الوحدة السابعة: المصفوفات

Matrices

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

٧ – ١ : تنظيم البيانات في مصفوفات

جزء ١ : ربط البيانات بالمصفوفات.

جزء ٢ : أنواع المصفوفات ورتبها.

جزء ٣: المصفوفات المتساوية.

٧ – ٢: جمع وطرح المصفوفات

جزء ١ : جمع المصفوفات.

جزء ٢: طرح المصفوفات.

جزء ٣: حل المعادلات المصفوفية.

٧ – ٣: ضرب المصفوفات

جزء ١ : ضرب عدد في مصفوفة.

جزء ٢: ضرب المصفوفات.

٧ – ٤ : مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوسات)

جزء ١ : إيجاد النظير الضربي.

جزء ٢: محدد مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية.

٧ – ٥: حل نظام من معادلتين خطيتين

جزء ١ : الحل باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة.

جزء ٢: الحل باستخدام قاعدة كرامر.

مقدمة الوحدة

يبني الطلاب في هذه الوحدة مفاهيم تتعلق بكيفية تنظيم البيانات الإحصائية في مصفوفات لإيجاد حلول لمسائل حياتية، وتوفير فرصة لاتخاذ قرارات مبنية على توقعات محددة.

سوف يتم ذلك من خلال جمع المصفوفات أو طرحها أو ضربها في عدد حقيقي أو ضربها في بعضها بعضًا بحسب ما يتطلب الموقف والحاجة.

اعرض أمام الطلاب بعض البيانات المنظمة في جداول. اطلب إليهم تحديد أي من هذه البيانات يقع في صفوف، وأي منها يقع في أعمدة، وأي منها يقع في صفوف وأعمدة.

الوحدة السابعة

المصفوفات
Matrices

مشروع الوحدة: المعالجة الحيوية (Biotherapy).

١ مقدمة المشروع: يعتبر تسرب الزيت والمواد الكيميائية إلى المياه الجوفية من أهم مخاطر العصر الحديث، كما وتستخدم البكتيريا في مجال المعالجة الحيوية التي تتكوّن طبيعيًّا في محيط البيئة للحدّ من هذه الأخطار.

٢ الهدف: عند العمل في هذه الوحدة، سوف تحلل بيانات المشروع، وسوف تعالجها، وتستخدم النتائج لرسم المحتويات وتوقعها، ومن ثم سوف تبحث عن مصادر مشاريع أخرى. وفي النهاية، سوف تلخص ما ستجده وتوضحه للمساعدة في تكملة المشروع.

٣ اللوازم: آلة حاسبة بيانية.

٤ أسئلة حول التطبيق: يوضح الجدول بيانات من نتائج تحليل العلماء لخمس عينات عشوائية من التربة نفسها. في أحد مشاريع المعالجة الحيوية، وجدوا التالي من عناصر المنتجات البترولية الخطرة: البنزين (ب)، التوليدين (ت) وهو سائل عديم اللون، إيثيل البنزين (ي)، إكسيلين (س) وهو مركب هيدروكربوني. اعرض البيانات في أربع مصفوفات، ثم اختر عنصرًا من كل مصفوفة، واذكر ماذا يمثل.

مستويات المركب في التربة (ملجم/ كجم)

العينة	ب	ت	ي	س
١	٠,٠٦	٠,٩٥	٠,٩	١٨,٥
٢	٠,٠٦	١,٠٥	٠,٧٣	١٣,٥
٣	٠,٣٥	٦	٥,٦	٤٩
٤	٠,٢٢	٠,١٩	٢	١٩,٥
٥	٠,١١	٠,٨٢	٢,٥	٢٦

أ اعرض بيانات الجدول في ٤ مصفوفات.

ب استخدم هذه المصفوفات، وأوجد توليفة البنزين والتوليدين وإيثيل البنزين والإكسيلين بالمليجرام/ كجم لكل عينة تراب.

جـ بعد ١٢ شهرًا، لاحظ العلماء أن النسبة المئوية لكل مركّب في كل عينة من التربة قد انخفضت بمعدل ٠,٠٥ ملجم/ كجم. فمثلًا، نسبة البنزين أصبحت في العينة الأولى ٠,٠١ وفي العينة الثانية ٠,٠١ وفي العينة الثالثة ٠,٣٠ وفي العينة الرابعة ٠,١٧ وفي العينة الخامسة ٠,٠٦. استخدم المصفوفات لحساب نقصان كل مركب في كل عينة.

٥ التقرير: حقق بحثًا عن موقع النفايات التي تتضمن خطورة، والتي تمت معالجتها حيويًّا. ما مدى اتساع الموقع؟ ما طرق المعالجة الأخرى التي يمكن استخدامها بخلاف المعالجة الحيوية؟

اكتب فقرات قليلة تلخص بحثك وتتضمن بيانات عن الموقع كلما أمكن.

دروس الوحدة

تنظيم البيانات في مصفوفات	جمع وطرح المصفوفات	ضرب المصفوفات	مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوسات)	حل نظام من معادلتين خطيتين
٧-١	٧-٢	٧-٣	٧-٤	٧-٥

٥٢

مشروع الوحدة

يوفر هذا المشروع فرصة كبيرة أمام الطلاب للتعرف إلى المصفوفات واستخدامها في تنظيم البيانات الإحصائية عن المعالجات الحيوية والتي هي إحدى المشاكل البيئية في هذا العصر.

من خلال العمليات على المصفوفات، سوف يقوم الطلاب بحساب التغيرات في كميات المخلفات الموجودة، ثم ببحث مشاريع معالجة حيوية أخرى وتلخيصها وعرض ما توصلوا إليه.

- اسأل الطلاب ما إذا كانوا قد تواجدوا في موقع قد تمّ تنظيفه من بقع زيت أو نفط أو بقايا مواد كيماوية.
- وضح للطلاب أن مجال المعالجة الحيوية يستخدم البكتيريا الموجودة في الطبيعة لتفكيك المخلفات الضارة.
- اسأل الطلاب ما إذا قاموا بإعداد قائمة بالمواد التي سوف يحتاجون إليها في المشروع.
- حفّز الطلاب على إيجاد المزيد من المعلومات في مجال المعالجة الحيوية من شبكة الإنترنت أو أي مصادر أخرى.

الوحدة السابعة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت تمثيل العلاقات باستخدام المتغيرات .
- تعلمت تبسيط العبارات الجبرية المتضمنة أعدادًا صحيحة وكسورًا وإيجاد قيمتها.
- تعلمت تمثيل معادلات من متغيرين.
- تعلمت رسم المعادلات والمتباينات بيانيًّا.
- تعلمت رسم نظام من المعادلات أو المتباينات بيانيًّا.

ماذا سوف تتعلم؟

- سوف تستخدم المصفوفات لتنظيم البيانات.
- سوف تتعرف المصفوفات المتساوية.
- سوف تستخدم جمع المصفوفات وطرحها لحل معادلات المصفوفات في مواقف حياتية.
- سوف تستخدم ضرب المصفوفات لحل مسائل حياتية.
- سوف تستخدم معكوسات المصفوفات لحل معادلات المصفوفات في مسائل حياتية.
- سوف تحل نظامًا من معادلتين خطيتين باستخدام قاعدة كرامر.

أضف إلى معلوماتك

يستخدم الناس في أغلب المجالات، البيانات المرتبة في قاعدة منظمة، وإحدى طرق تنظيم البيانات بصورة مختصرة هي كتابتها في صورة مصفوفة، بذلك نستطيع جمع المصفوفات وطرحها وضربها. كما يمكن استخدام ذلك للحصول على معلومات إضافية تساعد في اتخاذ القرار. تاريخيًّا، استخدمت المصفوفات لحل رسائل مشفرة، كما ويمكن استخدام ضرب المصفوفات في مسائل وتطبيقات حياتية.

المصطلحات الأساسية

مصفوفة – أعمدة – صفوف – عنصر المصفوفة – العناصر المتناظرة – مصفوفة الجمع–المصفوفة الصفرية – العنصر المحايد الجمعي – العدد القياسي – مصفوفات الضرب – المصفوفة المربعة – مصفوفة الوحدة – النظير الضربي للمصفوفة (معكوس المصفوفة) – قاعدة كرامر – محدد المصفوفة.

٥٣

سلّم التقييم

٤.	الحسابات صحيحة، المصفوفات واضحة ودقيقة، الشروح معبرة، التقرير مفصل ومفيد.
٣.	معظم الحسابات صحيحة، ومعظم المصفوفات واضحة ودقيقة، الشروح بحاجة إلى بعض الإيضاح، التقرير مفصل مع بعض الأخطاء.
٢.	يوجد أخطاء كثيرة في الحسابات، بعض المصفوفات واضحة ودقيقة، الشروح غامضة، التقرير غير مفهوم.
١.	معظم عناصر المشروع غير كاملة.

١ـ٧ : تنظيم البيانات في مصفوفات

١ الأهداف

- ينظم البيانات الإحصائية في مصفوفات.
- يوجد رتبة مصفوفة.
- يتعرف أنواع المصفوفات.
- يحل معادلات باستخدام المصفوفات المتساوية.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

بيانات إحصائية – مصفوفة – رتبة مصفوفة – صفوف – أعمدة – مصفوفة مربعة – مصفوفة أفقية – مصفوفة عمودية – مصفوفات متساوية.

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

- اطلب إلى الطلاب تنظيم قوائم بكل المواقع التي سبق أن رأوا فيها بيانات معروضة مشابهة للبيان في فقرة «عمل تعاوني»، مثل بيانات الأرقام القياسية لأسعار المستهلك حسب أقسام الإنفاق الرئيسة.
- اطلب إليهم حل المعادلة: ٤س – ٧ = ٣س + ٥

١–٧ تنظيم البيانات في مصفوفات
Organising Data Into Matrices

سوف تتعلم
- تنظيم البيانات في مصفوفات
- المصفوفات المتساوية

عمل تعاوني

يبين الجدول الأرقام القياسية لأسعار المستهلك حسب أقسام الإنفاق الرئيسة:

مقارنة يناير ٢٠١١ بـ يناير ٢٠١٢.   سنة الأساس ٢٠٠٠ = صفرًا

أقسام الإنفاق الرئيسة	يناير ٢٠١١	يناير ٢٠١٢
الرقم القياسي العام	١٤٦,٠	١٥١,١
المواد الغذائية	١٧٢,٠	١٨٥,٩
الحلويات	١٦٣,٢	١٦٩,١
الملابس	١٥٤,٨	١٥٩,٨
خدمات المسكن	١٤٨,٢	١٥١,٢
سلع وخدمات منزلية	١٣٧,٣	١٣٩,٨

* المصدر: الإدارة المركزية للإحصاء الكويت.

١ كم بلغت نسبة الزيادة في الرقم القياسي العام؟

٢ في أي قسم كانت نسبة الزيادة الأكبر؟ وفي أي قسم كانت الأصغر؟

تعريف

المصفوفة هي تنظيم من الأعداد المرتبة في صفوف وأعمدة.

الأعداد المكونة للمصفوفة تسمى عناصر Elements.

رتبة المصفوفة Dimension of a Matrix

نرمز إلى المصفوفة بأحد حروف الهجاء ونضع تحته خطًّا، نكتب أ ونقرأ **المصفوفة أ**.

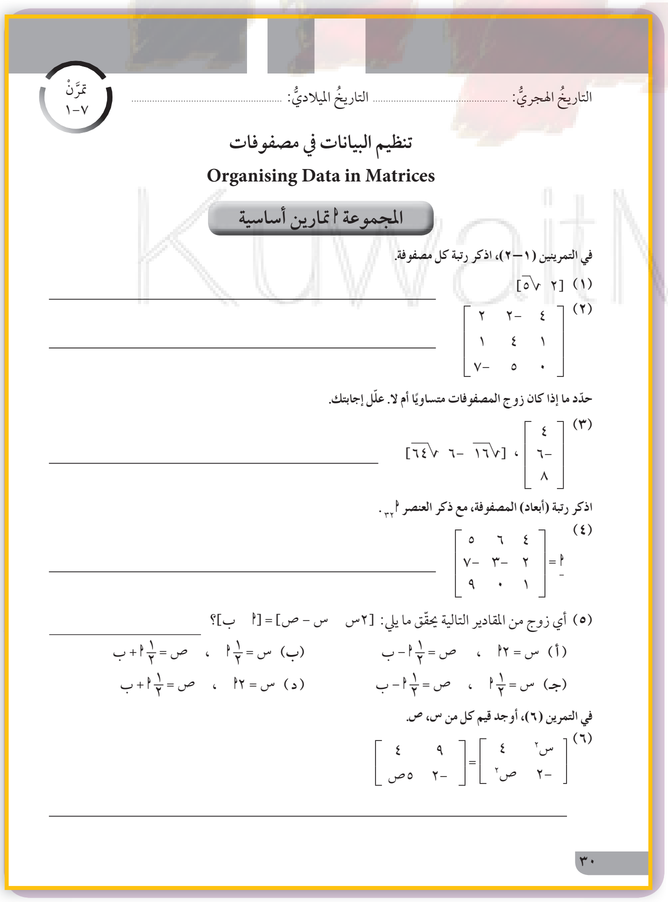
عدد الصفوف (م) وعدد الأعمدة (ن) يحددان **رتبة المصفوفة** وتكتب م × ن.

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ٠ & ٧ & ٦ \end{bmatrix}$$

المصفوفة أ هي من **الرتبة** ٢ × ٣.

ملاحظة: لكتابة رتبة المصفوفة نكتب أولًا عدد الصفوف يليه عدد الأعمدة.

٥٤



تمرَّنْ ١–٧

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تنظيم البيانات في مصفوفات
Organising Data in Matrices

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمرينين (١–٢)، اذكر رتبة كل مصفوفة.

(١) $[\sqrt{٥} \quad ٢]$

(٢) $\begin{bmatrix} ٢ & -٢ & ٤ \\ ١ & ٤ & ١ \\ -٧ & ٥ & ٠ \end{bmatrix}$

حدّد ما إذا كان زوج المصفوفات متساويًا أم لا. علّل إجابتك.

(٣) $\begin{bmatrix} ٤ \\ -٦ \\ ٨ \end{bmatrix}$ ، $[\sqrt{٦٤} \quad -٦ \quad \sqrt{١٦}]$

اذكر رتبة (أبعاد) المصفوفة، مع ذكر العنصر $أ_{٣٢}$.

(٤) $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٥ & ٦ & ٤ \\ -٧ & -٣ & ٢ \\ ٩ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$

(٥) أي زوج من المقادير التالية يحقّق ما يلي: [٢س   س – ص] = [أ   ب]؟

(أ) س = ٢أ ، ص = $\frac{١}{٢}$أ – ب   (ب) س = $\frac{١}{٢}$أ ، ص = $\frac{١}{٢}$أ + ب

(جـ) س = $\frac{١}{٢}$أ ، ص = $\frac{١}{٢}$أ – ب   (د) س = ٢أ ، ص = $\frac{١}{٢}$أ + ب

في التمرين (٦)، أوجد قيم كل من س، ص.

(٦) $\begin{bmatrix} س^٢ & ٤ \\ -٢ & ص^٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٤ \\ -٢ & ٥ص \end{bmatrix}$

٣٠

٥ التدريس

أشر في البدء إلى أن الجداول والتمثيلات البيانية هي طرائق لتنظيم البيانات الإحصائية ومنها يمكن الدخول إلى تنظيم هذه البيانات في مصفوفات.

أكّد لهم أن الجداول والتمثيلات البيانية والمصفوفات جميعها يمكن أن تمثل المعلومات نفسها ولكن بأشكال مختلفة.

اطلب إليهم تنظيم الجدول في فقرة «عمل تعاوني» على شكل مصفوفة.

اسألهم عن عدد الصفوف والأعمدة في هذه المصفوفة وعن رتبتها وعما إذا كان بالإمكان تنظيم هذا الجدول بمصفوفة ثانية مختلفة عن الأولى وعن عدد صفوف وأعمدة ورتبة المصفوفة الثانية.

$$\begin{bmatrix} ١٥١,١ & ١٤٦,٠ \\ ١٨٥,٩ & ١٧٢,٠ \\ ١٦٩,١ & ١٦٣,٢ \\ ١٥٩,٨ & ١٥٤,٨ \\ ١٥١,٢ & ١٤٨,٢ \\ ١٣٩,٨ & ١٣٧,٣ \end{bmatrix}$$

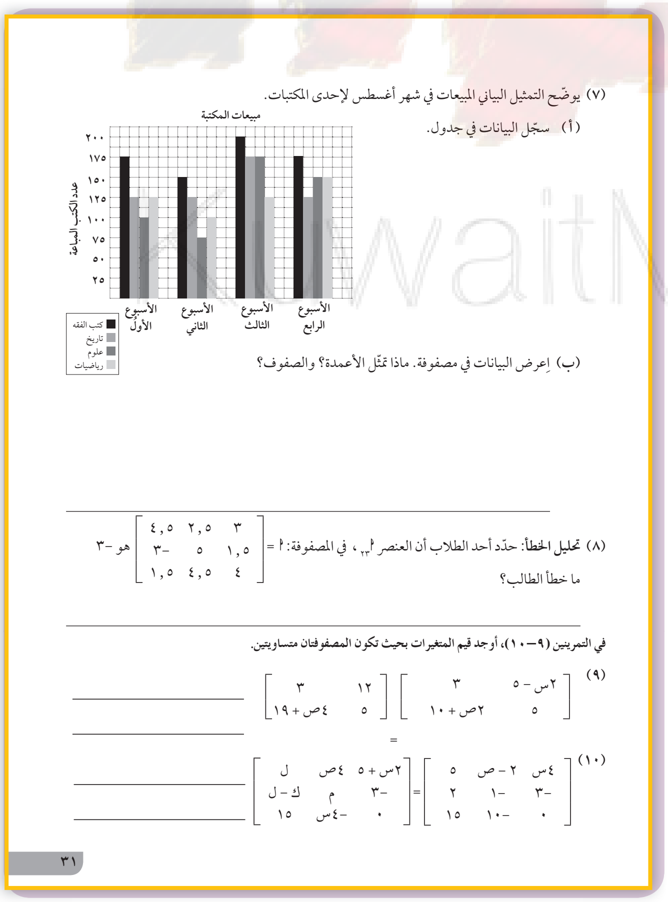
الرتبة: ٦ × ٢

$$\begin{bmatrix} ١٣٧,٣ & ١٤٨,٢ & ١٥٤,٨ & ١٦٣,٢ & ١٧٢,٠ & ١٤٦,٠ \\ ١٣٩,٨ & ١٥١,٢ & ١٥٩,٨ & ١٦٩,١ & ١٨٥,٩ & ١٥١,١ \end{bmatrix}$$

الرتبة: ٢ × ٦


مثال (١)
اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي:
الحل:
تكون المصفوفة أ من ٣ صفوف و٣ أعمدة: المصفوفة من الرتبة ٣ × ٣.
تكون المصفوفة ب من صف واحد و٣ أعمدة: المصفوفة من الرتبة ١ × ٣.
تكون المصفوفة جـ من ٤ صفوف وعمود واحد: المصفوفة من الرتبة ٤ × ١.
حاول أن تحل
١ اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي:
مثال (٢) تطبيقات حياتية
الطاقة: يمكن أن تقاس الطاقة الكهربائية بالجيجاوات/ ساعة. اكتب مصفوفة تمثّل بيانات الرسم البياني التالي بالأعمدة المزدوجة.

٥٥


(٧) يوضّح التمثيل البياني المبيعات في شهر أغسطس لإحدى المكتبات.
(أ) سجّل البيانات في جدول.

(ب) اِعرض البيانات في مصفوفة. ماذا تمثّل الأعمدة؟ والصفوف؟
(٨) **تحليل الخطأ:** حدّد أحد الطلاب أن العنصر $أ_{٢٣}$، في المصفوفة: أ = هو -٣
ما خطأ الطالب؟
في التمرينين (٩-١٠)، أوجد قيم المتغيرات بحيث تكون المصفوفتان متساويتين.
(٩)
(١٠)
٣١

في المثال (٢)

الجيجاوات/ ساعة هي وحدة لقياس السعر الحراري؛ أي إنتاج الطاقة أو الجهد المساوي للجهد المبذول بجيجاوات من الطاقة خلال ساعة. جيجاوات واحد في الساعة يساوي $٣,٦ \times ١٠^{٩}$ جول. الجول وحدة قياس سُميت باسم عالم الفيزياء البريطاني جيمس جول (١٨١٨ – ١٨٨٩) والذي قام بتطوير نظرية تنص على أن السعرات الحرارية تشتق من الجهد بغض النظر عن شكله سواء أكان جهدًا كيميائيًّا أو ميكانيكيًّا أو كهربائيًّا. ساعد الطلاب على أن يتذكروا أن $٣,٦ \times ١٠^{٩}$ تساوي ٣ ٦٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠.

أشر إلى أن ترتيب البلدان في المصفوفة يمكن أن يكون الترتيب نفسه للبلدان في الرسم البياني. اطلب إلى الطلاب أن يضع كل منهم إحدى أصابعه على البلد في الرسم، وإصبعًا أخرى على البلد نفسه في المصفوفة لمقارنة البيانات.

اطلب إليهم كتابة المصفوفة بطريقة ثانية.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{البحرين} & \text{الإمارات} & \text{الكويت} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{إنتاج} \\ \text{استهلاك} \end{array} & \begin{bmatrix} ١٠\,٠٠٠ & ٧٠\,٠٠٠ & ٤٥\,٠٠٠ \\ ١٠\,٠٠٠ & ٦٥\,٠٠٠ & ٤٠\,٠٠٠ \end{bmatrix} \end{array}$$

مصفوفة برتبة: ٢ × ٣

في المثال (٦)

أكد للطلاب أن المصفوفتين متساويتان في حال كانت جميع العناصر المتناظرة متساوية.

يجب التأكد من أن كافة عناصر المصفوفتين متساوية قبل البدء بحل المعادلات لإيجاد المجهول.

الحل:

افرض أن كل صف في المصفوفة يمثّل دولة، وكل عمود يمثّل مستوى الإنتاج أو الاستهلاك.

استنتج عناصر المصفوفة من الرسم.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{الاستهلاك} & \text{الإنتاج} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{الكويت} \\ \text{الإمارات} \\ \text{البحرين} \end{array} & \begin{bmatrix} ٤٠\,٠٠٠ & ٤٥\,٠٠٠ \\ ٦٥\,٠٠٠ & ٧٠\,٠٠٠ \\ ١٠\,٠٠٠ & ١٠\,٠٠٠ \end{bmatrix} \end{array}$$

حاول أن تحل

٢ أ) وضّح كيف يمكنك تعديل المصفوفة لتشمل البيانات التي إذا أضيفت إليها دول أخرى.

ب) أعد كتابة عناصر المصفوفة السابقة في مصفوفة من الرتبة ٢ × ٣.

