = ق(أ ل و) = ٢٥°

ومنه ق(هـ أ ل) = ١٨٠° − (٩٠° + ٢٥°) = ٦٥°

∴ ق(ل أ و) = ٦٥°

٢١



البرهان:

∵ جـ ب مماس للدائرة ، ∴ جـ و نصف قطر التماس جـ ب ⊥ جـ و

المثلث و جـ ب قائم الزاوية جـ — نظرية

ب جـ = √((و ب)² − نق²) — نظرية فيثاغورث

وبالمثل المثلث و أ ب قائم الزاوية أ

ب أ = √((و ب)² − نق²)

∴ ب جـ = ب أ

برهان آخر:

في المثلثين ب أ و ، ب جـ و:

ب و = ب و — ضلع مشترك

ق(ب أ و) = ق(ب جـ و) = ٩٠° — نظرية

و أ = و جـ = نق

∴ Δب أ و ≅ Δب جـ و — لماذا؟

∴ الأضلاع المتناظرة متطابقة ∴ ب أ = ب جـ

مثال (٦)

في الشكل المقابل، أوجد محيط المثلث أ ب جـ.

الحل:

المعطيات:

دائرة مركزها و

ب أ مماس للدائرة في ل١ حيث ب ل١ = ٨ سم

ب جـ مماس للدائرة في ل٢.

أ جـ مماس للدائرة في ل٣ حيث جـ ل٣ = ١٠ سم، أ ل٣ = ١٥ سم.

المطلوب: إيجاد محيط المثلث أ ب جـ.

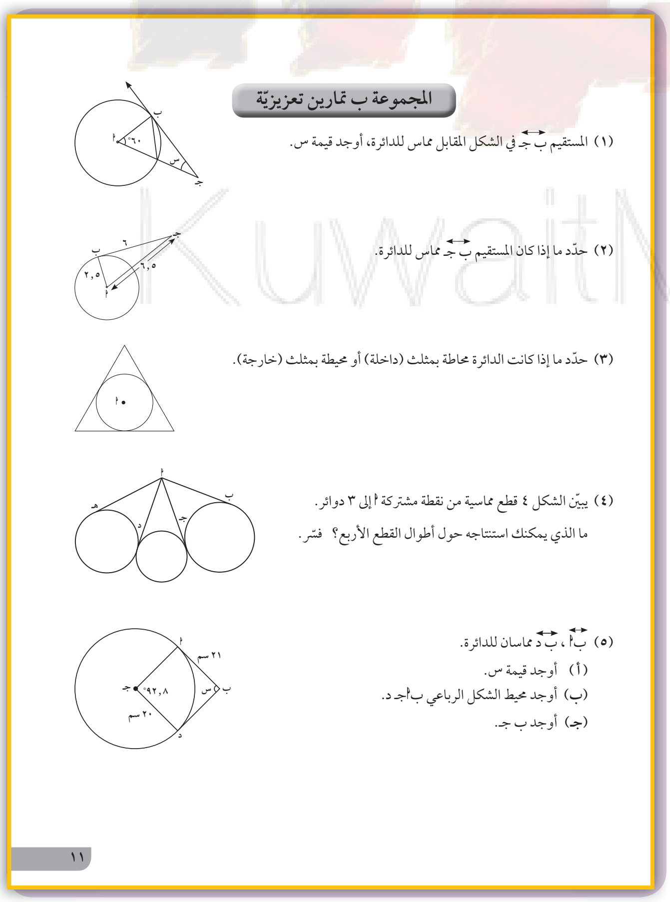
البرهان:

أ ل٣ = أ ل١ = ١٥ سم — نظرية

جـ ل٢ = جـ ل٣ = ١٠ سم — نظرية

ب ل١ = ب ل٢ = ٨ سم — نظرية

٢٠



المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

(١) المستقيم ب جـ في الشكل المقابل مماس للدائرة، أوجد قيمة س.

(٢) حدّد ما إذا كان المستقيم ب جـ مماس للدائرة.

(٣) حدّد ما إذا كانت الدائرة محاطة بمثلث (داخلة) أو محيطة بمثلث (خارجة).

(٤) يبيّن الشكل ٤ قطع مماسية من نقطة مشتركة أ إلى ٣ دوائر.

ما الذي يمكنك استنتاجه حول أطوال القطع الأربع؟ فسّر.

(٥) ب أ ، ب د مماسان للدائرة.

(أ) أوجد قيمة س.

(ب) أوجد محيط الشكل الرباعي ب أ جـ د.

(جـ) أوجد ب جـ.

١١

اختبار سريع

١ من نقطة أ خارج دائرة رسم $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة. إذا كان أب = ١٢ سم، نق = ٥ سم فأوجد البعد بين أ ومركز الدائرة. ١٣ سم

٢ ارسم دائرة ثم ارسم $\overleftrightarrow{أب}$ مماس لها. ارسم $\overleftrightarrow{جـ د}$ // $\overleftrightarrow{أب}$ بحيث تكون $\overleftrightarrow{جـ د}$ مماس للدائرة أيضًا. بيّن خطوات عملك.

من مركز الدائرة نرسم مستقيمًا عموديًا على $\overleftrightarrow{أب}$ يقطع الدائرة في هـ. من هـ نرسم مستقيمًا يوازي $\overleftrightarrow{أب}$.

٩ إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

١ ، ٢ ، ٣ قد تختلف الإجابات.


هـ جـ - هـ ب = هـ ف - هـ أ بطرح المعادلتين
ب جـ = أ ف.

حاول أن تحل

٨ من المثال السابق بفرض أن الدائرتين متطابقتان.
أثبت أن ب جـ = أ ف إذا لم يتقاطع $\overleftrightarrow{جـ ب}$ مع $\overleftrightarrow{أ ف}$.

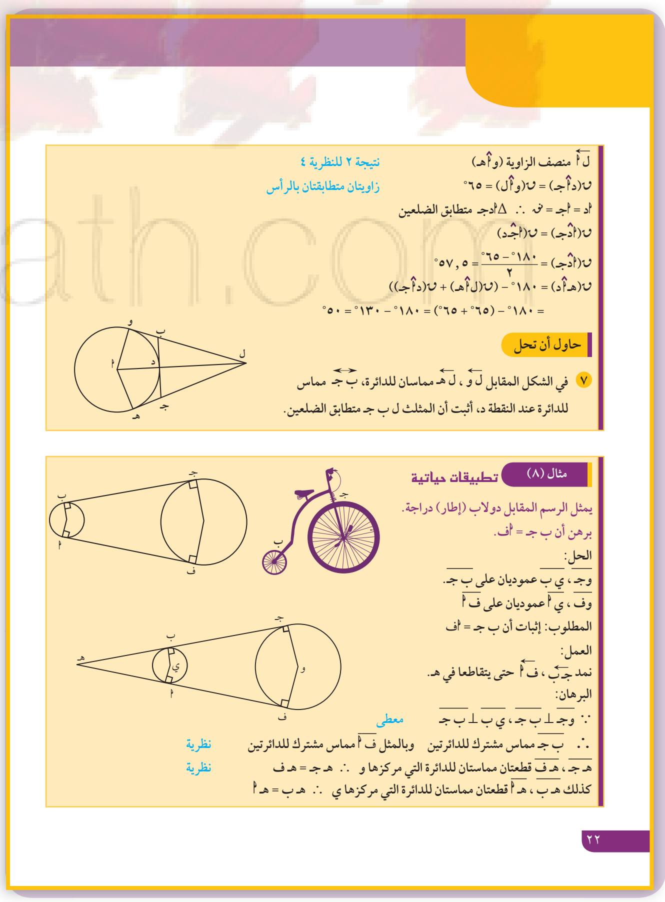
الدائرة المحاطة بمثلث (الداخلة) (Inscribed Circle of a Triangle)
هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث الثلاثة من الداخل.
مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث Circum Center.

فكِّر:
المثلثان أ و $ل_1$ ، أ و $ل_2$ متطابقان. لماذا؟
ق($ل_1$ أ و) = ق($ل_2$ أ و)
∴ $\overleftrightarrow{وأ}$ منصف الزاوية أ.
أثبت بالطريقة نفسها أن كلًّا من $\overleftrightarrow{وب}$ ، $\overleftrightarrow{وجـ}$ منصف للزاوية ب، جـ على الترتيب.

الدائرة المحيطة لمثلث (الخارجة) (Circumscribed Circle of a Triangle)
هي دائرة تمر برؤوس المثلث الثلاثة.
مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث (نقطة تلاقي المنصفات العمودية لأضلاع المثلث).

فكِّر:
وب = وجـ لماذا؟
وب = وأ لماذا؟
ماذا تستنتج؟

٢٣

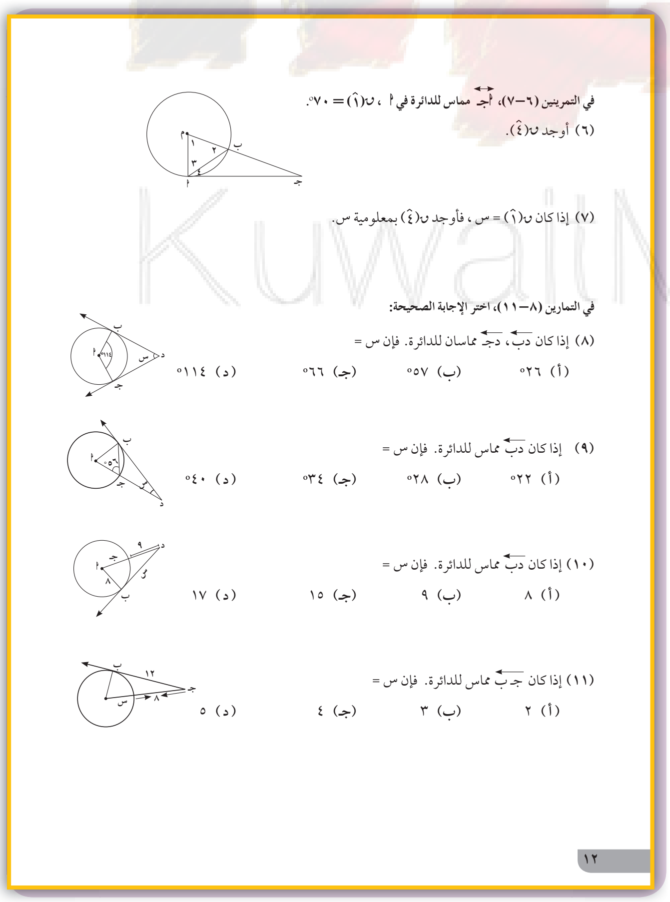

ل أ منصف الزاوية (و أ هـ) نتيجة ٢ للنظرية ٤
ق(د أ جـ) = ق(و أ ل) = ٦٥° زاويتان متطابقتان بالرأس
أد = أجـ = نق ∴ Δأدجـ متطابق الضلعين
ق(أدجـ) = ق(أجـد)
ق(أدجـ) = $\frac{١٨٠° - ٦٥°}{٢}$ = ٥٧,٥°
ق(هـ أ د) = ١٨٠° - (ق(ل أ هـ) + ق(د أ جـ))
= ١٨٠° - (٦٥° + ٦٥°) = ١٨٠° - ١٣٠° = ٥٠°

حاول أن تحل

٧ في الشكل المقابل ل و ، ل هـ مماسان للدائرة، $\overleftrightarrow{ب جـ}$ مماس للدائرة عند النقطة د، أثبت أن المثلث ل ب جـ متطابق الضلعين.

مثال (٨) تطبيقات حياتية
يمثل الرسم المقابل دولاب (إطار) دراجة.
برهن أن ب جـ = أ ف.
الحل:
وجـ ، ي ب عموديان على ب جـ.
وف ، ي أ عموديان على ف أ
المطلوب: إثبات أن ب جـ = أ ف
العمل:
نمد جـ ب ، ف أ حتى يتقاطعا في هـ.
البرهان:
∵ وجـ ⊥ ب جـ ، ي ب ⊥ ب جـ معطى
∴ ب جـ مماس مشترك للدائرتين وبالمثل ف أ مماس مشترك للدائرتين نظرية
هـ جـ ، هـ ف قطعتان مماستان للدائرة التي مركزها و ∴ هـ جـ = هـ ف نظرية
كذلك هـ ب ، هـ أ قطعتان مماستان للدائرة التي مركزها ي ∴ هـ ب = هـ أ

٢٢


في التمرينين (٦–٧)، $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماس للدائرة في أ ، ق($\hat{١}$) = ٧٠°.
(٦) أوجد ق($\hat{٤}$).

(٧) إذا كان ق($\hat{١}$) = س ، فأوجد ق($\hat{٤}$) بمعلومية س.

في التمارين (٨–١١)، اختر الإجابة الصحيحة:

(٨) إذا كان $\overrightarrow{دب}$ ، $\overrightarrow{دجـ}$ مماسان للدائرة. فإن س =
(أ) ٢٦° (ب) ٥٧° (جـ) ٦٦° (د) ١١٤°

(٩) إذا كان $\overrightarrow{دب}$ مماس للدائرة. فإن س =
(أ) ٢٢° (ب) ٢٨° (جـ) ٣٤° (د) ٤٠°

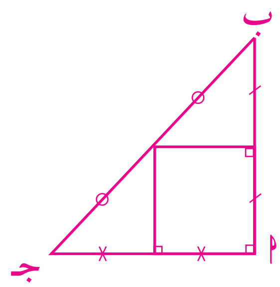
(١٠) إذا كان $\overrightarrow{دب}$ مماس للدائرة. فإن س =
(أ) ٨ (ب) ٩ (جـ) ١٥ (د) ١٧

(١١) إذا كان $\overrightarrow{جـ ب}$ مماس للدائرة. فإن س =
(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

١٢

«حاول أن تحل»

١ في المثلث ٯ ب جـ القائم الزاوية ٯ المنصف العمودي للضلع ٯ ب يمر بمنتصف ب جـ ، والمنصف العمودي للضلع ٯ جـ يمر بمنتصف ب جـ فيكون منتصف ب جـ هو مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث ٯ ب جـ.



٢ س° = ٩٠° − ٣٨°، س° = ٥٢°.

٣ ن ٯ = نو$_{١}$ + نو$_{٢}$ = ٥٠ + ٤٠ = ٩٠

ب جـ = ن هـ = $\sqrt{}$ (٩٠)^{٢} − (٥٠ − ٤٠)^{٢} = $\sqrt{}$ ٨٠٠٠
≃ ٨٩,٤٤ سم.

٤ (ن م)^{٢} = ٨^{٢} = ٦٤

(ن ل)^{٢} + (ل م)^{٢} = ٤^{٢} + ٧^{٢} = ٦٥

(ن م)^{٢} ≠ (ن ل)^{٢} + (ل م)^{٢}، لذا المثلث م ن ل ليس قائمًا في ل. ومنه م ل ليس مماسًّا للدائرة في ل.

٥ ٯ ب مماس للدائرة التي تمر برؤوس المثلث ب جـ د.

٦ ٯ س$_{١}$ = ٯ س$_{٢}$ = ١٠ سم

ب س$_{٣}$ = ب س$_{٢}$ = ٧ سم

٥٠ = ١٤ + ٢٠ + ٢ جـ س$_{٣}$

٢ جـ س$_{٣}$ = ١٦ أي جـ س$_{٣}$ = ٨ سم

فيكون طول جـ ب = ٧ + ٨ = ١٥

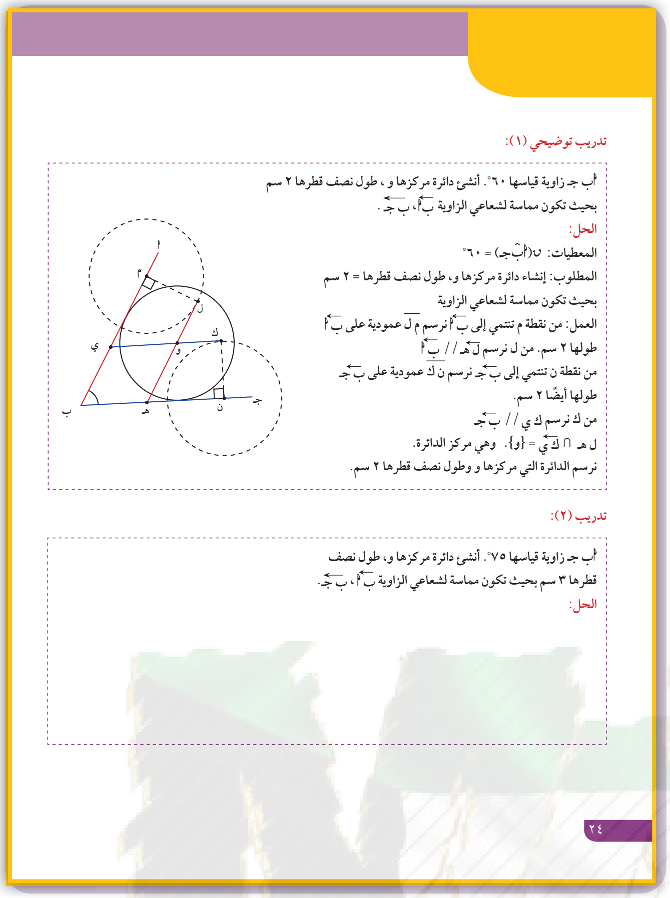
جـ ب = ١٥ سم.

