الوحدة الرابعة: الجبر ـ التغير

Algebra ـ Variation

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

٤ – ١ : النسبة والتناسب

جزء ١ : النسبة

جزء ٢ : التناسب والضرب التقاطعي

جزء ٣: التناسب المتسلسل

جزء ٤ : تطبيقات حياتية

٤ – ٢ : التغير الطردي

جزء ١ : التغير الطردي

جزء ٢ : دالة التغير الطردي

جزء ٣: معدل التغير الطردي

جزء ٤ : تطبيقات حياتية

٤ – ٣: التغير العكسي

جزء ١ : التغير العكسي

جزء ٢ : دالة التغير العكسي

جزء ٣: مقارنة بين التغير الطردي والتغير العكسي

جزء ٤ : تطبيقات حياتية

KuwaitMath.com

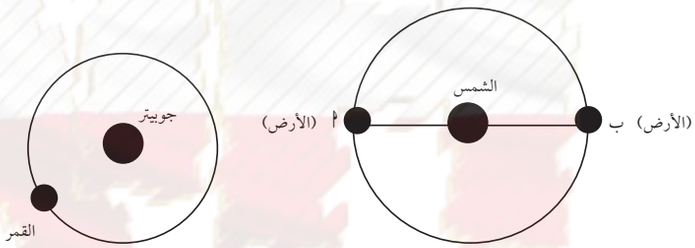
مقدمة الوحدة

سوف يتعامل الطلاب مع بعض مواضيع الجبر مثل النسبة والتناسب والتغير الطردي والتغير العكسي.

دعهم يقرأون بتمعن فقرة «أضف إلى معلوماتك» في كتاب الطالب ليضيئوا من خلالها على مساهمة العلماء العرب في تطوير العلوم وإثراء الحضارة الإنسانية بما قدموه في مجالات العلوم والرياضيات والطب والفلك والفلسفة وغير ذلك.

من المهم جدًا تنبيه الطلاب إلى أن دروس هذه الوحدة لها تطبيقات حياتية سوف يتعرفون عليها ويمكن أن يواجهوا مثيلاتها في مواقف يومية.

وتاريخيًّا لا بد من الإشارة إلى أن العالم «أولْ رومَر» (Ole Romer) سنة ١٦٧٥ قد استخدم التناسب ليقدر سرعة الضوء على الشكل التالي:



لقد قام بقياس حركة الأقمار التي تدور في مدار جوبيتر. عندما تحركت الأرض من النقطة أ إلى النقطة ب حول الشمس، وجد أن القمر بقي ظاهرًا لمدة ١٦,٦ دقيقة.

واستنتج أن الضوء يحتاج إلى ١٦,٦ دقيقة ليجتاز المسافة من النقطة أ إلى النقطة ب. باستخدام التناسب، قدّر العالم رومر أن سرعة الضوء ٢٤١٣٥٠ كيلومترًا بالثانية والتي هي حوالى ٨١٪ من سرعة الضوء المعتمدة حاليًّا والتي تساوي ٣٠٠٠٠٠ كيلومتر بالثانية تقريبًا.

الوحدة الرابعة

الجبر – التغير
Algebra - Variation

مشروع الوحدة: تحويل التروس Shifting Gears في الدراجات الهوائية الرياضية.

١ مقدمة المشروع:
يستخدم الرياضيون في سباقات الدراجات الهوائية دراجات لها تروس متغيّرة.
يمكن للتروس والروافع أن تسهّل العمل، لكن تبقى هناك مفاضلة للجودة. فالتروس العالية في الدراجة تسمح بالسير مسافة أكبر مع كل دورة من الدواسات ولكن بمجهود أكبر.

٢ الهدف:
كيف تختار التروس الملائمة خلال ركوب الدراجة: أماكن مسطحة، صعود الجبال، سباقات السرعة، أو المسافات الطويلة.
سوف تستخدم ما تتعلمه في الوحدة حول التغير والتناسبات في عملك.

٣ اللوازم:
أوراق، أوراق رسم بياني، آلة حاسبة.

٤ أسئلة حول التطبيق:
أ ضع جدولًا يبيّن المسافات التي تقطعها على دراجتك مستخدمًا تروسات مختلفة، ولمدة زمنية ثابتة وعلى الطريق نفسها.
ب أعد التجربة واختر طريقًا غير مسطحة (صعودًا ثم نزولًا).
ج اسأل أحد المحال التجارية عن خصائص الدراجات التي يستخدمها الرياضيون في السباقات وقارنها بخصائص الدراجة التي قدتها.
د التقرير: ضع تقريرًا مفصلًا تبيّن فيه كيف استفدت من النسب والتناسب في تنفيذ المشروع.

دروس الوحدة

النسبة والتناسب	التغير الطردي	التغير العكسي
٤-١	٤-٢	٤-٣

١٥٢

KuwaitMath.com

إرشادات توجيهية للطلاب:

اسأل الطلّاب:

(أ) لماذا يستخدم المتسابقون على الدراجات الهوائية نموذج الدولاب الأمامي الأكبر من الدولاب الخلفي؟

(ب) لماذا تكون التروس على الدراجة الهوائية ذات قياسات مختلفة؟

(ج) اطلب إليهم إجراء بحث يتناول مباراة الركوب على الدراجات الهوائية ونتائجها.

(د) ما الفائدة المرجوة من ركوب الدراجات الهوائية؟

الوحدة الرابعة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت تمثيل العلاقات بيانيًا باستخدام المتغيرات.
- استكشفت أنماط الدوال.
- تعرفت طرائق حل معادلات ومتباينات من الدرجة الأولى بمتغير واحد أو بمتغيرين.
- تعرفت طرائق حل معادلات ومتباينات من الدرجة الثانية بمتغير واحد ومثلت الحلول بيانيًا.
- تعرفت التناسب وبعض خواص التناسب.

أضف إلى معلوماتك

الجبر كلمة عربية استخدمها محمد بن موسى الخوارزمي (القرن التاسع الميلادي في عصر الخليفة العباسي المأمون) في كتابه الذي ألفه وكان عنوانه «الجبر والمقابلة» والذي وضع فيه طرقًا أصيلة لحلّ المعادلات، وبذلك يعتبر الخوارزمي مؤسس علم الجبر بعد أن كان الجبر جزءًا من الحساب. وقد ترجم الكتاب إلى اللغات الأوروبيّة بعنوان «الجبر» ومنها أخذ العلم «الجبر» (algebra) هذا الاسم.

ويقول ابن الياسمين (أحدُ الرياضيّين الشعراء):

على ثلاثة يدور الجبر
المال والأعداد ثم الجذر
فالمال كل عدد مربع
وجذره واحد تلك الأضلع
والعدد المطلق ما لم ينسب
للمال أو للجذر، فافهم تصب

ماذا سوف تتعلم؟

- النسبة والتناسب واستخدامهما في حل مسائل حياتية.
- خواص التناسب المتسلسل.
- التغير الطردي.
- التغير العكسي.

المصطلحات الأساسية

النسبة – مقياس الرسم – التناسب – التناسب المتسلسل (الهندسي) – التغير الطردي – التغير العكسي.

محمد بن موسى الخوارزمي

١٥٣

سلّم التقييم

٤.	يضع جداول المسافات التي يجتازها صعودًا ونزولًا وأفقيًّا بشكل كامل، ويكتب تقريرًا مفصلًا وواضحًا يبين فيه كيف استخدم النسب والتناسب.
٣.	يضع جداول المسافات التي يجتازها صعودًا ونزولًا وأفقيًّا مرتكبًا بعض الأخطاء في حساب النسب والتناسب، ويكتب تقريرًا مفصلًا ولكن يلزمه بعض الإيضاحات.
٢.	يضع جداول المسافات التي يجتازها صعودًا ونزولًا وأفقيًّا مع أخطاء متعددة في حساب النسب والتناسب، ويكتب تقريرًا لا يعبر كثيرًا عن أهداف المشروع.
١.	معظم عناصر المشروع ناقصة وغير واضحة.

KuwaitMath.com

٤ـ١: النسبة والتناسب

١ الأهداف

- يتعرف النسبة المئوية للتغير.
- يتعرف النسب المئوية التزايدية أو التناقصية.
- يتعرف التناسب.
- يستخدم خواص التناسب في حل المسائل.
- يتعرف خاصية الضرب التقاطعي.
- يتعرف التناسب المتسلسل.
- يستخدم خواص التناسب المتسلسل في حل مسائل.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

النسبة – مقياس الرسم – التناسب – التناسب المتسلسل – الوسط الهندسي.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة مدرجة – أوراق رسم بياني – آلة حاسبة – جهاز إسقاط – حاسوب – ورق مقوى .

٤ التمهيد

اسأل الطلاب:

- ما نسبة عدد الكتب إلى عدد الدفاتر في حقيبتك؟
- ما نسبة عدد المكاتب إلى عدد الكراسي؟

ناقش مع الطلاب معنى نسبة ٥ إلى ٣.

- اسأل الطلاب عن نسبة عدد الغائبين إلى عدد الحاضرين اليوم في الفصل، ونسبة عدد الكراسي إلى عدد طاولات الطلبة داخل غرفة الفصل.
- ناقش كيفية رسم مخططات للمنشآت (التصميمات الهندسية)، وقراءة الخرائط لتعرف الأبعاد الحقيقية للمسافات بين مدينتين أو موقعين.
- وضِّح مفهوم مقياس الرسم كما ورد في فقرة «دعنا نفكر ونتناقش».