ضع عنوانًا للصفوف والأعمدة.

جـ) وضّح الفرق بين المصفوفة التي رتبتها جـ × د والمصفوفة التي رتبتها د × جـ.

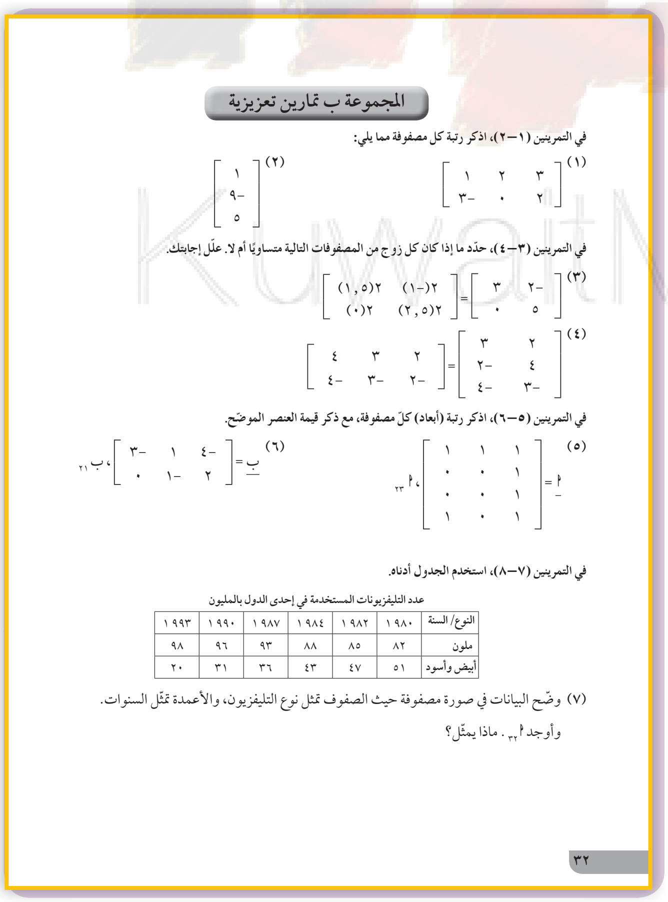
ترميز عناصر المصفوفة

يحدد أي عنصر في المصفوفة بدلالة رقمي الصف والعمود الواقع فيهما، فمثلًا، في المصفوفة أ العنصر الذي في الصف الأول والعمود الثالث نرمز إليه بالرمز $أ_{٣١}$ (الصف أولًا والعمود ثانيًا).

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{bmatrix}$$

العنصر في الصف الأول والعمود الثالث: $أ_{٣١}$

٥٦



المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمرينين (١–٢)، اذكر رتبة كل مصفوفة مما يلي:

(١) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ -٣ & ٠ & ٢ \end{bmatrix}$

(٢) $\begin{bmatrix} ١ \\ -٩ \\ ٥ \end{bmatrix}$

في التمرينين (٣–٤)، حدّد ما إذا كان كل زوج من المصفوفات التالية متساويًا أم لا. علّل إجابتك.

(٣) $\begin{bmatrix} ٢(١,٥) & ٢(-١) \\ ٢(٠) & ٢(٢,٥) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ -٤ & -٣ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -٢ & ٤ \\ -٤ & -٣ \end{bmatrix}$

في التمرينين (٥–٦)، اذكر رتبة (أبعاد) كلّ مصفوفة، مع ذكر قيمة العنصر الموضّح.

(٥) $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٠ & ١ \\ ١ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$، $أ_{٢٣}$

(٦) $\underline{ب} = \begin{bmatrix} -٣ & ١ & -٤ \\ ٠ & -١ & ٢ \end{bmatrix}$، $ب_{٢١}$

في التمرينين (٧–٨)، استخدم الجدول أدناه.

عدد التليفزيونات المستخدمة في إحدى الدول بالمليون

النوع/ السنة	١٩٨٠	١٩٨٢	١٩٨٤	١٩٨٧	١٩٩٠	١٩٩٣
ملون	٨٢	٨٥	٨٨	٩٣	٩٦	٩٨
أبيض وأسود	٥١	٤٧	٤٣	٣٦	٣١	٢٠

(٧) وضّح البيانات في صورة مصفوفة حيث الصفوف تمثل نوع التليفزيون، والأعمدة تمثّل السنوات.

وأوجد $أ_{٣٢}$. ماذا يمثّل؟

٣٢

٦ الربط

في المثال (٢)، تقوم الدول بحملات إرشاد في استهلاك الطاقة حماية للبيئة من التلوث والانبعاث الحراري.

ناقش مع الطلاب كيفية الحد من استهلاك الطاقة الكهربائية وأثر ذلك على البيئة.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في قراءة البيانات وفق مواقعها في المصفوفة أو لا يتمكنون من تعريف موقع عنصر في المصفوفة.

ساعدهم على تحديد معنى كل عنصر في المصفوفة ومرتبته في الصف وفي العمود.

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يحلون فقرات «حاول أن تحل»، تأكد من أن إجاباتهم صحيحة. أرشدهم ما إذا واجهوا مشاكل في حلها.

اختبار سريع

١ اكتب رتبة المصفوفة:
$$\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٤ & ٨ \\ ٠ & -٥ & ٣ & ٩ \\ ١ & ٦ & ٢ & -١ \end{bmatrix}$$
٣ × ٤

٢ حدد العنصر $أ_{٤٢}$، $أ_{٢٣}$، $أ_{٣١}$ ٠، ٢، ٠

٣ إذا كانت
$$\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٤ & \text{س} + ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & \text{ص} - ٢ \\ \text{ص} - ١ & ٥ \end{bmatrix}$$
فأوجد قيمة كل من س، ص س = ٤، ص = ٥

مثال (٣)

في المصفوفة: ب = $\begin{bmatrix} ٤ & ٥ & ١ & ١٢ \\ ٣,٥ & ٢ & ٦ & ٢ \\ -٤ & ١ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ اكتب قيمة كل عنصر مما يلي:

أ $ب_{٢٢}$ ب $ب_{١٣}$ جـ $ب_{١١}$

الحل:

أ العنصر $ب_{٢٢}$ يقع في الصف ٢ وفي العمود ٢ ∴ $ب_{٢٢}$ = ٦

ب العنصر $ب_{١٣}$ يقع في الصف ٣ وفي العمود ١ ∴ $ب_{١٣}$ = ١

جـ العنصر $ب_{١١}$ يقع في الصف ١ وفي العمود ١ ∴ $ب_{١١}$ = ١٢

حاول أن تحل

٣ في المثال (٣)، أوجد $ب_{٢٣}$ من المصفوفة ب.

المصفوفات: المربعة، الأفقية، العمودية

Horizontal and Vertical Matrices Square,

- **المصفوفة المربعة:** هي مصفوفة فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة.

وفي ما عدا ذلك، تسمى المصفوفة: مصفوفة مستطيلة Rectangular Matrix.

- **المصفوفة الأفقية:** هي مصفوفة مكونة من صف واحد Horizontal Matrix.
- **المصفوفة العمودية:** هي مصفوفة مكونة من عمود واحد Vertical Matrix.
- **فكر وناقش:** هل يمكن لمصفوفة أن تكون عمودية وأفقية معًا؟

٥٧

---

(٨) اعرض البيانات في مصفوفة بصفوف تمثّل السنوات، وأعمدة تمثّل نوع التليفزيون.

أوجد $أ_{١٤}$، ووضّح ماذا يمثّل.

(٩) أوجد قيم كل من س، ص.

$$\begin{bmatrix} -١٠\text{ص} + ٥\text{س} & ٤\text{س} - ٦ \\ -١٠\text{ص} + ٧,٥\text{س} & ٤\text{س} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٦ & ٨ \end{bmatrix}$$

في التمرينين (١٠–١١)، أوجد قيم المتغيرات بحيث تكون المصفوفتان متساويتين.

(١٠)
$$\begin{bmatrix} ٢\text{ص} - ٢ & ٤ \\ ٤\text{ك} + ١٥ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ص} - ٥ & ٢\text{س} + ٤ \\ ٢\text{ك} - ٥ & \text{ل} + ٦ \end{bmatrix}$$

(١١)
$$\begin{bmatrix} ٠ & ٢\text{ك} - ١ & ١١ \\ ٣ & ٢ & -٨ \\ ١ & ٣\text{م} - ٢ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤\text{ل} & -٣ & ٤\text{ص} + ٢ \\ ٣ & ٢ & -٤\text{س} \\ ١ & -١٤ & ٢\text{ن} - ١ \end{bmatrix}$$

٣٣

٩ إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

١ $\frac{\text{١٥١,١} - \text{١٤٦,٠}}{\text{١٤٦,٠}}$ = ٠,٠٣٤٩ أي ٣,٥٪.

٢ المواد الغذائية: ٨,١٪؛ الحلويات: ٣,٦٪؛

الملابس: ٣,٢٣٪ خدمات المسكن: ٢٪؛

سلع وخدمات منزلية: ١,٨٪.

أكبر نسبة زيادة كانت في المواد الغذائية، وأصغر نسبة زيادة كانت في السلع والخدمات المنزلية.

مثال (٤)

صنّف كلًّا من المصفوفات التالية:

أ = $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0{,}2 \end{bmatrix}$

جـ = $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$ ، د = $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1{,}4 \\ 12 & 8 & 5 \end{bmatrix}$

معلومة رياضية: المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار تسمى مصفوفة صفرية Zero Matrix ويرمز إليها بالرمز $\text{٠}_{م \times ن}$

الحل:

أ : مصفوفة ٣ × ٣ ∴ أ مصفوفة مربعة.

ب : مصفوفة ٣ × ١ ∴ ب مصفوفة عمودية.

جـ : مصفوفة ١ × ٣ ∴ جـ مصفوفة أفقية.

د : مصفوفة ٢ × ٣ ∴ د مصفوفة مستطيلة.

حاول أن تحل

٤ صنّف المصفوفات في المثال (١).

المصفوفات المتساوية: Equal Matrices

تكون **مصفوفتان متساويتين** إذا كانت لهما الرتبة (الأبعاد) نفسها، وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية والعكس صحيح.

المصفوفة التي عدد صفوفها (جـ)، وعدد أعمدتها (د) هي من الرتبة جـ × د.

معلومة رياضية: كل عنصرين لهما الموقع نفسه في المصفوفتين اللتين لهما الرتبة نفسها يسميان عنصرين متناظرين.

٥٨

«حاول أن تحل»

١ أ ٢ × ٣ ب ١ × ٣ جـ ٣ × ٢

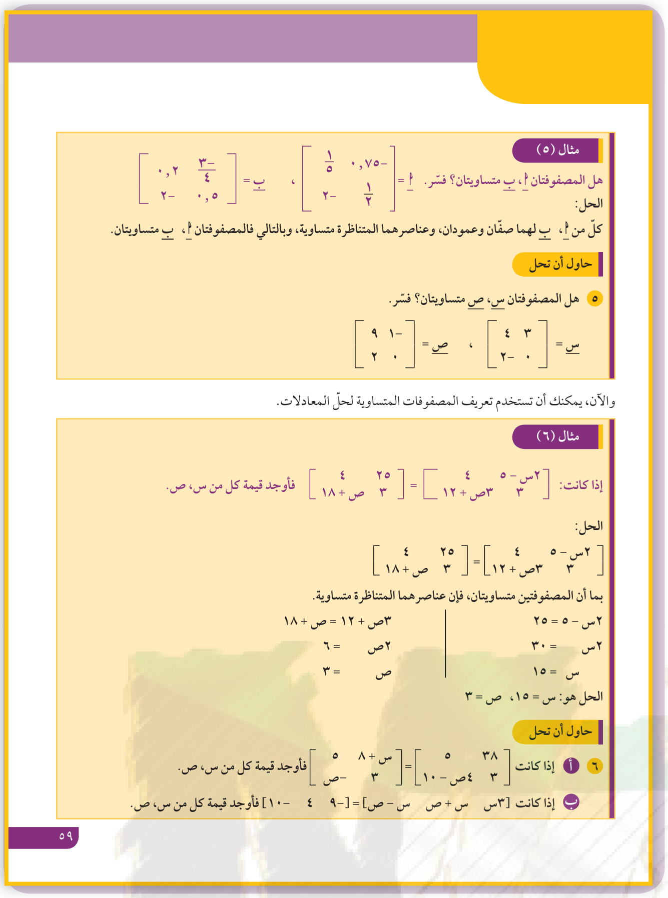
٢ (أ) بإضافة صفّ واحد لكل دولة مضافة بمعرفة الإنتاج والاستهلاك.

(ب)

	الكويت	الإمارات	البحرين
الإنتاج	٤٥٠٠٠	٧٠٠٠٠	١٠٠٠٠
الاستهلاك	٤٠٠٠٠	٦٥٠٠٠	١٠٠٠٠

(جـ) المصفوفة التي رتبتها جـ × د تتضمن جـ صفًّا، د عمودًا.

أما المصفوفة التي رتبتها د × جـ فتتضمن د صفًّا، جـ عمودًا.



مثال (٥)

هل المصفوفتان أ، ب متساويتان؟ فسّر. أ = $\begin{bmatrix} \frac{١}{٥} & -٠,٧٥ \\ -٢ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٠,٢ & -\frac{٣}{٤} \\ -٢ & ٠,٥ \end{bmatrix}$

الحل:

كلّ من أ، ب لهما صفّان وعمودان، وعناصرهما المتناظرة متساوية، وبالتالي فالمصفوفتان أ، ب متساويتان.

حاول أن تحل

٥ هل المصفوفتان س، ص متساويتان؟ فسّر.

س = $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ -٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ٩ & -١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

والآن، يمكنك أن تستخدم تعريف المصفوفات المتساوية لحلّ المعادلات.

مثال (٦)

إذا كانت: $\begin{bmatrix} ٤ & ٢س - ٥ \\ ٣ص + ١٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢٥ \\ ص + ١٨ & ٣ \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س، ص.

الحل:

$\begin{bmatrix} ٤ & ٢س - ٥ \\ ٣ص + ١٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢٥ \\ ص + ١٨ & ٣ \end{bmatrix}$

بما أن المصفوفتين متساويتان، فإن عناصرهما المتناظرة متساوية.

٢س − ٥ = ٢٥ | ٣ص + ١٢ = ص + ١٨
٢س = ٣٠ | ٢ص = ٦
س = ١٥ | ص = ٣

الحل هو: س = ١٥، ص = ٣

حاول أن تحل

٦ (أ) إذا كانت $\begin{bmatrix} ٥ & ٣٨ \\ ٤ص - ١٠ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & س + ٨ \\ -ص & ٣ \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س، ص.

(ب) إذا كانت [٣س س + ص س − ص] = [−٩ ٤ −١٠] فأوجد قيمة كل من س، ص.

٥٩

٣ $ب_{٢٣}$ = ٠ (صفر)

٤ أ: مصفوفة مربعة، ب: مصفوفة أفقية،
جـ: مصفوفة عمودية.

٥ كلّا. لأنّ العناصر المتناظرة ليست متساوية.

٦ (أ) ٣٨ = س + ٨ ∴ س = ٣٠

٤ص − ١٠ = −ص ∴ ص = ٢

(ب) ٣س = −٩ ∴ س = −٣

س + ص = ٤ ∴ ص = ٧

للتحقق: س − ص = −٣ − ٧ = −١٠

٧-٢: جمع وطرح المصفوفات

١ الأهداف

- يجمع المصفوفات ويطرحها.
- يحل معادلات مصفوفية.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

عناصر متناظرة - خاصية الإغلاق - خاصية الإبدال - خاصية التجميع - المصفوفة الصفرية - المعكوس الجمعي.

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة - حاسوب - جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اكتب على السبورة:

(٤س + ٣ص + ٦ع) + (٢س + ٤ص + ٣ع)

واطلب إلى أحد المتطوعين من الطلاب أن يجد الناتج، ثم اطلب إلى آخر إيجاد الناتج لما يلي:

(٤س + ٣ص + ٦ع) - (٢س + ٤ص + ٣ع)

ذكّر الطلّاب أنه عند جمع تعبيرين أو عند طرحهما يجب جمع الحدود المتشابهة أو طرح الحدود المتشابهة.

اكتب على السبورة مصفوفتين مثل:

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٦ & -٣ \\ ٤ & ٣ & ٢ \end{bmatrix} ، \quad \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٤ & -١ & ٢ \\ -٤ & ٤ & -٣ \end{bmatrix}$$

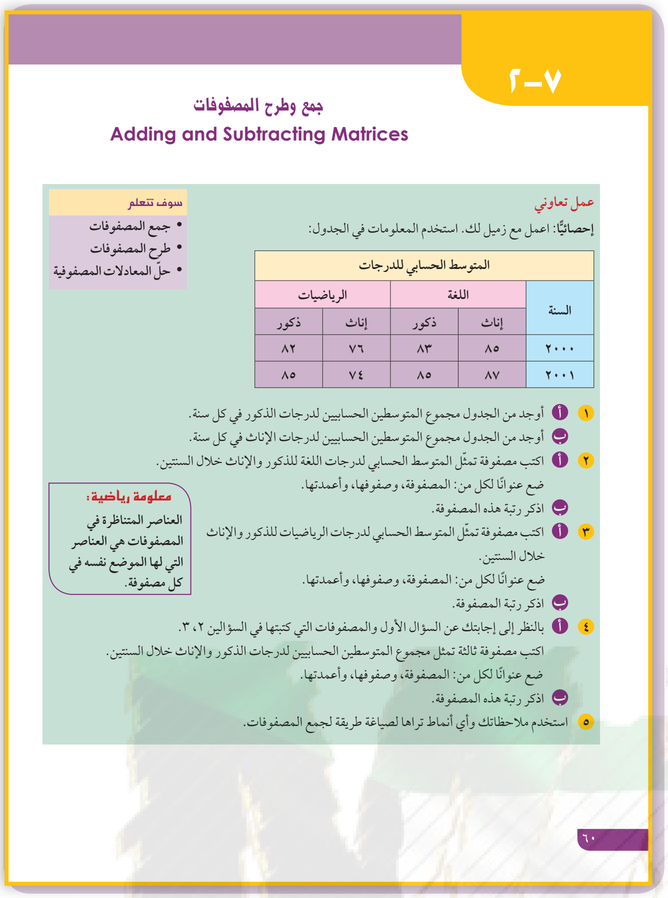
وناقش مع الطلّاب كيفية إيجاد:

$\underline{أ}$ + $\underline{ب}$ ثم $\underline{أ}$ - $\underline{ب}$.

٥ التدريس

ذكر الطلّاب بتعريف المتوسط الحسابي للبيانات قبل البدء بالإجابة عن الأسئلة الموجودة في فقرة «عمل تعاوني».

ساعد الطلاب على فهم الأسئلة الموجودة في فقرة «عمل تعاوني»، تجول بينهم لتتأكد من إجاباتهم. اسألهم إذا كان بإمكانهم الربط بين الإجابات التي حصلوا عليها في السؤالين ١ (أ) وَ ١ (ب) والأسئلة ٢ و ٣.


٧-٢

جمع وطرح المصفوفات
Adding and Subtracting Matrices

عمل تعاوني

إحصائيًّا: اعمل مع زميل لك. استخدم المعلومات في الجدول:

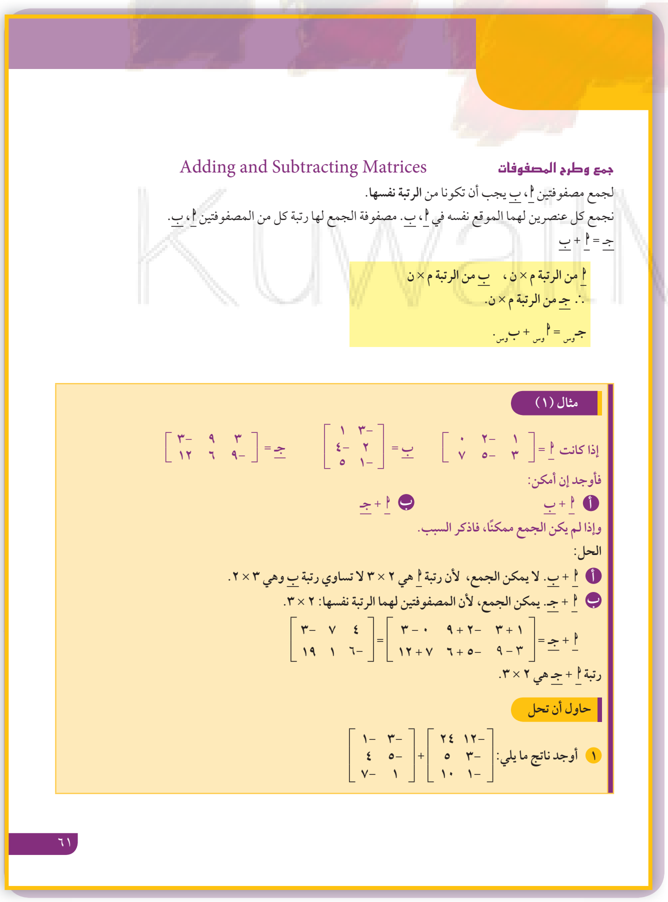
المتوسط الحسابي للدرجات				
السنة	اللغة		الرياضيات	
	إناث	ذكور	إناث	ذكور
٢٠٠٠	٨٥	٨٣	٧٦	٨٢
٢٠٠١	٨٧	٨٥	٧٤	٨٥

١ أ أوجد من الجدول مجموع المتوسطين الحسابيين لدرجات الذكور في كل سنة.
ب أوجد من الجدول مجموع المتوسطين الحسابيين لدرجات الإناث في كل سنة.
٢ أ اكتب مصفوفة تمثّل المتوسط الحسابي لدرجات اللغة للذكور والإناث خلال السنتين.
ضع عنوانًا لكل من: المصفوفة، وصفوفها، وأعمدتها.
ب اذكر رتبة هذه المصفوفة.
٣ أ اكتب مصفوفة تمثّل المتوسط الحسابي لدرجات الرياضيات للذكور والإناث خلال السنتين.
ضع عنوانًا لكل من: المصفوفة، وصفوفها، وأعمدتها.
ب اذكر رتبة المصفوفة.
٤ أ بالنظر إلى إجابتك عن السؤال الأول والمصفوفات التي كتبتها في السؤالين ٢، ٣.
اكتب مصفوفة ثالثة تمثل مجموع المتوسطين الحسابيين لدرجات الذكور والإناث خلال السنتين.
ضع عنوانًا لكل من: المصفوفة، وصفوفها، وأعمدتها.
ب اذكر رتبة هذه المصفوفة.
٥ استخدم ملاحظاتك وأي أنماط تراها لصياغة طريقة لجمع المصفوفات.

سوف تتعلم
- جمع المصفوفات
- طرح المصفوفات
- حلّ المعادلات المصفوفية

معلومة رياضية:
العناصر المتناظرة في المصفوفات هي العناصر التي لها الموضع نفسه في كل مصفوفة.