٧ في المثلث ل ب جـ

ل ٯ ⊥ ب جـ ∴ ل د ⊥ ب جـ

ل ٯ منصف الزاوية ب ل جـ

∴ المثلث ل ب جـ متطابق الضلعين (ل ب = ل جـ)



تدريب توضيحي (١):

ٯ ب جـ زاوية قياسها ٦٠°. أنشئ دائرة مركزها و ، طول نصف قطرها ٢ سم بحيث تكون مماسة لشعاعي الزاوية ب ٯ ، ب جـ .

الحل:

المعطيات: ق(ٯ ب̂ جـ) = ٦٠°

المطلوب: إنشاء دائرة مركزها و، طول نصف قطرها = ٢ سم بحيث تكون مماسة لشعاعي الزاوية

العمل: من نقطة م تنتمي إلى ب ٯ نرسم م ل عمودية على ب ٯ طولها ٢ سم. من ل نرسم ل هـ // ب ٯ

من نقطة ن تنتمي إلى ب جـ نرسم ن ك عمودية على ب جـ طولها أيضًا ٢ سم.

من ك نرسم ك ي // ب جـ

ل هـ ∩ ك ي = {و}. وهي مركز الدائرة.

نرسم الدائرة التي مركزها و وطول نصف قطرها ٢ سم.

تدريب (٢):

ٯ ب جـ زاوية قياسها ٧٥°. أنشئ دائرة مركزها و، طول نصف قطرها ٣ سم بحيث تكون مماسة لشعاعي الزاوية ب ٯ ، ب جـ.

الحل:

٢٤

٨ في حالة عدم تقاطع جـ ب ، ٯ ف الشكل ٯ ب جـ ف له خط تماثل وهو المستقيم الذي يمر بمركزي الدائرتين.

تماثل ٯ هو ب، تماثل ف هو جـ.

∴ ب جـ = ٯ ف

«تدريب ٢»

يكرّر العمل في تدريب توضيحي مع فارق أن م ل = ٣ سم، ن ك = ٣ سم وقياس الزاوية ٯ ب جـ هو ٧٥°.

٦-٢: الأوتار والأقواس

١ الأهداف

- يربط بين الأوتار المتطابقة والأقواس والزوايا المركزية على دائرة أو على دوائر متطابقة.
- يتعرف خصائص الخطوط المستقيمة التي تمر في مركز الدائرة.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

قوس - وتر - قطر - نصف قطر - زاوية مركزية - منصف عمودي - منصف زاوية - قطعة متوسطة.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة - فرجار - منقلة - حاسوب - جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

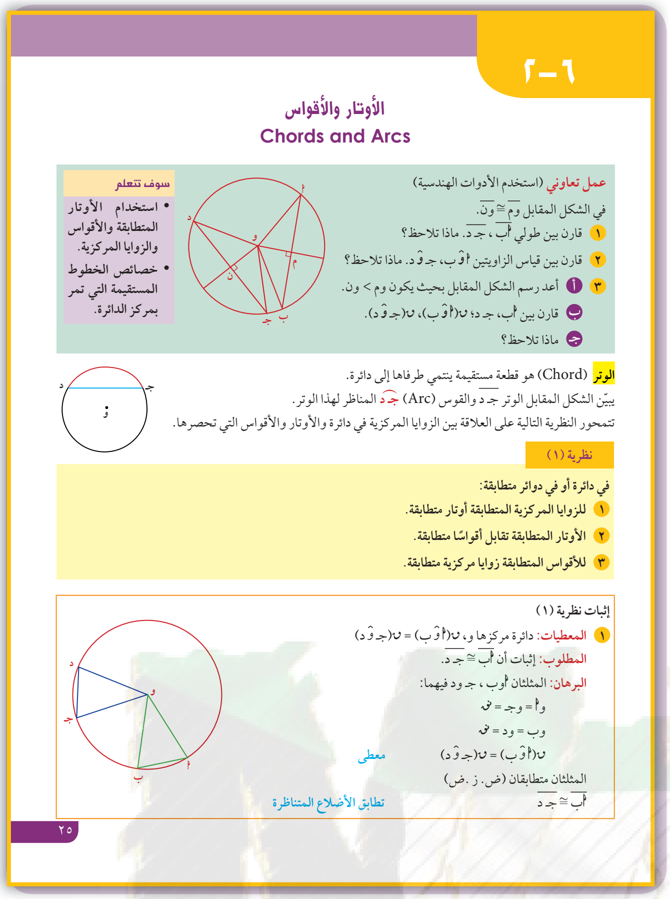
اسأل الطلاب:

- ما هي حالات تطابق مثلثين؟
- ما هو منصف الزاوية؟ ما هو العمود المرسوم من رأس المثلث إلى الضلع المقابل؟ ما هو المنصف العمودي لقطعة مستقيمة؟ ما هي القطعة المتوسطة في المثلث؟
- ما طول قوس على الدائرة بدلالة نصف قطرها وقياس زاويته المركزية بالراديان؟

٥ التدريس

اطلب إلى الطلاب أن يستخدموا المسطرة والفرجار والمنقلة ليرسموا نماذج متعددة من الدوائر ويرسموا في كل دائرة زاويتين مركزيتين متساويتي القياس، ثم يقارنوا أطوال الأوتار المقابلة، وباستخدام القاعدة ل = هـ نق يوجدوا أطوال الأقواس المقابلة. يمكنهم أيضًا استخدام الأوتار متساوية الطول، ثم بواسطة المنقلة يقيسون الزوايا المركزية المقابلة. سوف يساعدهم ذلك على فهم نظرية (١).
من المهم جدًّا أن يتعمق الطلاب في فهم النظريتين (٢)، (٣) اللتين تحددان العلاقة بين بعد الأوتار عن مركز الدائرة وعلاقة قطر الدائرة العمودي على أي وتر في الدائرة.

اسأل الطلاب : كيف يمكن معرفة مركز الدائرة باستخدام الأوتار؟ نرسم المنصف العمودي لوترين غير متوازيين. نقطة تقاطع المنصفين هي مركز الدائرة.



أشر إلى أن كل مستقيم مار في مركز الدائرة يشكل خط تناظر لها.
قد تساعد هذه الخاصية في إثبات بعض النظريات والتطبيقات.

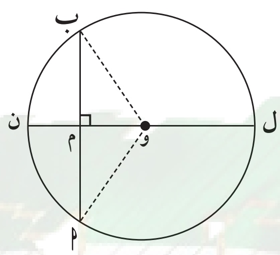
- في المثال (١)، يمكن أن يكون القوسان ب⌒جـ ، ⌒ف د على دائرة واحدة وتبقى النتيجة ذاتها.
- في المثال (٢)، إذا عرف البعد بين مركز الدائرة والوتر بمعلومية نق، نستطيع معرفة طول الوتر والعكس صحيح.

ناقش مع الطلاب الحلول الموجودة لإثبات النظرية (٣) وذلك في الحالات الثلاث:

النظرية (٣):

١ – **المعطيات**: دائرة مركزها و، ل ن قطر، ل ن ⊥ أب حيث أب وتر في الدائرة.

المطلوب: إثبات أن أم ≅ م ب.
⌒أن = ⌒ن ب



العمل: نصل وأ، وب

البرهان: Δ وأب متطابق الضلعين
وم ⊥ أب
∴ وم المنصف العمودي لِ أب
∴ أم ≅ م ب.


مثال (٢)

في الشكل المقابل ليكن م مركز الدائرة. م ب = م هـ ، أوجد طول جـ د. فسّر.

الحل:

المعطيات:
جـ د ، جـ أ وتران في الدائرة.
ب منتصف جـ أ . ب أ = ١٢,٥ .
هـ ∈ جـ د حيث م هـ ⊥ جـ د ، م هـ = م ب.

المطلوب: إيجاد طول جـ د.

البرهان:

أب = ب جـ = ١٢,٥ معطى
أب + ب جـ = أجـ
٢٥ = أجـ بالتعويض
∵ م هـ = م ب معطى
∴ جـ د = أجـ نظرية
جـ د = ٢٥ بالتعويض

حاول أن تحل

٢ دائرة مركزها و.
أوجد قيمة س في الشكل المقابل، وفسّر إجابتك.

في الدائرة، للمنصف العمودي على الوتر خواص هندسية مهمة.

نظرية (٣)

١ القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه وينصف كلًّا من قوسيه.
٢ القطر الذي ينصف وترًا (ليس قطرًا) في دائرة يكون عموديًّا على هذا الوتر.
٣ العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة.

٢٨


تبيّن النظرية التالية العلاقة بين وترين وبُعد كل منهما عن مركز الدائرة.

نظرية (٢)

١ الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.
٢ الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز دائرة تكون متطابقة.

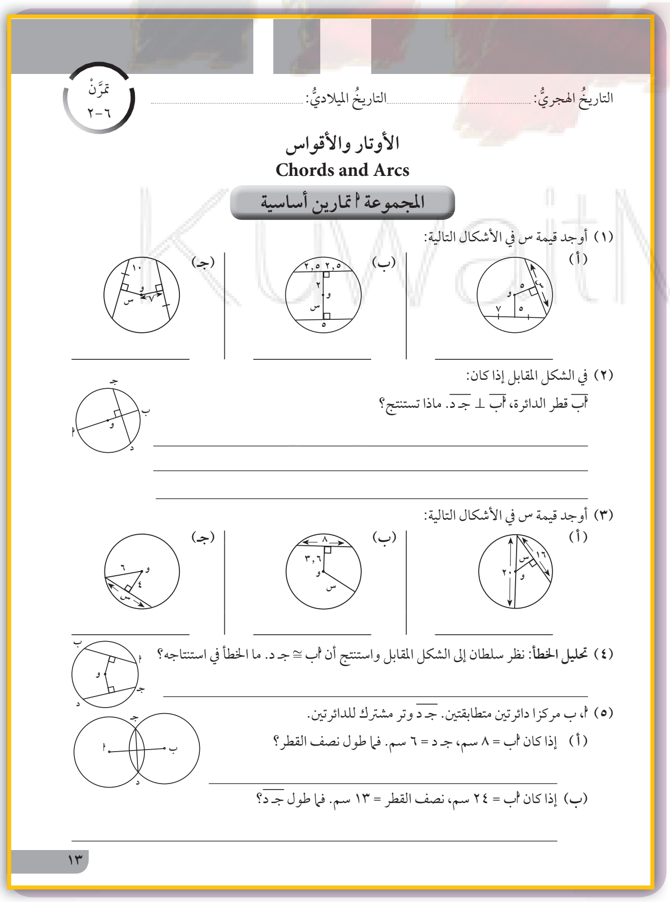
إثبات نظرية (٢)

١ المعطيات: أب ≅ جـ د.
المطلوب: ون ≅ وم.
البرهان:
وأ = وجـ = وب = ود = نق
أب = جـ د معطى
∴ Δ وأب ≅ Δ وجـ د (ض. ض. ض)
مساحة المثلث وأب = مساحة المثلث وجـ د.
∴ $\frac{\text{ون} \times \text{أب}}{٢} = \frac{\text{وم} \times \text{جـ د}}{٢}$
∵ أب = جـ د
∴ ون = وم

٢ المعطيات: ون ≅ وم.
المطلوب: أب ≅ جـ د.
البرهان:
Δ ونأ ≅ Δ ومد بضلع ووتر
∴ Δ وأب ≅ Δ وجـ د لماذا؟
من التطابق ينتج أن:
أب = جـ د

معلومة علمية:
إذا تطابق مثلثان فإن الأعمدة المرسومة من الرأس إلى القاعدة المناظرة تكون متطابقة.

٢٧


التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ ٦-٢

الأوتار والأقواس
Chords and Arcs

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) أوجد قيمة س في الأشكال التالية:
(أ) (ب) (جـ)

(٢) في الشكل المقابل إذا كان:
أب قطر الدائرة، أب ⊥ جـ د. ماذا تستنتج؟

(٣) أوجد قيمة س في الأشكال التالية:
(أ) (ب) (جـ)

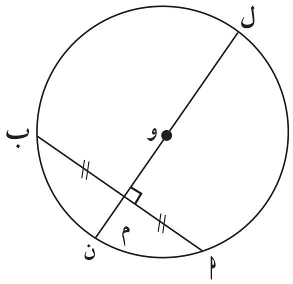
(٤) **تحليل الخطأ**: نظر سلطان إلى الشكل المقابل واستنتج أن أب ≅ جـ د. ما الخطأ في استنتاجه؟

(٥) أ، ب مركزا دائرتين متطابقتين. جـ د وتر مشترك للدائرتين.
(أ) إذا كان أب = ٨ سم، جـ د = ٦ سم. فما طول نصف القطر؟
(ب) إذا كان أب = ٢٤ سم، نصف القطر = ١٣ سم. فما طول جـ د؟

١٣

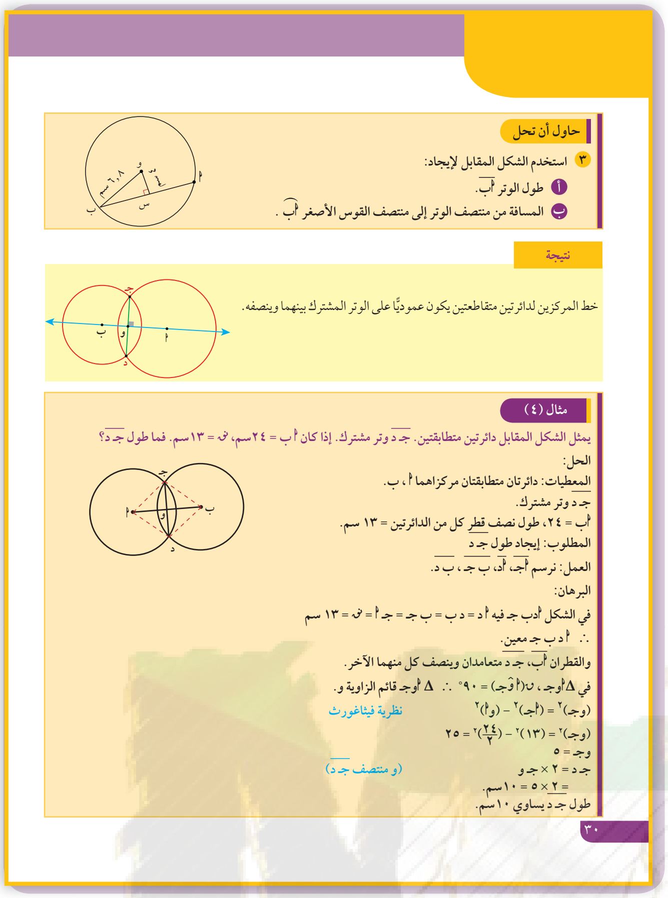
وم المنصف العمودي لِـ أب
∴ وم منصف الزاوية أوب
ق(أون) = ق(ن و ب)
∴ أن ≅ ن ب

٢- المعطيات: ل ن قطر ينصف أب
المطلوب: إثبات ل ن ⊥ أب
البرهان: المثلث أوب متطابق الضلعين.
القطعة المتوسطة وم هي المنصف العمودي لِـ أب
وبالتالي ل ن ⊥ أب



٣- المعطيات: ل ن منصف أب، ل ن ⊥ أب
المطلوب: إثبات أن ل ن تمر بمركز الدائرة.
البرهان: ل ن ⊥ أب ، ل ن منصف أب
ل ن المنصف العمودي لِـ أب
∵ وأ = وب = نق
∴ و تنتمي إلى المنصف العمودي للقطعة أب.
ومنه ل ن تمر بالمركز و.

في المثال (٣)
تطبيق مباشر على النظرية (٣).
لدينا وجـ ⊥ أب لذا النقطة جـ منتصف الوتر أب.



حاول أن تحل

٣ استخدم الشكل المقابل لإيجاد:
أ طول الوتر أب.
ب المسافة من منتصف الوتر إلى منتصف القوس الأصغر أب .

نتيجة

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًّا على الوتر المشترك بينهما وينصفه.

مثال (٤)

يمثل الشكل المقابل دائرتين متطابقتين. جـ د وتر مشترك. إذا كان أ ب = ٢٤ سم، نق = ١٣ سم. فما طول جـ د؟
الحل:
المعطيات: دائرتان متطابقتان مركزاهما أ ، ب.
جـ د وتر مشترك.
أب = ٢٤، طول نصف قطر كل من الدائرتين = ١٣ سم.
المطلوب: إيجاد طول جـ د
العمل: نرسم أجـ، أد، ب جـ ، ب د.
البرهان:
في الشكل أدب جـ فيه أ د = د ب = ب جـ = جـ أ = نق = ١٣ سم
∴ أ د ب جـ معين.
والقطران أب، جـ د متعامدان وينصف كل منهما الآخر.
في Δ أوجـ ، ق(أ و جـ) = ٩٠° ∴ Δ أوجـ قائم الزاوية و.
(وجـ)٢ = (أجـ)٢ − (وأ)٢ — نظرية فيثاغورث
(وجـ)٢ = (١٣)٢ − (٢٤/٢)٢ = ٢٥
وجـ = ٥
جـ د = ٢ × جـ و — (و منتصف جـ د)
= ٢ × ٥ = ١٠ سم.
طول جـ د يساوي ١٠ سم.