٤ـ١
النسبة والتناسب
Ratio and Proportion

دعنا نفكر ونتناقش

تعلم أن **النسبة** هي مقارنة بين كميتين من النوع نفسه يمكن تمثيلها بكسر.
فمثلًا: النسبة بين العدد ٣ (الحد الأول)، والعدد ٤ (الحد الثاني) هي $\frac{٣}{٤}$ ويمكن التعبير عن هذه النسبة بالصورة ٣:٤ وتُقرأ ٣ إلى ٤.

سوف تتعلم
- خواص التناسب
- تمارين وتطبيقات هندسيّة
- خواص التناسب المتسلسل

مثال (١)

إذا كانت المسافة بين الكويت العاصمة والرياض هي ٥٥٠ كم، وكانت هذه المسافة ممثَّلةً في إحدى الخرائط بقطعة مستقيمة طولها ١١ سم. أوجد مقياس الرسم، ثم أوجد النسبة بين الطول على الخريطة والمسافة الحقيقيّة.

تذكر:
١ كم = ١٠٠٠٠٠ سم

الحلّ:

مقياس الرسم = $\frac{\text{المسافة على الخريطة}}{\text{المسافة الحقيقية}}$

$= \frac{١١ \text{ سم}}{٥٥٠ \text{ كم}} = \frac{١١ \text{ سم}}{٥٥٠٠٠٠٠٠ \text{ سم}}$

حيث إن الكميتين من النوع نفسه يمكن كتابتها كنسبة بالصورة:

$\frac{١١}{٥٥٠٠٠٠٠٠}$ أو ١١ : ٥٥٠٠٠٠٠٠

أي النسبة تساوي ١ : ٥٠٠٠٠٠٠

حاول أن تحل

١ من مثال (١) استخدم مقياس الرسم على الخريطة لإيجاد المسافة الحقيقيّة بين الدمام والكويت العاصمة.

تدرب

١ رسم مهندس معماري مخططًا لإحدى الشقق كما بالشكل التالي. اشترك مع أحد زملائك في الآتي:

أ أوجد بالقياس الأطوال من الرسم، ثم أكمل الجدول التالي:

	الطول في الرسم بالسم	الطول الحقيقي بالمتر	الطول الحقيقي بالسم
غرفة (١)			
غرفة (٢)			
المطبخ			
الحمام			

ب أوجد مقياس الرسم [ ] سم: [ ] م

ج أوجد النسبة بحيث يكون البسط والمقام بالوحدات نفسها، واختصر النسبة لأبسط صورة.

النسب المئوية التزايدية (أو التناقصية) Percent of Increase (Decrease)

عندما تتغير قيمة ما (بالزيادة أو النقصان) فإن النسبة المئوية (للزيادة أو النقصان) تسمى النسبة المئوية للتغير (Percent of Change):

النسبة المئوية للتغير = $\frac{\text{قيمة التغير}}{\text{القيمة الأصلية}} \times ١٠٠$

مثال (٢)

تطبيقات حياتية

الزراعة: في عام ٢٠١٠، أنتجت إحدى مزارع الوفرة في دولة الكويت ٢٦٥٠ طنًّا من الطماطم. وفي عام ٢٠١١، أنتجت المزرعة نفسها ٢٧٨٢,٥ طنًّا من الطماطم. احسب النسبة المئوية للزيادة في إنتاج هذه المزرعة.

الحل:

الزيادة في الإنتاج تساوي: ٢٧٨٢,٥ – ٢٦٥٠ = ١٣٢,٥ طنًّا

لتكن س النسبة المئوية للزيادة:

٥ التدريس

في عمل تعاوني:

- يمكنك استخدام شفافية لمخطط الشقة المبينة في كتاب الطالب. قد يحتاج العمل إلى مسطرة مدرجة وآلة حاسبة للقياس وإجراء العمليات الحسابية.
- لاحظ أن التعريف الرياضي للنسبة هو:

مقارنة بين كميتين من النوع نفسه وتكتب بالصورة $\frac{أ}{ب}$ أو أ:ب.

- في النسبة – بصفة عامة – من الضروري أن يكون كلٌّ من حدّي النسبة بالوحدات نفسها.
- وفي مقياس الرسم مثلًا قد يكون المقياس ١ سم: ١٠٠ كم في الخرائط. وقد توجد نسبة بين عدد البنين وعدد البنات في امتحان الثانوية العامة، وقد توجد النسبة بين عدد المعلمين وعدد الطلاب.

عند حساب النسبة المئوية تراعى وحدات حدّي النسبة.

في التناسب:

- يمكن البدء بكسور متكافئة، مثلًا $\frac{١}{٢} = \frac{٣}{٦}$ وإعادة قراءة ذلك بلغة تساوي نسبتين ١:٢ = ٣:٦ أو بالصورة ١، ٢، ٣، ٦ أربعة أعداد متناسبة والعكس صحيح.
- انتقل إلى الصورة العامة $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ تكافئ أ، ب، جـ، د أعداد متناسبة وتكتب أيضًا أ د = ب جـ.
- اعرض أمثلة وأمثلة مضادة للتناسب، مثلًا: ١، ٢، ٣، ٦ أعداد متناسبة ولكن ١، ٢، ٣، ٤ ليست أعدادًا متناسبة. ثمّ اطلب إلى الطلاب إعطاء أمثلة وأمثلة مضادة.
- اعرض تناسبًا، مثل: $\frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$ واطلب إلى الطلاب أن يبحثوا عن الخواص التي يمكن أن يستنتجوها... عمِّم الخواص الصحيحة على $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$.
- **اسأل للتفكير:** هل $\frac{١٠}{٢} = ٥$ تناسب؟ ضعها في صورة تناسب $\frac{٥}{١} = \frac{١٠}{٢}$. ١:٥ = ٢:١٠

س = $\frac{\text{قيمة التغير}}{\text{القيمة الأصلية}} \times ١٠٠$

س = $\frac{١٣٢,٥}{٢٦٥٠} \times ١٠٠$

س = ٥

∴ النسبة المئوية للزيادة هي ٥، أي أن الزيادة تساوي ٥٪ من الإنتاج عن العام السابق.

حاول أن تحل

٢ في العام ٢٠١٠، كان إنتاج المزرعة نفسها ٥٥٠٠ طنًّا من البطاطا أما في العام ٢٠١١ فكان الإنتاج ٦٣٥٠ طنًّا.

احسب النسبة المئوية لزيادة منتج البطاطا بين عامي ٢٠١٠، ٢٠١١ إلى أقرب جزء من مئة.

التناسب Proportion

التناسب هو تساوي نسبتين أو أكثر.

فمثلًا: $\frac{٣}{٤} = \frac{١٢}{١٦} = \frac{١٥}{٢٠} = ...$

ويمكن كتابة ذلك كالآتي: ٤:٣ = ١٦:١٢ = ٢٠:١٥...

ونقرأ ٣ إلى ٤ هي نفسها ١٢ إلى ١٦ هي نفسها ١٥ إلى ٢٠...

خاصيّة التساوي:

ليكن أ، ب، جـ، د ∈ ح*، ك ∈ ح.

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإنّ $\frac{أ}{ب} \times ك = \frac{جـ}{د} \times ك$ ، $ك \times \frac{أ}{ب} = ك \times \frac{جـ}{د}$

١٥٦

فمثلًا:

نعلم أن $\frac{٣}{٤} = \frac{١٥}{٢٠}$ بضرب الطرفين في ٢ نجد أن:

$\frac{٣}{٤} \times ٢ = \frac{١٥}{٢٠} \times ٢$ أي أن $\frac{٣}{٢} = \frac{١٥}{١٠}$

تذكر:

ح* هي مجموعة الأعداد الحقيقية غير الصفرية

ح* = ح – {٠}

الرمز ∈ يقرأ ينتمي إلى

مثال (٣)

إذا كان $\frac{١}{٩} = \frac{٥}{٦}$ فأوجد قيمة أ.

الحل: $\frac{١}{٩} = \frac{٥}{٦}$

$\frac{١}{٩} \times ١٨ = \frac{٥}{٦} \times ١٨$ بضرب الطرفين في ١٨ (م.م أ للعددين ٦، ٩)

١ = ١٢ ٥ بالتبسيط

$\frac{١٥}{٢} = ١$ بقسمة الطرفين على ٢

٧,٥ = ١

حاول أن تحل

٣ إذا كان $\frac{٤}{٦} = \frac{ص}{٩}$ فأوجد قيمة ص.

خاصيّة الضرب التقاطعي:

ليكن أ، ب، جـ، د ∈ ح*

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن أ د = ب جـ

فمثلًا: $\frac{١٢}{١٦} = \frac{٣}{٤}$ من ذلك نجد أن:

١٢ × ٤ = ١٦ × ٣

٤٨ = ٤٨ عبارة صحيحة

١٥٧

KuwaitMath.com

في التناسب المتسلسل:

- خواص التناسب المتسلسل هي خواص التناسب العادي نفسها.
- ليس بالضرورة أن يكون التناسب العددي تناسبًا متسلسلًا.
- اطلب إلى الطلاب أن يعطوا أمثلة عن ثلاثيات من الأعداد تكوّن كل منها تناسبًا متسلسلًا، مثلًا: (١، ٢، ٤)، (١، ٣، ٩)، (٤، ٦، ٩).
- اطلب إليهم إعطاء أمثلة عن أربعة أعداد تكوِّن تناسبًا متسلسلًا، مثلًا: (٣، ٦، ١٢، ٢٤).
- ناقش (بأمثلة): هل كل أربعة أعداد في تناسب متسلسل تكون في تناسب عادي؟ وهل العكس صحيح؟
- في حل التمارين، دع الطلاب يستخدمون أكثر من طريقة للحل، مثلًا الضرب التقاطعي أو أي من خواص التناسب.
- المثالان (٧)، (٨) تطبيقان حياتيان يبيّنان أهمية التناسبات في حل مسائل حياتية يمكن أن تصادفنا يوميًّا.