٦٠


جمع وطرح المصفوفات Adding and Subtracting Matrices

لجمع مصفوفتين $\underline{أ}$، $\underline{ب}$ يجب أن تكونا من **الرتبة نفسها**.

نجمع كل عنصرين لهما الموقع نفسه في $\underline{أ}$، $\underline{ب}$. مصفوفة الجمع لها رتبة كل من المصفوفتين $\underline{أ}$، $\underline{ب}$.

$\underline{جـ} = \underline{أ} + \underline{ب}$

$\underline{أ}$ من الرتبة م × ن ، $\underline{ب}$ من الرتبة م × ن
∴ $\underline{جـ}$ من الرتبة م × ن.
$جـ_{وس} = أ_{وس} + ب_{وس}$.

مثال (١)

إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & -٢ & ٠ \\ ٣ & -٥ & ٧ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٢ & -٤ \\ -١ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٩ & -٣ \\ -٩ & ٦ & ١٢ \end{bmatrix}$

فأوجد إن أمكن:

أ $\underline{أ} + \underline{ب}$ ب $\underline{أ} + \underline{جـ}$

وإذا لم يكن الجمع ممكنًا، فاذكر السبب.

الحل:

أ $\underline{أ} + \underline{ب}$. لا يمكن الجمع، لأن رتبة $\underline{أ}$ هي ٢ × ٣ لا تساوي رتبة $\underline{ب}$ وهي ٣ × ٢.

ب $\underline{أ} + \underline{جـ}$. يمكن الجمع، لأن المصفوفتين لهما الرتبة نفسها: ٢ × ٣.

$$\underline{أ} + \underline{جـ} = \begin{bmatrix} ١ + ٣ & -٢ + ٩ & ٠ - ٣ \\ ٣ - ٩ & -٥ + ٦ & ٧ + ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٧ & -٣ \\ -٦ & ١ & ١٩ \end{bmatrix}$$

رتبة $\underline{أ} + \underline{جـ}$ هي ٢ × ٣.

حاول أن تحل

١ أوجد ناتج ما يلي: $\begin{bmatrix} -١٢ & ٢٤ \\ -٣ & ٥ \\ -١ & ١٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & -١ \\ -٥ & ٤ \\ ١ & -٧ \end{bmatrix}$

٦١

اطرح عليهم أسئلة مشابهة للسؤال التالي: هل المتوسط الحسابي للإناث في سنة ٢٠٠٠ (لغة ورياضيات) هو نفسه العنصر الأول من الصف الأول من العمود الأول في المصفوفة التي حصلت عليها في السؤال ٤ ؟

أكّد للطلاب أنه عند جمع المصفوفات أو طرحها يجب دائمًا استخدام العناصر المتناظرة وأن تكون المصفوفات من الرتبة نفسها.

في المثال (٢)، اشرح للطلاب أن هناك ثلاثة لاعبين وخمس لعبات رياضية، لذلك يوجد ثلاث مجموعات من النتائج حيث لكل لاعب نتيجة وبذلك يمكن معرفة اللاعب الفائز في الألعاب الخمس.

٦ الربط

في المثال (٢)، يستخدم المدربون الرياضيون المصفوفات لعرض النتائج مما يسهل عليهم العمل على الرياضيين لجهة تحسين آدائهم بغية تحقيق مراكز متقدمة في المباريات.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في جمع أو طرح المصفوفات. شدد على أن يجمع الطلاب أو يطرحوا فقط العناصر المتناظرة في المصفوفات.

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل»، تأكد من إجاباتهم وأرشدهم عند الضرورة.

مثال (٢)

تطبيقات حياتية

الرياضة: في رياضة الخماسيّ الحديث، والتي تجرى منافسات فيها على مدار يوم واحد، يكون على كلّ متسابق أو لاعب أن يشارك في الألعاب الخمس: الرماية، المبارزة بالسيف، السباحة، الفروسيّة، اختراق الضاحية.

كون مصفوفة لكل لعبة من الجدول التالي ثم أوجد مجموع النقاط التي حصل عليها كلّ لاعب في الألعاب الخمس أثناء منافساتهم في إحدى البطولات.

الرياضة / اللاعب	رماية	مبارزة بالسيف	سباحة	فروسية	اختراق الضاحية
الأوّل	١١٥٦	٨١٦	١١٨٨	٨٨٩	١١٦٨
الثاني	١٠٣٦	٨١٦	١٢٨٠	٨٢٦	١٢١٠
الثالث	١٠٢٤	٦٧٨	١٢٩٦	١٠٧٠	١٢٧٠

الحل:

اكتب خمس مصفوفات ٣ × ١، ثم اجمع المصفوفات:

الرماية $\underline{أ} = \begin{bmatrix}1156\\1036\\1024\end{bmatrix}$ ، المبارزة $\underline{ب} = \begin{bmatrix}816\\816\\678\end{bmatrix}$ ، السباحة $\underline{جـ} = \begin{bmatrix}1188\\1280\\1296\end{bmatrix}$ ، الفروسية $\underline{د} = \begin{bmatrix}889\\826\\1070\end{bmatrix}$ ، اختراق الضاحية $\underline{هـ} = \begin{bmatrix}1168\\1210\\1270\end{bmatrix}$

$$\underline{أ}+\underline{ب}+\underline{جـ}+\underline{د}+\underline{هـ} = \begin{bmatrix}1156\\1036\\1024\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}816\\816\\678\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1188\\1280\\1296\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}889\\826\\1070\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1168\\1210\\1270\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1156+816+1188+889+1168\\1036+816+1280+826+1210\\1024+678+1296+1070+1270\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5217\\5168\\5338\end{bmatrix}$$

وبالتالي فاللاعب الفائز في هذه الألعاب هو اللاعب الثالث.

٦٢

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ ٢-٧

جمع وطرح المصفوفات

Adding And Subtracting Matrices

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمرينين (١–٢)، أوجد ناتج كلّ مما يلي:

(١) $\begin{bmatrix}2&1&2\\1&2&1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2&3&2\\3&2&3\end{bmatrix}$

(٢) $\begin{bmatrix}6&-3\\-7&2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-6&3\\7&-2\end{bmatrix}$

في التمرينين (٣–٤)، استخدم الحساب الذهني أو الورقة والقلم أو الآلة الحاسبة لإيجاد الناتج:

(٣) $\begin{bmatrix}6&-9&0\\-8&5&7\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-2&-4&1\\3&11&10\end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix}1&3\\2&4\\6&7\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&2\\-3&6\\-5&7\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}7&5\\3&-2\\3&4\end{bmatrix}$

في التمارين (٥–٩)، اذكر ما إذا كان الجمع أو الطرح ممكنًا أو غير ممكن مع تفسير إجابتك:

$\underline{أ} = \begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&4&5\\2&\frac{3}{5}&8&9\end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix}1&-2\\0{,}33&4\\-7&0{,}15\end{bmatrix}$

$\underline{جـ} = \begin{bmatrix}3&44\\1&0\\14&23{,}3\end{bmatrix}$ ، $\underline{د} = \begin{bmatrix}-2&-4&\frac{7}{8}&\frac{11}{2}\\3&2&-1&-\frac{10}{11}\end{bmatrix}$

(٥) $\underline{أ} + \underline{د}$

٣٤

اختبار سريع

أوجد ناتج كل مما يلي:

① $\begin{bmatrix} ٨ & ٢ \\ -١٢ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٦ & -٩ \\ -٥ & ٦ \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} ١٤ & -٧ \\ -١٧ & ٦ \end{bmatrix}$

② $\begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ ٨ & ٤ \\ ٤ & -٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٢ & -٣ \\ ٥ & ٩ \\ -٦ & ٤ \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٣ & -٥ \\ ١٠ & -٩ \end{bmatrix}$

③ $\underline{س} - \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ٢ \\ ٦ & ٠ \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} ١٠ & ٦ \\ ١١ & ١ \end{bmatrix}$

٩ إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

① (أ) ١٦٥؛ ١٧٠

(ب) ١٦١؛ ١٦١

② (أ)

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{ذكور} & \text{إناث} \end{array} \\ \begin{array}{c} ٢٠٠٠ \\ ٢٠٠١ \end{array} & \begin{bmatrix} ٨٣ & ٨٥ \\ ٨٥ & ٨٧ \end{bmatrix} \end{array}$$

متوسط درجات اللغة

(ب) رتبة المصفوفة: ٢ × ٢

③ (أ)

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{ذكور} & \text{إناث} \end{array} \\ \begin{array}{c} ٢٠٠٠ \\ ٢٠٠١ \end{array} & \begin{bmatrix} ٨٢ & ٧٦ \\ ٨٥ & ٧٤ \end{bmatrix} \end{array}$$

متوسط درجات الرياضيات

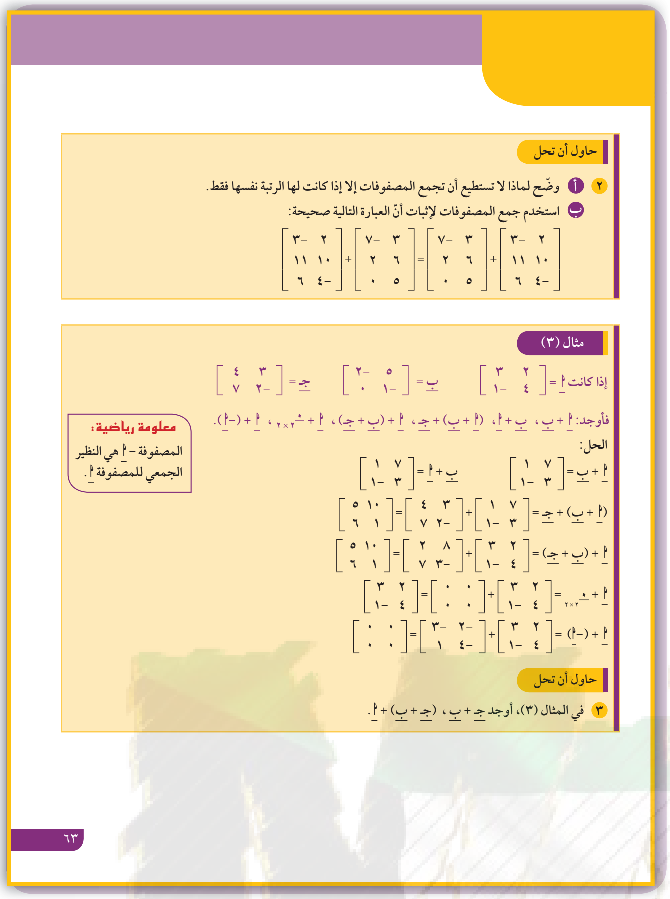
(ب) رتبة المصفوفة: ٢ × ٢

④ (أ)

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{ذكور} & \text{إناث} \end{array} \\ \begin{array}{c} ٢٠٠٠ \\ ٢٠٠١ \end{array} & \begin{bmatrix} ١٦٥ & ١٦١ \\ ١٧٠ & ١٦١ \end{bmatrix} \end{array}$$

مجموع المتوسطين الحسابيين لدرجات الذكور والإناث.

(ب) رتبة المصفوفة: ٢ × ٢



حاول أن تحل

٢ (أ) وضّح لماذا لا تستطيع أن تجمع المصفوفات إلا إذا كانت لها الرتبة نفسها فقط.

(ب) استخدم جمع المصفوفات لإثبات أنّ العبارة التالية صحيحة:

$\begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ١١ & ١٠ \\ ٦ & -٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٧ & ٣ \\ ٢ & ٦ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧ & ٣ \\ ٢ & ٦ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ١١ & ١٠ \\ ٦ & -٤ \end{bmatrix}$

مثال (٣)

إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} -٢ & ٥ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$ ، $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٧ & -٢ \end{bmatrix}$

فأوجد: $\underline{أ} + \underline{ب}$ ، $\underline{ب} + \underline{أ}$ ، $(\underline{أ} + \underline{ب}) + \underline{جـ}$ ، $\underline{أ} + (\underline{ب} + \underline{جـ})$ ، $\underline{أ} + \underline{٠}_{٢\times٢}$ ، $\underline{أ} + (-\underline{أ})$.

الحل:

$\underline{أ} + \underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٧ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$ $\quad \underline{ب} + \underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٧ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$

$(\underline{أ} + \underline{ب}) + \underline{جـ} = \begin{bmatrix} ١ & ٧ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٧ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ١٠ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix}$

$\underline{أ} + (\underline{ب} + \underline{جـ}) = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ٨ \\ ٧ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ١٠ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix}$

$\underline{أ} + \underline{٠}_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$

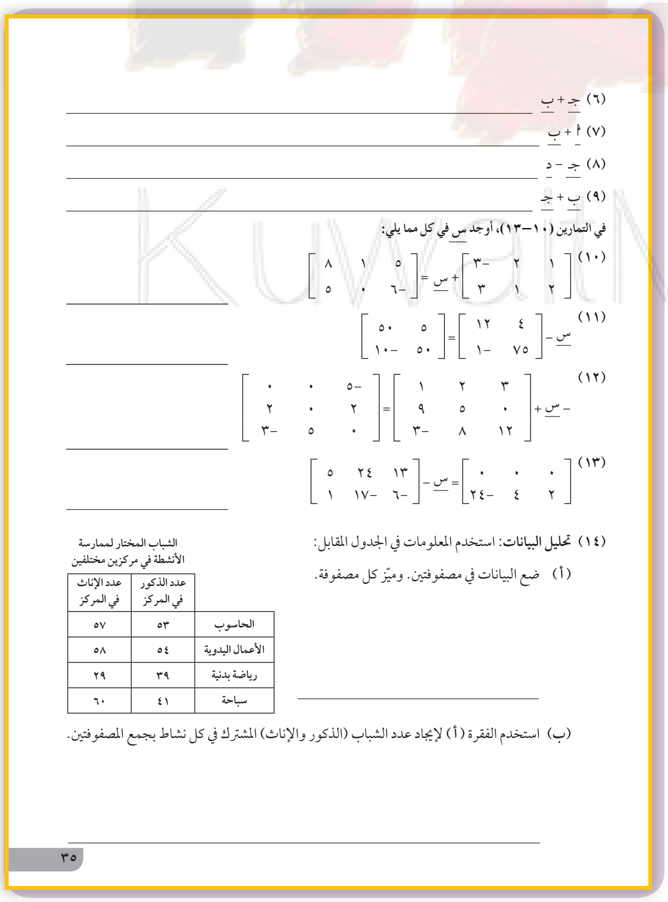
$\underline{أ} + (-\underline{أ}) = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & -٢ \\ ١ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

معلومة رياضية: المصفوفة $-\underline{أ}$ هي النظير الجمعي للمصفوفة $\underline{أ}$.

حاول أن تحل

٣ في المثال (٣)، أوجد $\underline{جـ} + \underline{ب}$ ، $(\underline{جـ} + \underline{ب}) + \underline{أ}$.

٦٣



(٦) $\underline{جـ} + \underline{ب}$

(٧) $\underline{أ} + \underline{ب}$

(٨) $\underline{جـ} - \underline{د}$

(٩) $\underline{ب} + \underline{جـ}$

في التمارين (١٠–١٣)، أوجد $\underline{س}$ في كل مما يلي:

(١٠) $\begin{bmatrix} -٣ & ٢ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{bmatrix} + \underline{س} = \begin{bmatrix} ٨ & ١ & ٥ \\ ٥ & ٠ & -٦ \end{bmatrix}$

(١١) $\underline{س} - \begin{bmatrix} ١٢ & ٤ \\ -١ & ٧٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥٠ & ٥ \\ -١٠ & ٥٠ \end{bmatrix}$

(١٢) $-\underline{س} + \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٩ & ٥ & ٠ \\ -٣ & ٨ & ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & -٥ \\ ٢ & ٠ & ٢ \\ -٣ & ٥ & ٠ \end{bmatrix}$

(١٣) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ -٢٤ & ٤ & ٢ \end{bmatrix} = \underline{س} - \begin{bmatrix} ٥ & ٢٤ & ١٣ \\ ١ & -١٧ & -٦ \end{bmatrix}$

(١٤) **تحليل البيانات**: استخدم المعلومات في الجدول المقابل:

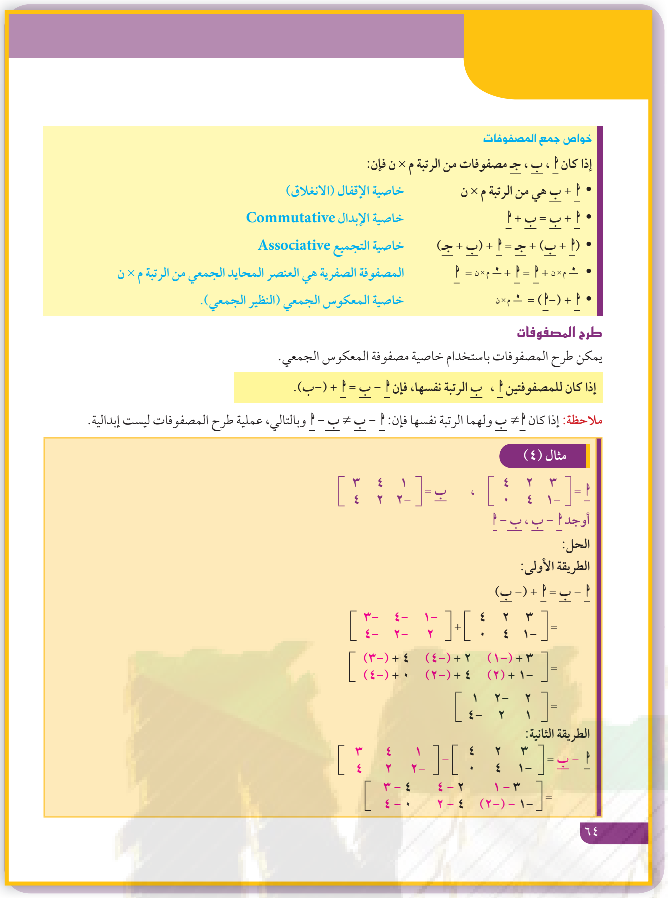
(أ) ضع البيانات في مصفوفتين. وميّز كل مصفوفة.

الشباب المختار لممارسة الأنشطة في مركزين مختلفين

	عدد الذكور في المركز	عدد الإناث في المركز
الحاسوب	٥٣	٥٧
الأعمال اليدوية	٥٤	٥٨
رياضة بدنية	٣٩	٢٩
سباحة	٤١	٦٠

(ب) استخدم الفقرة (أ) لإيجاد عدد الشباب (الذكور والإناث) المشترك في كل نشاط بجمع المصفوفتين.

٣٥


خواص جمع المصفوفات

إذا كان أ ، ب ، جـ مصفوفات من الرتبة م × ن فإن:

- أ + ب هي من الرتبة م × ن — خاصية الإقفال (الانغلاق)
- أ + ب = ب + أ — خاصية الإبدال Commutative
- (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) — خاصية التجميع Associative
- $\text{٠}_{م×ن}$ + أ = أ + $\text{٠}_{م×ن}$ = أ — المصفوفة الصفرية هي العنصر المحايد الجمعي من الرتبة م × ن
- أ + (−أ) = $\text{٠}_{م×ن}$ — خاصية المعكوس الجمعي (النظير الجمعي).

طرح المصفوفات

يمكن طرح المصفوفات باستخدام خاصية مصفوفة المعكوس الجمعي.

إذا كان للمصفوفتين أ ، ب الرتبة نفسها، فإن أ − ب = أ + (−ب).

ملاحظة: إذا كان أ ≠ ب ولهما الرتبة نفسها فإن: أ − ب ≠ ب − أ وبالتالي، عملية طرح المصفوفات ليست إبدالية.

مثال (٤)

$$أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٤ \\ -١ & ٤ & ٠ \end{bmatrix} ، \quad ب = \begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٣ \\ -٢ & ٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

أوجد أ − ب ، ب − أ

الحل:

الطريقة الأولى:

أ − ب = أ + (− ب)

$$= \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٤ \\ -١ & ٤ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & -٤ & -٣ \\ ٢ & -٢ & -٤ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٣ + (-١) & ٢ + (-٤) & ٤ + (-٣) \\ -١ + (٢) & ٤ + (-٢) & ٠ + (-٤) \end{bmatrix}$$

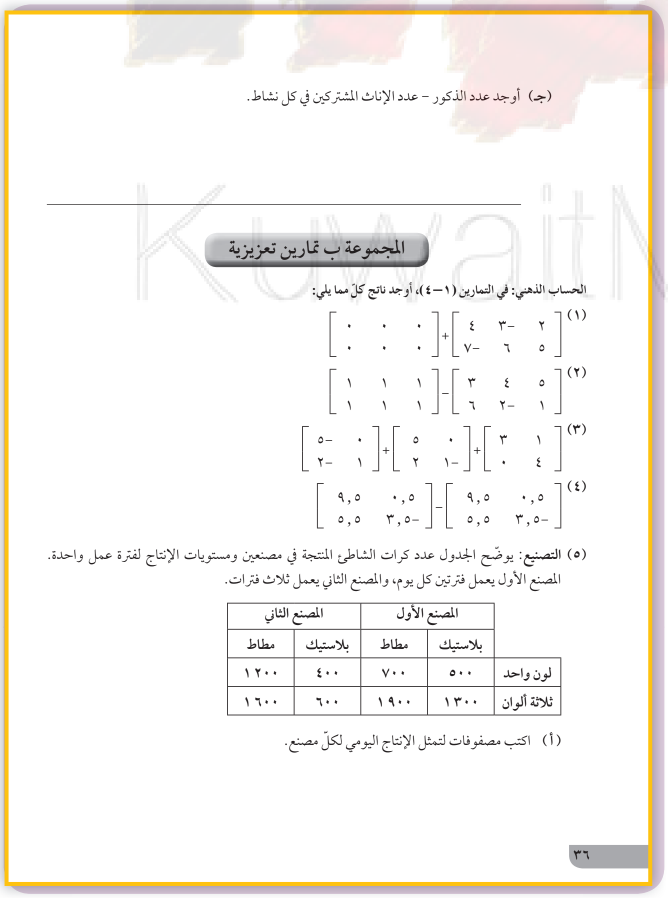
$$= \begin{bmatrix} ٢ & -٢ & ١ \\ ١ & ٢ & -٤ \end{bmatrix}$$

الطريقة الثانية:

$$أ - ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٤ \\ -١ & ٤ & ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٣ \\ -٢ & ٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٣ - ١ & ٢ - ٤ & ٤ - ٣ \\ -١ - (-٢) & ٤ - ٢ & ٠ - ٤ \end{bmatrix}$$

٦٤


(جـ) أوجد عدد الذكور − عدد الإناث المشتركين في كل نشاط.