٣٠

مثال (٣)

أ في الشكل المقابل، أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و.
الحل:
المعطيات:
أب وتر في دائرة مركزها و. أب = ١٤ سم. وجـ ⊥ أب. وجـ = ٣ سم
المطلوب: إيجاد طول نصف قطر الدائرة
العمل: نرسم و ب
البرهان:
ب جـ = ١/٢ أب = ١/٢ (١٤) = ٧ سم — القطر العمودي على وتر ينصفه
(وب)٢ = (وجـ)٢ + (جـ ب)٢ = (٣)٢ + (٧)٢ = ٥٨ — نظرية فيثاغورث
وب = √٥٨ ≈ ٧,٦ سم — الجذر التربيعي لكلا الطرفين
طول نصف قطر الدائرة يساوي حوالى ٧,٦ سم.

ب في الشكل المقابل أوجد البعد بين مركز الدائرة والوتر.
الحل:
المعطيات: و مركز الدائرة.
وأ نصف قطر الدائرة، وأ = ١٥ سم. أجـ وتر في الدائرة.
ب ∈ أجـ، ب أ = ب جـ = ١١ سم.
المطلوب: إيجاد البعد بين مركز الدائرة و والوتر أجـ.
البرهان:
وب ⊥ أب — القطر الذي ينصف الوتر (ليس القطر) هو عمودي على الوتر
(وب)٢ + (١١)٢ = (١٥)٢ — نظرية فيثاغورث في Δ وب أ
(وب)٢ = ١٠٤
وب ≃ ١٠,٢ سم — الجذر التربيعي لكلا الطرفين
البعد بين مركز الدائرة والوتر ≃ ١٠,٢ سم.

٢٩

(٦) **تفكير ناقد:** طول قطر دائرة يساوي ٢٠ سم، وطولا وترين موازيين لهذا القطر ٦ سم و١٦ سم.
أوجد المسافة بين الوترين لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر.
(أ) إذا كان الوتران في جهة واحدة من المركز.
(ب) إذا كان الوتران في جهتين مختلفين من المركز.

(٧) البعد بين مركز الدائرة ووتر طوله ٩ سم يساوي ١١ سم تقريبًا.
أوجد طول نصف قطر الدائرة لأقرب عدد كلي.

(٨) دائرتان مركزاهما على الترتيب أ، ب تتقاطعان بالنقطتين جـ ، د.
وطول نصف قطر كل دائرة ٦ سم.
أوجد طول جـ د إذا كان طول أب يساوي ٨ سم.

في التمرينين (٩–١٠)، اختر الإجابة الصحيحة:

(٩) إذا كان طول قطر دائرة يساوي ٢٥ سم وطول أحد أوتارها ١٦ سم فإن البعد بين مركز الدائرة والوتر هو تقريبًا:
(أ) ٩ سم (ب) ٩,٦ سم (جـ) ١٨ سم (د) ١٩,٢ سم

(١٠) في الشكل المقابل العبارة الخاطئة فيما يلي هي:
(أ) جـ = د (ب) أ = ب
(جـ) جـ٢ + هـ٢ = ب٢ (د) هـ = د

١٤

في المثال (٤)

$\overline{\text{جـ د}}$ وتر مشترك في الدائرتين، $\overline{\text{أب}}$ يمر بالنقطة أ مركز دائرة ويمر بالنقطة ب مركز دائرة أيضًا وهو عمودي على $\overline{\text{جـ د}}$ وبالتالي تطبيقًا للنظرية (٣) تكون و منتصف جـ د.

٦ الربط

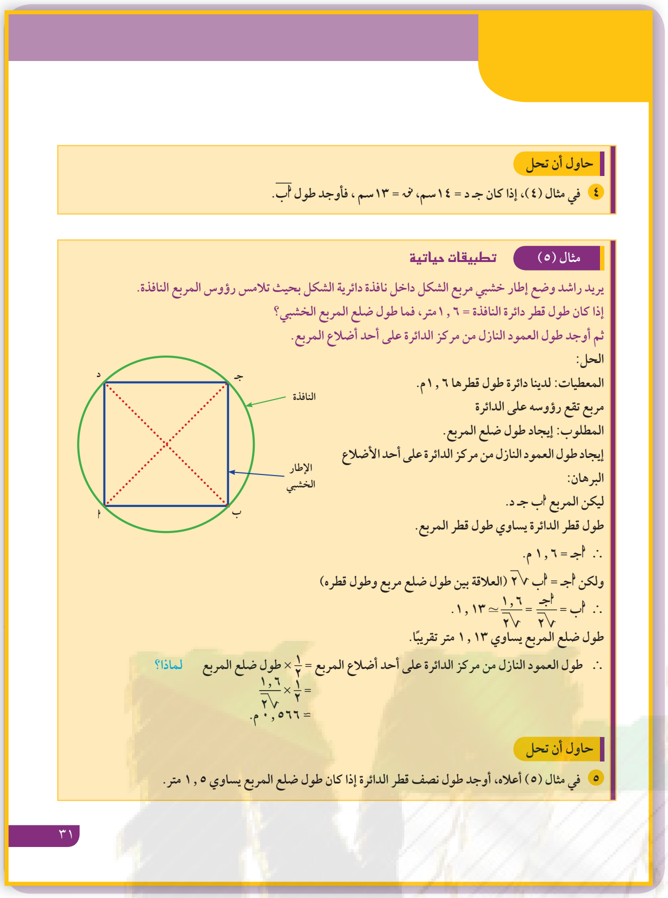
يؤكد المثال (٥) على العلاقة بين مماس الدائرة الذي يشكل مع القطر في نقطة المماس زاوية قائمة وهي القاعدة التي تحدد ما إذا كان مستقيم ما يشكل مماسًا لدائرة معينة.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

يعتقد الطلاب أن الوتر المتعامد مع وتر آخر في الدائرة نفسها يمر في منتصف هذا الوتر.
وضّح هذه الفكرة لدى الطلاب مؤكدًا لهم أن القطر إذا ما كان متعامدًا مع أي وتر ليس قطرًا في الدائرة فإنه يمر في منتصفه.

٨ التقييم

راقب الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من أنهم قد توصلوا إلى فهم كيفية إيجادهم الحلول.



حاول أن تحل

٤ في مثال (٤)، إذا كان جـ د = ١٤ سم، نه = ١٣ سم ، فأوجد طول $\overline{\text{أب}}$.

مثال (٥) تطبيقات حياتية

يريد راشد وضع إطار خشبي مربع الشكل داخل نافذة دائرية الشكل بحيث تلامس رؤوس المربع النافذة.
إذا كان طول قطر دائرة النافذة = ١,٦ متر، فما طول ضلع المربع الخشبي؟
ثم أوجد طول العمود النازل من مركز الدائرة على أحد أضلاع المربع.

الحل:

المعطيات: لدينا دائرة طول قطرها ١,٦ م.
مربع تقع رؤوسه على الدائرة

المطلوب: إيجاد طول ضلع المربع.
إيجاد طول العمود النازل من مركز الدائرة على أحد الأضلاع

البرهان:

ليكن المربع أب جـ د.
طول قطر الدائرة يساوي طول قطر المربع.

$\therefore$ أجـ = ١,٦ م.

ولكن أجـ = أب $\sqrt{٢}$ (العلاقة بين طول ضلع مربع وطول قطره)

$\therefore$ أب = $\frac{\text{أجـ}}{\sqrt{٢}} = \frac{١,٦}{\sqrt{٢}} \simeq ١,١٣$.

طول ضلع المربع يساوي ١,١٣ متر تقريبًا.

$\therefore$ طول العمود النازل من مركز الدائرة على أحد أضلاع المربع = $\frac{١}{٢} \times$ طول ضلع المربع لماذا؟

$= \frac{١}{٢} \times \frac{١,٦}{\sqrt{٢}}$

$=$ ٠,٥٦٦ م.

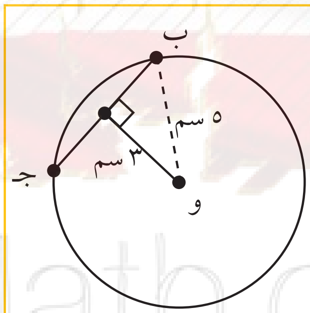
حاول أن تحل

٥ في مثال (٥) أعلاه، أوجد طول نصف قطر الدائرة إذا كان طول ضلع المربع يساوي ١,٥ متر.

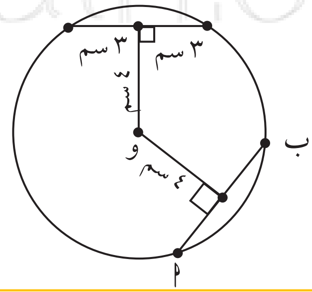
٣١

اختبار سريع

١ في الشكل المقابل أوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$ ٨ سم



٢ في الشكل المقابل أوجد طول $\overline{\text{أب}}$ ٦ سم



٩ إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

١ ، ٢ ، ٣ تحقق من عمل الطلاب.

«حاول أن تحل»

١ المثلثان متطابقان (ض.ض.ض)،

لذا ق (ف ل̂ د) = ق (جـ و̂ب)،

وبالتالي $\overset{\frown}{\text{ف د}}$ ≅ $\overset{\frown}{\text{جـ ب}}$.

٢ الوتران متساويا الطول (٣٦) لذا: س = ١٦ .

٣ (أ) $(\text{س ب})^{٢} = (٦,٨)^{٢} - ٤^{٢} = ٢٤,٣٠$

س ب ≃ ٥,٥ سم

ﺃ ب ≃ ٥,٥ × ٢ = ١١ سم.

(ب) المسافة: ٦,٨ − ٤ = ٢,٨ سم.

٤ وجـ = ٧ سم، $(\text{وب})^{٢} = (١٣)^{٢} - (٧)^{٢}$، ∴ وب = $\sqrt{١٢٠}$

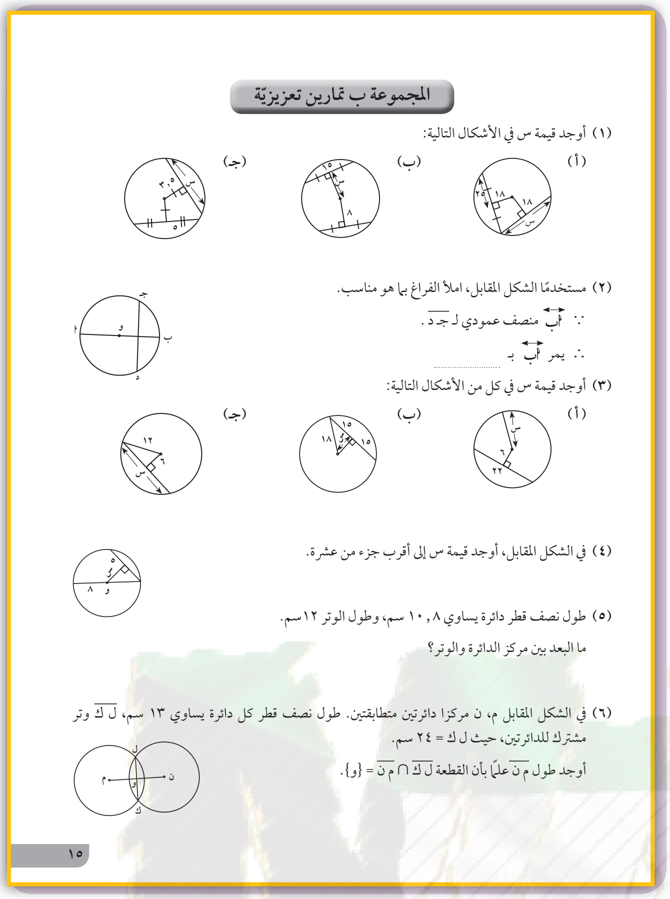
وب = $٢\sqrt{٣٠}$ ≃ ١١ سم، ﺃب = $٤\sqrt{٣٠}$

≃ ٢٢ سم.

٥ طول القطر = $١,٥\sqrt{٢}$ متر

نو = $\frac{١,٥\sqrt{٢}}{٢}$ متر

∴ نو = $\frac{٣\sqrt{٢}}{٤}$ متر ≃ ١,٠٦ متر



المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

(١) أوجد قيمة س في الأشكال التالية:

(أ) (ب) (جـ)

(٢) مستخدمًا الشكل المقابل، املأ الفراغ بما هو مناسب.

∵ $\overleftrightarrow{\text{ﺃب}}$ منصف عمودي لـ $\overline{\text{جـ د}}$.

∴ يمر $\overleftrightarrow{\text{ﺃب}}$ بـ ....

(٣) أوجد قيمة س في كل من الأشكال التالية:

(أ) (ب) (جـ)

(٤) في الشكل المقابل، أوجد قيمة س إلى أقرب جزء من عشرة.

(٥) طول نصف قطر دائرة يساوي ١٠,٨ سم، وطول الوتر ١٢سم.

ما البعد بين مركز الدائرة والوتر؟

(٦) في الشكل المقابل م، ن مركزا دائرتين متطابقتين. طول نصف قطر كل دائرة يساوي ١٣ سم، $\overline{\text{ل ك}}$ وتر مشترك للدائرتين، حيث ل ك = ٢٤ سم.

أوجد طول $\overline{\text{م ن}}$ علمًا بأن القطعة $\overline{\text{ل ك}} \cap \overline{\text{م ن}}$ = {و}.

١٥

٣-٦

الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

Central and Inscribed Angles

دعنا نفكر ونتناقش

١ في السداسي المنتظم المقابل (شكل ١)، أثبت أن قياس القوس أب يساوي ٦٠°.

٢ (أ) ما قياس الزاوية المركزية أمب؟ (يمكنك استخدام المنقلة).

(ب) ما قياس كل من الزوايا المحيطية: أوب؟ أهـب؟ أدب؟ أجب؟ ماذا تلاحظ؟

٣ في الشكل الخماسي المنتظم (شكل ٢)، أثبت أن قياس القوس أب يساوي ٧٢°.

٤ (أ) ما قياس الزاوية المركزية أمب؟

(ب) ما قياس كل من الزوايا: أهـب؟ أدب؟ أجب؟ ماذا تلاحظ؟

٥ في الشكل (٣) هل توجد علاقة بين قياس الزاوية أمب وقياس الزاوية أجب وقياس القوس أب؟

سوف تتعلم

- الزاوية المركزية.
- الزاوية المحيطية.
- الزاوية المماسية على الدائرة.
- العلاقة بين قياس الزاوية المركزية وقياس الزاوية المحيطية المشتركة في القوس نفسه.
- العلاقة بين قياس الزاوية المماسية وقياس القوس المحصور بين ضلعيها.

الأدوات المستخدمة: مسطرة، منقلة، فرجار

١ - الزاوية المركزية والزاوية المحيطية Central Angle and Inscribed Angle

تعريف:

١ الزاوية التي رأسها مركز الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى **بالزاوية المركزية**.

٢ الزاوية التي رأسها إحدى نقاط الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى **بالزاوية المحيطية**.

٣٢

٣-٦: الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

١ الأهداف

- يربط بين قياس الزاوية المركزية وقياس القوس الذي تحصره بين ضلعيها.
- يربط بين قياس الزاوية المحيطية وقياس القوس الذي تحصره بين ضلعيها.
- يتعرف العلاقة بين قياس الزاوية المركزية وقياس الزاوية المحيطية المشتركة في القوس نفسه.
- يربط بين قياس الزاوية المماسية للدائرة وقياس القوس المحصور بين ضلعيها.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

زاوية مركزية – زاوية محيطية – زاوية مماسية – زاوية داخلية – زاوية خارجية.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة – فرجار – منقلة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

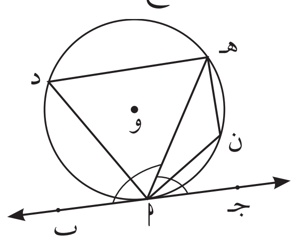
اسأل الطلاب:

(أ) زاوية مركزية في دائرة قياسها ٤٠°. ما قياس القوس المقابل لها على الدائرة نفسها؟

(ب) إذا أخذنا منصفًا داخليًّا لهذه الزاوية، فما قياس كل زاوية؟

(جـ) إذا ضاعفنا قياس هذه الزاوية، فما قياس الزاوية المضاعفة؟

(د) ما قياس زاوية خارجية في المثلث مقارنة بمجموع قياس الزاويتين الداخليتين في المثلث غير المتجاورتين مع هذه الزاوية؟



إذا رسمنا مماسًا $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ للدائرة التي مركزها و عند النقطة أ ورسمنا الوتر $\overline{\text{أهـ}}$ والزاوية المحيطية هـ د̂ أ والزاوية المحيطية أ ن̂ هـ كما بالشكل

فإن هـ أ̂ جـ تسمى زاوية مماسية وهـ أ̂ ب تسمى أيضًا زاوية مماسية أخرى وسنكتفي في مناقشتنا مع الزاوية ذات القياس


نظرية (١)

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها على الدائرة.