مثال (٤)

أوجد قيمة ص في التناسب: $\frac{ص}{٢,٥} = \frac{٣}{٤}$

الحل:

$٤ ص = ٣ \times ٢,٥$ ضرب تقاطعي

$٤ ص = ٧,٥$

$ص = \frac{٧,٥}{٤}$ بقسمة الطرفين على ٤

$ص = ١,٨٧٥$

حاول أن تحل

٤ أوجد قيمة ب في التناسب: $\frac{٢}{ب} = \frac{٨}{٢٠}$

تعريف:

ليكن أ، ب، جـ، د ∈ ح*

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإنه يقال أن أ، ب، جـ، د **أعداد متناسبة**.

وإذا كانت أ، ب، جـ، د أعداد متناسبة فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

ويسمى أ، د **طرفي التناسب**، كما يسمى جـ، ب **وسطي التناسب**.

ولأنّ في هذه الحالة أ = ب جـ خاصيّة الضرب التقاطعي

فإنّ: حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين.

مثال (٥)

أثبت أن ٤، ١,٥، ٨، ٣ أعداد متناسبة.

الحل:

تكون الأعداد ٤، ١,٥، ٨، ٣ أعدادًا متناسبة عندما تتساوى النسبتان $\frac{٤}{١,٥}$، $\frac{٨}{٣}$

وحيث أن $\frac{٤}{١,٥} = \frac{٤٠}{١٥} = \frac{٨}{٣}$

أي أن $\frac{٤}{١,٥} = \frac{٨}{٣}$

∴ الأعداد متناسبة.

حاول أن تحل

٥ أثبت أن ٣,٤، ٧، ٢,٠٤، ٤,٢ أعداد متناسبة.

مثال (٦)

إذا كانت أ، ب، جـ أعدادًا متناسبة مع الأعداد ٢، ٥، ٧. فأوجد القيمة العددية للمقدار $\frac{أ + ٣ب}{ب + جـ}$.

الحل:

∵ أ، ب، جـ متناسبة مع ٢، ٥، ٧

∴ $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٥} = \frac{جـ}{٧} = م$

∴ أ = ٢م، ب = ٥م، جـ = ٧م

∴ المقدار $\frac{أ + ٣ب}{ب + جـ} = \frac{٢م + ٣(٥م)}{٢(٥م) + ٧م} = \frac{١٧م}{١٧م} = ١$

معلومة رياضية:

إذا كانت أ، ب، جـ أعدادًا متناسبة مع الأعداد د، هـ، و، فإن:

$\frac{أ}{د} = \frac{ب}{هـ} = \frac{جـ}{و}$

حاول أن تحل

٦ إذا كانت الأعداد أ، ب، جـ متناسبة مع ٣، ٥، ١١. فأوجد القيمة العددية للمقدار $\frac{أ + ٣ب}{٥ب + جـ}$.

مثال (٧)

تشارك سالم ومنصور بتنفيذ أعمال الدهان. إن نسبة الزمن الذي أمضياه في العمل هي ٧:٤. قبضا معًا ٨٨ دينارًا. كيف سيتوزع هذا المبلغ بينهما إذا عمل سالم فترة زمنية أطول من منصور؟

الحل: لتكن س نصيب سالم، م نصيب منصور من المبلغ.

$\frac{س}{م} = \frac{٧}{٤}$ كتابة التناسب

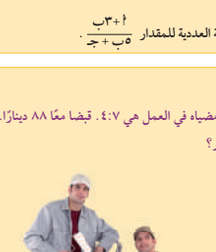
$\frac{س + م}{م} = \frac{٧ + ٤}{٤}$ من خواص التناسب

$\frac{٨٨}{م} = \frac{١١}{٤}$

$م = \frac{٨٨ \times ٤}{١١} = ٣٢$

س = ٨٨ − ٣٢ = ٥٦

ينال سالم ٥٦ دينارًا، وينال منصور ٣٢ دينارًا.



حاول أن تحل

٧ في مثال (٧)، كيف سيتوزع المبلغ بين سالم ومنصور إذا كانت نسبة الزمن ٥:٣، إذا عمل منصور فترة زمنية أطول من سالم؟

مثال (٨) تطبيقات حياتية

عند القيام بأنشطة رياضية فإن الشخص يفقد سعرات حرارية تتناسب تقريبًا مع وزنه.

والجدول المجاور يبيّن ذلك لشخص وزنه ٦٥ كجم، عند قيامه بالنشاطات المذكورة لمدة ٦٠ دقيقة.

قام هذا الشخص بأحد هذه الأنشطة لمدة ٨٠ دقيقة. اكتب تناسبًا تستطيع بواسطته أن تحسب عدد السعرات الحرارية التي يفقدها (بالتقريب).

النشاط لمدة ٦٠ دقيقة	السعرات المحروقة
المشي بسرعة ٤–٥ كم/ساعة	٣٠٠
السباحة أو التزلج	٥٠٠
لعبة كرة قدم	٤٠٠

الحلّ: يفرض أن س عدد السعرات الحرارية التي يفقدها في كل نشاط

عند المشي ٦٠ دقيقة يحرق ٣٠٠ سعرة حرارية

عند المشي ٨٠ دقيقة يحرق س سعرة حرارية

أي أن $\frac{س}{٣٠٠} = \frac{٨٠}{٦٠}$

٦٠ س = ٨٠ × ٣٠٠ باستخدام الضرب التقاطعي

$س = \frac{٨٠ \times ٣٠٠}{٦٠}$

س = ٤٠٠ سعرة حرارية تقريبًا

وبالمثل السباحة: $\frac{س}{٥٠٠} = \frac{٨٠}{٦٠}$، س = ٦٦٧ سعرة حرارية تقريبًا.

وبالمثل كرة القدم: $\frac{س}{٤٠٠} = \frac{٨٠}{٦٠}$، س = ٥٣٣ سعرة حرارية تقريبًا.

حاول أن تحل

٨ إذا مارست رياضة كرة السلة لمدة ٢٠ دقيقة، تفقد ٣٠٠ سعرة. اكتب تناسبًا تستطيع بواسطته أن تحسب عدد السعرات الحرارية التي تفقدها إذا مارست هذه الرياضة لمدة ٥٠ دقيقة.

التناسب المتسلسل الهندسي Geometric Proportion

ليكن أ، ب، جـ ∈ ح*

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$ فإنه يقال إن أ، ب، جـ في **تناسب متسلسل** (أو تناسب هندسي)

وبالعكس: إذا كانت أ، ب، جـ في تناسب متسلسل فإنّ: $\frac{أ}{جـ} = \frac{ب}{جـ}$

ويسمى ب **الوسط المتناسب** للعددين أ، جـ أو **الوسط الهندسي** لهما كما يسمى أ، جـ **طرفي التناسب**.

فمثلًا: ٢، ٤، ٨ في تناسب متسلسل لأن $\frac{٢}{٤} = \frac{٤}{٨}$.

ولاحظ أن ٨، ٤، ٢ كذلك في تناسب متسلسل لأن $\frac{٨}{٤} = \frac{٤}{٢}$.

٦ الربط

مسألة من البيئة: كتب على باب أحد المخازن ما يلي:

- ادفع $\frac{٢}{٣}$ السعر فقط.
- احصل على حسم قدره ٥٠٪ (خصم).

إذا كان سعر القميص ٤٢ دينارًا، فأيهما أفضل العروض لك؟

- **العرض الأول:** $\frac{٢}{٣} = \frac{س}{٤٢}$، س = ٢٨
- **العرض الثاني:** $\frac{٥٠}{١٠٠} = \frac{س}{٤٢}$، س = ٢١

العرض الثاني هو الأفضل.

٧ أخطاء متوقعة وطرق معالجتها

قد يكتب الطلاب النسبة $\frac{أ}{ب}$ على الشكل ب : أ.

وقد يخطئون أيضًا في كتابة التناسب المتسلسل: (١، ٣، ٩).

أكد لهم أن النسبة $\frac{أ}{ب}$ هي نسبة أ إلى ب أي تكتب أ : ب وليس ب : أ. وأن كتابة ١، ٣، ٩ هي $\frac{١}{٣} = \frac{٣}{٩}$.

٨ التقييم

راقب الطلاب وهم يحلون فقرات «حاول أن تحل»، ثم ناقش معهم الحلول التي توصلوا إليها.

اختبار سريع

١ أثبت أن: (أ) الأعداد: ٤، ٥، ٦، ٧,٥ متناسبة.

$\frac{٦}{٧,٥} = \frac{٤}{٥}$

(ب) الأعداد ٣، س، ٢٧ في تناسب متسلسل.

أوجد قيمة س. ٩، −٩

٢ الأعداد أ، ب، جـ، د متناسبة.

أثبت أن: $\frac{أ٢ + ب}{ب} = \frac{٢جـ + د}{د}$.

$\frac{أ٢ + ب}{ب} = ك٢ + ١$

$\frac{٢جـ + د}{د} = ك٢ + ١$.

إذا كان أ، ب، جـ ∈ ح* في تناسب متسلسل فإن جـ، ب، أ في تناسب متسلسل أيضًا.

مثال (٩)

أثبت أن الأعداد ٣، ٩، ٢٧ في تناسب متسلسل.