المجموعة ب تمارين تعزيزية

الحساب الذهني: في التمارين (١−٤)، أوجد ناتج كلّ مما يلي:

(١) $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ & -٧ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

(٢) $\begin{bmatrix} ٥ & ٤ & ٣ \\ ١ & -٢ & ٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{bmatrix}$

(٣) $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٥ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & -٥ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} ٠,٥ & ٩,٥ \\ -٣,٥ & ٥,٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠,٥ & ٩,٥ \\ -٣,٥ & ٥,٥ \end{bmatrix}$

(٥) **التصنيع**: يوضّح الجدول عدد كرات الشاطئ المنتجة في مصنعين ومستويات الإنتاج لفترة عمل واحدة. المصنع الأول يعمل فترتين كل يوم، والمصنع الثاني يعمل ثلاث فترات.

	المصنع الأول		المصنع الثاني	
	بلاستيك	مطاط	بلاستيك	مطاط
لون واحد	٥٠٠	٧٠٠	٤٠٠	١٢٠٠
ثلاثة ألوان	١٣٠٠	١٩٠٠	٦٠٠	١٦٠٠

(أ) اكتب مصفوفات لتمثل الإنتاج اليومي لكلّ مصنع.

٣٦

٥ لجمع المصفوفات يجب أن يكون لها الرتبة نفسها، ويجب أن نجمع العناصر المتناظرة.

«حاول أن تحل»

١
$$\begin{bmatrix} -١٥ & ٢٣ \\ -٨ & ٩ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$$

٢ (أ) لا يمكن إيجاد ناتج:

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٨ & ٤ & ٢ \\ ٣ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

لأن المصفوفة الأولى من الرتبة ٢ × ٢ والمصفوفة الثانية من الرتبة ٢ × ٣، وبالتالي لا يوجد في المصفوفة الأولى عناصر متناظرة مع العمود الثالث في المصفوفة الثانية.

(ب)
$$\begin{bmatrix} ٥ & -١٠ \\ ١٦ & ١٣ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & -١٠ \\ ١٦ & ١٣ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix}$$

العناصر المتناظرة هي نفسها.

٣ $\underline{\text{جـ}} + \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ٧ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٨ & ٢ \\ -٣ & ٧ \end{bmatrix}$

$(\underline{\text{جـ}} + \underline{\text{ب}}) + \underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٨ & ٢ \\ -٣ & ٧ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ١٠ & ٥ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix}$

٤ (أ) $\begin{bmatrix} ١٠ & -١٢ & ٧ \\ -٨ & -٤ & -٢ \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ -٣ & ١٤ \end{bmatrix}$

٥ $\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٩ & ٧ \\ -٢ & ٩ \end{bmatrix}$

(ب) استخدم النتائج من الفقرة (أ). أوجد ناتج طرح المنتج الكلي في المصنع الثاني من المنتج الكلي في المصنع الأول.

في التمارين (٦–٨)، استخدم الحساب الذهني أو الورقة والقلم لإيجاد ناتج كلّ مما يلي:

(٦) $\begin{bmatrix} -٤ & ٢ \\ ٩ & -٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٨ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$

(٧) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & -٥ \\ ٦ & ١ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & -٢ & ٦ \\ -٥ & ٥ & -٦ \end{bmatrix}$

(٨) $\begin{bmatrix} ٩ & -٧ & ٨ \\ ٦ & -٣ & -٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١٠ & -٥ & ٢ \\ ٤ & ١ & -٩ \end{bmatrix}$

(٩) **السؤال المفتوح:** صف موقفًا يتطلّب جمع أو طرح معلومات مخزّنة على صورة مصفوفات.

في التمارين (١٠–١٢)، اختر الحساب الذهني أو الورقة والقلم أو الآلة الحاسبة لإيجاد ناتج كلّ مما يلي:

(١٠) $\begin{bmatrix} -٢ & ٠ & ٠ \\ ١ & -٤ & ٥ \\ ٧ & ٠ & -١٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٣ & -٤ & ٥ \\ ٧ & ٠ & -٢ \end{bmatrix}$

(١١) $\begin{bmatrix} -٩ & ١ & ٦ \\ -٥ & ٠ & -٩ \\ ٢ & -٢ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٨ & ٠ & ٤ \\ ٥ & -٦ & ٧ \\ -٢ & ٢ & -١ \end{bmatrix}$

(١٢) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ٠ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

٣٧

$= \begin{bmatrix} ٢ & -٢ & ١ \\ ١ & ٢ & -٤ \end{bmatrix}$

$\underline{\text{ب}} - \underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٣ \\ -٢ & ٢ & ٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٤ \\ -١ & ٤ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٣ \\ -٢ & ٢ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & -٢ & -٤ \\ ١ & -٤ & ٠ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ١-٣ & ٤-٢ & ٣-٤ \\ -٢-(-١) & ٢-٤ & ٤-٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & ٢ & -١ \\ -١ & -٢ & ٤ \end{bmatrix}$

حاول أن تحل

٤ أوجد ناتج كل مما يلي:

أ $\begin{bmatrix} ٦ & -٩ & ٧ \\ -٢ & ١ & ٨ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٤ & ٣ & ٠ \\ ٦ & ٥ & ١٠ \end{bmatrix}$

ب $\begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ -١ & ١٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix}$

حل المعادلات المصفوفية Solving Matrix Equations

المعادلة المصفوفية هي معادلة إحدى مصفوفاتها غير معلومة (المتغير).

يمكنك استخدام خواص المساواة لحل المعادلات المصفوفية.

لأي مصفوفات $\underline{\text{أ}}$، $\underline{\text{ب}}$، $\underline{\text{جـ}}$ لها الرتبة نفسها إذا كان: $\underline{\text{أ}} = \underline{\text{ب}}$، فإن: $\underline{\text{أ}} + \underline{\text{جـ}} = \underline{\text{ب}} + \underline{\text{جـ}}$، $\underline{\text{أ}} - \underline{\text{جـ}} = \underline{\text{ب}} - \underline{\text{جـ}}$.

مثال (٥)

حل المعادلة المصفوفية التالية:

$\underline{\text{س}} - \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٨ & ٩ \end{bmatrix}$

الحل:

$\underline{\text{س}} - \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٨ & ٩ \end{bmatrix}$

$\underline{\text{س}} - \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٨ & ٩ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ بإضافة $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ لكل من طرفي المعادلة

وبالتالي: $\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١١ & ١١ \end{bmatrix}$

حاول أن تحل

٥ أوجد $\underline{\text{س}}$ حيث:

$\underline{\text{س}} - \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٧ \\ -٤ & ٤ \end{bmatrix}$

٦٥

في التمارين (١٣–١٦)، اذكر ما إذا كان الجمع أو الطرح ممكنًا أو غير ممكن:

$\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ١ & \frac{١}{٢} & ٤ & ٥ \\ ٢ & \frac{٣}{٥} & ٨ & ٩ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٠{,}٣٣ & ٤ \\ -٧ & ٠{,}١٥ \end{bmatrix}$

$\underline{\text{جـ}} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤٤ \\ ١ & ٠ \\ ١٤ & ٢٣{,}٣ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{د}} = \begin{bmatrix} -٢ & -٤ & \frac{٧}{٨} & \frac{١١}{٢} \\ ٣ & ٢ & -١ & -\frac{١٠}{١١} \end{bmatrix}$

(١٣) $\underline{\text{ب}} - \underline{\text{جـ}}$

(١٤) $\underline{\text{د}} + \underline{\text{أ}}$

(١٥) $\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}} + \underline{\text{جـ}}$

(١٦) $\underline{\text{أ}} + (\underline{\text{جـ}} - \underline{\text{د}})$

في التمارين (١٧–٢٠)، أوجد $\underline{\text{س}}$ في كل مما يلي:

(١٧) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \\ -٣ & ٤ \end{bmatrix} + \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٥ & -٦ \\ ١ & ٠ \\ ٨ & ٥ \end{bmatrix}$

(١٨) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ & -١ \\ ٠ & ٢ & ١ \end{bmatrix} - \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ١١ & ٣ & -١٣ \\ ١٥ & -٩ & ٨ \end{bmatrix}$

(١٩) $\underline{\text{س}} - \begin{bmatrix} ١ & ٧ \\ ٣ & -٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٧ \\ ٣ & -٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

(٢٠) $\underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} ١٢ & ٥ \\ ١٧ & ٢٨ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٤ & ٢٠ \\ -٥ & ٠ \\ ٣ & -١٩ \end{bmatrix}$

٣٨

٧-٣: ضرب المصفوفات

١ الأهداف

- يضرب المصفوفة في عدد حقيقي (قياسي).
- يضرب المصفوفات.
- يوجد مربع المصفوفة.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

العدد القياسي – مصفوفة ناتج الضرب.

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اطلب إلى الطلاب إيجاد نواتج ما يلي:

- $٢س^{٢} \times ٤ص^{٤}$.
- $٤س^{٢} \times ٣س^{٣}$.
- $٧س(٣س + ٤ش)$.
- $٣س^{٤} \times ٤ص^{٣} \times ٦ع^{٢}$.

٥ التدريس

وضّح للطلاب أن الخطوات المطلوبة في فقرة «عمل تعاوني» هي ضرورية لفهم عملية ضرب المصفوفات، وأن كتابة المصفوفات في السؤالين ٣ (أ) وَ ٣ (ب) تساعد على الربط بين ضرب المصفوفات والنتائج التي توصلوا إليها في السؤالين ١ وَ ٢.

أكد لهم أنه عند ضرب عدد قياسي في مصفوفة، يجب ضرب العدد في كل عناصر المصفوفة وليس فقط في الجانب الأيمن من المصفوفة.

مثال ذلك: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \end{bmatrix}$ ك $\neq$ ٠ فإن:

$$ك \times \underline{أ} = \begin{bmatrix} ك\,أ_{١١} & ك\,أ_{٢١} & ك\,أ_{٣١} \\ ك\,أ_{١٢} & ك\,أ_{٢٢} & ك\,أ_{٣٢} \end{bmatrix}$$

٧-٣

ضرب المصفوفات
Matrix Multiplication

عمل تعاوني

اعمل مع زميل لك. استخدم البيانات في الجدول:

	مبيعات مطعم		
	وجبة ١	وجبة ٢	وجبة ٣
ثمن وجبة الغداء	٢,٥٠٠ دينار	١,٧٥٠ دينار	٢,٠٠٠ دينار
عدد الوجبات المباعة	٥٠	١٠٠	٧٥

سوف تتعلم
- ضرب مصفوفة في عدد
- الضرب القياسي
- ضرب المصفوفات

١ ما ثمن: وجبات الغداء ١، وجبات الغداء ٢، وجبات الغداء ٣؟

٢ أ ما ثمن الوجبات المباعة؟
ب وضح كيف استخدمت البيانات الموجودة في الجدول لإيجاد الإجابة.

٣ أ اكتب مصفوفة ١ × ٣ لتمثل ثمن كل وجبة مباعة.
ب اكتب مصفوفة ٣ × ١ لتمثل عدد الوجبات المباعة.
جـ **الكتابة:** استخدم الكلمات: (صف، عمود، عنصر) لتصف إجراءات استخدام المصفوفات التي حصلت عليها، لإيجاد المبلغ بالدينار الذي يبيع به المطعم جميع الوجبات.

ضرب مصفوفة في عدد Multiplying a Matrix by a Scalar

يمكنك أن تضرب عدد حقيقي في مصفوفة مثل:

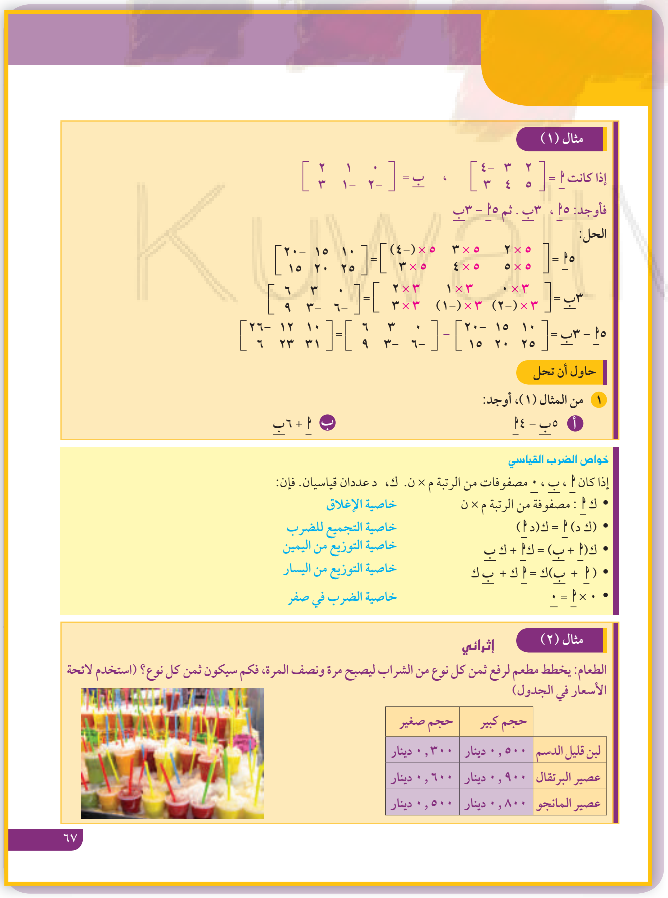
$$٣\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٤ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ١٥ \\ ١٢ & -٩ \end{bmatrix}$$

الضرب القياسي Scalar Multiplication

الضرب القياسي هو عملية ضرب مصفوفة $\underline{أ}$ في عدد حقيقي ك : ك $\neq$ ٠.
الناتج هو المصفوفة ك $\underline{أ}$.
نحصل على المصفوفة ك $\underline{أ}$ بضرب كل عنصر من $\underline{أ}$ في ك.
إذا كان ك = ٠، يكون الناتج مصفوفة صفرية.

معلومة رياضية:
رتبة المصفوفة ك $\underline{أ}$ تساوي رتبة المصفوفة $\underline{أ}$.

٦٦



مثال (١)

إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -٤ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ -٢ & -١ & ٣ \end{bmatrix}$

فأوجد: ٥$\underline{أ}$ ، ٣$\underline{ب}$. ثم ٥$\underline{أ}$ – ٣$\underline{ب}$

الحل:

$$٥\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٥\times٢ & ٥\times٣ & ٥\times(-٤) \\ ٥\times٥ & ٥\times٤ & ٥\times٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ١٥ & -٢٠ \\ ٢٥ & ٢٠ & ١٥ \end{bmatrix}$$

$$٣\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣\times٠ & ٣\times١ & ٣\times٢ \\ ٣\times(-٢) & ٣\times(-١) & ٣\times٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٣ & ٦ \\ -٦ & -٣ & ٩ \end{bmatrix}$$

$$٥\underline{أ} - ٣\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١٠ & ١٥ & -٢٠ \\ ٢٥ & ٢٠ & ١٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ & ٣ & ٦ \\ -٦ & -٣ & ٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ١٢ & -٢٦ \\ ٣١ & ٢٣ & ٦ \end{bmatrix}$$

حاول أن تحل

١ من المثال (١)، أوجد:
أ ٥$\underline{ب}$ – ٤$\underline{أ}$ ب $\underline{أ}$ + ٦$\underline{ب}$

خواص الضرب القياسي

إذا كان $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ ، $\underline{٠}$ مصفوفات من الرتبة م × ن. ك، د عددان قياسيان. فإن:

- ك $\underline{أ}$: مصفوفة من الرتبة م × ن — خاصية الإغلاق
- (ك د) $\underline{أ}$ = ك(د $\underline{أ}$) — خاصية التجميع للضرب
- ك($\underline{أ}$ + $\underline{ب}$) = ك$\underline{أ}$ + ك $\underline{ب}$ — خاصية التوزيع من اليمين
- ($\underline{أ}$ + $\underline{ب}$)ك = $\underline{أ}$ ك + $\underline{ب}$ ك — خاصية التوزيع من اليسار
- ٠ × $\underline{أ}$ = $\underline{٠}$ — خاصية الضرب في صفر

مثال (٢) **إثرائي**

الطعام: يخطط مطعم لرفع ثمن كل نوع من الشراب ليصبح مرة ونصف المرة، فكم سيكون ثمن كل نوع؟ (استخدم لائحة الأسعار في الجدول)

	حجم كبير	حجم صغير
لبن قليل الدسم	٠,٥٠٠ دينار	٠,٣٠٠ دينار
عصير البرتقال	٠,٩٠٠ دينار	٠,٦٠٠ دينار
عصير المانجو	٠,٨٠٠ دينار	٠,٥٠٠ دينار

٦٧

خواص الضرب في عدد قياسي تساعد كثيرًا على حل معادلات تتضمن مصفوفات كما في المثال (٣).

قبل أن يبدأ الطلاب العمل في المثال التمهيدي، اطلب إليهم قراءة عدد الأسئلة التي أجاب عنها ناصر، أحمد وعبدالله في كل مادة ثم التمعن جيدًا بدرجة كل سؤال في كل مادة أيضًا وذلك لإيجاد الربط مع الناتج الذي يجدونه مع أ × ب لاحقًا.

ركز في المثال (٤) على أن هذه المصفوفات مختلفة الرتب.

ركز على أسباب تلوين الصف والعمود اللذين يجري ضربهما.

أخبرهم أن بإمكانهم القيام بذلك عدة مرات كي يتمكنوا من إجراء ضرب المصفوفات دون الوقوع بالخطأ.

أكّد لهم أن الشرط الأساسي للقيام بضرب مصفوفتين لا يمكن تجاهله فهو أساسي في عملية الضرب. ارسم لهم مخططًا بسيطًا كما يلي:

$$\text{أ}_{\text{م}\times\text{ن}} \times \text{ب}_{\text{ن}\times\text{ر}} = \text{جـ}_{\text{م}\times\text{ر}}$$

اشرح لهم أن بالإمكان إيجاد أ × ب وَ ب × أ في حالات كثيرة ولكن عمومًا أ × ب ≠ ب × أ . وأحيانًا كثيرة يمكن إيجاد أ × ب ولكن لا يمكن إيجاد ب × أ . استخدم أمثلة لتأكيد ذلك. أخبرهم أن المصفوفة $\text{أ}_{\text{م}\times\text{م}}$ هي مصفوفة مربعة أي أن عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها.

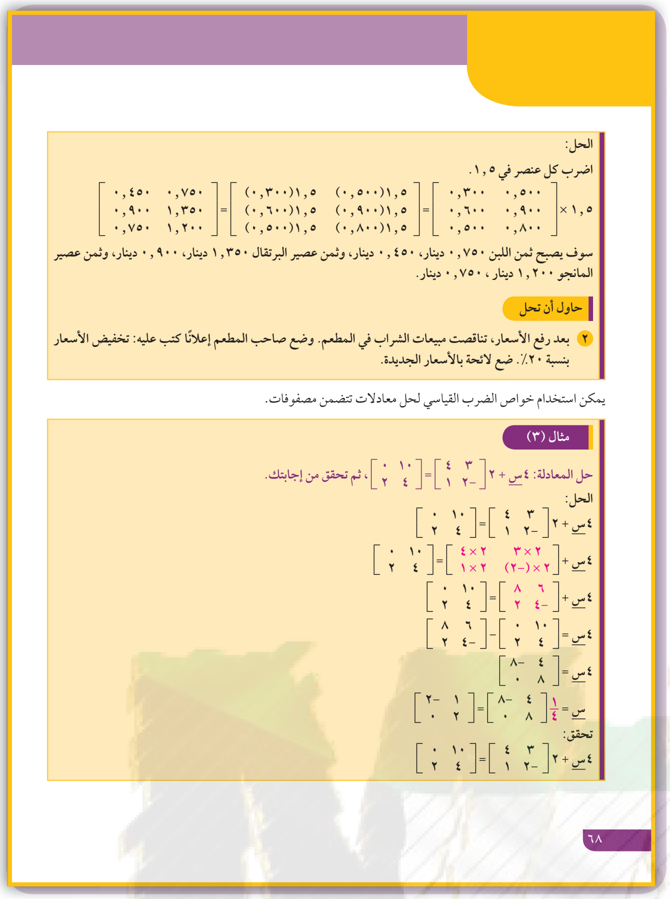
٦ الربط

في المثال (٢)، يسمح عرض الأسعار في مصفوفة بدراسة حركة السوق واتخاذ قرارات عن صحة رفع الأسعار ومدى الإفادة منه.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في عملية ضرب المصفوفات.

في البدء اطلب إليهم القيام بضرب العناصر المتناظرة في كل صف في العناصر المتناظرة في كل عمود، ثم إجراء عملية الجمع وبعد ذلك وضع الناتج في المكان الصحيح.



الحل:

اضرب كل عنصر في ١,٥.

$$1.5 \times \begin{bmatrix} 0.500 & 0.300 \\ 0.900 & 0.600 \\ 0.800 & 0.500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5(0.500) & 1.5(0.300) \\ 1.5(0.900) & 1.5(0.600) \\ 1.5(0.800) & 1.5(0.500) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.750 & 0.450 \\ 1.350 & 0.900 \\ 1.200 & 0.750 \end{bmatrix}$$

سوف يصبح ثمن اللبن ٠,٧٥٠ دينار، ٠,٤٥٠ دينار، وثمن عصير البرتقال ١,٣٥٠ دينار، ٠,٩٠٠ دينار، وثمن عصير المانجو ١,٢٠٠ دينار ، ٠,٧٥٠ دينار.

حاول أن تحل

٢ بعد رفع الأسعار، تناقصت مبيعات الشراب في المطعم. وضع صاحب المطعم إعلانًا كتب عليه: تخفيض الأسعار بنسبة ٢٠٪. ضع لائحة بالأسعار الجديدة.

يمكن استخدام خواص الضرب القياسي لحل معادلات تتضمن مصفوفات.

مثال (٣)

حل المعادلة: $4\text{س} + 2\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$، ثم تحقق من إجابتك.