مثال (١)

في الشكل المقابل دائرة مركزها و. إذا كان ق(أب⌢) = ٩٠°.
فأوجد ق(أ و̂ ب).

الحل:

المعطيات: دائرة مركزها و

ق(أب⌢) = ٩٠°

المطلوب: إيجاد ق(أ و̂ ب).

البرهان:

و مركز الدائرة

(أ و̂ ب) زاوية مركزية تقابل (أب⌢)

∴ ق(أب⌢) = ق (أ و̂ ب)

∴ ق(أ و̂ ب) = ٩٠°

حاول أن تحل

١ إذا كان قياس زاوية مركزية ٣٥°، فأوجد قياس القوس على الدائرة المحصور بين ضلعيها.

نظرية (٢)

في الدائرة قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

ق(أ جـ̂ ب) = $\frac{1}{2}$ ق(أ و̂ ب) = $\frac{1}{2}$ ق(أب⌢)

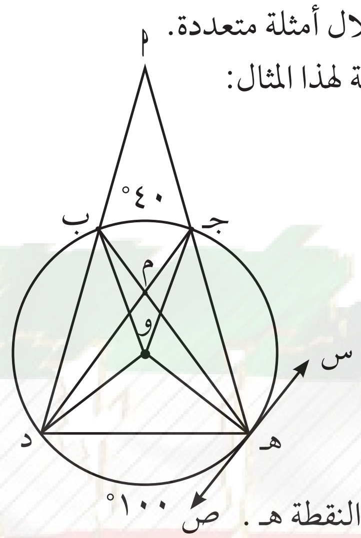
قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس نفسه.

٣٣

الأصغر هـ أ̂ جـ وعلاقتها بالزاوية هـ د̂ أ التي تقابل الوتر $\overline{\text{أهـ}}$
والجهة الأخرى كما بالشكل وتظل النظرية صحيحة بالنسبة إلى
الزاوية المماسية الأخرى هـ أ̂ ب وعلاقتها بالزاوية المحيطية هـ ن̂ أ

٥ التدريس

رسّخ لدى الطلاب فكرة العلاقة بين قياس الزاوية المركزية وقياس الزاوية المحيطية وقياس القوس المقابل لهما على الدائرة.
توسع في هذه العلاقة مع الزاوية المماسية والزاوية الداخلية والزاوية الخارجية وذلك من خلال أمثلة متعددة.



اعرض على السبورة أمثلة مشابهة لهذا المثال:

ق (جـ ب⌢) = ٤٠°

ق (هـ د⌢) = ١٠٠°

و = مركز الدائرة

أوجد:

(أ) ق (ب أ̂ هـ)، ق (د م̂ هـ)،
ق (ب د̂ جـ)، ق (د ب̂ هـ)،
ق (جـ و̂ ب)، ق (د و̂ هـ).

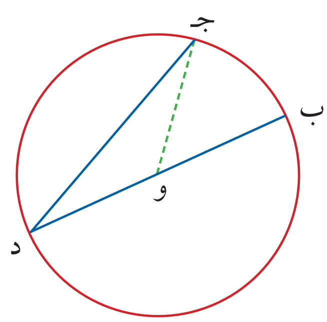
(ب) $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماس للدائرة عند النقطة هـ .
أوجد ق (د هـ̂ ص).

- أشر إلى أنه كلما ابتعدت النقطة خارج الدائرة صغر قياس الزاوية.
- اسأل الطلاب: $\overline{\text{أب}}$ ثابتة، م نقطة تتحرك في المستوي بحيث ق (أ م̂ ب) = ٩٠° ثابتة. أين تتحرك النقطة م؟
- ناقش مع الطلاب المثال (٤) لأهميته في ربط المفاهيم الهندسية.

في النظرية (٢) ركّز لدى الطلاب الربط بين الحالات الثلاث لوضعية الزاوية المحيطية بالنسبة لمركز الدائرة وقياس هذه الزاوية بالمقارنة مع الزاوية المركزية المناظرة لنفس القوس.

إثبات نظرية (٢)

الحالة ١ : المعطيات:



(ب و̂ جـ) = زاوية محيطية.

«و» مركز الدائرة ينتمي إلى ب د.

المطلوب: ق(ب د̂ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(ب جـ⌢)

العمل: نصل $\overline{\text{و جـ}}$

البرهان: ق(ب و̂ جـ) = ق (ب جـ⌢)

ق(ب و̂ جـ) = ق (و جـ̂ د) + ق (و د̂ جـ)

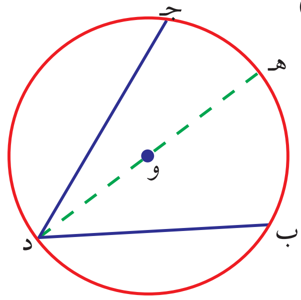
∵ ق (و جـ̂ د) = ق (و د̂ جـ)

∴ ق(ب و̂ جـ) = ٢ق(ب د̂ جـ) أي ق (ب د̂ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(ب جـ⌢)

الحالة ٢: المعطيات:

(ب دْ جـ) زاوية محيطية. «و» مركز الدائرة داخل الزاوية.

المطلوب: ق (ب دْ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق (ب⌒جـ)



العمل: نرسم القطر الذي يمر بالنقطتين د، و، يقطع الدائرة في هـ.

البرهان: ق (ب دْ جـ) =

ق (ب دْ هـ) + ق (هـ دْ جـ)

ق (ب دْ جـ) =

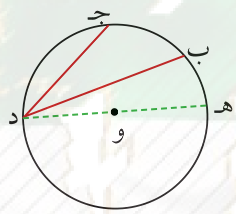
$\frac{1}{2}$ ق (ب⌒هـ) + $\frac{1}{2}$ ق (هـ⌒جـ)

= $\frac{1}{2}$ ق (ب⌒جـ)

الحالة ٣: المعطيات:

(ب دْ جـ) زاوية محيطية. «و» مركز الدائرة خارج الزاوية.

المطلوب: ق (ب دْ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق (ب⌒جـ)



العمل: نرسم القطر هـ د

البرهان: ق(ب دْ جـ) =

ق(هـ دْ جـ) − ق(هـ دْ ب)

= $\frac{1}{2}$ ق(هـ⌒جـ) − $\frac{1}{2}$ ق(هـ⌒ب)

= $\frac{1}{2}$ ق(ب⌒جـ)

المطلوب: إيجاد قياس كل من الأقواس أ⌒ب، ب⌒جـ، أ⌒جـ

البرهان:

زوايا المثلث هي زوايا محيطية في الدائرة ∴ ق(ب أْ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(ب⌒جـ)

ومنه: ٤٠° = $\frac{1}{2}$ ق(ب⌒جـ). ∴ ق(ب⌒جـ) = ٢ × ٤٠° = ٨٠°.

∴ ق(جـ⌒أ ب) = ٣٦٠° − ٨٠° = ٢٨٠°

∵ أ ب = أ جـ

∴ ق(أ⌒ب) = ق(أ⌒جـ) = $\frac{٢٨٠}{٢}$ = ١٤٠°.

حاول أن تحل

٣ في المثال (٣) إذا كان جـ هـ، منصف الزاوية الداخلية أ جْ ب ويقطع الدائرة في النقطة هـ.

ما قياس القوس الأصغر أ⌒هـ؟

مثال (٤)

في الشكل المقابل دائرة مركزها و. أثبت أن د و ⊥ ب جـ .

الحل:

المعطيات: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية أ، رؤوسه الثلاثة تنتمي إلى الدائرة التي مركزها و.

أ د منصف (ب أْ جـ) ويقطع الدائرة في د.

المطلوب: إثبات أن د و ⊥ ب جـ

البرهان:

∴ ق(جـ أْ ب) = ٩٠° — معطى

أ د منصف الزاوية ب أْ جـ

∴ ق(جـ أْ د) = ٤٥°

∵ ق(جـ أْ د) = $\frac{1}{2}$ ق(د⌒جـ) — نظرية

∴ ق(د⌒جـ) = ٩٠°، ق(جـ وْ د) = ٩٠° — نظرية

∴ د و ⊥ ب جـ.

حاول أن تحل

٤ في المثال (٤)، إذا كان ق(أ بْ جـ) = ٣٠°، أوجد ق(أ دْ ب).

٣٥

هناك ٣ حالات يجب أخذها في الاعتبار.

الحالة ١: ينتمي مركز الدائرة إلى أحد ضلعي الزاوية المحيطية

الحالة ٢: مركز الدائرة داخل الزاوية المحيطية

الحالة ٣: مركز الدائرة خارج الزاوية المحيطية

مثال (٢)

في الشكل المقابل: إذا كان ق(أ⌒ب) = ٨٠° فأوجد ق(أ جْ ب).

الحل:

المعطيات: دائرة مركزها و. أ، ب، جـ نقاط تنتمي إلى الدائرة. ق(أ⌒ب) = ٨٠°

المطلوب: إيجاد ق(أ جْ ب).

البرهان:

أ جْ ب زاوية محيطية في الدائرة ∴ ق(أ جْ ب) = $\frac{1}{2}$ ق(أ⌒ب)

= $\frac{1}{2}$ (٨٠°) = ٤٠°

وبالتالي ق(أ جْ ب) = ٤٠°

حاول أن تحل

٢ إذا كان قياس زاوية محيطية في دائرة يساوي ٥٤°، فأوجد قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

مثال (٣)

في الشكل المقابل أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين حيث أ، ب، جـ نقاط على الدائرة التي مركزها و، ق(ب أْ جـ) = ٤٠°.

أوجد قياس كل من الأقواس أ⌒ب، ب⌒جـ، أ⌒جـ .

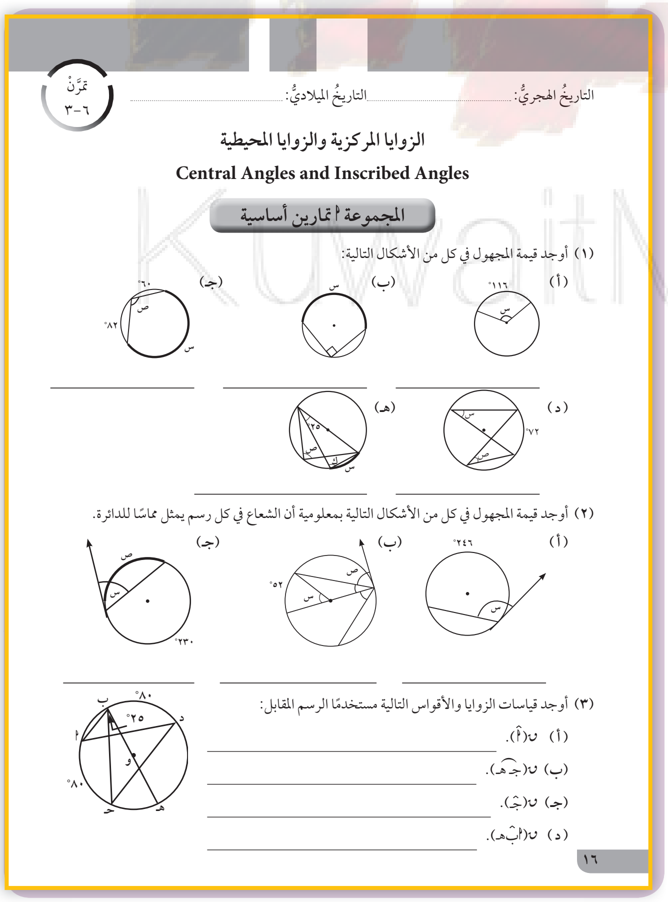
الحل:

المعطيات: دائرة مركزها و. أ، ب، جـ نقاط تنتمي إلى الدائرة.

∆أ ب جـ متطابق الضلعين، أ ب = أ جـ.

ق(ب أْ جـ) = ٤٠°

٣٤



التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ ٦-٣

الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

Central Angles and Inscribed Angles

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) أوجد قيمة المجهول في كل من الأشكال التالية:

(أ) (ب) (جـ) (د) (هـ)

(٢) أوجد قيمة المجهول في كل من الأشكال التالية بمعلومية أن الشعاع في كل رسم يمثل مماسًا للدائرة.

(أ) (ب) (جـ)

(٣) أوجد قياسات الزوايا والأقواس التالية مستخدمًا الرسم المقابل:

(أ) ق(أْ).

(ب) ق(جـ⌒هـ).

(جـ) ق(جْ).

(د) ق(أ بْ هـ).

١٦

في المثال (٥)

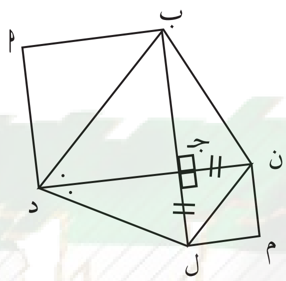
يربط قياس زاوية داخلية من الدائرة بقياس القوسين المحصورين بين ضلعيها على الدائرة.

شدّد على فقرة «نتائج» في الصفحة ٣٧. اطلب إلى الطلاب رسم أمثلة تطبيقية على السبورة بعد مراجعة المثال في هذه الصفحة.

اعرض امام الطلاب المثال التالي وهو تطبيق مباشر على النتيجة (٤) في الصفحة ٣٧ من كتاب الطالب: ناقش معهم الإجابة وكيفية إثبات أن الرباعي دائري باستخدام هذه النتيجة.

أ ب جـ د ، م ن جـ ل مربعان حيث جـ ∈ $\overline{\text{ن د}}$.

هل ب د ل ن هو رباعي دائري؟ فسّر إجابتك.



الحل: ق(د بَ ل) = ق(د نَ ل) = ٤٥°

حيث إن $\overline{\text{د ل}}$ هي قاعدة مشتركة للزاويتين وهما تقعان في ناحية واحدة منها.

لذا: د ل ن ب هو رباعي دائري.

٦ الربط

لا يوجد.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تحديد موقع نقطة مع شروط محددة بالنسبة إلى الدائرة.

ساعد الطلاب من خلال أمثلة متعددة على تخطي هذه المشكلة.

٨ التقييم

راقب الطلاب باهتمام وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتكوّن فكرة واضحة عن مدى استيعابهم مفاهيم هذا الدرس ومهاراته.

مثال (٥)

في الشكل المقابل، أثبت أن: ق(ب مَ أ) = $\frac{\text{ق(ب⌒أ) + ق(جـ⌒د)}}{٢}$.

الحل:

المعطيات: أ، ب، جـ، د نقاط تنتمي إلى الدائرة التي مركزها و.

$\overline{\text{أ جـ}}$ ∩ $\overline{\text{ب د}}$ = {م} ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ∩ $\overleftarrow{\text{أ د}}$ = {هـ}

المطلوب: إثبات أن ق(ب مَ أ) = $\frac{\text{ق(ب⌒أ) + ق(جـ⌒د)}}{٢}$

البرهان:

(ب مَ أ) هي زاوية خارجة عن المثلث أ م د.

ق(ب مَ أ) = ق(ب دَ أ) + ق(م أَ د)

= $\frac{١}{٢}$ ق(ب⌒أ) + $\frac{١}{٢}$ ق(جـ⌒د) = $\frac{\text{ق(ب⌒أ) + ق(جـ⌒د)}}{٢}$

حاول أن تحل

٥ في المثال (٥)، أثبت أن ق(ب هـَ أ) = $\frac{\text{ق(ب⌒أ) − ق(جـ⌒د)}}{٢}$

مثال (٦)

أ ب جـ د شكل رباعي دائري.

أثبت أن ق(أ بَ د) = ق(أ جـَ د).

الحل:

المعطيات: أ ب جـ د شكل رباعي دائري.

المطلوب: إثبات تساوي قياسي الزاويتين (أ بَ د)، (أ جـَ د).

البرهان: أ ب جـ د شكل رباعي دائري.

أ بَ د زاوية محيطية ∴ ق(أ بَ د) = $\frac{١}{٢}$ ق(د⌒أ) (١)

أ جـَ د زاوية محيطية ∴ ق(أ جـَ د) = $\frac{١}{٢}$ ق(د⌒أ) (٢)

من (١)، (٢) نستنتج أن ق (أ بَ د) = ق (أ جـَ د).

حاول أن تحل

٦ في المثال (٦)، أثبت أن ق (أ دَ ب) = ق (أ جـَ ب)

معلومة رياضية:

الشكل الرباعي الدائري هو مضلع رباعي تقع رؤوسه على دائرة.

٣٦

(٤) في الشكل المقابل، أوجد قياس كل من:

(أ) القوس الأصغر ب⌒جـ.

(ب) ق(بَ).

(جـ) ق(ب جـَ د).

(٥) في الشكل المقابل فيه الوتر $\overline{\text{ب جـ}}$.

أثبت أن: أ⌒جـ ≅ ب⌒د.

(٦) ما نوع شبه المنحرف المحاط بدائرة؟

(٧) في الشكل المقابل أوجد ق(جـ بَ د).

(٨) في الشكل المقابل، أوجد قياس القوس الأصغر أ⌒ب.

* (٩) مستخدمًا معطيات الشكل، حيث و هي مركز الدائرة، وهـ = ٢ سم ، ن و = ٣ سم.