الحلّ:

$\frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$، $\frac{٩}{٢٧} = \frac{٩ \div ٩}{٩ \div ٢٧} = \frac{١}{٣}$

$\therefore \frac{٣}{٩} = \frac{٩}{٢٧}$

أي أن: ٣، ٩، ٢٧ في تناسب متسلسل.

حاول أن تحل

٩ اكتب ٣ أعداد في تناسب متسلسل.

مثال (١٠)

إذا كانت الأعداد ٥، س، ٢٠ في تناسب متسلسل، أوجد قيمة س، ثم تحقق.

الحل: نكتب التناسب المتسلسل: $\frac{٥}{س} = \frac{س}{٢٠}$

$س^٢ = ١٠٠$ الضرب التقاطعي

س = ١٠ أو س = −١٠

التحقق:

س = ١٠	س = −١٠
$\frac{٥}{س} = \frac{س}{٢٠}$	$\frac{٥}{س} = \frac{س}{٢٠}$
$\frac{٥}{١٠} = \frac{١٠}{٢٠}$	$\frac{٥}{-١٠} = \frac{-١٠}{٢٠}$
١٠٠ = ١٠٠ ✓	١٠٠ = ١٠٠ ✓

حاول أن تحل

١٠ هل يمكن إيجاد قيمة س بحيث تكون الأعداد −٩، س، ٤ في تناسب متسلسل؟ فسّر.

١٦١

خواص التناسب المتسلسل Properties of Chaine Proportion

خاصية (١)

ليكن أ، ب، جـ ∈ ح*

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$ (أي أن أ، ب، جـ في تناسب متسلسل)

فإن $ب^٢ = أجـ$ وذلك من خاصية الضرب التقاطعي

فمثلًا: في حالة ٣، ٩، ٢٧ نجد أن:

$٣ \times ٢٧ = (٩)^٢$ (كل من الطرفين يساوي ٨١)

خاصية (٢)

ليكن أ، ب، جـ، د ∈ ح*

إذا كان:

$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$ (أي أن أ، ب، جـ، د في تناسب متسلسل)

فإن:

$جـ = د \times م$، $ب = د \times م^٢$، $أ = د \times م^٣$

فمثلًا: في حالة $\frac{١٦}{٨} = \frac{٨}{٤} = \frac{٤}{٢} = ٢$ نجد أن:

$٤ = ٢ \times ٢$، $٨ = ٢ \times (٢)^٢$، $١٦ = ٢ \times (٢)^٣$

مثال (١١)

إذا كانت الأعداد ٦، س، ٥٤، ١٦٢ في تناسب متسلسل، أوجد قيمة س.

الحل:

∵ الأعداد في تناسب متسلسل

$\therefore \frac{٦}{س} = \frac{س}{٥٤} = \frac{٥٤}{١٦٢}$

$\therefore \frac{٦}{س} = \frac{٥٤}{١٦٢}$

$س \times ٥٤ = ٦ \times ١٦٢$ الضرب التقاطعي

$س = \frac{١٦٢ \times ٦}{٥٤} = ١٨$

قيمة س = ١٨

حاول أن تحل

١١ إذا كانت الأعداد ٤، س − ٢، ١، $\frac{١}{٢}$ في تناسب متسلسل، أوجد قيمة س.

١٦٢

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ $\frac{\text{١ سم}}{\text{٥٠ كم}} = \frac{\text{٨ سم}}{\text{س كم}}$ ، س = ٤٠٠ كم.

٢ $\frac{٥٥٠٠ - ٦٣٥٠}{٥٥٠٠} = ٠,١٣٤$ أي ١٥,٤٥٪.

٣ ص = ٦

٤ ب = ٥

٥ $\frac{٣,٤}{٧} = \frac{٢,٠٤}{٤,٢}$، حيث إن: $٣,٤ \times ٤,٢ = ٧ \times ٢,٠٤$

$= ١٤,٢٨$

٦ $\frac{أ + ٣ب}{٥ب + جـ} = \frac{٣ك + ١٥ك}{٢٥ك + ١١ك} = \frac{١}{٢}$

٧ $\frac{م}{س} = \frac{٥}{٣}$، $\frac{س + م}{س} = \frac{٣ + ٥}{٣}$

$\therefore \frac{٨}{٣} = \frac{٨٨}{س}$

$\therefore$ س $= \frac{٣ \times ٨٨}{٨} = ٣٣$

٨ $\frac{٢٠}{٣٠٠} = \frac{٥٠}{س}$ ، س = ٧٥٠ سعرة حرارية.

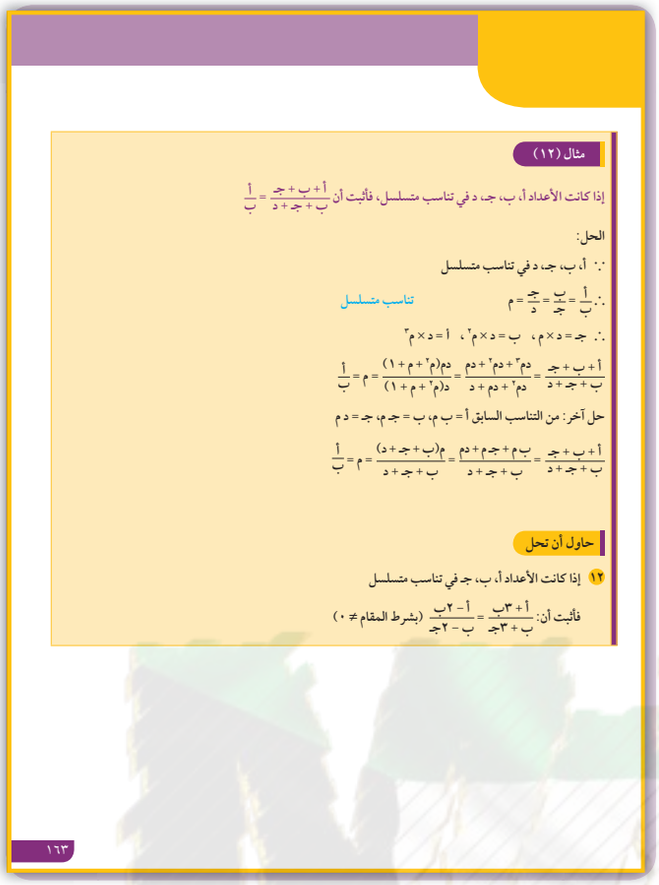
٩ تتنوع الإجابات. مثال: ٢، ٨، ٣٢.

١٠ لا يمكن لأن: $\frac{-٩}{س} = \frac{س}{٤}$ أي $س^{٢} = -٣٦$.

١١ س = ٤.

١٢ $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$، ومنه: أ = جـ $م^{٢}$، ب = جـ م.

نستنتج أن: $\frac{أ + ٣ب}{ب + ٣جـ} = \frac{أ - ٢ب}{ب - ٢جـ} = م$



مثال (١٢)

إذا كانت الأعداد أ، ب، جـ، د في تناسب متسلسل، فأثبت أن $\frac{أ + ب + جـ}{ب + جـ + د} = \frac{أ}{ب}$

الحل:

∵ أ، ب، جـ، د في تناسب متسلسل

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$ تناسب متسلسل

∴ جـ = د × $م^{٢}$، ب = د × $م^{٢}$، أ = د × $م^{٣}$

$\frac{أ + ب + جـ}{ب + جـ + د} = \frac{دم^{٣} + دم^{٢} + دم}{دم^{٢} + دم + د} = \frac{د(م^{٢} + م + ١)}{د(م^{٢} + م + ١)} = م = \frac{أ}{ب}$

حل آخر: من التناسب السابق أ = ب م، ب = جـ م، جـ = د م

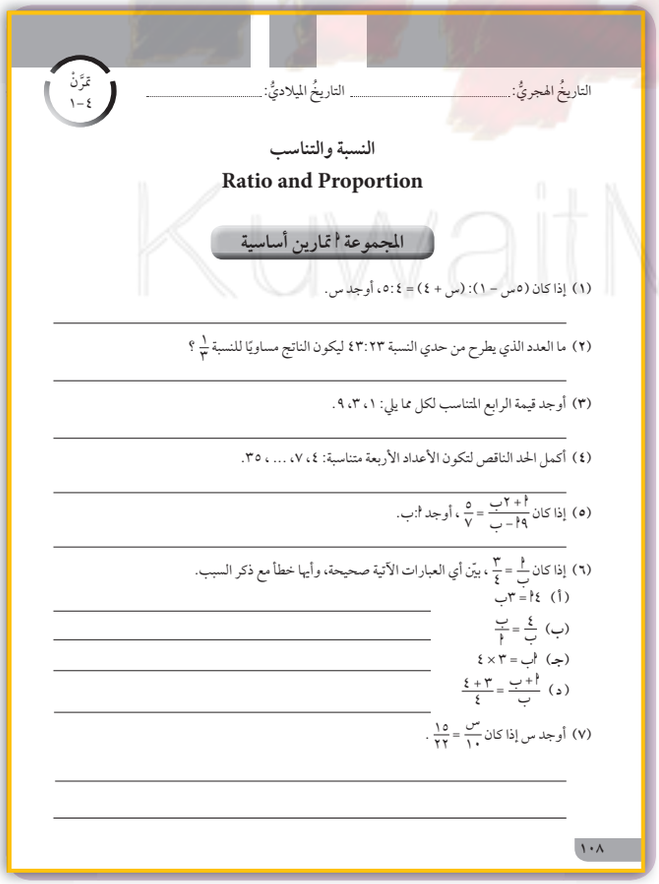
$\frac{أ + ب + جـ}{ب + جـ + د} = \frac{ب م + جـ م + دم}{ب + جـ + د} = \frac{م(ب + جـ + د)}{ب + جـ + د} = م = \frac{أ}{ب}$

حاول أن تحل

١٢ إذا كانت الأعداد أ، ب، جـ في تناسب متسلسل

فأثبت أن: $\frac{أ + ٣ب}{ب + ٣جـ} = \frac{أ - ٢ب}{ب - ٢جـ}$ (بشرط المقام ≠ ٠)

١٦٣



تمرّن ٤-١

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

النسبة والتناسب

Ratio and Proportion

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) إذا كان (٥س - ١): (س + ٤) = ٤: ٥، أوجد س.