الحل:

$$4\text{س} + 2\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$4\text{س} + \begin{bmatrix} 2\times3 & 2\times4 \\ 2\times(-2) & 2\times1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$4\text{س} + \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$4\text{س} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

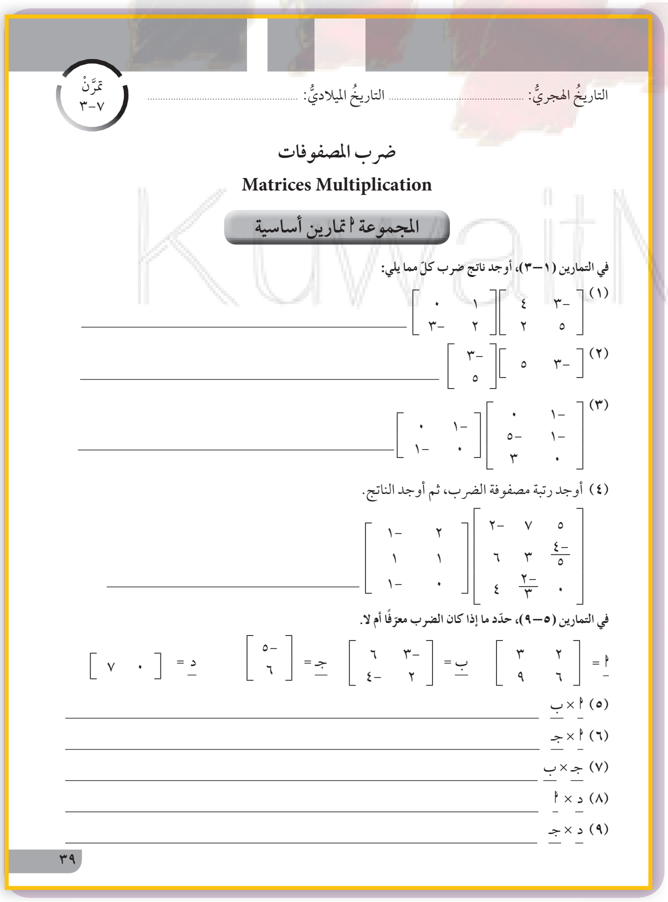
$$4\text{س} = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{س} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

تحقق:

$$4\text{س} + 2\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

٦٨



التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ ٧-٣

ضرب المصفوفات

Matrices Multiplication

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمارين (١–٣)، أوجد ناتج ضرب كلّ مما يلي:

(١) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ ________

(٢) $\begin{bmatrix} -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ ________

(٣) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ________

(٤) أوجد رتبة مصفوفة الضرب، ثم أوجد الناتج.

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & -2 \\ -\frac{4}{5} & 3 & 6 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$ ________

في التمارين (٥–٩)، حدّد ما إذا كان الضرب معرّفًا أم لا.

$\text{أ} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ ، $\text{جـ} = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix}$ ، $\text{د} = \begin{bmatrix} 0 & 7 \end{bmatrix}$

(٥) أ × ب ________

(٦) أ × جـ ________

(٧) جـ × ب ________

(٨) د × أ ________

(٩) د × جـ ________

٣٩


$$4\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}3 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}\overset{?}{=}\begin{bmatrix}10 & 0\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}4 & -8\\ 8 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & 8\\ -4 & 2\end{bmatrix}\overset{?}{=}\begin{bmatrix}10 & 0\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}10 & 0\\ 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 0\\ 4 & 2\end{bmatrix}\ \checkmark$$

حاول أن تحل

٣ حل كل معادلة مما يلي:

(أ) $2\underline{س}=\begin{bmatrix}4 & 12\\ 1 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

(ب) $-3\underline{س}+\begin{bmatrix}7 & 0 & -1\\ 2 & -3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 0 & 8\\ -19 & -18 & 10\end{bmatrix}$

ضرب المصفوفات Matrices Multiplying

أجري اختبار للذكاء في مادتي الرياضيات والعلوم لكل من ناصر، أحمد، عبد الله ثم رتبت البيانات في صورة مصفوفتين أ ، ب حيث:

أ =	الرياضيات	العلوم
ناصر	٣٠	٢٠
أحمد	٤٠	١٥
عبد الله	٢٥	٢٥

والمصفوفة أ تمثل عدد الأسئلة الموضوعية التي أجاب عنها كل من الطلاب الثلاثة في كل مادة على حدة.

ب =	
درجة الرياضيات لكل سؤال	٤
درجة العلوم لكل سؤال	٢

والمصفوفة ب هي درجة السؤال في كل من المادتين.

المطلوب: معرفة مجموع درجات كل طالب منهم في المادتين معًا.

الحل:

مجموع درجات ناصر في مادتي الرياضيات والعلوم = ٣٠ × ٤ + ٢٠ × ٢ = ١٦٠ درجة

مجموع درجات أحمد في مادتي الرياضيات والعلوم = ٤٠ × ٤ + ١٥ × ٢ = ١٩٠ درجة

مجموع درجات عبد الله في مادتي الرياضيات والعلوم = ٢٥ × ٤ + ٢٥ × ٢ = ١٥٠ درجة

والآن إذا كتبنا النواتج النهائية في صورة مصفوفة $\underline{جـ}=\begin{bmatrix}160\\ 190\\ 150\end{bmatrix}$

٦٩

٨ التقييم

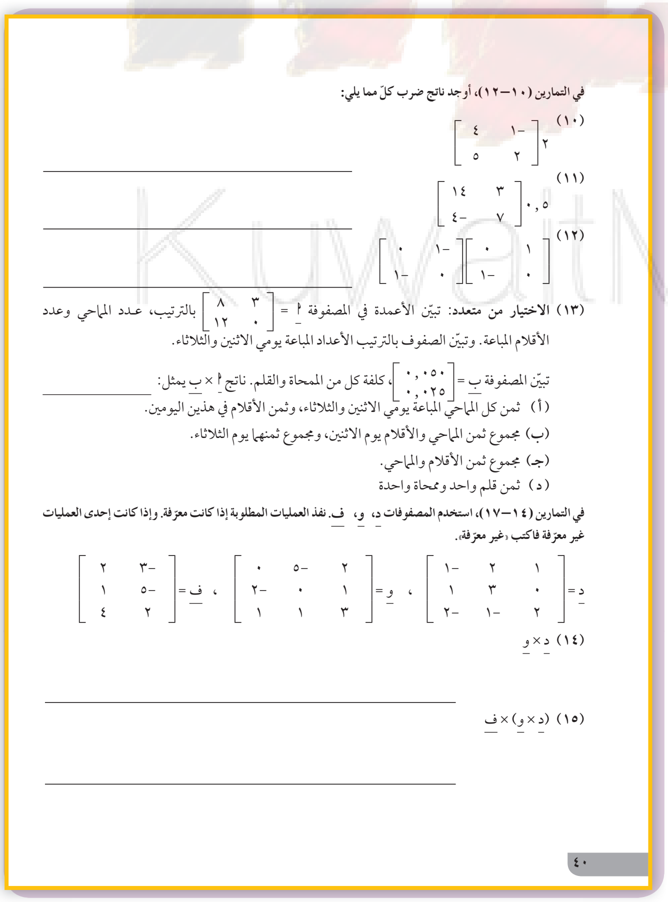
تابع الطلاب بدقة وهم يكتبون الإجابات لفقرات «حاول أن تحل». ناقش معهم كل إجابة لتتأكد من أنهم قد فهموا جيدًا الضرب في عدد قياسي ومتى يستخدم، وأيضًا ضرب المصفوفات ومتى يستخدم.

اختبار سريع

أوجد الناتج: $8\times\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & -5 & 4\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}16 & 24 & -8\\ 0 & -40 & 32\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & -5 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\ 9\\ 4\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}27\\ -29\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}2\\ 9\\ 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-3 & 2 & -1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-6 & 4 & -2\\ -27 & 18 & -9\\ -12 & 8 & -4\end{bmatrix}$


في التمارين (١٠–١٢)، أوجد ناتج ضرب كلّ مما يلي:

(١٠) $2\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix}$

(١١) $0{,}5\begin{bmatrix}3 & 14\\ 7 & -4\end{bmatrix}$

(١٢) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

(١٣) **الاختيار من متعدد:** تبيّن الأعمدة في المصفوفة $\underline{أ}=\begin{bmatrix}3 & 8\\ 0 & 12\end{bmatrix}$ بالترتيب، عدد الماحي وعدد الأقلام المباعة. وتبيّن الصفوف بالترتيب الأعداد المباعة يومي الاثنين والثلاثاء.

تبيّن المصفوفة $\underline{ب}=\begin{bmatrix}0{,}050\\ 0{,}025\end{bmatrix}$، كلفة كل من الممحاة والقلم. ناتج أ × ب يمثل: ______

(أ) ثمن كل الماحي المباعة يومي الاثنين والثلاثاء، وثمن الأقلام في هذين اليومين.

(ب) مجموع ثمن الماحي والأقلام يوم الاثنين، ومجموع ثمنهما يوم الثلاثاء.

(جـ) مجموع ثمن الأقلام والماحي.

(د) ثمن قلم واحد وممحاة واحدة

في التمارين (١٤–١٧)، استخدم المصفوفات د، و، ف. نفذ العمليات المطلوبة إذا كانت معرّفة. وإذا كانت إحدى العمليات غير معرّفة فاكتب «غير معرّفة».

$\underline{د}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 1\\ 2 & -1 & -2\end{bmatrix}$ ، $\underline{و}=\begin{bmatrix}2 & -5 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}$ ، $\underline{ف}=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ -5 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

(١٤) د × و

(١٥) (د × و) × ف

٤٠

٩ إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

١ ١٢٥ دينارًا؛ ١٧٥ دينارًا؛ ١٥٠ دينارًا.

٢ (أ) ١٢٥ + ١٧٥ + ١٥٠ = ٤٥٠ دينارًا.

(ب) إجابة ممكنة: أضرب ثمن كل وجبة في عدد الوجبات ثم أجمع النواتج.

٣ (أ) $\begin{bmatrix}2{,}500 & 1{,}750 & 2{,}000\end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix}50\\ 100\\ 75\end{bmatrix}$

(جـ) إجابة ممكنة:

العنصر الأول من الصف الأول من العمود الأول

$\begin{bmatrix}2{,}500 & 1{,}750 & 2{,}000\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}50\\ 100\\ 75\end{bmatrix}$

اضرب عناصر كل صف من المصفوفة الأولى في عناصر كل عمود من المصفوفة الثانية بنفس الترتيب. أوجد ناتج كل ضرب ثم اجمع نواتج الضرب أو وظف الألوان للتوضيح.

$2,500 \times 50 + 1,750 \times 100 + 2,000 \times 75$

«حاول أن تحل»

١ (أ) $5\underline{ب} - 4\underline{أ} = \begin{bmatrix} -8 & -7 & 26 \\ -30 & -21 & 3 \end{bmatrix}$

(ب) $\underline{أ} + 6\underline{ب} = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 8 \\ -7 & -2 & 21 \end{bmatrix}$

٢ $0,80 \times \begin{bmatrix} 0,750 & 0,450 \\ 1,350 & 0,900 \\ 1,200 & 0,750 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0,600 & 0,360 \\ 1,080 & 0,720 \\ 0,960 & 0,600 \end{bmatrix}$

---

(١٦) $\underline{د} - 2 \times \underline{و}$

(١٧) $(2 \times \underline{د})(3 \times \underline{ف})$

(١٨) تعرض شركة تبيع الخردوات في محلاتها الأسعار في مصفوفة من الرتبة ١ × ٣ ومبيعات المحال الثلاثة اليومية في مصفوفة من الرتبة ٣ × ٣.

مطرقة	منبه ضوئي	قنديل
٠,٣٠٠ دينار	٠,٥٠٠ دينار	٠,٧٠٠ دينار

	المحل أ	المحل ب	المحل ج
مطرقة	١٠	٩	٨
منبه ضوئي	٣	١٤	٦
قنديل	٢	٥	٧

(أ) أوجد ناتج ضرب المصفوفتين. اشرح ما الذي يمثله.

(ب) كيف يمكن إيجاد المبيع العام في المحال الثلاثة؟

(جـ) أوجد مبيع المنبهات الضوئية في المحال الثلاثة.

(١٩) **السؤال المفتوح:** اكتب مصفوفتين $\underline{س}$، $\underline{ص}$ من الرتبة ٢ × ٢ ليست كل العناصر متساوية بحيث يكون $\underline{س} \times \underline{ص} = \underline{ص} \times \underline{س}$.

(٢٠) أوجد قيمة كل من س ، ص: $\begin{bmatrix} 2\text{س} & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -\text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

في التمرين (٢١)، استخدم المصفوفات $\underline{أ}$، $\underline{ب}$، $\underline{جـ}$، حدّد ما إذا كان التعبيران في الزوج التالي متساويين.

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ، $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

(٢١) $(\underline{أ} + \underline{ب}) \times \underline{جـ}$ ، $\underline{أ} \times \underline{جـ} + \underline{ب} \times \underline{جـ}$.

(٢٢) إذا كانت $\underline{م} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ، $\underline{ن} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ ، فهل $\underline{م} \times \underline{ن} = \underline{ن} \times \underline{م}$ ؟ فسّر.

(٢٣) أي ضرب مما يلي غير معرّف؟

(أ) $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} [-1 \quad 2]$

(ب) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} [-1 \quad 2]$

(جـ) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

(د) $[-1 \quad 2] \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمارين (١ — ٤)، أوجد ناتج ضرب كلّ مما يلي:

(١) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

(٢) $[-3 \quad 5] \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

(٣) $-1 \begin{bmatrix} 9 & -7 & -4 \\ -8 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

وهذا ينتج من ضرب المصفوفتين $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$. لكي تقوم بعملية ضرب مصفوفتين، اضرب عناصر كلّ صفّ من المصفوفة الأولى في عناصر كلّ عمود من المصفوفة الثانية. أوجد ناتج كلّ ضرب، ثمّ اجمع نواتج الضرب كما في المثال التالي:

$$\underline{أ} \times \underline{ب} = \begin{bmatrix} 30 & 20 \\ 40 & 15 \\ 25 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \times 4 + 20 \times 2 \\ 40 \times 4 + 15 \times 2 \\ 25 \times 4 + 5 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160 \\ 190 \\ 150 \end{bmatrix}$$

وبالتالي تكون درجة أحمد هي الأفضل.

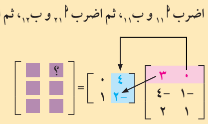
مثال (٤)

أوجد ناتج $\underline{أ} \times \underline{ب}$.

حيث $\underline{أ} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

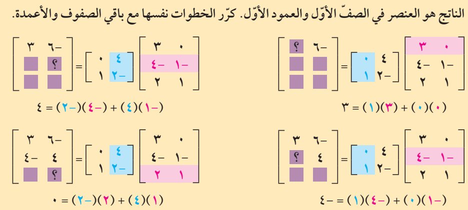
الحل:

اضرب أ$_{11}$ و ب$_{11}$، ثم اضرب أ$_{21}$ و ب$_{12}$، ثم اجمع نواتج الضرب.



$(0)(4) + (3)(-2) = -6$

الناتج هو العنصر في الصفّ الأوّل والعمود الأوّل. كرّر الخطوات نفسها مع باقي الصفوف والأعمدة.



٣ (أ) ٢ س $= \begin{bmatrix} ١٢ & ٢ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ ؛ ∴ س $= \begin{bmatrix} ٦ & ١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$

(ب) −٣ س $= \begin{bmatrix} ٩ & ٠ & ٣ \\ ٦ & −١٥ & −٢١ \end{bmatrix}$ ؛

∴ س $= \begin{bmatrix} −٣ & ٠ & −١ \\ −٢ & ٥ & ٧ \end{bmatrix}$

٤ (أ) ضرب كل عنصر من الصف في كل عنصر مناظر له من العمود ثم إيجاد ناتج الجمع.

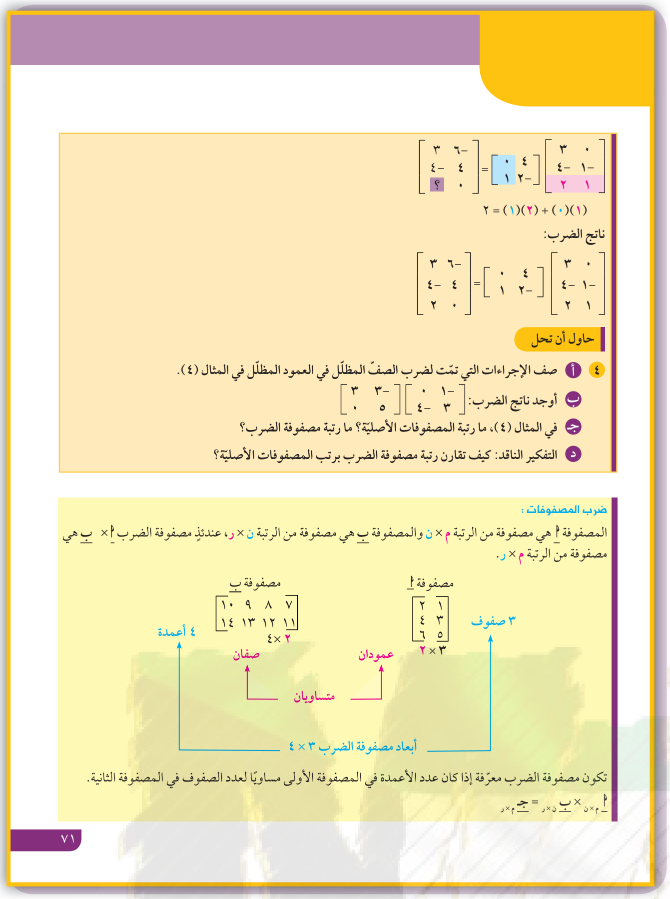
(ب) $\begin{bmatrix} −٣ & ٣ \\ ٩ & −٢٩ \end{bmatrix}$

(ج) رتبة المصفوفة أ هي: ٣ × ٢

رتبة المصفوفة ب هي: ٢ × ٢

رتبة مصفوفة ناتج الضرب هي: ٣ × ٢

(د) رتبة مصفوفة ناتج الضرب هي عدد صفوف المصفوفة الأولى × عدد أعمدة المصفوفة الثانية.



$\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ −٤ & −١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ −٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} −٦ & ٣ \\ ٤ & −٤ \\ ٠ & ؟ \end{bmatrix}$

(١)(٠) + (١)(٢) = ٢

ناتج الضرب:

$\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ −٤ & −١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ −٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} −٦ & ٣ \\ ٤ & −٤ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$

حاول أن تحل

٤ (أ) صف الإجراءات التي تمّت لضرب الصفّ المظلّل في العمود المظلّل في المثال (٤).

(ب) أوجد ناتج الضرب: $\begin{bmatrix} −١ & ٠ \\ ٣ & −٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} −٣ & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}$

(ج) في المثال (٤)، ما رتبة المصفوفات الأصليّة؟ ما رتبة مصفوفة الضرب؟

(د) التفكير الناقد: كيف تقارن رتبة مصفوفة الضرب برتب المصفوفات الأصليّة؟

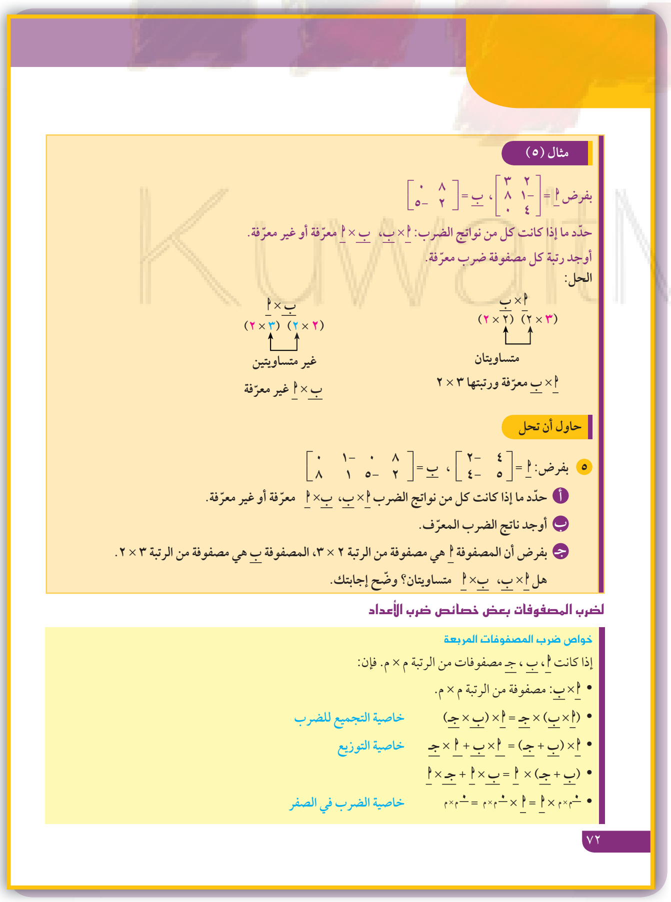
ضرب المصفوفات:

المصفوفة أ هي مصفوفة من الرتبة م × ن والمصفوفة ب هي مصفوفة من الرتبة ن × ر، عندئذٍ مصفوفة الضرب أ × ب هي مصفوفة من الرتبة م × ر.

تكون مصفوفة الضرب معرّفة إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى مساويًا لعدد الصفوف في المصفوفة الثانية.

$أ_{م×ن} × ب_{ن×ر} = جـ_{م×ر}$

٧١



مثال (٥)

بفرض أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ −١ & ٨ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٨ & ٠ \\ ٢ & −٥ \end{bmatrix}$

حدّد ما إذا كانت كل من نواتج الضرب: أ × ب، ب × أ معرّفة أو غير معرّفة.

أوجد رتبة كل مصفوفة ضرب معرّفة.

الحل:

حاول أن تحل

٥ بفرض: أ = $\begin{bmatrix} ٤ & −٢ \\ ٥ & −٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٨ & ٠ & −١ & ٠ \\ ٢ & −٥ & ١ & ٨ \end{bmatrix}$

(أ) حدّد ما إذا كانت كل من نواتج الضرب أ × ب، ب × أ معرّفة أو غير معرّفة.

(ب) أوجد ناتج الضرب المعرّف.

(ج) بفرض أن المصفوفة أ هي مصفوفة من الرتبة ٢ × ٣، المصفوفة ب هي مصفوفة من الرتبة ٣ × ٢.

هل أ × ب، ب × أ متساويتان؟ وضّح إجابتك.

لضرب المصفوفات بعض خصائص ضرب الأعداد

خواص ضرب المصفوفات المربعة

إذا كانت أ، ب، جـ مصفوفات من الرتبة م × م. فإن:

- أ × ب: مصفوفة من الرتبة م × م.
- (أ × ب) × جـ = أ × (ب × جـ) — خاصية التجميع للضرب
- أ × (ب + جـ) = أ × ب + أ × جـ — خاصية التوزيع
- (ب + جـ) × أ = ب × أ + جـ × أ
- $٠_{م×م} × أ = أ × ٠_{م×م} = ٠_{م×م}$ — خاصية الضرب في الصفر

٧٢

٥ (أ) أ من الرتبة: ٢ × ٢

ب من الرتبة: ٢ × ٤

لذا: أ × ب هي (٢ × ٢) وَ(٢ × ٤) أي عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى يساوي عدد الصفوف في المصفوفة الثانية فتكون أ × ب معرّفة.

ب × أ هي (٢ × ٤) وَ(٢ × ٢) أي عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى لا يساوي عدد الصفوف في المصفوفة الثانية فتكون ب × أ غير معرّفة.