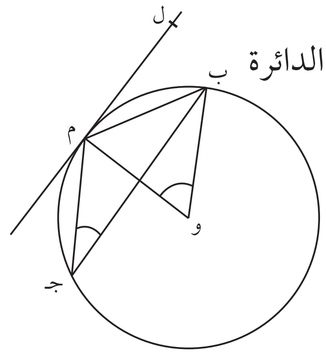
أوجد:

(أ) ق(هـ وَ ن).

(ب) ق(لَ).

١٧

اختبار سريع

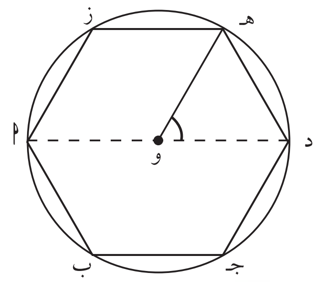


١ في الشكل المقابل، و مركز الدائرة

ق (م جـ^ ب) = ٣٠°

أوجد: ق (ل م^ ب) ٣٠°

ق (ب و^ م) ٦٠°



٢ في الشكل المقابل، و مركز الدائرة أ ب جـ د هـ ز سداسي منتظم محاط بالدائرة.

أوجد ق (د و^ هـ). ٦٠°

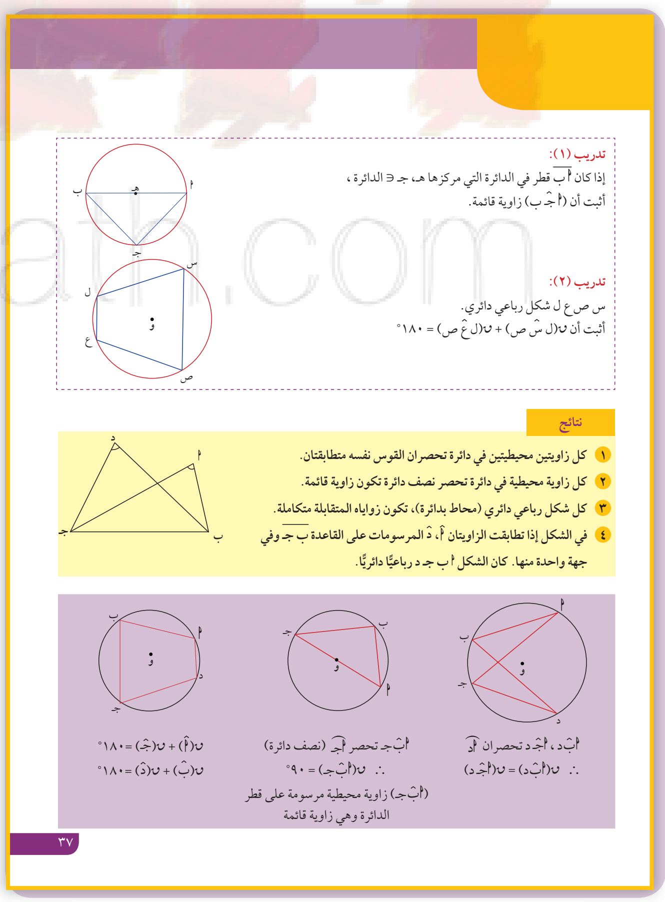
٩ إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

١ – ٥ تحقق من عمل الطلاب.

«حاول أن تحل»

١ ٣٥° ٢ ١٠٨° ٣ ٧٠°



تدريب (١):

إذا كان أ ب قطر في الدائرة التي مركزها هـ، جـ ∋ الدائرة ،
أثبت أن (أ جـ^ ب) زاوية قائمة.

تدريب (٢):

س ص ع ل شكل رباعي دائري.
أثبت أن ق(ل س^ ص) + ق(ل ع^ ص) = ١٨٠°

نتائج

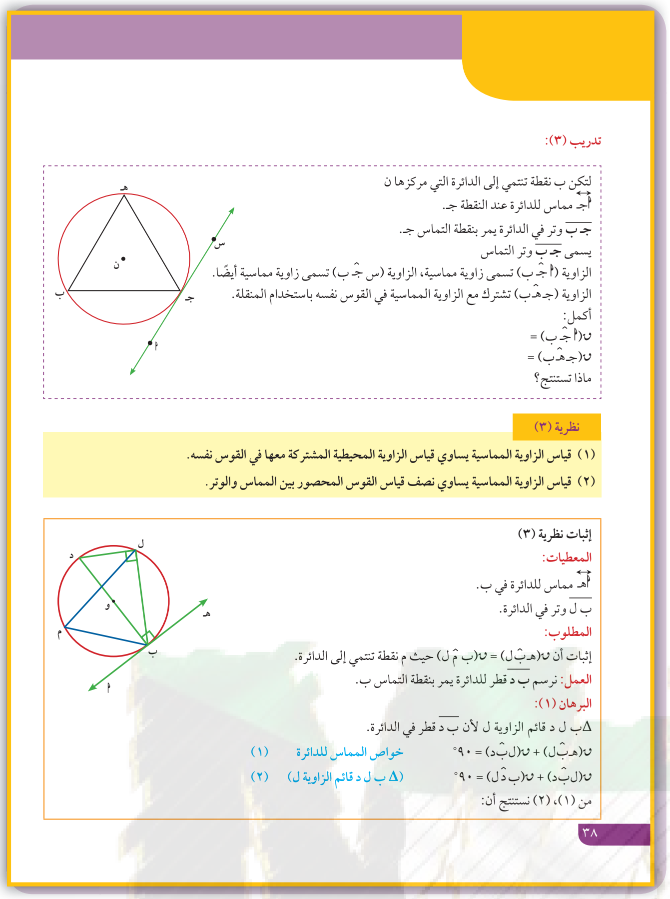
١ كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان.
٢ كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة.
٣ كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة)، تكون زواياه المتقابلة متكاملة.
٤ في الشكل إذا تطابقت الزاويتان أ، د المرسومات على القاعدة ب جـ وفي جهة واحدة منها. كان الشكل أ ب جـ د رباعيًا دائريًا.

أ ب^ د ، أ جـ^ د تحصران أد
∴ ق(أ ب^ د) = ق(أ جـ^ د)

أ ب^ جـ تحصر أجـ (نصف دائرة)
∴ ق(أ ب^ جـ) = ٩٠°
(أ ب^ جـ) زاوية محيطية مرسومة على قطر الدائرة وهي زاوية قائمة

ق(أ^) + ق(جـ^) = ١٨٠°
ق(ب^) + ق(د^) = ١٨٠°

٣٧



تدريب (٣):

لتكن ب نقطة تنتمي إلى الدائرة التي مركزها ن
أجـ مماس للدائرة عند النقطة جـ.
جـ ب وتر في الدائرة يمر بنقطة التماس جـ.
يسمى جـ ب وتر التماس
الزاوية (أ جـ^ ب) تسمى زاوية مماسية، الزاوية (س جـ^ ب) تسمى زاوية مماسية أيضًا.
الزاوية (جـ هـ^ ب) تشترك مع الزاوية المماسية في القوس نفسه باستخدام المنقلة.
أكمل:
ق(أ جـ^ ب) =
ق(جـ هـ^ ب) =
ماذا تستنتج؟

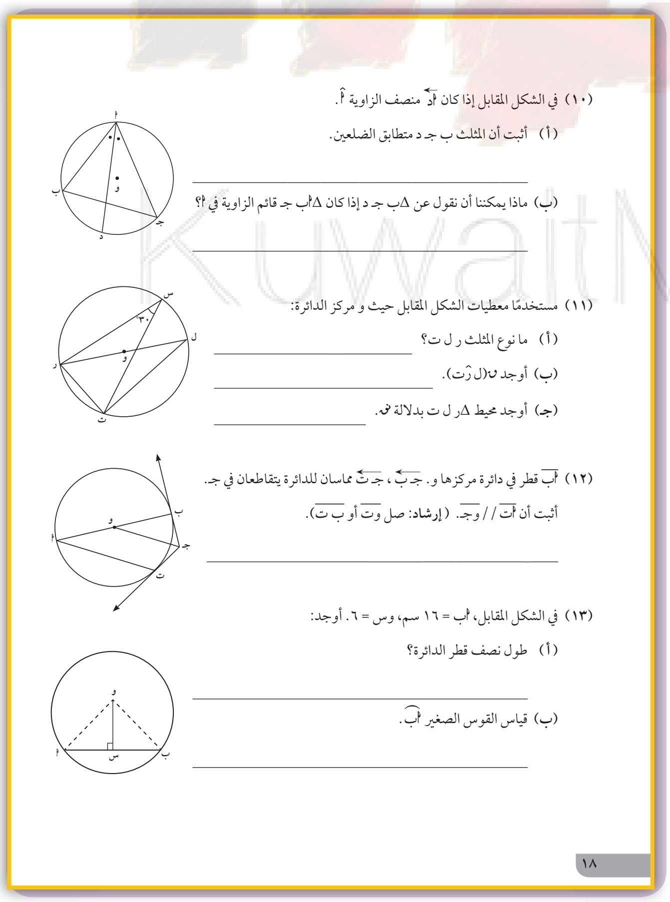
نظرية (٣)

(١) قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.
(٢) قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر.

إثبات نظرية (٣)

المعطيات:
أهـ مماس للدائرة في ب.
ب ل وتر في الدائرة.
المطلوب:
إثبات أن ق(هـ ب^ ل) = ق(ب م^ ل) حيث م نقطة تنتمي إلى الدائرة.
العمل: نرسم ب د قطر للدائرة يمر بنقطة التماس ب.
البرهان (١):
Δب ل د قائم الزاوية ل لأن ب د قطر في الدائرة.
ق(هـ ب^ ل) + ق(ل ب^ د) = ٩٠° خواص المماس للدائرة (١)
ق(ل ب^ د) + ق(ب د^ ل) = ٩٠° (Δ ب ل د قائم الزاوية ل) (٢)
من (١)، (٢) نستنتج أن:

٣٨



(١٠) في الشكل المقابل إذا كان أد منصف الزاوية أ.
(أ) أثبت أن المثلث ب جـ د متطابق الضلعين.
(ب) ماذا يمكننا أن نقول عن Δب جـ د إذا كان Δأ ب جـ قائم الزاوية في أ؟

(١١) مستخدمًا معطيات الشكل المقابل حيث و مركز الدائرة:
(أ) ما نوع المثلث ر ل ت؟
(ب) أوجد ق(ل ر^ ت).
(جـ) أوجد محيط Δر ل ت بدلالة نق.

(١٢) أ ب قطر في دائرة مركزها و. جـ ب ، جـ ت مماسان للدائرة يتقاطعان في جـ.
أثبت أن أ ت // و جـ. (**إرشاد:** صل و ت أو ب ت).

(١٣) في الشكل المقابل، أ ب = ١٦ سم، و س = ٦. أوجد:
(أ) طول نصف قطر الدائرة؟
(ب) قياس القوس الصغير أ ب.

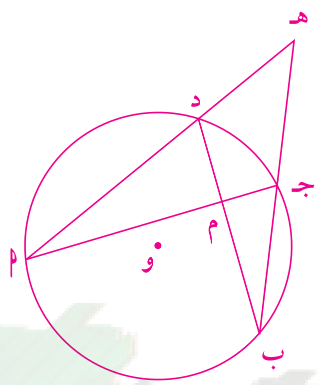
١٨

٤ ق(جـ) = ٦٠°، ق(أب) = ١٢٠°

ق(أدب) = $\frac{١}{٢}$ ق(أب) = ٦٠°

٥ ب جـ أ هي زاوية خارجية في المثلث أ جـ هـ.

نكتب: ق(ب جـ أ) = ق(جـ هـ أ) + ق(هـ أ جـ).



$\frac{١}{٢}$ ق(أب) = ق(جـ هـ أ) + $\frac{١}{٢}$ ق(جـ د)

ومنه: ق(ب هـ أ) = $\frac{١}{٢}$ ق(أب) − $\frac{١}{٢}$ ق(جـ د)

= $\frac{\text{ق(أب)} - \text{ق(جـ د)}}{٢}$.

مثال (٨)

أب قطر في دائرة مركزها و. نرسم أجـ مماسًا للدائرة بحيث يكون أجـ = ٢ نق. ب جـ تقطع الدائرة في د. أثبت أن أد = جـ د.

الحل:

المعطيات:

أب قطر في دائرة مركزها و. أجـ مماس للدائرة، أجـ = ٢ نق، ب جـ تقطع الدائرة في د

المطلوب: إثبات أن أد = جـ د

العمل: نرسم أد

البرهان:

ق(جـ أ د) = ق(أ ب د) (نظرية الزاوية المماسية والزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه) (١)

أجـ ⊥ أب (أجـ مماس للدائرة)

أجـ = أب = ٢ نق

∴ Δ أ ب جـ قائم الزاوية أ متطابق الضلعين.

ومنه ق(أ جـ د) = ق(أ ب د) (٢)

من (١)، (٢) نستنتج أن ق(جـ أ د) = ق(أ جـ د)

Δ أ د جـ متطابق الضلعين ∴ أد = جـ د

حاول أن تحل

٨ م ت مماس لدائرة مركزها و. م ن وتر في الدائرة بحيث يكون م ن = م ت. (م نقطة التماس) ت ن تقطع الدائرة في ل.
أثبت أن Δ ت ل م متطابق الضلعين (ل ت = ل م)

مثال (٩)

في الشكل المقابل، د هـ مماس للدائرة عند النقطة أ،
ب جـ وتر في الدائرة موازٍ للمماس د هـ.
أثبت أن المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين.

الحل:

المعطيات: د هـ مماس للدائرة عند النقطة أ. د هـ // ب جـ

المطلوب: أثبت أن Δ أ ب جـ متطابق الضلعين.

٤٠

ق(ل ب د) + ق(هـ ب ل) = ق(ب د ل) + ق(ل ب د)

∴ ق(هـ ب ل) = ق(ب د ل)

ولكن ق(ب د ل) = ق(ب م ل) لماذا؟

∴ ق(هـ ب ل) = ق(ب م ل) وهو المطلوب

البرهان (٢):

ق(هـ ب ل) = ق(ب م ل) من (١).

∵ ق(ب م ل) = $\frac{١}{٢}$ ق(ب ل) (خاصية الزاوية المحيطية)

∴ ق(هـ ب ل) = $\frac{١}{٢}$ ق(ب ل). وهو المطلوب

مثال (٧)

في الشكل المقابل إذا كان د هـ مماسًا للدائرة عند أ، فأوجد ق(جـ أ ب).

الحل:

المعطيات:

د هـ مماس للدائرة عند أ.

ق(هـ أ ب) = ٤٥°، ق(أ ب جـ) = ٣٥°

المطلوب: إيجاد ق(جـ أ ب).

البرهان:

ق(أ جـ ب) = ق(هـ أ ب) = ٤٥° نظرية

∵ ق(جـ أ ب) + ق(أ جـ ب) + ق(أ ب جـ) = ١٨٠°

∴ ق(جـ أ ب) = ١٨٠° − ق(أ جـ ب) − ق(أ ب جـ)

ق(جـ أ ب) = ١٨٠° − ٤٥° − ٣٥° = ١٠٠°

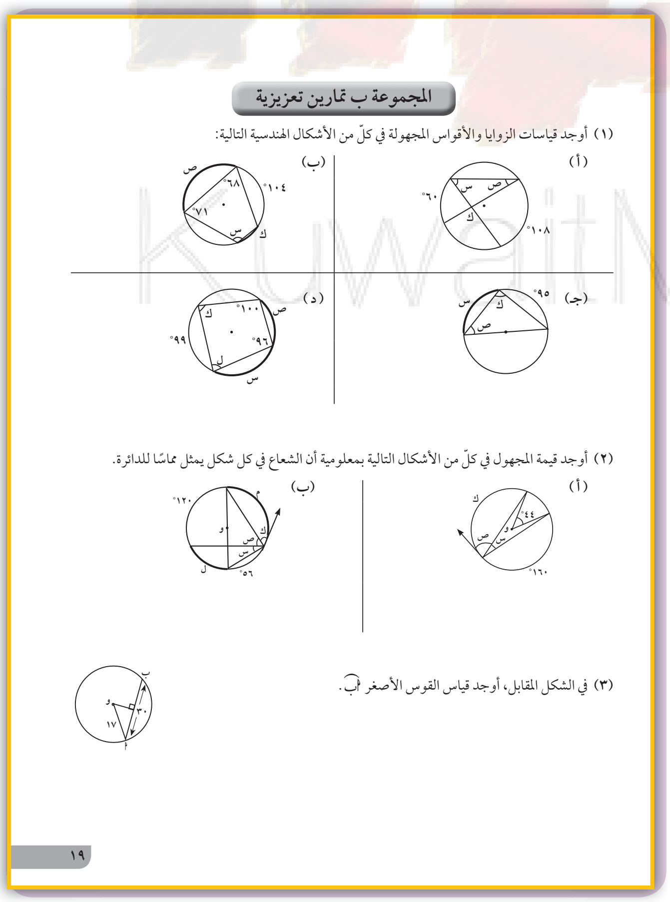
حاول أن تحل

٧ في الشكل المقابل، لدينا: ق(د أ جـ) = ٤٠°، ق(هـ أ ب) = ٥٠°.