(٢) ما العدد الذي يطرح من حدي النسبة ٢٣: ٤٣ ليكون الناتج مساويًا للنسبة $\frac{١}{٣}$ ؟

(٣) أوجد قيمة الرابع المتناسب لكل مما يلي: ١، ٣، ٩.

(٤) أكمل الحد الناقص لتكون الأعداد الأربعة متناسبة: ٤، ٧، ... ، ٣٥.

(٥) إذا كان $\frac{أ + ٢ب}{أ - ٩ب} = \frac{٥}{٧}$ ، أوجد أ: ب.

(٦) إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٤}$ ، بيّن أي العبارات الآتية صحيحة، وأيها خطأ مع ذكر السبب.

(أ) ٤أ = ٣ب

(ب) $\frac{٤}{ب} = \frac{ب}{أ}$

(جـ) أب = ٣ × ٤

(د) $\frac{أ + ب}{ب} = \frac{٣ + ٤}{٤}$

(٧) أوجد س إذا كان $\frac{س}{١٠} = \frac{١٥}{٢٢}$.

١٠٨

KuwaitMath.com

(٨) إذا كانت أ، ب، جـ، د أعدادًا متناسبة أثبت أن: $\frac{٧أ + ٢جـ}{٧ب + ٢د} = \frac{أ - ٤جـ}{ب - ٤د}$، حيث المقام ≠ ٠ .

(٩) إذا كانت أ، ب، جـ تكون تناسبًا (متسلسلًا) أثبت أن: $\frac{أ + ٢ب}{ب + ٢جـ} = \frac{أ - ب}{ب - جـ}$ حيث المقام ≠ ٠ .

(١٠) **تفكير ناقد:** أي من أزواج النسب التالية لا تكوّن تناسبًا؟

(أ) $\frac{٦}{٨}$ ، $\frac{١٥}{٢٠}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٩}{١٢}$

(جـ) $\frac{٠,٤}{٠,٥}$ ، $\frac{٠,١٢}{٠,١٥}$ (د) $\frac{٥}{٦}$ ، $\frac{٢٠}{٢٤}$

(١١) (أ) إذا كان قلب طائر الكناري يدق ١٢٠ دقة كل ١٢ ثانية، استخدم التناسب لإيجاد عدد دقات قلب الكناري في ٤٠ ثانية.

(ب) **نشاط:** ابحث عن متوسط عدد دقات قلب الإنسان العادي في الدقيقة. حاول أن تقيس ذلك بنفسك ثم اسأل أحد الأطباء وقارن بين النتيجتين. احسب النسبة المئوية لإجابتك بالنسبة إلى ما يقوله الطبيب في ما يتعلق بعدد دقات قلب الإنسان.

(١٢) **الكتابة في الرياضيات:** اكتب مسألة من تأليفك يمكن أن تحلها باستخدام التناسب $\frac{س}{٩} = \frac{٢}{٥}$ ثم حل المسألة.

(١٣) **هندسة معمارية:** رسم مخطط لأرضيّة حظيرة بمقياس رسم ١ , ٥ سم لكل ٦ م. إذا كانت أبعاد المخطط في الرسم هي ٢ , ٥ سم × ٣ , ٥ سم، فاحسب الأبعاد الحقيقية لأرضيّة الحظيرة.

(١٤) إذا كان سعر آلة حاسبة علمية يبلغ ٣٣ دينارًا وقد بيعت بسعر ٢٥ , ٥٧٥ دينارًا. فما النسبة المئوية للتناقص في سعر بيع هذه الآلة الحاسبة؟

*(١٥) تبيّن في البلد (أ)، أن النسبة المئوية التزايدية على الأسعار بلغت ٤٪ عام ٢٠١٠ و ٣٪ في عام ٢٠١١. أما في البلد (ب) فقد بلغت النسبة المئوية التزايدية على الأسعار ٥٪ عام ٢٠١٠ و ٢٪ عام ٢٠١١. في أي من البلدين كانت النسبة المئوية التزايدية أقل خلال العامين ٢٠١٠، ٢٠١١؟ فسّر.

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) ما العدد الذي يضاف إلى حدي النسبة ٣٧:٧ ليكون الناتج مساويًا للنسبة $\frac{١}{٣}$ ؟

(٢) أوجد الرابع المتناسب لكل مما يلي:

(أ) ٥، ٨، ٢٠، ☐

(ب) ٨، ١٣، ١٦، ☐

(٣) أكمل الحد الناقص لتكون الأعداد الأربعة متناسبة.

(أ) ٧، ...، ٢١، ٢٤

(ب) ...، ٥، ٢٠، ٢٥

(٤) إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{٥}{٨}$ ، بيّن أي العبارات الآتية صحيحة، وأيها خطأ مع ذكر السبب.

(أ) ٥ب = ٨أ

(ب) $\frac{٨}{ب} = \frac{٥}{٨}$

(جـ) $\frac{أ + ب}{أ - ب} = \frac{٨ + ٥}{٨ - ٥}$

(٥) أوجد س إذا كان $\frac{س + ٧}{٧} = \frac{١٣}{٥}$.

(٦) إذا كانت أ، ب، جـ، د أعدادًا متناسبة أثبت أن: $\frac{أ + ٨ب}{جـ + ٨د} = \frac{أ + ٤ب}{جـ + ٤د}$ حيث المقام ≠ ٠

(٧) إذا كانت الأعداد أ، ب، جـ تكون تناسبًا (متسلسلًا) أثبت أن: $\frac{أ^٢ + ب^٢}{ب^٢ + جـ^٢} = \frac{أ}{جـ}$.

(٨) قبض ثلاثة إخوة لقاء عملهم معًا مبلغًا من المال قيمته ٦٤٨ دينارًا، وقد قسم هذا المبلغ عليهم حصصًا تتناسب مع الزمن الذي أمضاه كل منهم في العمل. إذا كان مروان قد عمل مدة ٥ ساعات، أحمد ٦ ساعات، يوسف ٧ ساعات. احسب نصيب كل منهم.

KuwaitMath.com

٤-٢: التغير الطردي

١ الأهداف

- يتعرف ثابت التغير.
- يربط بين الميل وثابت التغير.
- يتعرّف التغير الطردي ويعبر عنه بالصورة ص = ك س أو ص $\propto$ س.
- يتعرف خواص التغير الطردي.
- يرسم بيان التغير الطردي.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

التغير الطردي – دالة التغير الطردي – معدل وثابت التغير الطردي.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة مدرجة – أوراق مليمترية – آلة حاسبة – جهاز إسقاط، حاسوب.

٤ التمهيد

اسأل الطلاب:

- ما المتغيّر؟
- ما الميل؟
- اسأل الطلاب عن الأنماط مثلًا العدّ بالاثنينات، ثم عن معنى معامل المُتغيِّر، وكيفية قراءة الجداول والبيانات وكيفية رسم المنحنيات والرسم البياني.
- هيئ الطلاب لفكرة التغير. اطلب إليهم ذكر بعض الأشياء التي تغيرت عندهم من العام الماضي (مثلًا: السن، الفصل الدراسي، الوزن ...).

٥ التدريس

- اسأل عن أنماط تحتوي على كميات تتضاعف (مثلًا: عدد الأيادي عند خمسة أشخاص، عدد الأجنحة لدى ٨ عصافير...)، واطلب إليهم أن يعبروا عن ذلك في صورة معادلات (مثلًا: ص = ك س).
- اعرض ثلاث صيغ لمثال للتغير الطردي كما في مثال الصور المتحركة في السينما، الجدول، الشكل البياني، المعادلة

٤-٢

التغير الطردي
Direct Variation

دعنا نفكر ونتناقش

التغير

التغيّر هو ظاهرة طبيعية في الحياة نلمسها ونشاهدها في العديد من المواقف والأشياء. فمثلًا:

- درجات الحرارة تتغيّر بالارتفاع والانخفاض في اليوم الواحد وفي الفصول المختلفة.
- وزن الطفل يتغيّر مع نموه.
- الزمن يتغيّر مع توالي الليل والنهار والأشهر والسنين.
- الأسعار تتغيّر.
- حجم الغاز يتغيّر بتغيّر درجة حرارته.
- المسافة التي يقطعها جسم متحرّك تتغيّر بمرور الزمن.

سوف تتعلم

- التغير
- التغير الطردي
- دالة التغير الطردي
- ثابت التغير الطردي
- معدل التغير الطردي

تدريب

١ أذكر بعض الأشياء التي تتغيّر في حياتك.
٢ عدّد بعض الأشياء التي تتغيّر بسبب تغيّر أشياء أخرى.
٣ هل تتغيّر مساحة المربع بتغيّر طول ضلعه؟
٤ عدّد بعض الظواهر التي لا تتغيّر – أي الظواهر الثابتة.
٥ أذكر أمثلة لبعض الثوابت التي مرّت عليك في الرياضيّات.