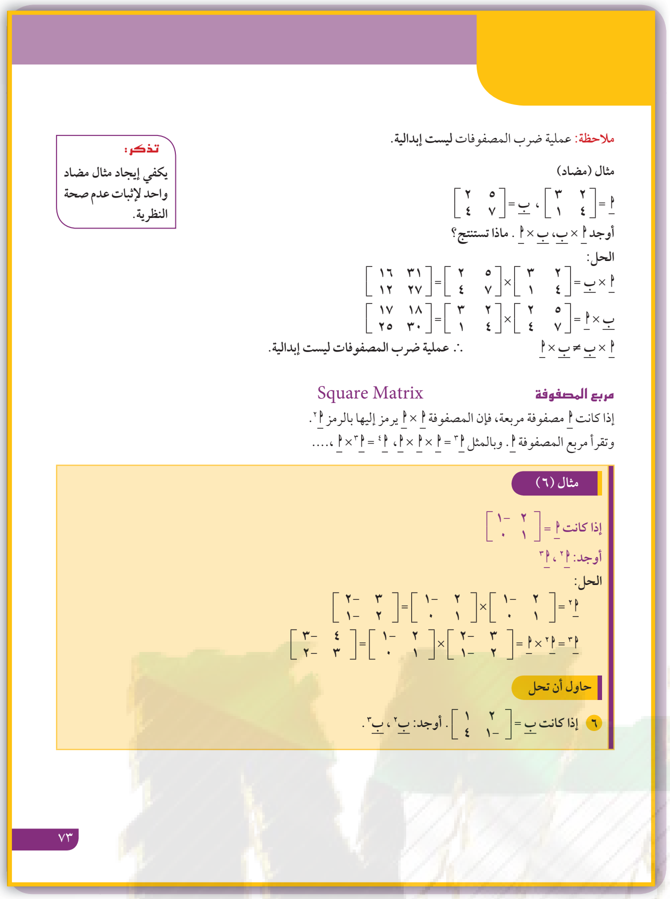
(ب) $\begin{bmatrix} ٢٨ & ١٠ & -٦ & -١٦ \\ ٣٢ & ٢٠ & -٩ & -٣٢ \end{bmatrix}$

(جـ) ٢ × ٣ وَ٣ × ٢ ناتج الضرب معرّف

٣ × ٢ وَ٢ × ٣ ناتج الضرب معرّف ولكن ليس ضروريًّا أن نجد أ × ب = ب × أ، لأن أ × ب من الرتبة ٢ × ٢ بينما ب × أ من الرتبة ٣ × ٣.

مثال: أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ & -١ \\ ٢ & ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ؛ ب = $\begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٢ & ٠ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

أ × ب = $\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ؛ ب × أ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ & ٠ \\ ٢ & ٠ & -٢ \\ ٣ & ١ & -١ \end{bmatrix}$


ملاحظة: عملية ضرب المصفوفات ليست إبدالية.

مثال (مضاد)

أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix}$

أوجد أ × ب، ب × أ . ماذا تستنتج؟

الحل:

أ × ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣١ & ١٦ \\ ٢٧ & ١٢ \end{bmatrix}$

ب × أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٨ & ١٧ \\ ٣٠ & ٢٥ \end{bmatrix}$

أ × ب ≠ ب × أ ∴ عملية ضرب المصفوفات ليست إبدالية.

تذكر: يكفي إيجاد مثال مضاد واحد لإثبات عدم صحة النظرية.

مربع المصفوفة Square Matrix

إذا كانت أ مصفوفة مربعة، فإن المصفوفة أ × أ يرمز إليها بالرمز أ^٢.

وتقرأ مربع المصفوفة أ. وبالمثل أ^٣ = أ × أ × أ، أ^٤ = أ^٣ × أ ، ....

مثال (٦)

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

أوجد: أ^٢ ، أ^٣

الحل:

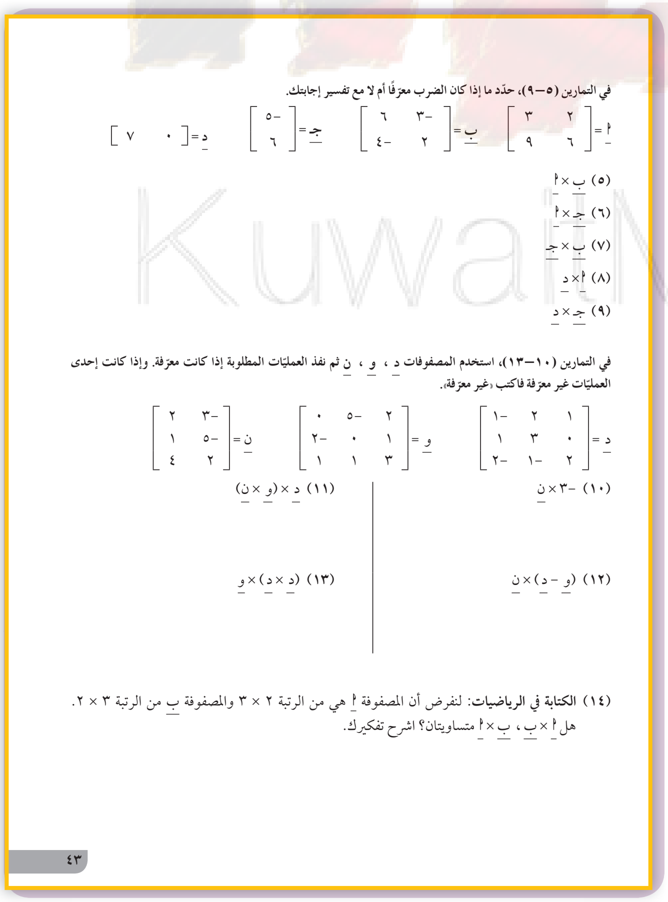
أ^٢ = $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$

أ^٣ = أ^٢ × أ = $\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$

حاول أن تحل

٦ إذا كانت ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$. أوجد: ب^٢ ، ب^٣.

٧٣


في التمارين (٥–٩)، حدّد ما إذا كان الضرب معرّفًا أم لا مع تفسير إجابتك.

أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٦ & ٩ \end{bmatrix}$ ب = $\begin{bmatrix} -٣ & ٦ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix}$ جـ = $\begin{bmatrix} -٥ \\ ٦ \end{bmatrix}$ د = $\begin{bmatrix} ٠ & ٧ \end{bmatrix}$

(٥) ب × أ

(٦) جـ × أ

(٧) ب × جـ

(٨) أ × د

(٩) جـ × د

في التمارين (١٠–١٣)، استخدم المصفوفات د ، و ، ن ثم نفذ العمليّات المطلوبة إذا كانت معرّفة. وإذا كانت إحدى العمليّات غير معرّفة فاكتب «غير معرّفة».

د = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & -١ \\ ٠ & ٣ & ١ \\ ٢ & -١ & -٢ \end{bmatrix}$ و = $\begin{bmatrix} ٢ & -٥ & ٠ \\ ١ & ٠ & -٢ \\ ٣ & ١ & ١ \end{bmatrix}$ ن = $\begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ -٥ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

(١٠) −٣ × ن

(١١) د × (و × ن)

(١٢) (و − د) × ن

(١٣) (د × د) × و

(١٤) **الكتابة في الرياضيات:** لنفرض أن المصفوفة أ هي من الرتبة ٢ × ٣ والمصفوفة ب من الرتبة ٣ × ٢. هل أ × ب ، ب × أ متساويتان؟ اشرح تفكيرك.

٤٣

(١٥) اكتب مصفوفة تمثل العائد اليومي للبطاقات المباعة مستخدمًا الجدولين التاليين:

	درجة ١	درجة ٢	درجة ٣
أسعار البطاقات بالدينار	٧	٦	٥

	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس
عدد البطاقات المباعة درجة ١	١٥٠	١٣٠	١٦٠
عدد البطاقات المباعة درجة ٢	١٢٥	١٣٠	١٧٥
عدد البطاقات المباعة درجة ٣	٦٠	٥٢	٨٠

(١٦) أوجد قيمة كل من س ، ص إذا كانت:

$$\begin{bmatrix} ٢س & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ٢س & -ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤ & -٩ \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix}$$

في التمرين (١٧)، استخدم المصفوفات $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$، $\underline{هـ}$ لتبين صحة العبارة.

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$ ، $\underline{هـ} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

(١٧) $(\underline{أ} + \underline{ب}) \times \underline{هـ} = \underline{أ} \times \underline{هـ} + \underline{ب} \times \underline{هـ}$.

٤٤

٦ $\underline{ب}^{٢} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ -٦ & ١٥ \end{bmatrix}$

$= ٣ \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$

$\underline{ب}^{٣} = \underline{ب} \times \underline{ب}^{٢} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ -٦ & ١٥ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٠ & ٢٧ \\ -٢٧ & ٥٤ \end{bmatrix}$

$= ٢٧ \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$

٧-٤: مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوسات)

١ الأهداف

- يتعرف مصفوفة الوحدة.
- يتعرف محدد المصفوفة المربعة.
- يوجد النظير الضربي للمصفوفة المربعة (معكوس المصفوفة).
- يستخدم النظير الضربي لحل معادلات مصفوفية.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

مصفوفة الوحدة - محدد مصفوفة - نظير ضربي.

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة - حاسوب - جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اسأل الطلاب:

(أ) ما المعكوس الضربي للعدد $\frac{٢}{٣}$؟

(ب) ما المعكوس الضربي للعدد ٦؟

(جـ) ما المعكوس الضربي للتعبير $\frac{٣}{٤}$ س^٢؟

(د) ما العدد المحايد في عملية ضرب الأعداد؟

(هـ) في الأسئلة (أ)، (ب)، (جـ) أوجد ناتج ضرب كل عدد في معكوسه الضربي. ماذا تلاحظ؟

٥ التدريس

في فقرة «عمل تعاوني» شجع الطلاب على الربط بين ما أنجزوه في فقرة (١) والنتائج التي سوف يحصلون عليها من الأسئلة (٣)، (٤).

ركز انتباه الطلاب إلى أهمية المصفوفات من الفئة و

$$و = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

٧-٤ مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوسات)
Identity and Inverse Matrices

عمل تعاوني

١ أوجد ناتج ما يلي:

٢ أنماط: صف أي أنماط تراها في إجابتك عن السؤال الأول.

٣ توقع ناتج ما يلي، ثم تحقق من توقعك.

٤ أوجد ناتج ما يلي:

٥ أنماط: صف أي أنماط تراها في إجابتك عن السؤال (٤).

٦ التفكير الناقد: كيف ترتبط إجاباتك بالنسبة إلى السؤالين (١)، (٤)؟

سوف تتعلم
- مصفوفة الوحدة للضرب
- محدد المصفوفة
- النظير الضربي (المعكوس الضربي) للمصفوفة
- حل المعادلة المصفوفية باستخدام النظير الضربي.

٧٤

مصفوفة الوحدة Identity Matrix

المصفوفة المربعة التي عناصر قطرها الرئيسي ١، وبقية العناصر صفر تسمى مصفوفة الوحدة للضرب. ويرمز إليها بـ و.

أي أن: أ × و = و × أ = أ

و هي العنصر المحايد الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة الثانية.

وبصورة عامة و ن×ن هي العنصر المحايد الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة ن.

النظير الضربي Multiplicative Inverse

إذا كانت أ، س مصفوفتين مربعتين من الرتبة نفسها بحيث يكون أ × س = س × أ = و، فإن س هي النظير الضربي للمصفوفة أ.

ويرمز إليها بـ أ$^{-١}$.

إذًا أ × أ$^{-١}$ = أ$^{-١}$ × أ = و

مثال (١)

الحل:

يمكن القول أن المصفوفة أ هي النظير الضربي للمصفوفة ب.

حاول أن تحل

معلومة رياضية: النظير الضربي للمصفوفة أ يسمى أيضًا المصفوفة المعكوسة أ$^{-١}$.

٧٥

أخبرهم بأنهم من الآن فصاعدًا سوف يتعاملون مع مصفوفة مربعة من نوع خاص اسمها مصفوفة الوحدة، حيث لها دور مهم مع النظير الضربي للمصفوفة المربعة.

دعهم يتأكدون من خلال الأمثلة كيف أن:

أ × و = و × أ = أ

وأن أ × أ$^{-1}$ = أ$^{-1}$ × أ = و لكل مصفوفة مربعة أ.

أخبرهم أن عليهم التعامل مع محدد المصفوفة $\begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}$

كما هو: $\begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{vmatrix}$ = أد − ب جـ، وأن نظير المصفوفة موجود إذا كان أد − ب جـ ≠ ٠.

أكّد لهم أن بإمكانهم تبديل أمكنة أ، د فقط.

شجعهم على التحقق من صحة النظير الضربي بإجراء عملية ضرب المصفوفة مع نظيرها الضربي لتحصل على مصفوفة الوحدة: و.

٦ الربط

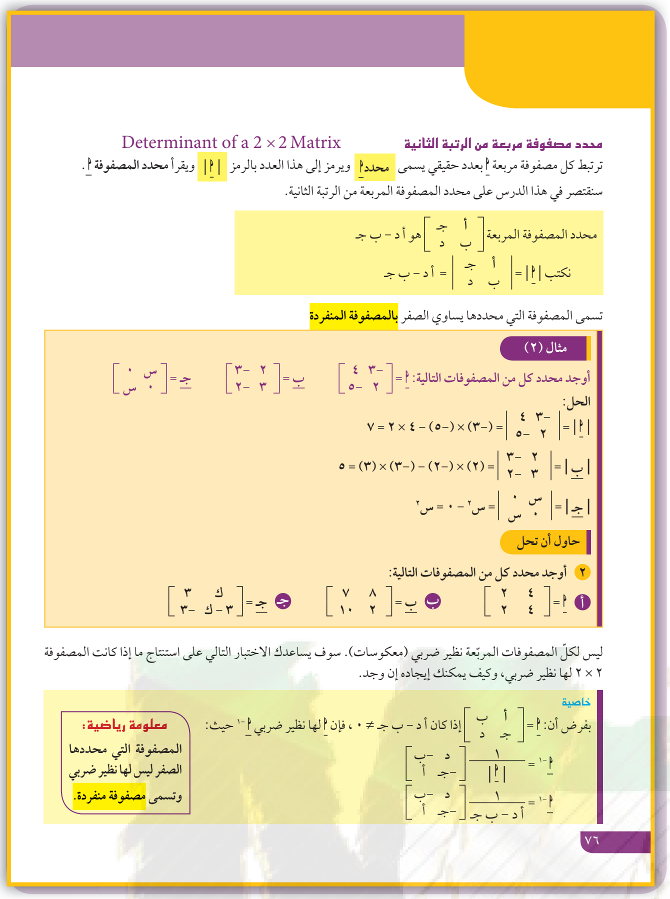
لا يوجد.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تبديل العناصر ضمن المصفوفة المربعة من الرتبة الثانية أو لا يضعون الإشارات المناسبة. ساعدهم على فهم ذلك من خلال أمثلة متعددة؛ راقب أداءهم.

٨ التقييم

تابع باهتمام كبير ما يقوم به الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لما لها من أهمية في تكوين أفكار عن مدى قدرة الطلاب على إيجاد النظير الضربي وبالتالي حل مسائل مرتبطة به.



محدد مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية Determinant of a 2 × 2 Matrix

ترتبط كل مصفوفة مربعة أ بعدد حقيقي يسمى محدد أ ويرمز إلى هذا العدد بالرمز |أ| ويقرأ محدد المصفوفة أ.
سنقتصر في هذا الدرس على محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الثانية.

محدد المصفوفة المربعة $\begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}$ هو أد − ب جـ

نكتب |أ| = $\begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{vmatrix}$ = أد − ب جـ

تسمى المصفوفة التي محددها يساوي الصفر بالمصفوفة المنفردة

مثال (٢)

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية: أ = $\begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ٢ & -٥ \end{bmatrix}$، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$، جـ = $\begin{bmatrix} س & ٠ \\ س & س \end{bmatrix}$

الحل:

|أ| = $\begin{vmatrix} -٣ & ٤ \\ ٢ & -٥ \end{vmatrix}$ = (−٣) × (−٥) − ٤ × ٢ = ٧

|ب| = $\begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{vmatrix}$ = (٢) × (−٢) − (−٣) × (٣) = ٥

|جـ| = $\begin{vmatrix} س & ٠ \\ س & س \end{vmatrix}$ = س^{٢} − ٠ = س^{٢}

حاول أن تحل

٢ أوجد محدد كل من المصفوفات التالية:

أ أ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ب ب = $\begin{bmatrix} ٨ & ٧ \\ ٢ & ١٠ \end{bmatrix}$ جـ جـ = $\begin{bmatrix} ك & ٣ \\ ٣ - ك & -٣ \end{bmatrix}$

ليس لكلّ المصفوفات المربعة نظير ضربي (معكوسات). سوف يساعدك الاختبار التالي على استنتاج ما إذا كانت المصفوفة ٢ × ٢ لها نظير ضربي، وكيف يمكنك إيجاده إن وجد.

خاصية

بفرض أن: أ = $\begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}$ إذا كان أد − ب جـ ≠ ٠، فإن أ لها نظير ضربي أ$^{-1}$ حيث:

أ$^{-1}$ = $\frac{١}{|أ|}\begin{bmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{bmatrix}$

أ$^{-1}$ = $\frac{١}{أد - ب جـ}\begin{bmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{bmatrix}$

معلومة رياضية: المصفوفة التي محددها الصفر ليس لها نظير ضربي وتسمى مصفوفة منفردة.

٧٦

التاريخ الهجري: .... التاريخ الميلادي: .... تمرّن ٧-٤

مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوس)

Identity Matrices and Inverse Matrix

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمرين (١–٢)، بيّن أن كل مصفوفة هي نظير ضربي للمصفوفة الأخرى.

(١) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}$

(٢) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٥} & -\frac{١}{١٠} \\ ٠ & \frac{١}{٤} \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$

في التمارين (٣–٥)، أوجد محدّد كل مصفوفة.

(٣) $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ -٦ & -٢ \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{٢}{٣} \\ \frac{٣}{٥} & \frac{١}{٤} \end{bmatrix}$

(٥) $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$

في التمارين (٦–٩)، أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة إن وجد، وإذا لم يوجد فاكتب «لا يوجد نظير ضربي» مع ذكر السبب.

(٦) $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

(٧) $\begin{bmatrix} ٤ & ٨ \\ -٣ & -٢ \end{bmatrix}$

٤٥

اختبار سريع

❶ هل المصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ -٥ & -٤ \end{bmatrix}$ هي معكوس ضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$ ؟ اشرح. كلا .

لأن $\begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ -٥ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

❷ أوجد النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ -٧ & ٣ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -٢ & -٣,٥ \\ -١ & -١,٥ \end{bmatrix}$

٩ إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

١ (أ)، (ب) $\begin{bmatrix} ٦ & -٥ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

(جـ)، (د) $\begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٣ \\ ٢ & ٠ & -٢ \\ ٣ & ٥ & ١ \end{bmatrix}$

٢ $\underline{أ} \times \underline{و} = \underline{و} \times \underline{أ} = \underline{أ}$

٣ $\begin{bmatrix} ٤ & -٢ & ٣ & ٢ \\ ٠ & ٣ & ٢ & ١ \\ ٤ & ١ & -٢ & -١ \\ ٠ & ٣ & ٢ & ٥ \end{bmatrix}$ ، اضرب المصفوفتين للتحقق

٤ (أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$


مثال (٣)

إذا كانت المصفوفة $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & س \\ ٦ & ١٢ \end{bmatrix}$ منفردة أوجد قيمة س.

الحل:

$|\underline{أ}| = \begin{vmatrix} ٤ & س \\ ٦ & ١٢ \end{vmatrix} = ٠$ محدد المصفوفة المنفردة

٦س − ٤٨ = ٠ تبسيط المحدد

٦س = ٤٨

س = ٨

حاول أن تحل

٣ إذا كانت المصفوفة $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٥ \\ ٢س & -٤ \end{bmatrix}$ منفردة، أوجد قيمة س.

مثال (٤)

هل للمصفوفة: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ -٢ & ٨ \end{bmatrix}$ نظير (معكوس) ضربي؟ في حالة الإيجاب أوجده.

الحل:

أ د − ب جـ = (−١)(−٢) − (٠)(٨) = ٢ ∵ ٢ ≠ ٠ ∴ $\underline{أ}$ لها نظير ضربي $\underline{أ}^{-١}$

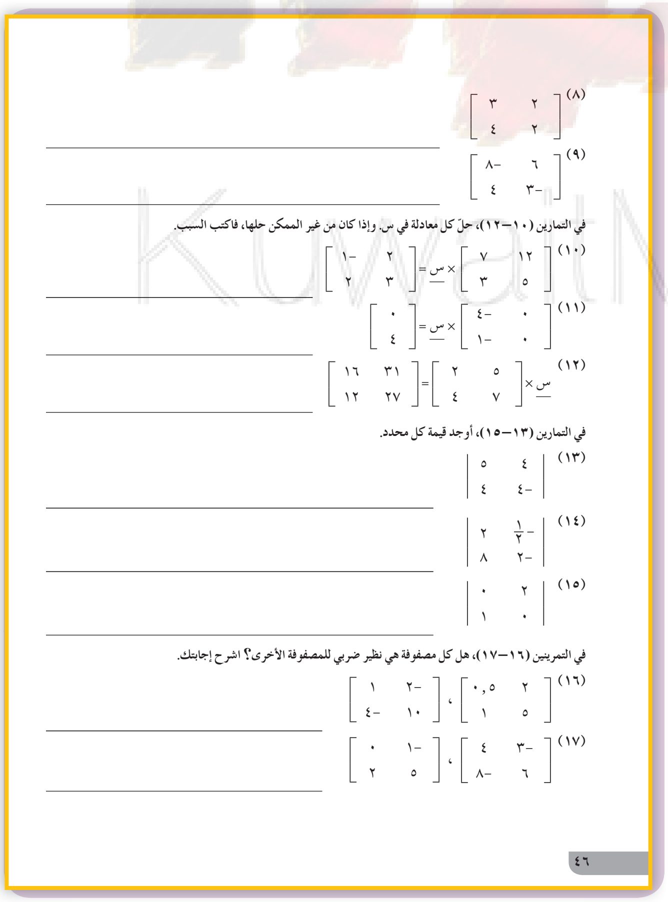
$\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} ٠ & -٢ \\ -١ & -٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ -٠,٥ & -٤ \end{bmatrix}$

حاول أن تحل

٤ أ هل $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسّر إجابتك.

ب هل $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٨ & ٦ \\ -٤ & -٣ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسّر إجابتك.

٧٧


(٨) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$

(٩) $\begin{bmatrix} -٨ & ٦ \\ ٤ & -٣ \end{bmatrix}$

في التمارين (١٠–١٢)، حلّ كل معادلة في س. وإذا كان من غير الممكن حلها، فاكتب السبب.

(١٠) $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} = \underline{س} \times \begin{bmatrix} ٧ & ١٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$

(١١) $\begin{bmatrix} ٠ \\ ٤ \end{bmatrix} = \underline{س} \times \begin{bmatrix} -٤ & ٠ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$

(١٢) $\begin{bmatrix} ١٦ & ٣١ \\ ١٢ & ٢٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٤ & ٧ \end{bmatrix} \times \underline{س}$

في التمارين (١٣–١٥)، أوجد قيمة كل محدد.