أ أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ.

ب أثبت أن جـ ب قطر للدائرة.

٣٩



المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) أوجد قياسات الزوايا والأقواس المجهولة في كلّ من الأشكال الهندسية التالية:

(أ) (ب) (جـ) (د)

(٢) أوجد قيمة المجهول في كلّ من الأشكال التالية بمعلومية أن الشعاع في كل شكل يمثل مماسًا للدائرة.

(أ) (ب)

(٣) في الشكل المقابل، أوجد قياس القوس الأصغر أب.

١٩

٦ ق(أ د ب) = ق(أ جـ ب) = ١/٢ ق(أب).

٧ (أ) ق(جـ أ ب) = ١٨٠° − (٤٠° + ٥٠°)

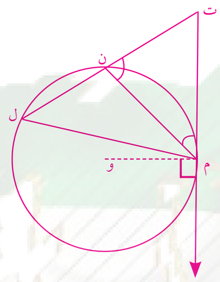
ق(جـ أ ب) = ٩٠°

ق(جـ) = ق(هـ أ ب) = ٥٠°

ق(ب) = ق(د أ جـ) = ٤٠°.

(ب) بما أن الزاوية المحيطية جـ أ ب قياسها ٩٠°
فيكون ق(ب جـ) = ١٨٠° وبالتالي أب هو قطر للدائرة.

٨ ت م مماس على الدائرة. م ت = م ن، لذا المثلث م ت ن متطابق الضلعين ومنه: ق(ت) = ق(ن) ولكن ن هي زاوية خارجة في المثلث م ن ل لذا:



ق(ن) = ق(ت) =
ق(ن م ل) + ق(ن ل م)

= (ق(ن ل) + ق(م ن)) / ٢ = ق(م ل) / ٢

وأيضًا ق(ت م ل) = ق(م ل) / ٢

∴ ق(ل ت م) = ق(ت م ل) والمثلث ل ت م متطابق الضلعين ∴ ل ت = ل م

٩ ق(جـ) = ق(ب) (أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين)

ومنه: ق(أ جـ) = ق(أ ب)

ق(د أ جـ) = ق(أ جـ ب) = ١/٢ ق(أ جـ)

الزاويتان متبادلتان داخليًّا ومتساويتا القياس، فيكون د هـ موازٍ لِـ ب جـ.

«تدريب ١»

ق(أ جـ ب) = ١/٢ ق(أ ب) = ١/٢ × ١٨٠° = ٩٠°

«تدريب ٢»

ق(ل س ص) + ق(ل ع ص) = ١/٢ ق(ل ع ص)
+ ١/٢ ق(ل س ص) = ١/٢ × ٣٦٠° = ١٨٠°

«تدريب ٣»

ق(أ جـ ب) = ١/٢ ق(جـ ب)

ق(جـ هـ ب) = ١/٢ ق(جـ ب)

∴ ق(أ جـ ب) = ق(جـ هـ ب)

البرهان

∵ د هـ // ب جـ

∴ ق(د أ جـ) = ق(أ جـ ب) بالتبادل والتوازي (١)

∵ ق(د أ جـ) = ق(أ ب جـ) زاوية مماسية وزاوية محيطية تحصران القوس نفسه أجـ (٢)

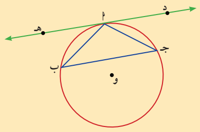
(١) ، (٢) تعطي: ق(أ جـ ب) = ق(أ ب جـ)

ومنه: أ جـ = أ ب

أي أن المثلث متطابق الضلعين

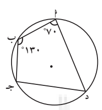
حاول أن تحل

٩ في الشكل المقابل، إذا كان لدينا د هـ مماس للدائرة عند النقطة أ.
المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين (أ ب = أ جـ).
أثبت أن د هـ // ب جـ

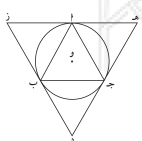


٤١

(٤) أ ب جـ د رباعي دائري (محوط بدائرة). ق(أ) = ٧٠°، ق(ب) = ١٣٠°.
أوجد ق(جـ)، ق(د).

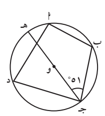


(٥) Δ أ ب جـ متطابق الأضلاع تحيط به دائرة.
أثبت أن المماسات على الدائرة في النقاط أ، ب، جـ تشكل مثلثًا متطابق الأضلاع.



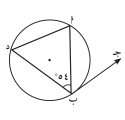
(٦) في الشكل المقابل، إذا كان ق(أ ب) = ٧٢°، ق(ب جـ هـ) = ٥١°.
فإن قياس القوس هـ أ =

(أ) ٣٠° (ب) ١٠٢° (جـ) ٧٢° (د) ٦٨°



(٧) في الشكل المقابل، إذا كان ق(ب د) = ١٤٠°، فإن ق(أ ب جـ) =

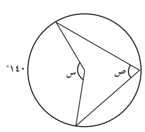
(أ) ٧٠° (ب) ٥٠° (جـ) ٥٦° (د) ١٢٤°



(٨) في الشكل المقابل، قيمة كل من س، ص على الترتيب هما:

(أ) ٢٨٠°، ١٤٠° (ب) ٧٠°، ٣٥°

(جـ) ١٤٠°، ٤٠° (د) ١٤٠°، ٧٠°



٢٠

٦-٤: الدائرة: الأوتار المتقاطعة، المماس

١ الأهداف

- يوجد العلاقة بين أطوال أجزاء الأوتار المتقاطعة داخل الدائرة.
- يوجد العلاقة بين أطوال أجزاء الأوتار المتقاطعة خارج الدائرة.
- يوجد العلاقة بين طول قطعة مماسية للدائرة وأطوال أجزاء القاطع من الدائرة.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

مماس - قاطع.

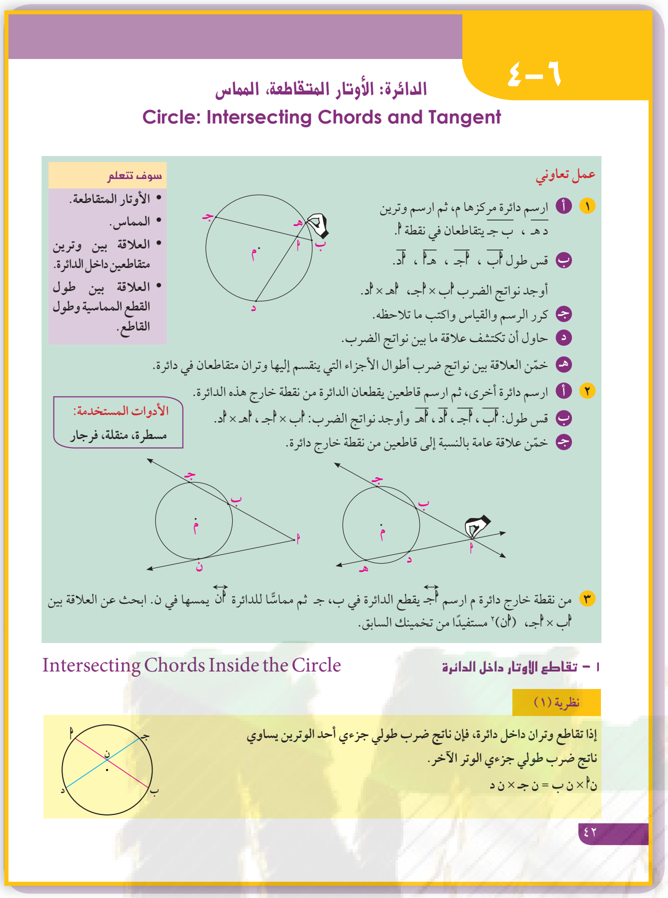
٣ الأدوات والوسائل

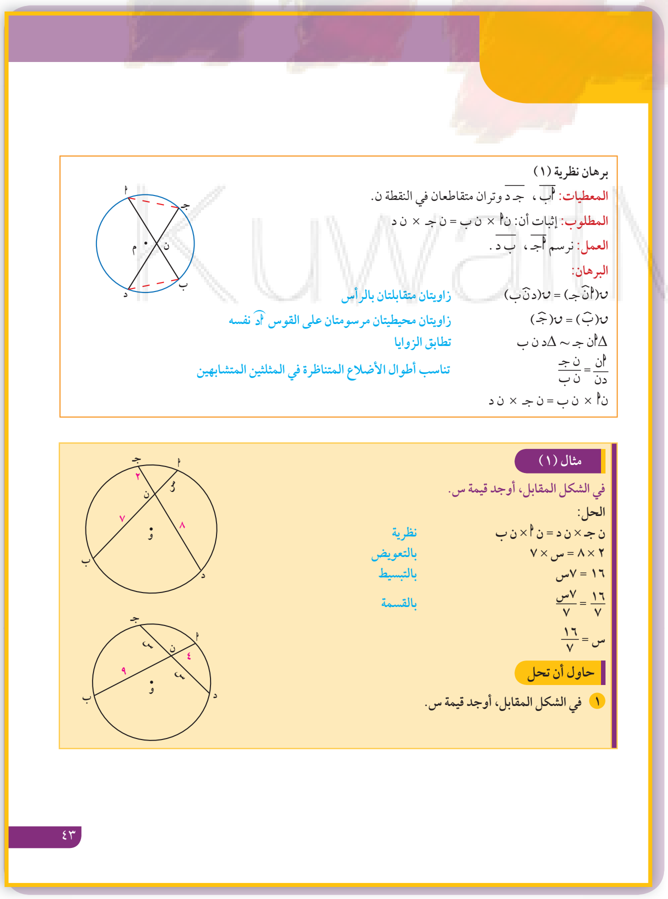
مسطرة - فرجار - منقلة - حاسوب - جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

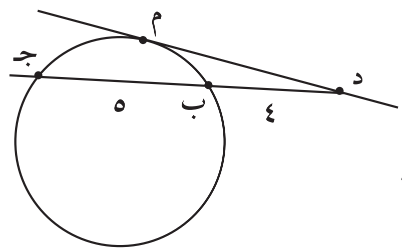
اسأل الطلاب:

- ما هي حالات تشابه مثلثين؟
- ما قياس الزاوية بين المماس ونصف قطر الدائرة عند نقطة المماس؟
- ما العلاقة بين قياس الزاوية المرسومة من مماس ووتر على الدائرة وقياس القوس المحصور بين هذين الضلعين؟





٥ التدريس



حفّز الطلاب على رسم دوائر متعددة واطلب إليهم رسم أوتار متقاطعة بزوايا مختلفة وأوتار متقاطعة متعامدة.

أعطهم بعض القياسات لأجزاء من هذه الأوتار، واطلب إليهم إيجاد المجهول.

يتعلق المثال (١) بالنظرية (١). شدّد على أن ناتج ضرب طولي القطعتين ثابت عندما تتغير النقاط أ، ب، جـ، د على الدائرة، شرط أن تبقى النقطة ن ثابتة.

في المثال (٣)

ساعد الطلاب على فهم النتيجة (١) ليتعرّفوا على العلاقة الموجودة.

برهان نتيجة (١)

المعطيات: $\overline{\text{م ب}}$، $\overline{\text{م د}}$ قاطعان يلتقيان في النقطة م خارج الدائرة.

المطلوب: إثبات أن م أ × م ب = م جـ × م د

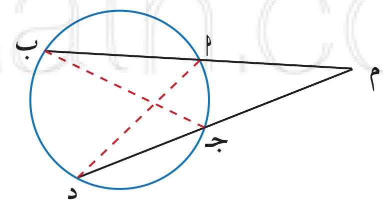
العمل: نرسم $\overline{\text{أ د}}$، $\overline{\text{جـ ب}}$.

البرهان: المثلثان م أ د، م جـ ب فيهما:

ق (أ م̂ د) = ق (جـ م̂ ب)

ق (م د̂ أ) = ق (م ب̂ جـ)

∴ Δ م أ د ~ Δ م جـ ب



∴ $\frac{\text{م أ}}{\text{م جـ}} = \frac{\text{م د}}{\text{م ب}}$

م أ × م ب = م جـ × م د

برهان نتيجة (٢)

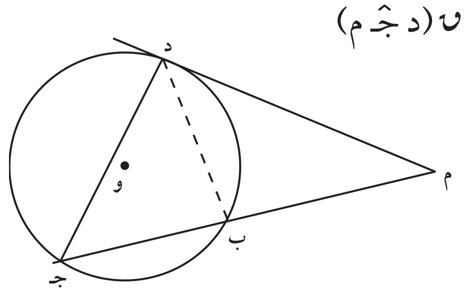
المعطيات: دائرة مركزها و، $\overline{\text{م د}}$ قطعة مماسة، $\overrightarrow{\text{م جـ}}$ قاطع

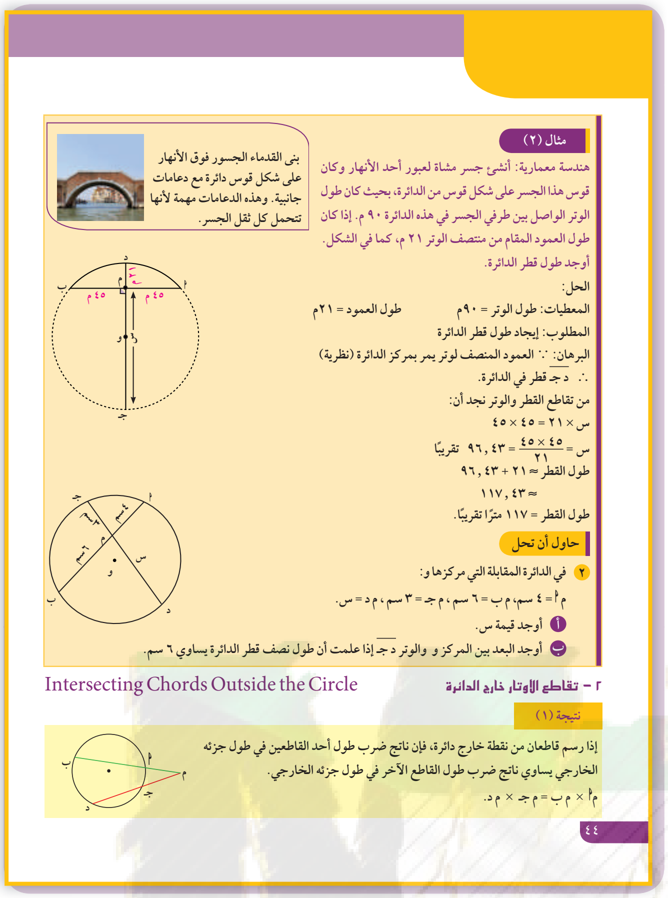
المطلوب: إثبات أن $(\text{م د})^2$ = م ب × م جـ

البرهان: Δ م د ب ~ Δ م جـ د

م̂ زاوية مشتركة

ق (م د̂ ب) = ق (د جـ̂ م)





مثال (٢)

هندسة معمارية: أنشئ جسر مشاة لعبور أحد الأنهار وكان قوس هذا الجسر على شكل قوس من الدائرة، بحيث كان طول الوتر الواصل بين طرفي الجسر في هذه الدائرة ٩٠ م. إذا كان طول العمود المقام من منتصف الوتر ٢١ م، كما في الشكل. أوجد طول قطر الدائرة.

بنى القدماء الجسور فوق الأنهار على شكل قوس دائرة مع دعامات جانبية. وهذه الدعامات مهمة لأنها تتحمل كل ثقل الجسر.

الحل:

المعطيات: طول الوتر = ٩٠م طول العمود = ٢١م

المطلوب: إيجاد طول قطر الدائرة

البرهان: ∵ العمود المنصف لوتر يمر بمركز الدائرة (نظرية)

∴ $\overline{\text{د جـ}}$ قطر في الدائرة.

من تقاطع القطر والوتر نجد أن:

س × ٢١ = ٤٥ × ٤٥

س = $\frac{٤٥ \times ٤٥}{٢١}$ = ٩٦,٤٣ تقريبًا

طول القطر ≈ ٢١ + ٩٦,٤٣

≈ ١١٧,٤٣

طول القطر = ١١٧ مترًا تقريبًا.

حاول أن تحل

٢ في الدائرة المقابلة التي مركزها و:

م أ = ٤ سم، م ب = ٦ سم، م جـ = ٣ سم، م د = س.

أ أوجد قيمة س.

ب أوجد البعد بين المركز و والوتر $\overline{\text{د جـ}}$ إذا علمت أن طول نصف قطر الدائرة يساوي ٦ سم.