التغير الطردي

مثال توضيحي: الصورة المتحركة في السينما

عندما تشاهد فيلمًا سينمائيًا عاديًا، فإن ٢٤ صورة فرديّة تسطع سريعًا على الشاشة كل ثانية. في ما يلي ثلاث طرائق لبيان العلاقة بين عدد الصور (أو الإطارات التي تعرض) وعدد الثواني:

الطريقة الأولى
الجدول

س عدد الثواني	ص عدد الصور
١	٢٤
٢	٤٨
٣	٧٢
٤	٩٦
٥	١٢٠

الطريقة الثانية
الشكل المرسوم

الطريقة الثالثة
العلاقة بين عدد الصور (ص) وعدد الثواني (س) هي:

ص = ٢٤ س

من الطرائق الثلاث السابقة أجب عن التالي:

(أ) ما معدل التغيّر في البيانات المبينة في الجدول؟

(ب) ما ميل المستقيم في الشكل البيانيّ؟

(جـ) ما معامل س في العلاقة بين ص، س؟

ما العلاقة التي تلاحظها بين: معدل التغيّر، ميل المستقيم، معامل س؟

• نلاحظ في هذا المثال أن عدد الصور يتغيّر مع عدد الثواني التي تظهر فيها.

(كلما زاد عدد الثواني زاد عدد الصور التي تعرض بنفس النسبة) وفي هذه الحالة نقول إن العلاقة تمثل تغيّرًا طرديًا.

معلومة مفيدة:

لتكن أ (س١، ص١)، ب(س٢، ص٢) فإن

ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$: $س_١ \neq س_٢$

وعندما يمر المستقيم بنقطة الأصل والنقطة (س١ ، ص١)

يصبح ميل المستقيم = $\frac{ص_١}{س_١}$: $س_١ \neq ٠$

ويسمى الميل في هذه الحالة ثابت التغير أو معدل التغير

التغيّر الطردي Direct Variation

هو دالة خطية يمكن أن تكتب بالصورة: ص = ك س حيث ك ≠ ٠

ويسمى ك ثابت التغير أو معدل التغير.

ويمكن التعبير عن العلاقة ص = ك س على الصورة ص $\propto$ س.

ملاحظات

١ يمكن تمثيل دالة التغير الطردي: ص = ك س بخط مستقيم يمر بنقطة الأصل.
٢ يمكن كتابة المعادلة الخطيّة ص = ك س بالصورة: ك = $\frac{ص}{س}$ حيث س ≠ ٠
٣ ثابت التغيّر ك = معدل التغيّر في البيانات التي تصف التغيّر.
٤ الثابت ك = ميل الخط المستقيم الذي يمثّل المعادلة بيانيًا.
٥ في حالة التغيّر الطردي فإنّ: ثابت التغيّر = معدل التغيّر = ميل المستقيم الممثل لمعادلة التغيّر.
٦ التغير قد يكون بالزيادة أو بالنقصان.
٧ إذا كانت ص $\propto$ س فمعنى ذلك أن $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{ص_٢}{س_٢} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{\text{التغير في ص}}{\text{التغير في س}}$: المقام ≠ صفر

تعميم

إذا كانت ص تتغير طرديًا مع س أي ص $\propto$ س فإن:
ص = ك س حيث ك ثابت لا يساوي الصفر
والعكس صحيح.

سنكتفي بدراسة التغير الطردي عندما ك > ٠

(ص = ٢٤س). دع الطلاب يلاحظون أن كلًّا منها يعبِّر عن العلاقة نفسها (تغير طردي).

- اربط بين قيمتي ص، س في كل صف بالجدول والنقطة التي تمثل هذا الربط في الشكل البياني.
- كرِّر عملية الربط مع المعادلة (تساوي الطرفين بعد التعويض).
- دع الطلاب يعبِّرون بلغتهم عن فهمهم للمصطلحات: تغير، تغير طردي، معدل التغير، ثابت التغير، معامل س في المعادلة... اشرح ببساطة مفهوم ميل المستقيم.
- نَبِّه إلى أن ثابت التغير (معامل س) لا يمكن أن يكون صفرًا.
- كن دقيقًا في تعريف التغير الطردي على أنه دالة خطية بالصورة ص = ك س، حيث ك ≠ ٠ وابتعد عن التعريفات القديمة غير الصحيحة المرتبطة بالزيادة والنقصان.
- استخدم الشفافيات والمصورات والملصقات المناسبة.
- أعط أمثلة وأمثلة مضادة عن التغير الطردي. لاحظ شرط مرور المستقيم الممثل لدالة التغير الطردي هو أنه يمر بنقطة الأصل. وأن الدالة الممثلة له تكتب على الشكل ص = ك س، حيث ك ≠ ٠ وليس على الشكل ص = ك س + ب.

حفزّ الطلاب على إيجاد ص بدلالة س وعلى إيجاد س بدلالة ص في المعادلة ص = ك س.

ركز على التطبيقات الحياتية لأهميتها في إيضاح المواقف التي يستخدم فيها التغير الطردي.

٦ الربط

إن الوزن الذي يحدثه جسم ما يتغير طرديًّا مع كتلته. إذا كانت كتلة حديدية تساوي ٦ كجم وكان وزنها يساوي ٥٩ نيوتن. اكتب العلاقة بين الكتلة والوزن.

ص = $\frac{٥٩}{٦}$ س، حيث ص = الوزن، س = الكتلة.

مثال (١)

إذا كانت ص $\propto$ س وكانت ص = ٣٠ عندما س = ١٠، فأوجد قيمة ص عندما س = ٤٠، ثم مثل العلاقة بين س، ص بيانيًا.

الحل: ∴ ص $\propto$ س

∴ ص = ك س ك ثابت التغير

∴ ٣٠ = ك × ١٠

ك = ٣

∴ ص = ٣ س

عندما س = ٤٠ تكون ص = ٣ × ٤٠ = ١٢٠

س	٠	١٠	٤٠
ص = ٣س	٠	٣٠	١٢٠

حاول أن تحل

١ إذا كانت ص $\propto$ س وكانت ص = ١,٥ عندما س = ١٠، أوجد قيمة ص عندما س = ١٥

ثم مثّل العلاقة بين س، ص بيانيًا.

مثال (٢)

في إحدى المناطق ترتفع درجة الحرارة بانتظام خلال النهار بمعدل ٣° في الساعة. اكتب معادلة تغير طردي تمثل هذا الارتفاع.

الحل:

∵ درجة الحرارة ترتفع بانتظام

∴ معدل التغيير = ٣

المعادلة هي ص = ٣س حيث ص درجة الحرارة، س عدد الساعات.

١٦٦

مثال (٣)

في الشكل المقابل، أي من المستقيمين يمثل تغيرًا طرديًّا؟ أوجد ثابت التغير في حالة التغير الطردي.

الحل:

المستقيم الذي يمر بنقطة الأصل يمثل تغيرًا طرديًّا بين س، ص وهو يمر بالنقطة (٢، ١).

ثابت التغير = $\frac{\text{ص}_١}{\text{س}_١} = \frac{١}{٢}$

المستقيم الثاني لا يمر بنقطة الأصل فهو لا يمثّل تغيرًا طرديًّا.

حاول أن تحل

٢ هل المستقيم الذي يمر بالنقطتين: أ(٢، ٣)، ب(٤، ٦) يمثل تغيرًا طرديًّا بين س، ص. اشرح إجابتك

مثال (٤)

أي من المعادلتين التاليتين تمثّل تغيرًا طرديًّا؟ أوجد ثابت التغير في حالة التغير الطردي.

١ ٥س − ٣ص = ٣س + ٥ص ب ٥س + ٢ص = ٩

الحل:

١ ٥س − ٣ص = ٣س + ٥ص

٨ص = ٢س

ص = $\frac{٢}{٨}$ س = $\frac{١}{٤}$ س على الصورة ص = ك س

هذه المعادلة تمثل تغيرًا طرديًّا،

حيث ثابت التغير = $\frac{١}{٤}$

ب ٥س + ٢ص = ٩

٢ص = −٥س + ٩

ص = $-\frac{٥}{٢}$ س + $\frac{٩}{٢}$ وهذه ليست على الصورة ص = ك س

إذًا هذه المعادلة لا تمثّل تغيرًا طرديًّا.

حاول أن تحل

٣ أي من المعادلات التالية تمثّل تغيرًا طرديًّا؟ أوجد ثابت التغير في حالة التغير الطردي.

١ ٧ص = ٢س

ب ٣س + ٤ص = ٨

ج ص + ٣س = ٢(س + ٢ص)

١٦٧

KuwaitMath.com

٧ أخطاء متوقعة وطرق معالجتها

قد يخطئ بعض الطلاب في إيجاد معدل التغير أو ثابت التغير فيكتبون ك = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$.

اعرض أمامهم أمثلة متعددة ودعهم يكتبون ك = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$.

٨ التقييم

ناقش مع الطلاب التمارين في فقرات «حاول أن تحل»، وتأكد من أنهم قادرون على فهم التغير الطردي والمعادلة التي يمثلها.

اختبار سريع

١ هل كل معادلة مما يلي تمثل تغيرًا طرديًا؟

أوجد ثابت التغير في حالة التغير الطردي.

(أ) ٣س − ٢ص = ٠ نعم، $\frac{٣}{٢}$

(ب) ٣ س − ٢ص = ٣ص نعم، $\frac{٣}{٥}$

٢ هل تتغير ص مع س طرديًا في الجدول:

س	−٢	−١	٣	٤
ص	٤	٢	−٦	−٨

اكتب معادلة التغير.