(١٣) $\begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ٤ & -٤ \end{vmatrix}$

(١٤) $\begin{vmatrix} ٢ & -\frac{١}{٢} \\ ٨ & -٢ \end{vmatrix}$

(١٥) $\begin{vmatrix} ٠ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix}$

في التمرينين (١٦–١٧)، هل كل مصفوفة هي نظير ضربي للمصفوفة الأخرى؟ اشرح إجابتك.

(١٦) $\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ -٤ & ١٠ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٠,٥ & ٢ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$

(١٧) $\begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ -٨ & ٦ \end{bmatrix}$

٤٦

مثال (٥)

حدّد أي مصفوفة مما يلي لها نظير (معكوس) ضربي، ثم أوجده.

الحل:

احسب: أ د − ب جـ

حيث إن: أ د − ب جـ ≠ ٠، فإن النظير الضربي (المعكوس) لـ م يكون موجودًا.

احسب: أ د − ب جـ

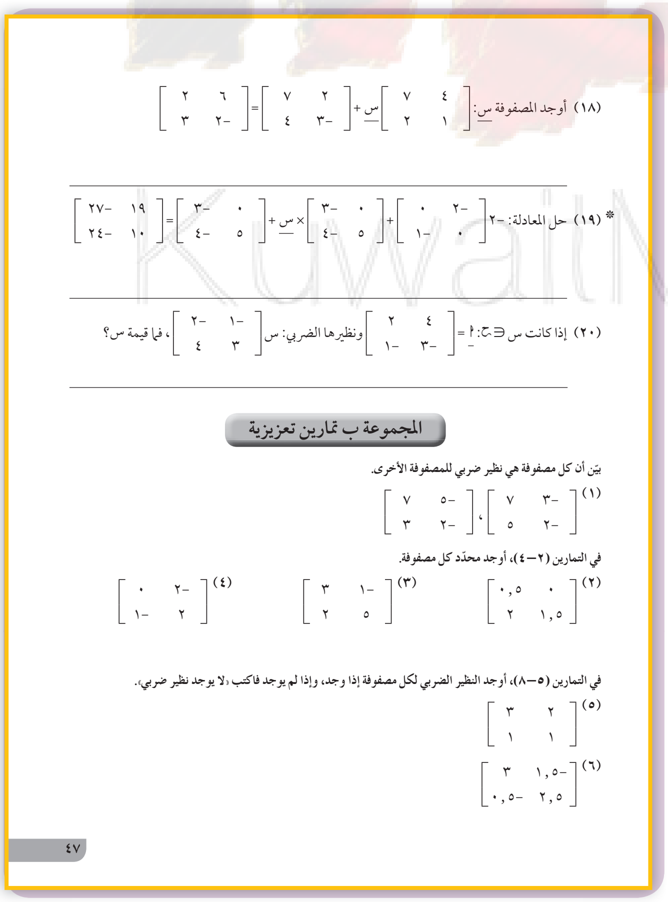
حيث إن: أ د − ب جـ = ٠، فإن معكوس ن غير موجود.

ن$^{-1}$ غير موجود.

حاول أن تحل

٥ حدّد أي مصفوفة من المصفوفات التالية لها نظير ضربي (معكوس)، ثم أوجده.

٧٨



(١٨) أوجد المصفوفة س:

(١٩) حل المعادلة:

(٢٠) إذا كانت س ∈ ح: أ = ... ونظيرها الضربي: ... ، فما قيمة س؟

المجموعة ب تمارين تعزيزية

بيّن أن كل مصفوفة هي نظير ضربي للمصفوفة الأخرى.

في التمارين (٢ – ٤)، أوجد محدّد كل مصفوفة.

في التمارين (٥ – ٨)، أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة إذا وجد، وإذا لم يوجد فاكتب: لا يوجد نظير ضربي.

٤٧

٥ في (أ)، (ب) ناتج الضرب هو مصفوفة الوحدة من الرتبة ٢ × ٢.

في (جـ)، (د) ناتج الضرب هو مصفوفة من الرتبة ٣ × ٣.

٦ في السؤال ١ مصفوفة × مصفوفة الوحدة = مصفوفة.

في السؤال ٤ مصفوفة × مصفوفة = مصفوفة الوحدة.

«حاول أن تحل»

١ (أ) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢,٥ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

لذا أ هو النظير الضربي لـ ب.

٢ (أ) ٤ × ٢ − ٤ × ٢ = ٨ − ٨ = ٠

(ب) ٨ × ١٠ − ٧ × ٢ = ٦٦

(جـ) −٣ك − ٩ + ٣ك = −٩

٣ $|ب| = \begin{vmatrix} ٥ & ١٠ \\ -٤ & ٢س \end{vmatrix} = ٠$

١٠س + ٤٠ = ٠

س = −٤

٤ (أ) |ب| = ١ × ٤ − ٣ × ٢ = ٤ − ٦ = −٢ ≠ ٠

∴ ب لها نظير ضربي. لأن |ب| ≠ ٠

(ب) |ب| = ٦ × (−٤) − (−٣) × (٨) = −٢٤ + ٢٤ = ٠

ليس لها نظير ضربي. لأن |ب| = ٠

٥ (أ) $٢ \times ٣ - ١ \times ٤ = ٦ - ٤ = ٢ \neq ٠$

$\therefore$ لها نظير ضربي

النظير الضربي $= \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٣ & -٤ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ١,٥ & -٢ \\ -٠,٥ & ١ \end{bmatrix}$

(ب) $٠,٥ \times ٧,٢ - ٣ \times ٢,٣ = ٣,٦ - ٦,٩$

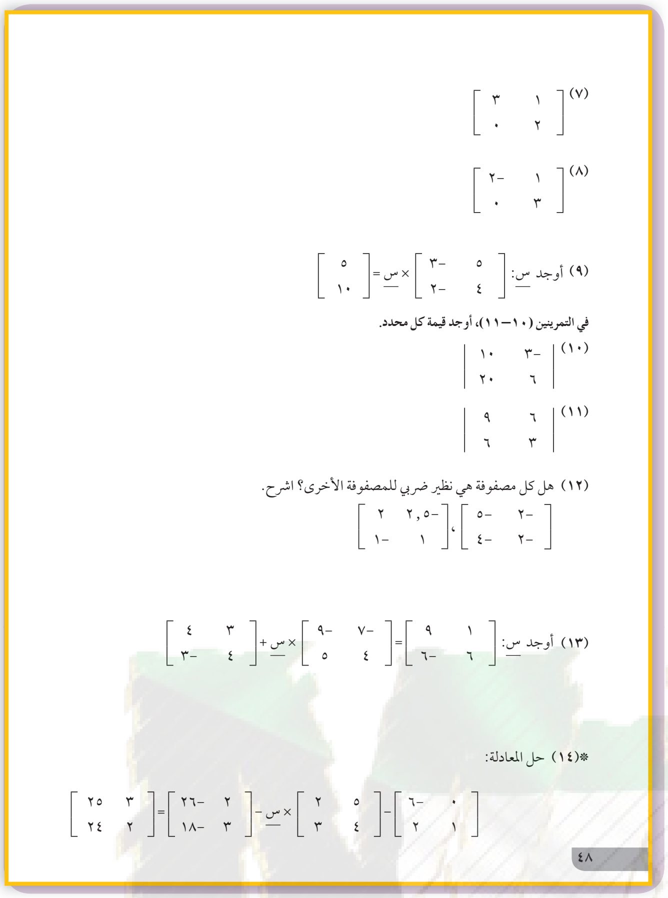
$= -٣,٣ \neq ٠$

$\therefore$ لها نظير ضربي

النظير الضربي $= \frac{١}{-٣,٣}\begin{bmatrix} ٧,٢ & -٢,٣ \\ -٣ & ٠,٥ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{-٧,٢}{٣,٣} & \frac{٢,٣}{٣,٣} \\ \frac{٣}{٣,٣} & \frac{-٠,٥}{٣,٣} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{-٢٤}{١١} & \frac{٢٣}{٣٣} \\ \frac{١٠}{١١} & \frac{-٥}{٣٣} \end{bmatrix}$



(٧) $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

(٨) $\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$

(٩) أوجد س: $\begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix} \times \underline{س} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ١٠ \end{bmatrix}$

في التمرينين (١٠–١١)، أوجد قيمة كل محدد.

(١٠) $\begin{vmatrix} -٣ & ١٠ \\ ٦ & ٢٠ \end{vmatrix}$

(١١) $\begin{vmatrix} ٦ & ٩ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix}$

(١٢) هل كل مصفوفة هي نظير ضربي للمصفوفة الأخرى؟ اشرح.

$\begin{bmatrix} -٢ & -٥ \\ -٢ & -٤ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} -٢,٥ & ٢ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$

(١٣) أوجد س: $\begin{bmatrix} ١ & ٩ \\ ٦ & -٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧ & -٩ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix} \times \underline{س} + \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٤ & -٣ \end{bmatrix}$

*(١٤) حل المعادلة:

$\begin{bmatrix} ٠ & -٦ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} \times \underline{س} - \begin{bmatrix} ٢ & -٢٦ \\ ٣ & -١٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢٥ \\ ٢ & ٢٤ \end{bmatrix}$

٤٨

٧-٥: حل نظام من معادلتين خطيتين

١ الأهداف

- يحل نظام من معادلتين خطيتين باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.
- يستخدم قاعدة كرامر لحل معادلتين خطيتين.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

نظام معادلتين خطيتين – قاعدة كرامر.

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اطلب إلى الطلاب حل ما يلي:

- ٤س = ١٢
- ٣س + ٥ = ٨
- $\frac{٧}{٤}$س − ٨ = ١٩
- $\left\{ \begin{array}{l} \text{٢س + ٣ص = ٢} \\ \text{٣س − ص = ١٤} \end{array} \right.$ (بالحذف أو بالتعويض)

اطلب إليهم إيجاد ناتج:

- $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٥ \\ ٣ \end{bmatrix}$

٥ التدريس

من المفيد الربط بين أنظمة المعادلات والمصفوفات كما هي واردة في فقرة «دعنا نفكر ونتناقش»، لذا يجب التركيز على النظير الضربي للمصفوفة كي يصل الطلاب إلى حل المعادلة.


٧-٥

حل نظام من معادلتين خطيتين

Solving a System of Two Linear Equations

دعنا نفكر ونتناقش

يمكن للمعادلة المصفوفية أن تمثّل أي نظام معادلات.

نظام معادلات: س + ٢ص = ٥ ، ٣س + ٥ص = ١٤

المعادلة المصفوفية: $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ١٤ \end{bmatrix}$

سوف تتعلم

- حل نظام من معادلتين خطيتين
- قاعدة كرامر

١ قارن طريقتي كتابة النظام في معادلات المصفوفات. أين تجد معامل س، ص؟ المتغيرات؟ الثوابت؟

كل مصفوفة في معادلة المصفوفات على الشكل أ × ع = ب لها اسمها:

مصفوفة المعاملات أ $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$ × مصفوفة المتغيرات ع $\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$ = مصفوفة الثوابت ب $\begin{bmatrix} ٥ \\ ١٤ \end{bmatrix}$

٢ أ أوجد مصفوفة الضرب: $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$

ب يمكن كتابة مصفوفة الضرب بأنها مساوية للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٥ \\ ١٤ \end{bmatrix}$.

اشرح كيف أن معادلة المصفوفة تمثّل نظام المعادلات.

حل النظام: Solving a System

تستطيع إيجاد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات، ثم الحصول سريعًا على حل النظام من المعادلات الخطية.

١ – الحل باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة المربعة: Solving by Using Inverse Matrix

مثال (١)

حلّ النظام: س + ص = ٣ ، س − ص = ٧ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

الحل:

اكتب النظام مع معادلة المصفوفات.

$\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & -١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٧ \end{bmatrix}$ (١)

حيث أ = $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$ ، ع = $\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣ \\ ٧ \end{bmatrix}$

|أ| = $\begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١ & -١ \end{vmatrix}$ = ١ × (−١) − ١ × ١ = −٢ ≠ ٠

٧٩


التاريخ الهجريُّ: .... التاريخ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ ٧-٥

حل نظام من معادلتين خطيتين

Solving System of Two Linear Equations

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمرينين (١–٢)، اكتب نظام المعادلات التالية على شكل معادلة مصفوفية محددًا مصفوفة المعاملات ومصفوفة المتغيرات ومصفوفة الثوابت.

(١) س + ص = ٥ ، س − ٢ص = −٤

(٢) ٢س + ٥ص = ٠ ، س + ص = ٢

في التمرينين (٣–٤)، اكتب المعادلات المصفوفية التالية على شكل نظام معادلات.

(٣) $\begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ \\ ٣ \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ -١ & -٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ -٢ \end{bmatrix}$

في التمرينين (٥–٦)، استخدم النظير الضربي للمصفوفة لحل نظام معادلات.

(٥) س + ٣ص = ٥ ، س + ٤ص = ٦

(٦) س − ٣ص = −١ ، −٥س + ١٦ص = ٥

٤٩

أخبرهم أن حل معادلة المصفوفات $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ع}} = \underline{\text{ب}}$ ،

حيث $\underline{\text{ع}} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$، مشابه لحل معادلة بسيطة من نوع ٣س = ٤ . ولإيجاد الحل نكتب: $\frac{١}{٣} \times ٣\text{س} = \frac{١}{٣} \times ٤$ (نستخدم المعكوس الضربي)، ونحصل على $\text{س} = \frac{٤}{٣}$، وفي معادلة المصفوفات نستخدم أيضًا النظير الضربي للمصفوفة $\underline{\text{أ}}$ إن وجد فنكتب:

$\underline{\text{أ}}^{-١} \times \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ع}} = \underline{\text{أ}}^{-١} \times \underline{\text{ب}}$. والمعروف بحسب الدرس السابق أن $\underline{\text{أ}}^{-١} \times \underline{\text{أ}} = \underline{\text{و}}$ (مصفوفة الوحدة).

المثال (٢)، هو تطبيق مباشر لقاعدة كرامر التي تستخدم حل نظام معادلتين أو أكثر لإيجاد قيم المتغيرات، والأساس في هذه القاعدة هو فهم الطالب لتغيير الأعمدة بحسب كل متغير، ثم إيجاد المحدد لكل مصفوفة.

٦ الربط

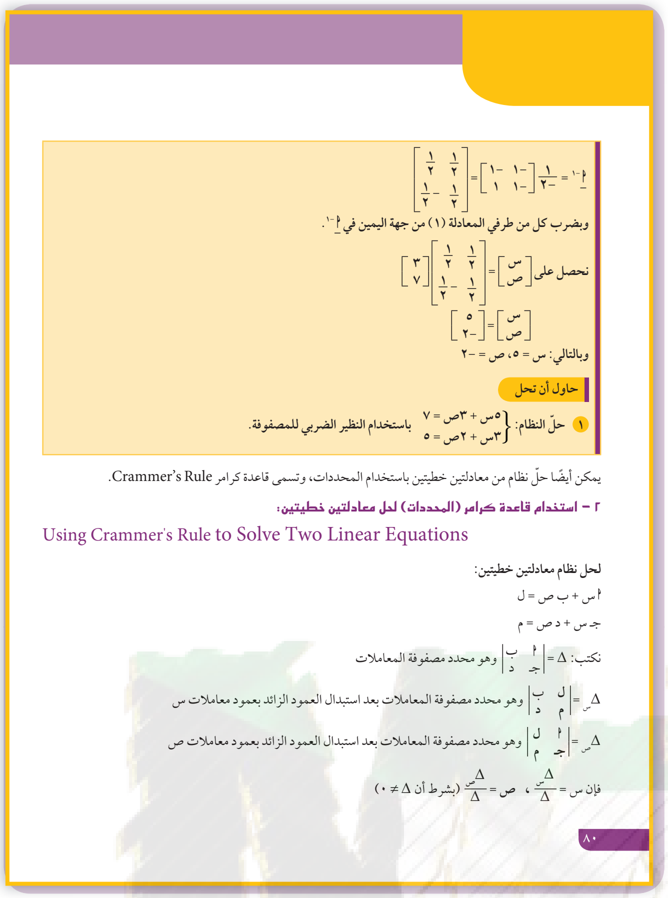
في المثال (٢)، أشر إلى أن استخدام المصفوفات في حل أنظمة معادلات ليس بذات أهمية كبرى في حالة معادلتين من مجهولين ولكن تصبح هذه الطريقة مهمة في حالة ٣ معادلات من ٣ مجاهيل أو أكثر.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تبديل الأعمدة عند استخدام قاعدة كرامر. شجعهم على كتابة النظام أولًا على الشكل القياسي:

$$\begin{cases} \text{أس} + \text{ب ص} = \text{جـ} \\ \text{أ'س} + \text{ب'ص} = \text{جـ'} \end{cases}$$

ثم كتابة Δ، $\Delta_{\text{س}}$، $\Delta_{\text{ص}}$.



$\underline{\text{أ}}^{-١} = \frac{١}{-٢}\begin{bmatrix} -١ & -١ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & -\frac{١}{٢} \end{bmatrix}$

وبضرب كل من طرفي المعادلة (١) من جهة اليمين في $\underline{\text{أ}}^{-١}$.

نحصل على $\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & -\frac{١}{٢} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ \\ ٧ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ -٢ \end{bmatrix}$

وبالتالي: س = ٥، ص = −٢

حاول أن تحل

١ حلّ النظام: $\begin{cases} ٥\text{س} + ٣\text{ص} = ٧ \\ ٣\text{س} + ٢\text{ص} = ٥ \end{cases}$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

يمكن أيضًا حلّ نظام من معادلتين خطيتين باستخدام المحددات، وتسمى قاعدة كرامر Crammer’s Rule.

٢ – استخدام قاعدة كرامر (المحددات) لحل معادلتين خطيتين:

Using Crammer's Rule to Solve Two Linear Equations

لحل نظام معادلتين خطيتين:

أس + ب ص = ل

جـ س + د ص = م

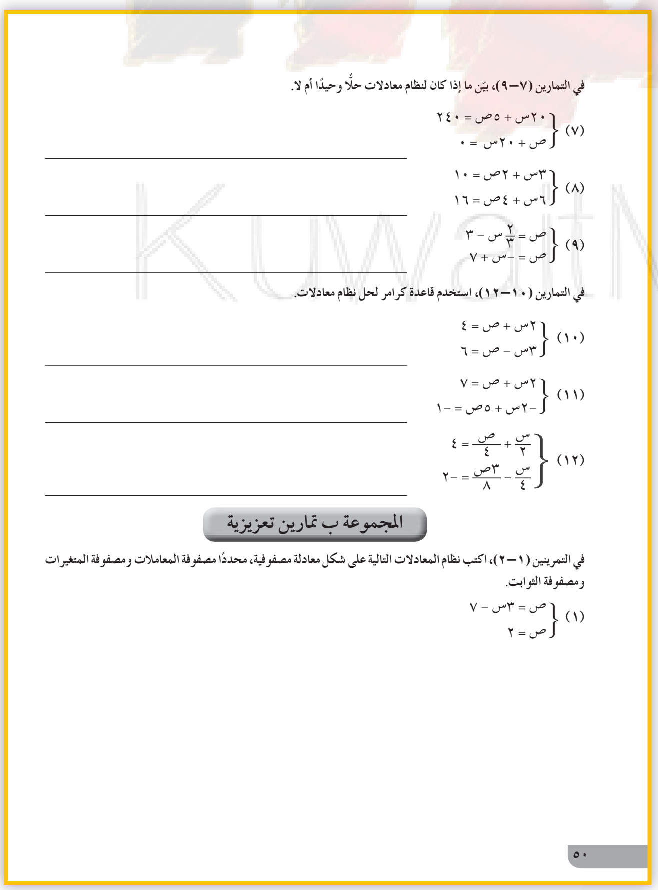
نكتب: $\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{vmatrix}$ وهو محدد مصفوفة المعاملات

$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ب} \\ \text{م} & \text{د} \end{vmatrix}$ وهو محدد مصفوفة المعاملات بعد استبدال العمود الزائد بعمود معاملات س

$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ل} \\ \text{جـ} & \text{م} \end{vmatrix}$ وهو محدد مصفوفة المعاملات بعد استبدال العمود الزائد بعمود معاملات ص

فإن $\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta}$ ، $\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta}$ (بشرط أن $\Delta \neq ٠$)

٨٠



في التمارين (٧–٩)، بيّن ما إذا كان لنظام معادلات حلًّا وحيدًا أم لا.

(٧) $\begin{cases} ٢٠\text{س} + ٥\text{ص} = ٢٤٠ \\ \text{ص} + ٢٠\text{س} = ٠ \end{cases}$

(٨) $\begin{cases} ٣\text{س} + ٢\text{ص} = ١٠ \\ ٦\text{س} + ٤\text{ص} = ١٦ \end{cases}$

(٩) $\begin{cases} \text{ص} = \frac{٢}{٣}\text{س} - ٣ \\ \text{ص} = -\text{س} + ٧ \end{cases}$

في التمارين (١٠–١٢)، استخدم قاعدة كرامر لحل نظام معادلات.

(١٠) $\begin{cases} ٢\text{س} + \text{ص} = ٤ \\ ٣\text{س} - \text{ص} = ٦ \end{cases}$

(١١) $\begin{cases} ٢\text{س} + \text{ص} = ٧ \\ -٢\text{س} + ٥\text{ص} = -١ \end{cases}$

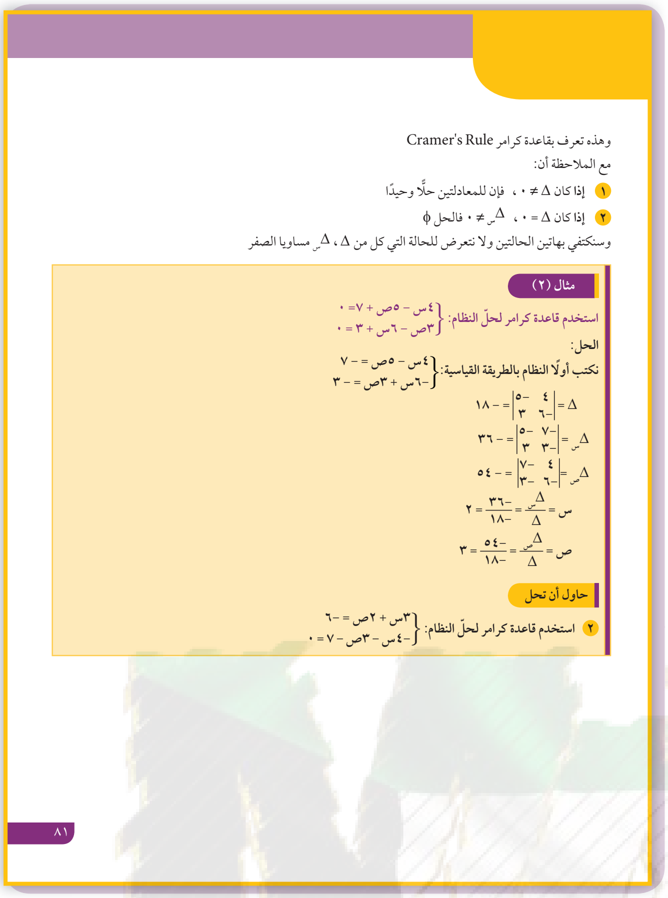
(١٢) $\begin{cases} \frac{\text{س}}{٢} + \frac{\text{ص}}{٤} = ٤ \\ \frac{\text{س}}{٤} - \frac{٣\text{ص}}{٨} = -٢ \end{cases}$

المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمرينين (١–٢)، اكتب نظام المعادلات التالية على شكل معادلة مصفوفية، محددًا مصفوفة المعاملات ومصفوفة المتغيرات ومصفوفة الثوابت.