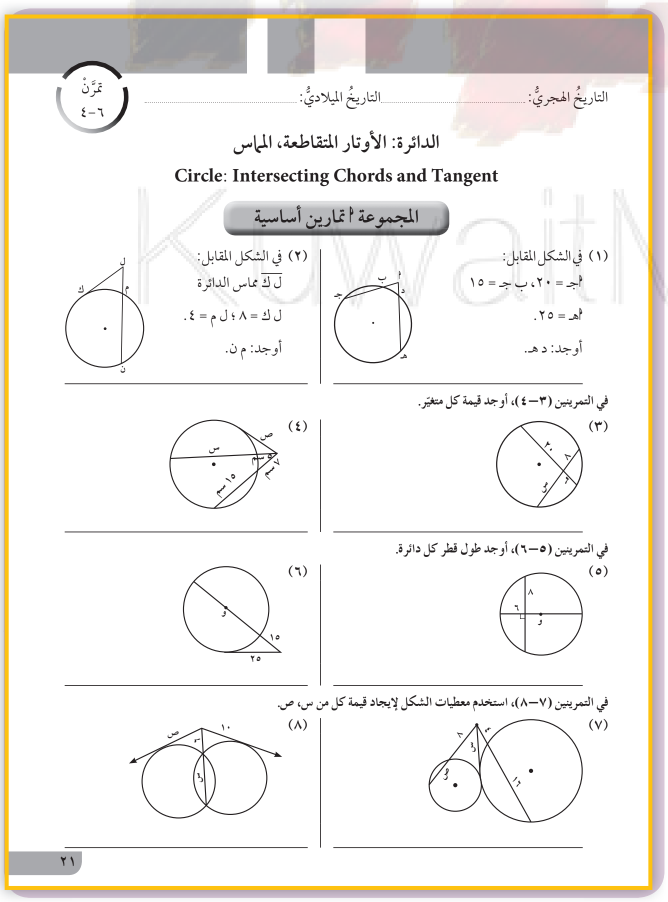
٢ – تقاطع الأوتار خارج الدائرة Intersecting Chords Outside the Circle

نتيجة (١)

إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة، فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي.

م أ × م ب = م جـ × م د.

٤٤



تمرّن ٦-٤

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

الدائرة: الأوتار المتقاطعة، المماس

Circle: Intersecting Chords and Tangent

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) في الشكل المقابل: أجـ = ٢٠، ب جـ = ١٥، أهـ = ٢٥. أوجد: د هـ.

(٢) في الشكل المقابل: $\overline{\text{ل ك}}$ مماس الدائرة، ل ك = ٨ ؛ ل م = ٤. أوجد: م ن.

في التمرينين (٣–٤)، أوجد قيمة كل متغيّر.

(٣)

(٤)

في التمرينين (٥–٦)، أوجد طول قطر كل دائرة.

(٥)

(٦)

في التمرينين (٧–٨)، استخدم معطيات الشكل لإيجاد قيمة كل من س، ص.

(٧)

(٨)

٢١

نكتب التناسب $\frac{م\ د}{م\ ب} = \frac{م\ ب}{م\ د} = \frac{ب\ د}{د\ جـ}$ ومنه نأخذ: $\frac{م\ د}{م\ ب} = \frac{م\ ب}{د\ م}$

باستخدام الضرب التقاطعي نجد:

$(م\ د)^{٢} = م\ ب \times م\ جـ$

في المثال (٤)، اطلب إليهم إيجاد طول قطعة المماس من نقطة إلى الدائرة.

أوجد د م، إذا كان م أ = ٥، م ب = ٢٠ .

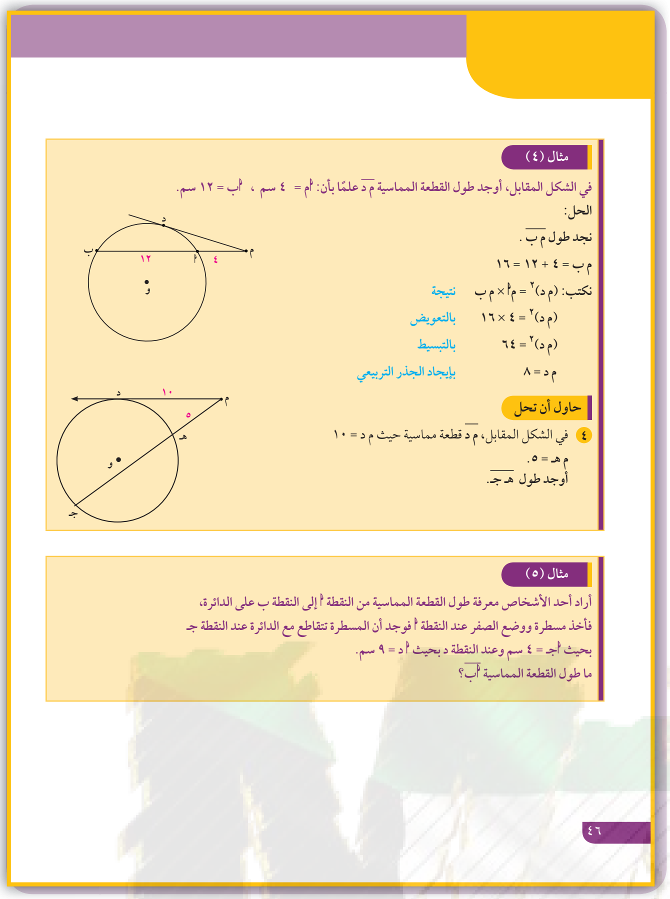
يرتبط المثال (٤) بالنتيجة (٢). أشر إلى أن:

$(م\ د)^{٢} = م\ أ \times م\ ب = م\ جـ \times م\ د = ...$

يمكن رسم أكثر من قاطع للدائرة يمر في م ويبقى ناتج الضرب نفسه.

٦ الربط

انظر المثال (٢)، بنيت بعض الجسور، منذ القدم، على شكل قوس من دائرة. ويتنوع بناء هذه الجسور وفق المسافة المسموح بها. كلما صغرت المسافة صغر طول الوتر الذي بين طرفي الجسر، وصعب عبوره. الاتجاه الحالي في بناء الجسور هو تكبير طول الوتر، وهكذا يصبح عبوره أسهل.



مثال (٤)

في الشكل المقابل، أوجد طول القطعة المماسية م د علمًا بأن: أم = ٤ سم ، أب = ١٢ سم.

الحل:

نجد طول م ب

م ب = ٤ + ١٢ = ١٦

نكتب: (م د)^٢ = م أ × م ب نتيجة

(م د)^٢ = ٤ × ١٦ بالتعويض

(م د)^٢ = ٦٤ بالتبسيط

د م = ٨ بإيجاد الجذر التربيعي

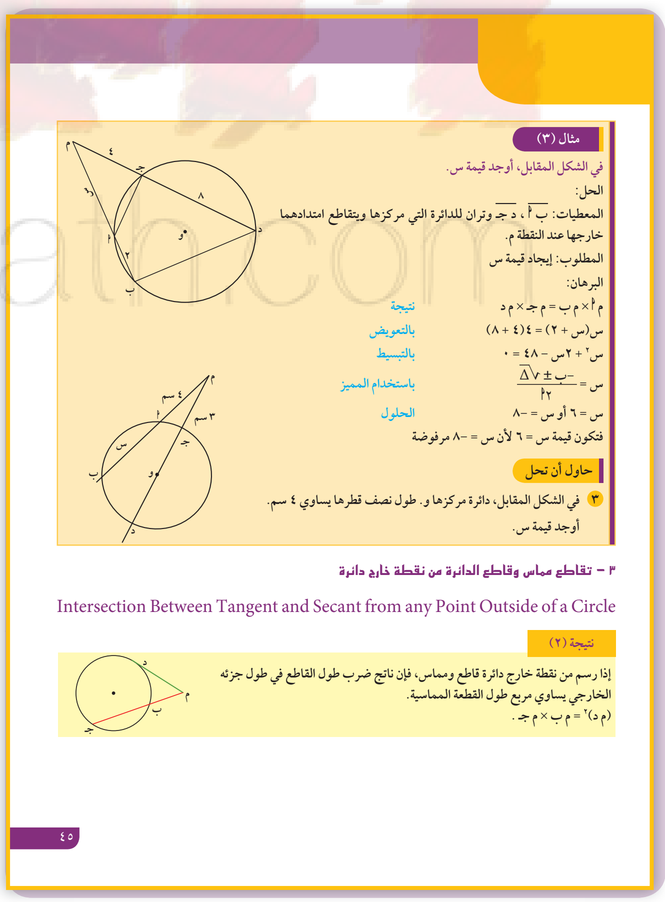
حاول أن تحل

٤ في الشكل المقابل، م د قطعة مماسية حيث م د = ١٠ ، م هـ = ٥. أوجد طول هـ جـ.

مثال (٥)

أراد أحد الأشخاص معرفة طول القطعة المماسية من النقطة أ إلى النقطة ب على الدائرة، فأخذ مسطرة ووضع الصفر عند النقطة أ فوجد أن المسطرة تتقاطع مع الدائرة عند النقطة جـ بحيث أ جـ = ٤ سم وعند النقطة د بحيث أ د = ٩ سم. ما طول القطعة المماسية أب؟

٤٦



مثال (٣)

في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.

الحل:

المعطيات: أب ، د جـ وتران للدائرة التي مركزها و ويتقاطع امتدادهما خارجها عند النقطة م.

المطلوب: إيجاد قيمة س

البرهان:

م أ × م ب = م جـ × م د نتيجة

س(س + ٢) = ٤(٤ + ٨) بالتعويض

س^٢ + ٢ س − ٤٨ = ٠ بالتبسيط

باستخدام المميز

س = ٦ أو س = −٨ الحلول

فتكون قيمة س = ٦ لأن س = −٨ مرفوضة

حاول أن تحل

٣ في الشكل المقابل، دائرة مركزها و. طول نصف قطرها يساوي ٤ سم. أوجد قيمة س.

٣ − تقاطع مماس وقاطع الدائرة من نقطة خارج دائرة

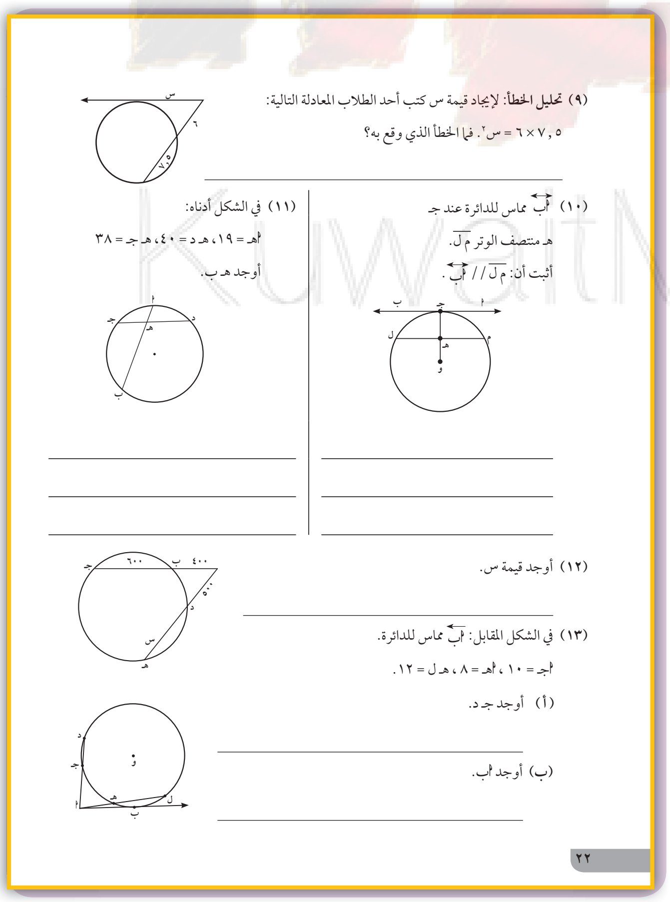
Intersection Between Tangent and Secant from any Point Outside of a Circle

نتيجة (٢)

إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع ومماس، فإن ناتج ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول القطعة المماسية.

(م د)^٢ = م ب × م جـ .

٤٥



(٩) تحليل الخطأ: لإيجاد قيمة س كتب أحد الطلاب المعادلة التالية: ٥,٧ × ٦ = س^٢. فما الخطأ الذي وقع به؟

(١٠) أب مماس للدائرة عند جـ. هـ منتصف الوتر م ل. أثبت أن: م ل // أب.

(١١) في الشكل أدناه: أهـ = ١٩، هـ د = ٤٠، هـ جـ = ٣٨. أوجد هـ ب.

(١٢) أوجد قيمة س.

(١٣) في الشكل المقابل: أب مماس للدائرة. جـ أ = ١٠، أهـ = ٨، هـ ل = ١٢.

(أ) أوجد جـ د.

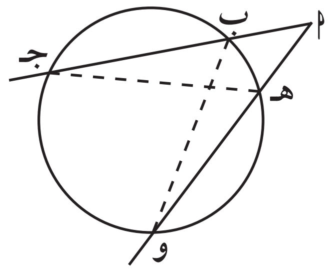
(ب) أوجد أب.

٢٢

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام العلاقة بين أجزاء القواطع على الدائرة من نقطة خارج الدائرة ،فيكتبون:

ﺃ ب × ب جـ = ﺃ هـ × هـ و.



أعد رسم المثلثين المتشابهين، واطلب إليهم استخدام ألوان مختلفة لكل مثلث ليروا جيدًا الأضلاع المتناظرة ونتائج الضرب التقاطعي.

ألفت انتباه الطلاب إلى القراءة دائمًا من نقطة التقاطع ﺃ فيكون:

ﺃ ب × ﺃ جـ = ﺃ هـ × ﺃ و

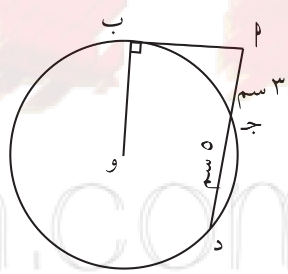
حتى لو كان التقاطع داخليًا وبالتالي ستقل نسبة الخطأ.

٨ التقييم

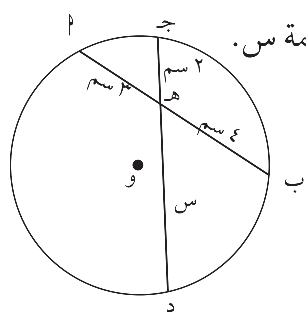
تابع الطلاب وهم يحلون فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من صحة استخدامهم هذه العلاقات.

اختبار سريع

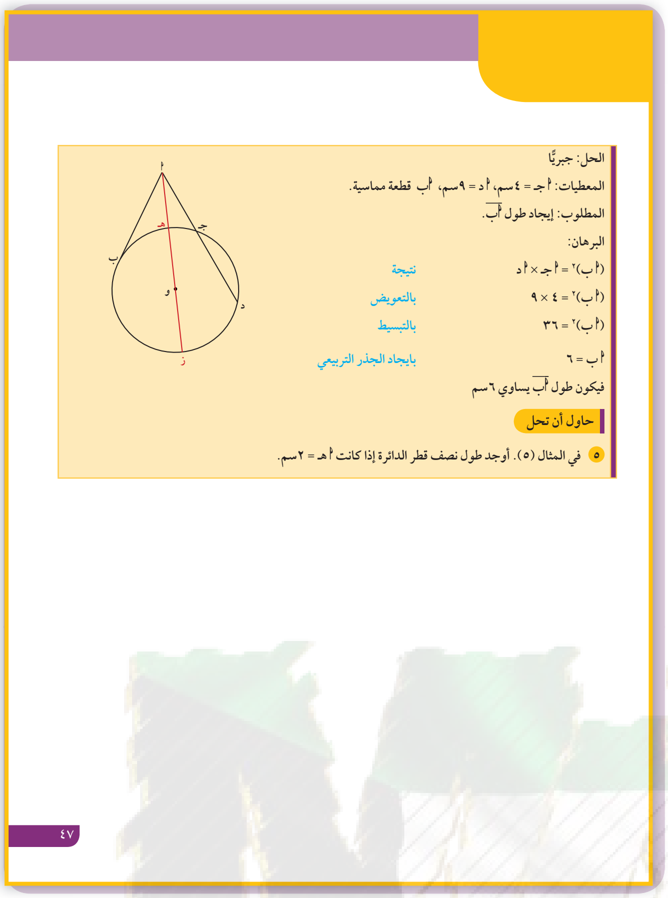
١ في الشكل المقابل أوجد ﺃب. $\sqrt{24} \simeq 4{,}9$ سم



٢ في الشكل المقابل أوجد قيمة س.



٦ سم


الحل: جبريًّا

المعطيات: ﺃ جـ = ٤ سم، ﺃ د = ٩ سم، ﺃب قطعة مماسية.

المطلوب: إيجاد طول $\overline{\text{ﺃب}}$.