نعم، −٢ ، ص = −٢س

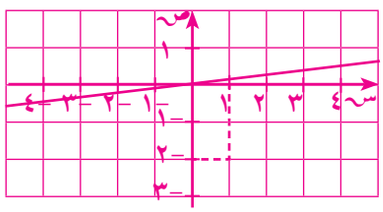
٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ ك = $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{١,٥}{١٠} = ٠,١٥$

ص = ٠,١٥ س

عند س = ١٥، نجد ص = ٠,١٥ × ١٥ = ٢,٢٥



٢ نوجد $\frac{\text{ص}_١}{\text{س}_١} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{\text{ص}_٢}{\text{س}_٢} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

مثال (٥) تطبيقات حياتية

الطقس: الزمن الذي تستغرقه لسماع الرعد يتغير طرديًا مع المسافة بينك وبين موقع البرق. فإذا كنت على مسافة ٣ كم من موقع البرق فإنك سوف تسمع الرعد بعد ١٠ ثوانٍ من رؤية البرق.

١ اكتب المعادلة التي توضح العلاقة بين المسافة والزمن.

٢ أوجد المسافة بينك وبين موقع البرق إذا سمعت الرعد بعد ١٨ ثانية من رؤية البرق.

الحل:

١ لتكن س المسافة بالكيلومترات بينك وبين موقع البرق،

وليكن ص الزمن بالثواني الذي يمر بين رؤية البرق وسماع الرعد.

بما أن الزمن يتغير طرديًا مع المسافة

∴ معادلة التغير الطردي:

ص = ك س

وحيث إن س = ٣، ص = ١٠

٣ × ك = ١٠

ك = $\frac{١٠}{٣}$

= ثابت التغير

∴ المعادلة هي: ص = $\frac{١٠}{٣}$ س هي المعادلة المطلوبة

حيث س تقاس بالكيلومترات، ص بالثواني.

٢ ص = $\frac{١٠}{٣}$ س

١٨ = $\frac{١٠}{٣}$ س

س = $\frac{٣ \times ١٨}{١٠}$ = ٥,٤

المسافة المطلوبة = ٥,٤ كيلومتر.

مثال (٦)

البيولوجيا: تتغير كمية الدم في جسم الإنسان طرديًا مع وزنه. تبلغ كمية الدم في جسم رجل يزن ٧٥ كجم نحو ٥ لترات.

١ أوجد ثابت التغير.

٢ اكتب معادلة تربط العلاقة بين كمية الدم والوزن.

الحل:

نفرض أن كمية الدم في جسم الانسان هي ص وزن الجسم هو س

١ ثابت التغير = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

= $\frac{٥}{٧٥} = \frac{١}{١٥}$

٢ معادلة التغير الطردي:

ص = $\frac{١}{١٥}$ س

المعادلة المطلوبة:

كمية الدم = ثابت التغير × الوزن

كمية الدم = $\frac{١}{١٥}$ الوزن.

حاول أن تحل

٤ السؤال المفتوح: قدّر كمية الدم في جسمك مستخدما مثال (٦).

التعبير عن التغير الطردي

في التغير الطرديّ تكون النسبة $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ثابتة لكل زوج مرتّب حيث س ≠ ٠ في جميع الحالات. وبالتالي يمكن التعبير عن التغير الطرديّ باستخدام التناسب.

فيكون: $\frac{\text{ص}_١}{\text{س}_١} = \frac{\text{ص}_٢}{\text{س}_٢}$ ... لجميع الأزواج المرتبة (س١، ص١)، (س٢، ص٢)، ...

حيث س١ ≠ ٠، س٢ ≠ ٠ ، ...

وكل من هذه النسب تساوي ثابت التغير ك (معدل التغير).

Kuwaitmath.com

وبالتالي المستقيم يمثل تغيرًا طرديًّا ونكتب:

$ص = \frac{٣}{٢} س$.

٣ (أ) $ص = \frac{٢}{٧} س$ (تغير طردي).

(ب) $ص = -\frac{٣}{٤} س + ٢$ (لا يمثل تغيرًا طرديًّا).

(جـ) $ص = \frac{١}{٣} س$ (تغير طردي).

٤ تتنوع الإجابات بحسب وزن كل شخص.

كمية الدم $= \frac{١}{١٥}$ الوزن.

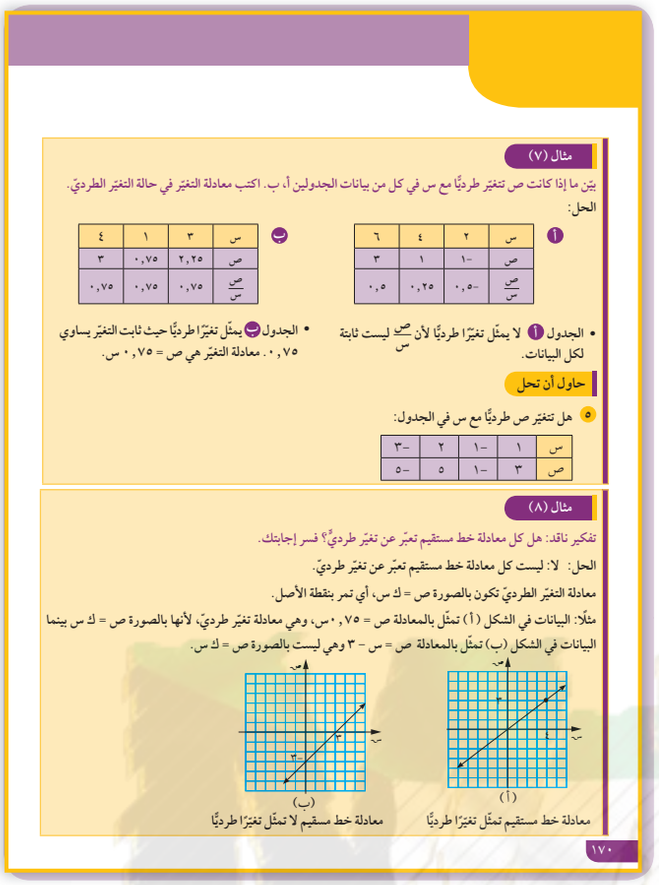
٥ كلّا، $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{١}{٣}$ ، $\frac{ص_٢}{س_٢} = ١$

٦ ثابت التغير $= \frac{٠,٢٧٥}{١٢} = \frac{١١}{٤٨٠}$

$ص = \frac{١١}{٤٨٠} س$

$٤,٣ = \frac{١١}{٤٨٠} س$

$س = \frac{٢٠٦٤}{١١} \simeq ١٨٧,٦$ كجم.



مثال (٧)

يبّن ما إذا كانت ص تتغيّر طرديًّا مع س في كل من بيانات الجدولين أ، ب. اكتب معادلة التغيّر في حالة التغيّر الطرديّ.

الحل:

(أ)

س	٢	٤	٦
ص	١-	١	٣
$\frac{ص}{س}$	٠,٥-	٠,٢٥	٠,٥

(ب)

س	١	٣	٤
ص	٠,٧٥	٢,٢٥	٣
$\frac{ص}{س}$	٠,٧٥	٠,٧٥	٠,٧٥

• الجدول (أ) لا يمثّل تغيّرًا طرديًّا لأن $\frac{ص}{س}$ ليست ثابتة لكل البيانات.

• الجدول (ب) يمثّل تغيّرًا طرديًّا حيث ثابت التغيّر يساوي ٠,٧٥. معادلة التغيّر هي ص = ٠,٧٥ س.

حاول أن تحل

٥ هل تتغيّر ص طرديًّا مع س في الجدول:

س	١	١-	٢	٣-
ص	٣	١-	٥	٥-

مثال (٨)

تفكير ناقد: هل كل معادلة خط مستقيم تعبّر عن تغيّر طرديٍّ؟ فسر إجابتك.

الحل: لا: ليست كل معادلة خط مستقيم تعبّر عن تغيّر طرديّ.

معادلة التغيّر الطرديّ تكون بالصورة ص = ك س، أي تمر بنقطة الأصل.

مثلًا: البيانات في الشكل (أ) تمثّل بالمعادلة ص = ٠,٧٥ س، وهي معادلة تغيّر طرديّ، لأنها بالصورة ص = ك س بينما البيانات في الشكل (ب) تمثّل بالمعادلة ص = س - ٣ وهي ليست بالصورة ص = ك س.

(ب)

معادلة خط مستقيم لا تمثّل تغيّرًا طرديًّا

(أ)

معادلة خط مستقيم تمثّل تغيّرًا طرديًّا

مثال (٩) تطبيقات حياتية

الفيزياء: القوة التي تستخدمها لرفع جسم تتغير طرديًّا مع وزن الجسم.

فأنت تحتاج إلى استخدام قوة قدرها ٠,٢٧٥ نيوتن لتتمكن إحدى المعدات من رفع جسم وزنه ١٢ نيوتن. أوجد مقدار القوة اللازم استخدامه في هذه الآلة لرفع جسم وزنه ٤٥ نيوتن.

معلومة فيزيائية:
من قوانين الحركة : الوزن هو كمية فيزيائية لها نفس وحدة القوة (نيوتن) وهي ناتجة من تأثير عجلة الجاذبية الارضية على كتلة الجسم
أي وزن ١ كجم = ١٠ نيوتن

الحل:

لنرمز إلى القوة بالرمز ق، وإلى وزن الجسم بالرمز و.

$\because ق_١ \propto و_١$ و

$\therefore \frac{ق_١}{و_١} = \frac{ق_٢}{و_٢}$

$\frac{٠,٢٧٥}{١٢} = \frac{ق_٢}{٤٥}$

$ق_٢ \times ١٢ = ٤٥ \times ٠,٢٧٥$

$ق_٢ = \frac{٤٥ \times ٠,٢٧٥}{١٢} = ١,٠٣١٢٥$ نيوتن

أي أنك تحتاج إلى كيلوجرام تقريبًا لرفع ٤٥ نيوتن.