(١) $\begin{cases} \text{ص} = ٣\text{س} - ٧ \\ \text{ص} = ٢ \end{cases}$

٥٠


وهذه تعرف بقاعدة كرامر Cramer's Rule

مع الملاحظة أن:

١ إذا كان $\Delta \neq ٠$ ، فإن للمعادلتين حلًّا وحيدًا

٢ إذا كان $\Delta = ٠$ ، $\Delta_{\text{س}} \neq ٠$ فالحل ϕ

وسنكتفي بهاتين الحالتين ولا نتعرض للحالة التي كل من Δ ، $\Delta_{\text{س}}$ مساويا الصفر

مثال (٢)

استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام: $\begin{cases} ٤\text{س} - ٥\text{ص} + ٧ = ٠ \\ ٣\text{ص} - ٦\text{س} + ٣ = ٠ \end{cases}$

الحل:

نكتب أولًا النظام بالطريقة القياسية: $\begin{cases} ٤\text{س} - ٥\text{ص} = -٧ \\ -٦\text{س} + ٣\text{ص} = -٣ \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٤ & -٥ \\ -٦ & ٣ \end{vmatrix} = -١٨$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} -٧ & -٥ \\ -٣ & ٣ \end{vmatrix} = -٣٦$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ٤ & -٧ \\ -٦ & -٣ \end{vmatrix} = -٥٤$$

$$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{-٣٦}{-١٨} = ٢$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{-٥٤}{-١٨} = ٣$$

حاول أن تحل

٢ استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام: $\begin{cases} ٣\text{س} + ٢\text{ص} = -٦ \\ -٤\text{س} - ٣\text{ص} - ٧ = ٠ \end{cases}$

٨١

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يجيبون عن الأسئلة في فقرات «حاول أن تحل» للتأكد من فهمهم في استخدام النظير الضربي أو قاعدة كرامر عند حل معادلة المصفوفات.

اختبار سريع

١ حل النظام $\begin{cases} ٣\text{س} + ٢\text{ص} = -٦ \\ ٢\text{س} - ٣\text{ص} = ٦١ \end{cases}$

باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٦ \\ ٦١ \end{bmatrix} \text{؛ } (٨ ، -١٥)$$

٢ حل النظام $\begin{cases} ١٢\text{س} + ٨\text{ص} = -٣ \\ ٣\text{س} - ٧\text{ص} = ٥٠ \end{cases}$

باستخدام قاعدة كرامر.

$$\text{س} = \frac{٣٧٩}{١٠٨} \text{ ؛ ص} = -\frac{٢٠٣}{٣٦}$$

٩ إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

١ تتنوّع الإجابات. راجع عمل الطلاب.

٢ (أ) $\begin{bmatrix} \text{س} + ٢\text{ص} \\ ٣\text{س} + ٥\text{ص} \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} \text{س} + ٢\text{ص} \\ ٣\text{س} + ٥\text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ١٤ \end{bmatrix}$

عند المساواة بين مصفوفتين نكتب: س + ٢ ص = ٥

٣س + ٥ص = ١٤

«حاول أن تحل»

١ $\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ \\ ٥ \end{bmatrix}$

$$\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} \text{؛ } |\underline{\text{أ}}| = ١ \neq ٠$$

$$\underline{\text{أ}}^{-١} = \frac{١}{١} \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٧ \\ ٥ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ \\ ٤ \end{bmatrix}$$

الحل: س = −١، ص = ٤ .

٢ $\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ -٤ & -٣ \end{vmatrix} = -١$

$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} -٦ & ٢ \\ ٧ & -٣ \end{vmatrix} = ٤$

$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ٣ & -٦ \\ -٤ & ٧ \end{vmatrix} = -٣$

$\text{س} = \dfrac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = -٤$ ، $\text{ص} = \dfrac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = ٣$

(٢) $\begin{cases} \text{س} + ٢\text{ص} = ١١ \\ ٢\text{س} + ٣\text{ص} = ١٨ \end{cases}$

في التمرينين (٣–٤)، استخدم النظير الضربي للمصفوفة لحل نظام المعادلات.

(٣) $\begin{cases} ٢\text{س} + ٣\text{ص} = ١٢ \\ \text{س} + ٢\text{ص} = ٧ \end{cases}$

(٤) $\begin{cases} ٢\text{س} + ٣\text{ص} = ٥ \\ \text{س} + ٢\text{ص} = ٦ \end{cases}$

في التمرينين (٥–٦)، حلّ المعادلة المصفوفية إن أمكن:

(٥) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ \\ ١٠ \end{bmatrix}$

(٦) $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٤ & ٦ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$

في التمرينين (٧–٨)، استخدم قاعدة كرامر لحل نظام معادلات.

(٧) $\begin{cases} ٠{,}٥\text{س} + ١{,}٥\text{ص} = ٧ \\ ٢{,}٥\text{س} - ٣{,}٥\text{ص} = -٩ \end{cases}$

(٨) $\begin{cases} \dfrac{\text{س}}{٥} - \dfrac{٢\text{ص}}{٥} = ٤ \\ \dfrac{٢\text{س}}{٥} - \dfrac{٣\text{ص}}{٥} = ٥ \end{cases}$

(٩) ينتج أحد المصانع أقلام رصاص ومماحي. يبلغ ثمن علبة تحتوي على ٥ مماحي وقلمي رصاص ١٥٠٠ فلس. ويبلغ ثمن علبة أخرى تحتوي على ٧ مماحي و٥ أقلام ٢٦٥٠ فلسًا.
أوجد ثمن الممحاة وثمن القلم مستخدمًا النظير الضربي للمصفوفة.

٥١

المرشد لحل المسائل

المرشد لحل المسائل

الإحداثيان (س، ص) لنقطة في المستوي هي حل النظام: ٢س + ٣ص = ١٣ ، ٥س + ٧ص = ٣١ .

أوجد إحداثيي هذه النقطة.

كيف فكر مرشد؟

حل المسألة هو الزوج المرتب (س، ص).

يمكنني رسم المستقيمين بيانيًا وقراءة إحداثيي نقطة التقاطع، ولكن هذا ليس ضروريًا.

يمكنني استخدام المصفوفات في الحل.

سأعيد كتابة النظام في شكل معادلة مصفوفات.

لإيجاد المصفوفة $\begin{bmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\end{bmatrix}$ سوف أضرب طرفي المعادلة في النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix}٢ & ٣\\ ٥ & ٧\end{bmatrix}$.

والآن، بما أنني حصلت على النظير الضربي فسوف أضرب.

تذكرت ! يجب أن أضرب من جهة اليمين، لأن عملية ضرب المصفوفات ليست إبدالية.

سأعيد كتابة معادلة المصفوفات، ثم أضرب. هذا يعني أن:

س = ٢، ص = ٣.

وماذا كتب؟

٢س + ٣ص = ١٣
٥س + ٧ص = ٣١

$\begin{bmatrix}٢ & ٣\\ ٥ & ٧\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}١٣\\ ٣١\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}٢ & ٣\\ ٥ & ٧\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{١}{٢\times٧-٥\times٣}\begin{bmatrix}٧ & -٣\\ -٥ & ٢\end{bmatrix}$

$=-١\begin{bmatrix}٧ & -٣\\ -٥ & ٢\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-٧ & ٣\\ ٥ & -٢\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}-٧ & ٣\\ ٥ & -٢\end{bmatrix}\begin{bmatrix}٢ & ٣\\ ٥ & ٧\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}١٣\\ ٣١\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-٧ & ٣\\ ٥ & -٢\end{bmatrix}$

$١\times٢ \quad ٢\times٢$

لا يمكن أن أضرب

$\begin{bmatrix}-٧ & ٣\\ ٥ & -٢\end{bmatrix}\begin{bmatrix}٢ & ٣\\ ٥ & ٧\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-٧ & ٣\\ ٥ & -٢\end{bmatrix}\begin{bmatrix}١٣\\ ٣١\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-٧)\times١٣+٣\times٣١\\ ٥\times١٣+(-٢)\times٣١\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}٢\\ ٣\end{bmatrix}$

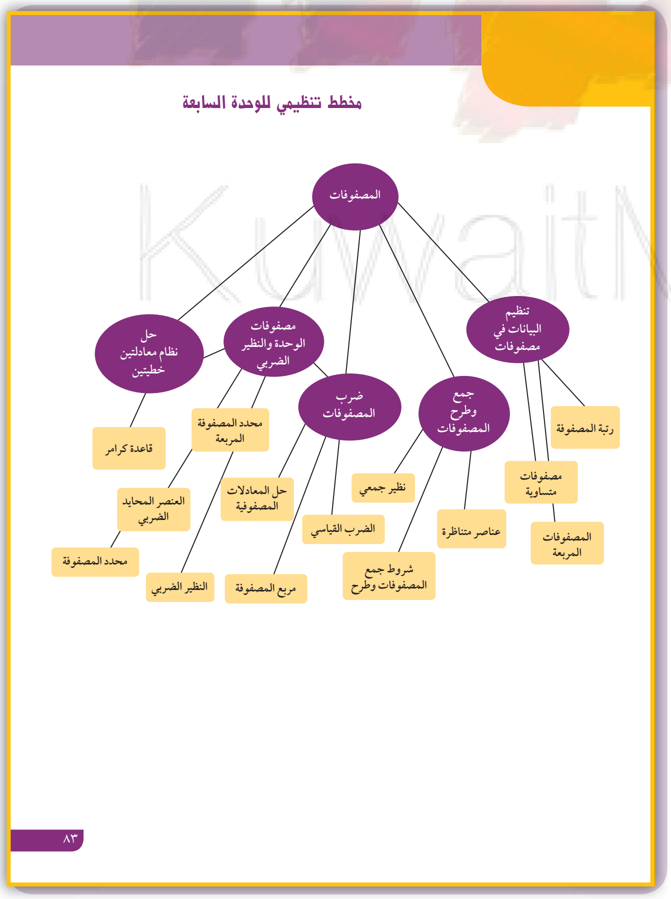
إحداثيا نقطة التقاطع هما (٢، ٣)

مسألة إضافية

١ إحداثيا نقطة في المستوي هما حل النظام: ١٢س + ١٣ص = ١٤ ، ٥س + ٧ص = ٩
استخدم المصفوفات لحل النظام وإيجاد إحداثيي هذه النقطة.

٢ ما المشاكل التي ستعترض مرشدًا
أ إذا لم يكن للنظام حلول؟
ب إذا كان للنظام عدد غير منته من الحلول؟

٨٢



إجابات «مسألة إضافية»

١ $\begin{bmatrix}١٢ & ١٣\\ ٥ & ٧\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}١٤\\ ٩\end{bmatrix}$

$\text{أ}=\begin{bmatrix}١٢ & ١٣\\ ٥ & ٧\end{bmatrix}$ ؛ $|\text{أ}| = ١٩ \neq ٠$

$\text{أ}^{-١}=\dfrac{١}{١٩}\begin{bmatrix}٧ & -١٣\\ -٥ & ١٢\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{٧}{١٩} & \frac{-١٣}{١٩}\\ \frac{-٥}{١٩} & \frac{١٢}{١٩}\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{٧}{١٩} & \frac{-١٣}{١٩}\\ \frac{-٥}{١٩} & \frac{١٢}{١٩}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}١٤\\ ٩\end{bmatrix}$

س = −١، ص = ٢

إحداثيا النقطة هما (−١، ٢).

٢ لن يوجد نظير ضربي للمصفوفة أ، وبالتالي سوف يحتاج إحدى الطرق السابقة (الحذف أو التعويض).

(أ) لن يتمكن مرشد من إيجاد النظير الضربي للمصفوفة لأن محدد المصفوفة أ يساوي صفر.

(ب) يساوي المحدد في هذه الحالة صفرًا لذا لن يتمكن مرشد من إيجاد النظير الضربي للمصفوفة أ.

ملخص

- المصفوفة عبارة عن تنظيم من الأعداد على شكل مستطيل، ترتب فيه الأعداد في صفوف وأعمدة وتكتب مثلًا: أ.
- يحدّد أي عنصر في المصفوفة بدلالة رقمي الصف والعمود الواقع فيهما.
- تكون المصفوفتان متساويتين إذا كانت لهما الرتبة (الأبعاد) نفسها، وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية.
- تحصل على مصفوفة الجمع بجمع العناصر المتناظرة، كما ويمكنك أيضًا طرح المصفوفات عن طريق طرح العناصر المتناظرة.
- العناصر المتناظرة في المصفوفات هي العناصر التي لها الرتبة نفسها في كلّ مصفوفة.
- المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار تسمى مصفوفة صفرية.
- المصفوفة −أ هي النظير الجمعي للمصفوفة أ.
- خواص جمع المصفوفات: أ + ب = ب + أ

أ + (ب + جـ) = (أ + ب) + جـ

٠ + أ = أ + ٠ = أ

أ + (−أ) = ٠

- عند ضرب مصفوفة في عدد قياسي، نضرب كل عنصر من المصفوفة في هذا العدد.
- تكون مصفوفة الضرب معرّفة، إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى مساويًا لعدد الصفوف في المصفوفة الثانية.

$أ_{م\times ن} \times ب_{ن\times ر} = جـ_{م\times ر}$.

- لكي تقوم بعملية ضرب المصفوفات، اضرب عناصر كل صف من المصفوفة الأولى في عناصر كل عمود من المصفوفة الثانية. أوجد ناتج كل ضرب، ثم اجمع نواتج الضرب.
- إذا كانت أ من الرتبة م × ن ، ب من الرتبة ن × ر، فإن رتبة المصفوفة أ × ب هي م × ر.
- خصائص ضرب المصفوفات: (أ × ب) × جـ = أ × (ب × جـ)

أ × (ب + جـ) = أ × ب + أ × جـ

(ب + جـ) × أ = ب × أ + جـ × أ

- المصفوفة المربعة هي مصفوفة فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة.
- المصفوفة المربعة ن × ن التي عناصر قطرها الرئيسي هي ١ وبقية العناصر هي الصفر، تسمى مصفوفة الوحدة للضرب وتكتب و.
- مصفوفة الوحدة هي مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسي ١ وبقية العناصر صفر.

- مصفوفة النظير (المعكوس) الضربي للمصفوفة المربعة أ، تكتب $أ^{-1}$ ويكون:

$أ^{-1} \times أ = و$، $أ \times أ^{-1} = و$، وتسمى النظير الضربي للمصفوفة أ .

- تقترن كل مصفوفة مربعة أ بعدد حقيقي يسمى «محدد» ويرمز إليه بالرمز |أ| ويقرأ محدد المصفوفة أ. وإذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ب & أ \\ د & جـ \end{bmatrix}$

فإن $|أ| = \begin{vmatrix} ب & أ \\ د & جـ \end{vmatrix} = أد - ب جـ$

$أ^{-1} = \frac{1}{أد - ب جـ} \begin{bmatrix} -ب & د \\ أ & -جـ \end{bmatrix}$ حيث أد − ب جـ ≠ ٠

- في المصفوفة $\begin{bmatrix} ب & أ \\ د & جـ \end{bmatrix}$، إذاكان أ د − ب جـ = ٠ . تسمى المصفوفة منفردة وليس لها نظير ضربي.
- حلّ نظام من معادلتين خطيتين هو زوج مرتب يحقق المعادلتين معًا.
- يمكن حلّ نظام من معادلتين خطيتين باستخدام النظير الضربي للمصفوفة أو باستخدام المحددات (قاعدة كرامر).

مراجعة الوحدة السابعة

(١) يبيّن الجدول درجات الحرارة العظمى والصغرى المسجلة في ست مناطق.

المنطقة	الدرجة العظمى	الدرجة الصغرى
١	°٣٠	°٣٧−
٢	°٤٠	°٣٣−
٣	°٤٢	°١٤−
٤	°٣٧	°١−
٥	°٣٩	°٢٨−
٦	°٤٤	°٢−

(أ) اعرض البيانات في مصفوفة (في كل صف الدرجة العظمى والدرجة الصغرى لمنطقة). ما أبعاد هذه المصفوفة؟

(ب) حدّد $أ_{٢٤}$

في التمرينين (٢–٣)، أوجد الناتج .

(٢) $\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$

(٣) $\begin{bmatrix} -18 & 7 & 22 \\ 11 & 15 & 5 \\ -17 & 14 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & 13 & 1 \\ 19 & -3 & 24 \\ 20 & 10 & 9 \end{bmatrix}$

في التمارين (٤–٧)، أوجد ناتج ضرب كل مما يأتي إن أمكن مع ذكر السبب.

(٤) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

(٥) $\begin{bmatrix} 10 & 3 \\ -4 & 21 \end{bmatrix} -3$

(٦) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 8 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 15 & 9 \\ 7 & 2 & -8 \\ 1 & -8 & 63 \end{bmatrix}$

(٧) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

في التمرينين (٨–٩)، أوجد محدد كل مصفوفة.

(٨) $\begin{bmatrix} -7 & -6 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$

(٩) $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}$

في التمرينين (١٠–١١)، أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة إن أمكن مع ذكر السبب.

(١٠) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(١١) $\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ -16 & -14 \end{bmatrix}$

في التمارين (١٢–١٧)، حل في س.

(١٢) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = س \times \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

(١٣) $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$ – س = $\begin{bmatrix} ٨ & ١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$

(١٤) س + $\begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٦ \\ -١ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٨ & ١ & ٠ \\ ١٤ & ٣ & -١ \end{bmatrix}$

(١٥) $\begin{bmatrix} -٣ & -٢ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ × س = $\begin{bmatrix} ٨ & -١ \\ ٦ & ٠ \end{bmatrix}$

(١٦) ٤س + ٣$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ١٠ & ٨ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}$

(١٧) ٢س = $\frac{١}{٤}$$\begin{bmatrix} -٦ & ٢ \\ ٨ & -٨ \end{bmatrix}$

(١٨) حل النظام: ٢س – ص = ٢ ، ٢س – ٢ص = ٤ مستخدمًا النظير الضربي.

(١٩) حل النظام: –٣س + ٥ص = –٤ ، س – ٣ص = ٤ مستخدمًا طريقة كرامر.

(٢٠) اكتب مصفوفتين أ، ب كل منهما من الرتبة ٢ × ٢.
أثبت أن ضرب المصفوفات هو غير إبدالي.

(٢١) هل كل مصفوفة مما يلي هي النظير الضربي للأخرى؟
$\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} -١ & -١ \\ -٣ & -٢ \end{bmatrix}$

(٢٢) اشتريت ١٠ قرنفلات و٥ أقحوانات بمبلغ ١٢,٥٠٠ دينارًا. وبعد ظهر اليوم نفسه اشتريت ٥ قرنفلات و٨ أقحوانات بمبلغ ١١,٧٥٠ دينارًا.
فما سعر القرنفلة الواحدة والأقحوانة الواحدة باستخدام المصفوفات؟

تمارين إثرائية

(١) لنعتبر أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -١ & -٣ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$

(أ) هل للمصفوفات: أ، ب ، أ + ب نظير ضربي؟

(ب) أوجد أ$^{-١}$، ب$^{-١}$، (أ + ب)$^{-١}$.

(جـ) وضّح ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة:

إذا كانت أ ، ب مصفوفتان ذات نظير ضربي، أ + ب هي مصفوفة ذات نظير ضربي فإن:

(أ + ب)$^{-١}$ = أ$^{-١}$ + ب$^{-١}$.

(د) أعطِ مثلًا عن مصفوفتين ذات نظير ضربي شرط ألا يكون لمصفوفة مجموعهما نظيرًا ضربيًّا.

(٢) لنعتبر أ = $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix}$

(أ) أوجد أ + ب ، ثمّ (أ + ب)^{٢}.

(ب) أوجد أ^{٢}، أ × ب ، ب^{٢} ثمّ أ^{٢} + ٢أ × ب + ب^{٢}. قارن بين إجابتيك في (ب)، (أ).

(جـ) طبّق الخطوتين (أ)، (ب) باستخدام ب = $\begin{bmatrix} -٥ & ١ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$

(٣) إذا طرحنا ثلاثة أمثال عمر ربيع من مثلي عمر جاد نحصل على ٥. أمّا إذا طرحنا ثلاثة أمثال عمر جاد من خمسة أمثال عمر ربيع نحصل على –٢.

(أ) مثّل المسألة أعلاه على شكل نظام معادلتين من متغيرين.

(ب) اكتب نظام معادلات على شكل معادلة مصفوفية: أ × س = ب ،

حيث أ هي مصفوفة مرّبعة من الرتبة ٢ × ٢، س = $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$ ، ب من الرتبة ٢ × ١.

(جـ) أوجد محدد المصفوفة أ. هل للمصفوفة أ نظير ضربي؟ إذا كان لها نظيرًا ضربيًّا فأوجد أ$^{-١}$.

(د) أوجد قيم س، ص باستخدام أ$^{-١}$.

(هـ) حل نظام معادلات مستخدمًا قاعدة كرامر.

(٤) لنأخذ المصفوفات التالية:
و = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، أ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

(أ) احسب أ^{٢} ، أ^{٣}.

(ب) لكل عدد حقيقي س، نعتبر المصفوفة م(س)، حيث إنّ:
م(س) = و + س أ + $\frac{س^{٢}}{٢}$ × (أ^{٢}).

١. تحقق من أنّ: م(س) = $\begin{bmatrix} ١ & س & \frac{س^{٢}}{٢} \\ ٠ & ١ & س \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$

٢. احسب: م(٠) ، م(٤).

٣. س، ص عددان حقيقيان، احسب م(س) × م(ص).

٤. برهن أنّ: م(س) × م(ص) = م(س + ص).

(٥) **التفكير الناقد:** لتكن أ = $\begin{bmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{bmatrix}$. ما هي قيم العناصر أ ، ب ، جـ ، د عندما يكون النظير الضربي للمصفوفة أ هو أ ؟ (**مساعدة:** هناك أكثر من إجابة صحيحة واحدة).