البرهان:

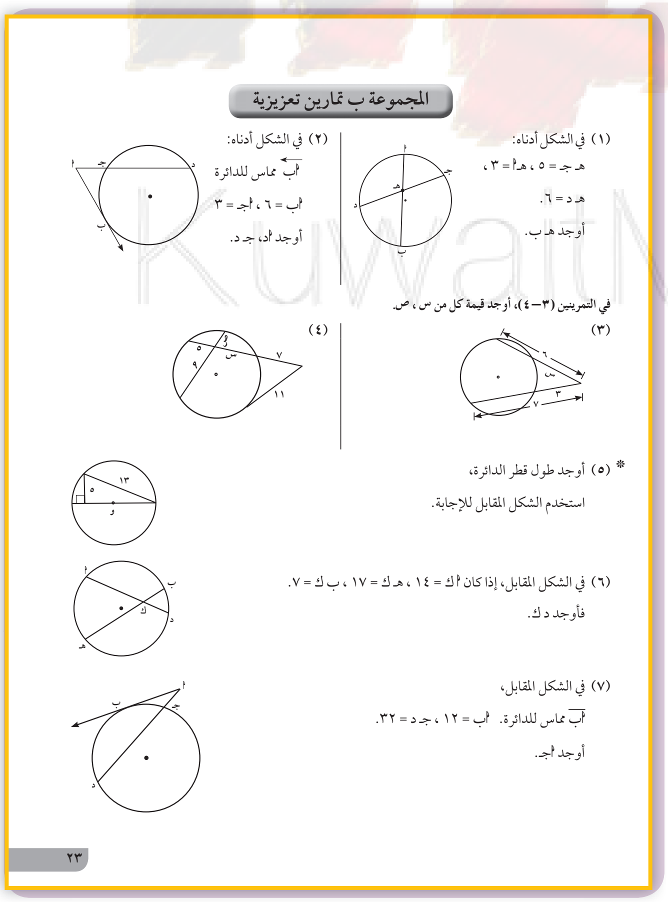
(ﺃ ب)^2 = ﺃ جـ × ﺃ د	نتيجة
(ﺃ ب)^2 = ٤ × ٩	بالتعويض
(ﺃ ب)^2 = ٣٦	بالتبسيط
ﺃ ب = ٦	بايجاد الجذر التربيعي

فيكون طول $\overline{\text{ﺃب}}$ يساوي ٦ سم

حاول أن تحل

٥ في المثال (٥). أوجد طول نصف قطر الدائرة إذا كانت ﺃ هـ = ٢ سم.

٤٧


المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) في الشكل أدناه:
هـ جـ = ٥ ، هـ ﺃ = ٣ ،
هـ د = ٦.
أوجد هـ ب.

(٢) في الشكل أدناه:
$\overleftarrow{\text{ﺃب}}$ مماس للدائرة
ﺃب = ٦ ، ﺃجـ = ٣
أوجد ﺃد، جـ د.

في التمرينين (٣–٤)، أوجد قيمة كل من س ، ص.

(٣)

(٤)

* (٥) أوجد طول قطر الدائرة،
استخدم الشكل المقابل للإجابة.

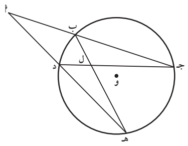
(٦) في الشكل المقابل، إذا كان ﺃك = ١٤ ، هـ ك = ١٧ ، ب ك = ٧.
فأوجد د ك.

(٧) في الشكل المقابل،
$\overline{\text{ﺃب}}$ مماس للدائرة. ﺃب = ١٢ ، جـ د = ٣٢.
أوجد ﺃجـ.

٢٣

(٨) في الشكل المقابل، $\overline{\text{ب هـ}}$ ، $\overline{\text{دجـ}}$ يتقاطعان في ل.

$\overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ د}}$ يتقاطعان في أ.



أثبت أن:

(أ) ل جـ = ل هـ، علمًا بأن: ل د = ل ب.

* (ب) ب جـ = دهـ علمًا بأن: أب = أد

٢٤

٩ إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

١ ، ٢ ، ٣ تحقق من عمل الطلاب.

«حاول أن تحل»

١ س^٢ = ٣٦ ، س = ٦ .

٢ (أ) س = ٨ سم

(ب) $\frac{\text{دجـ}}{٢} = \frac{١١}{٢}$ = ٥,٥ سم

البعد = $\sqrt{(٦)^٢ - (٥,٥)^٢} = \sqrt{(٥,٧٥)}$

≃ ٢,٤ سم

٣ ٣ × ١١ = ٤(٤ + س)؛ ∴ س = ٤,٢٥ سم.

٤ ١٠٠ = ٥(٥ + هـ جـ)؛ ∴ هـ جـ = ١٥ .

٥ ٣٦ = ٢(٢ + ٢نو)؛ ∴ نو = ٨ سم.

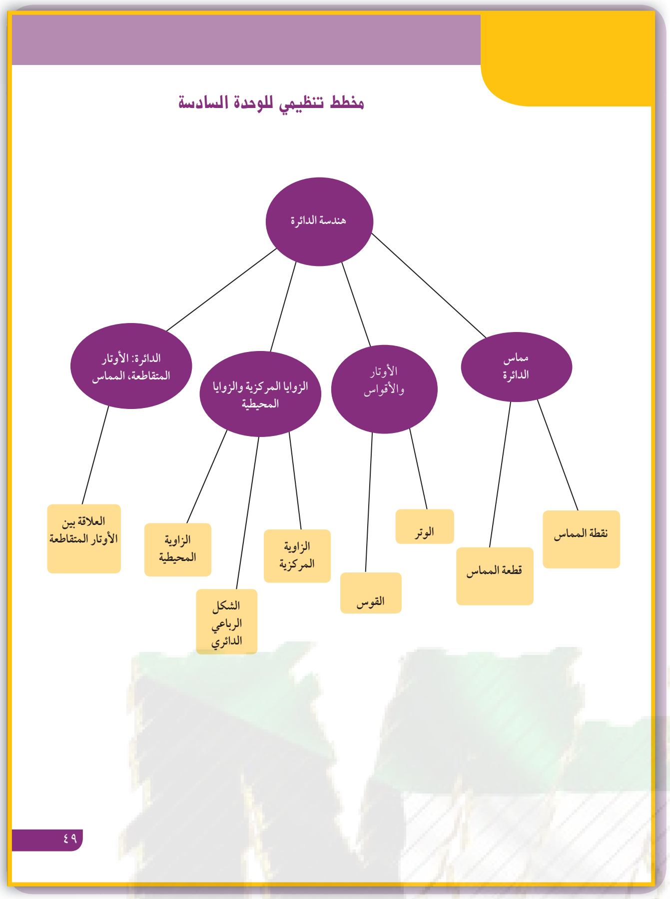
المرشد لحل المسائل

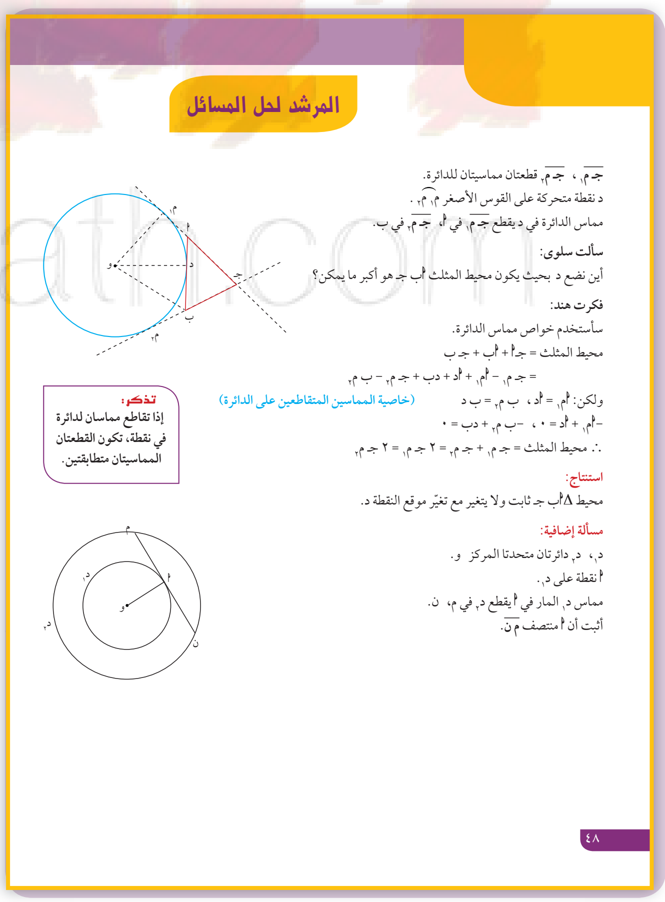
إجابة «مسألة إضافية»

وأ ⊥ نم

إذا كان نصف قطر في الدائرة عموديًّا على وتر في الدائرة، فإنه يمر في منتصف هذا الوتر .

وبالتالي، أ هي منتصف الوتر نم.




المرشد لحل المسائل

جـم١ ، جـم٢ قطعتان مماسيتان للدائرة.
د نقطة متحركة على القوس الأصغر م١م٢ .
مماس الدائرة في د يقطع جـم١ في أ، جـم٢ في ب.

سألت سلوى:
أين نضع د بحيث يكون محيط المثلث أب جـ هو أكبر ما يمكن؟

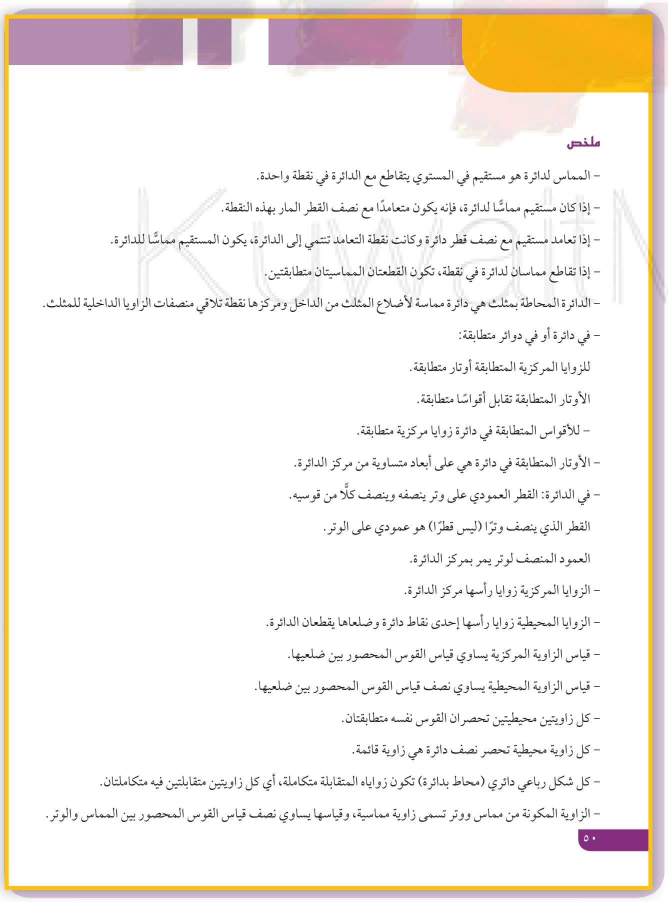
فكرت هند:
سأستخدم خواص مماس الدائرة.
محيط المثلث = جـأ + أب + جـب
= جـم١ − أم١ + أد + دب + جـم٢ − ب م٢
ولكن: أم١ = أد ، ب م٢ = ب د (خاصية المماسين المتقاطعين على الدائرة)
−أم١ + أد = ٠ ، −ب م٢ + دب = ٠
∴ محيط المثلث = جـم١ + جـم٢ = ٢ جـم١ = ٢ جـم٢

تذكر: إذا تقاطع مماسان لدائرة في نقطة، تكون القطعتان المماسيتان متطابقتين.

استنتاج:
محيط Δأب جـ ثابت ولا يتغير مع تغيّر موقع النقطة د.

مسألة إضافية:
د١، د٢ دائرتان متحدتا المركز و.
أ نقطة على د١.
مماس د١ المار في أ يقطع د٢ في م، ن.
أثبت أن أ منتصف من.

٤٨


ملخص

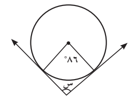
- المماس لدائرة هو مستقيم في المستوي يتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة.
- إذا كان مستقيم مماسًّا لدائرة، فإنه يكون متعامدًا مع نصف القطر المار بهذه النقطة.
- إذا تعامد مستقيم مع نصف قطر دائرة وكانت نقطة التعامد تنتمي إلى الدائرة، يكون المستقيم مماسًّا للدائرة.
- إذا تقاطع مماسان لدائرة في نقطة، تكون القطعتان المماسيتان متطابقتين.
- الدائرة المحاطة بمثلث هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث من الداخل ومركزها نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث.
- في دائرة أو في دوائر متطابقة:
للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة.
الأوتار المتطابقة تقابل أقواسًا متطابقة.
- للأقواس المتطابقة في دائرة زوايا مركزية متطابقة.
- الأوتار المتطابقة في دائرة هي على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.
- في الدائرة: القطر العمودي على وتر ينصفه وينصف كلًّا من قوسيه.
القطر الذي ينصف وترًا (ليس قطرًا) هو عمودي على الوتر.
العمود المنصف لوتر يمر بمركز الدائرة.
- الزوايا المركزية زوايا رأسها مركز الدائرة.
- الزوايا المحيطية زوايا رأسها إحدى نقاط دائرة وضلعاها يقطعان الدائرة.
- قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها.
- قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها.
- كل زاويتين محيطيتين تحصران القوس نفسه متطابقتان.
- كل زاوية محيطية تحصر نصف دائرة هي زاوية قائمة.
- كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة) تكون زواياه المتقابلة متكاملة، أي كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان.
- الزاوية المكونة من مماس ووتر تسمى زاوية مماسية، وقياسها يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر.

٥٠

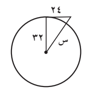
مراجعة الوحدة السادسة

في التمرينين (١–٢)، لنفرض أن الخطوط التي تبدو مماسة هي مماس للدائرة، أوجد قيمة س.

(١)

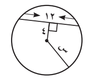


(٢)

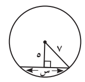


في التمرينين (٣–٤)، أوجد قيمة س.

(٣)

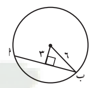


(٤)

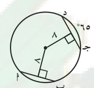


في التمرينين (٥–٦)، أوجد قياس القوس أب.

(٥)

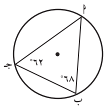


(٦)

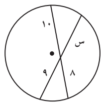


٢٥

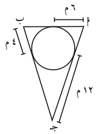
(١٤) في الشكل المقابل، أوجد قيمة ب⌒جـ.



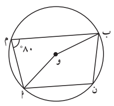
(١٥) في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



(١٦) أوجد محيط المثلث أ ب جـ.



(١٧) أوجد ق(ن̂).



(١٨) في الشكل المقابل، △أ ب جـ متطابق الأضلاع.

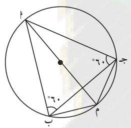
أوجد:

ق(أ م̂ ب).

ق(ب م̂ جـ).

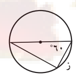
ق(م جـ̂ ب).

ق(أ م̂ جـ).



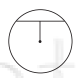
٢٧

(٧) في الشكل المقابل، أوجد قيمة ز.



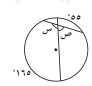
(٨) وتر في دائرة طوله ٢٤ سم ويبعد ٨ سم عن مركز الدائرة.

فما طول نصف قطر الدائرة؟



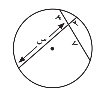
في التمارين (٩–١٢)، الخط الذي يبدو مماس هو مماس للدائرة أوجد قيمتي س، ص في كل مما يلي:

(٩)

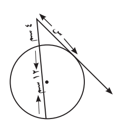


(١٠)

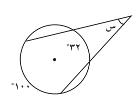
(١١)



(١٢)



(١٣) في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



٢٦

- إذا تقاطع وتران داخل دائرة، فإن ناتج ضرب طولي جزءي أحد الوترين يساوي ناتج ضرب طولي جزءي الوتر الآخر.
- إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة، فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي.
- إذا رسم من نقطة خارج دائرة مماس وقاطع، فإن ناتج ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول القطعة المماسية.

٥١

تمارين إثرائية

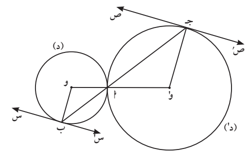
(١) (د)، (د') دائرتان لهما أ نقطة مماس خارجية.

$\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ قاطع يمر بالنقطة أ ويقطع الدائرة (د)

بالنقطة ب ويقطع الدائرة (د') بالنقطة جـ.

أثبت أن المماس من النقطة ب للدائرة (د) موازٍ للمماس

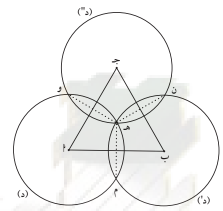
من النقطة جـ للدائرة (د').



(٢) (د)، (د')، (د") ثلاث دوائر متطابقة ومراكزها على الترتيب أ، ب، جـ.

تتقاطع الدوائر الثلاث في النقطة المشتركة هـ.

ماذا تمثل النقطة هـ بالنسبة إلى المثلث أب جـ؟ اشرح.

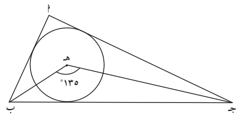


(٣) أب جـ مثلث. هـ مركز الدائرة المحاطة بالمثلث أب جـ

(نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية في المثلث أب جـ).

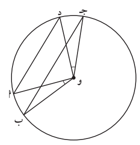
ق(ب هـ جـ) = ١٣٥°.

أثبت أن المثلث أب جـ قائم الزاوية في أ.



(٤) أ ، ب ، جـ ، د نقاط على الدائرة مركزها و، حيث ق(أوب) = ق(دوجـ).

أثبت أن: $\overline{\text{دأ}}$ // $\overline{\text{جـ ب}}$.



(٥) في الشكل المقابل أب جـ د شبه منحرف متطابق الضلعين.

أثبت أنه رباعي دائري.