حاول أن تحل

٦ اكتب معادلة التغيّر الطردي للمثال السابق، واستخدمها لإيجاد الوزن الذي يمكن أن ترفعه باستخدام قوّة قدرها ٤,٣ نيوتن في الرافعة نفسها.

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

تمرَّنْ ٤-٢

التغير الطردي
Direct Variation

المجموعة أ تمارين أساسية

هل كل معادلة في ما يلي تمثل تغيرًا طرديًّا؟ إذا كان كذلك أوجد ثابت التغير.

(١) ص = $\frac{٢}{٣}$ س _____

(٢) ٧س + ٤ص = ٢ _____

(٣) −س + ٢ص = ٠ _____

(٤) إذا كانت المسافة (ف) التي يقطعها شخص في رحلة تتناسب مع الزمن (ن) في حالة ثبوت السرعة وإذا كانت تلزمك ساعتان لقطع ١٠٠ كم.

(أ) اكتب المعادلة التي تمثل العلاقة بين المسافة والزمن. _____

(ب) احسب المسافة التي تقطعها بعد $\frac{١}{٢}$ ٣ ساعات. _____

كل جدول مما يلي يمثل العلاقة بين س، ص. اختبر ما إذا كانت العلاقة تمثل تغيرًا طرديًّا أم لا. وإذا كانت كذلك فاكتب هذه العلاقة.

(٥)

س	ص
٢	٦
٥	١٣,٥
٨	٢١

_____

(٦)

س	ص
٣	٥,٧
٥	٩,٥
٩	١٧,١

_____

إذا كان المستقيم المار بالنقطتين أ، ب يمثل تغيرًا طرديًّا أوجد س أو ص:

(٧) أ (١،٢) ، ب (٦، ص) _____

(٨) أ (٥، ص) ، ب (١٥، ١٢) _____

(٩) أ (٨، ٢) ، ب (س، −٣) _____

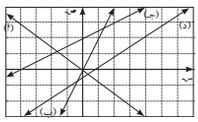
(١٠) أ (٢، ص) ، ب (١٤، ٤) _____

(١١) طبقًا لقانون شارل إذا كان حجم كمية محدودة من الغاز (ح) يتناسب طرديًّا مع درجة الحرارة(د) بالكلفن عند ثبوت الضغط (p)؛ وإذا كان الحجم= ٢٥٠ مل عندما درجة الحرارة = ٣٠٠ ك:

(أ) أكتب العلاقة بين الحجم ودرجة الحرارة. _____

(ب) أوجد الحجم إذا ازدادت درجة الحرارة إلى ٤٢٠ ك. _____

(١٢) أي من المستقيمات في الرسم البياني التالي يمثل تغيرًا طرديًّا حيث ثابت التغير > ٠؟ علّل إجابتك.



_____

(١٣) أي من المعادلات التالية تمثل تغيرًا طرديًّا؟ أوجد ثابت التغير في حالة التغير الطردي.

(أ) ص = $\frac{٥}{٣}$ س _____

(ب) ص = ٤ − ٢س _____

(جـ) ص^{٢} = ٣س _____

(د) ص = $\frac{\text{س}}{٣}$ _____

(هـ) ٣س = ٥ص _____

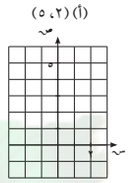
(١٤) في ما يلي، هل المستقيم الذي يمر بالنقطتين م، ن يمثل تغيرًا طرديًّا بين س ، ص؟ اشرح إجابتك.

١. م (٥،٢) ، ن (١٠،٤) _____

٢. م (٤،٣) ، ن (١٢،٦) _____

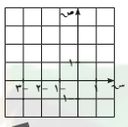
(١٥) ارسم الخط المستقيم الذي يمثل علاقة التغير الطردي والذي يمر بالنقطة المعطاة ثم اكتب معادلته:

(أ) (٢، ٥)



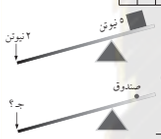
_____

(ب) (−٣، −١)



_____

(١٦) **الفيزياء:** يتغير الوزن (و) الذي يمكن أن ترفعه الرافعة المبينة طرديًّا مع القوة المستخدمة (ق). إذا كانت القوة ٢ نيوتن هي التي تحتاج إليها لرفع صندوق وزنه ٥ نيوتن، فأوجد القوة (جـ) التي تحتاج إليها لرفع صندوق وزنه ٤٠ نيوتن. _____



(١٧) **تفكير ناقد:** أوجد قيمة جـ التي تجعل العلاقة أس − ب ص = جـ علاقة تغير طردي. _____

_____

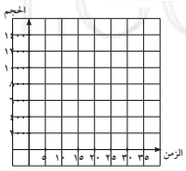
(١٨) لدينا خزان ماء فارغ نريد ملأه. يبيّن الجدول أدناه حجم الخزان وزمن التعبئة.

الحجم باللتر (ح)	٤٠٠	٦٠٠	١٢٠٠
الزمن بالدقائق (ن)	١٠	١٥	٣٠

(أ) هل العلاقة بين الحجم (ح) والزمن (ن) علاقة تغير طردي؟ فسر إجابتك.

_____

(ب) مثّل العلاقة بيانيًّا.



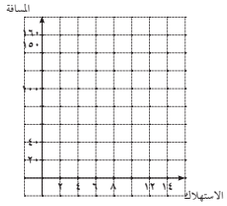
(١٩) يبيّن الجدول أدناه، استهلاك سيارة للوقود وفق المسافة المقطوعة.

الاستهلاك باللتر (س)	٤,٨	٨	١٢
المسافة بالكيلومتر (ص)	٦٠	١٠٠	١٥٠

(أ) هل العلاقة بين الاستهلاك باللتر (س) والمسافة المقطوعة بالكيلومتر (ص) علاقة طردية؟ فسر إجابتك.

_____

(ب) مثّل العلاقة بيانيًّا.



المجموعة ب تمارين تعزيزية

هل كل معادلة تمثل تغيرًا طرديًّا؟ إذا كانت كذلك فأوجد ثابت التغير.

(١) ٥س − ٢ص = ٠

(٢) ٦س − ٩ص = ٣

(٣) ٦س = ٩ص

(٤) إذا كان لديك حديقة فيها أشجار من الرمان، وكان المبلغ (م) الذي تربحه يتناسب طرديًّا مع عدد أشجار الرمان (ش). وإذا كنت تحصل على ٣٦ دينارًا لجني محصول ٣ أشجار:

(أ) اكتب العلاقة بين الربح وعدد أشجار الرمان.

(ب) ما المبلغ الذي تربحه من جني ٩٠ شجرة؟

في التمرينين (٥-٦) كل جدول يمثل العلاقة بين س، ص. اختبر ما إذا كانت العلاقة تمثل تغيرًا طرديًّا أم لا. وإذا كانت كذلك فاكتب هذه العلاقة.

(٥)

س	ص
٤	٢
٨	٤
١٤	٧

(٦)

س	ص
−٢	−٥
٤	٤
٨	١٠

في التمارين (٧-٩) إذا كانت الأزواج المرتبة في كل تمرين تمثل تغيرًا طرديًّا أوجد س أو ص:

(٧) (١، ٢) ، (س، ٣)

(٨) (س، ٢) ، (٤، ٦)

(٩) (٣، ص) ، (٨، ٦)

(١٠) إذا كانت درجتك في امتحان (د) تتناسب مع عدد الأسئلة التي قمت بالإجابة عنها بطريقة صحيحة (جـ)؛ وإذا حصلت على ٨٠ درجة في مادة الرياضيات وكنت قد أجبت عن ٢٠ سؤالًا إجابة صحيحة.

(أ) أكتب العلاقة بين الدرجة التي حصلت عليها وعدد الإجابات الصحيحة.

(ب) ما الدرجة التي تحصل عليها عند إجابتك عن ٢٤ سؤالًا إجابة صحيحة؟

KuwaitMath.com

٤-٣: التغير العكسي

١ الأهداف

- يتعرف التغير العكسي.
- يعبر عن التغير العكسي بالصورة ص $\propto \frac{١}{س}$
- يستخدم التغير العكسي في حل المسائل.
- يقارن بين التغير الطردي والتغير العكسي.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

تغير عكسي – دالة التغير العكسي – ثابت التغير العكسي.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة مدرجة، أوراق مليمترية، آلة حاسبة – آلة حاسبة علمية – جهاز إسقاط – ملصقات – حاسوب.

٤ التمهيد

- راجع مع الطلاب مواضع النقاط ذات الأزواج المرتبة على شبكة الإحداثيات.
- اسأل الطلاب عن علاقة بين متغيرين س، ص وكيف إذا زادت س زادت معها ص. ثم إذا زادت س تناقصت ص.

اطلب إلى الطلاب رسم منحن على شبكة الإحداثيات للدالة ص = $\frac{٤}{س}$.

٥ التدريس

كلّف جميع المجموعات إكمال الجدول في عمل تعاوني، ثم الإجابة عن الأسئلة. ناقش إجابات المجموعات مع الطلاب.

- **مثال (٤)**: يصعب على الطلاب في بعض الأحيان مقارنة الأعداد على الجداول. مدّ يد المساعدة وارسم الجدول التالي على السبورة.

س	٢	٤	٦
ص	٤	١٦	٣٦

ثم اسألهم إذا كان يُمثِّل تغيرًا طرديًّا أو تغيرًا عكسيًّا أو لا شيء من ذلك. استخدم هذا المثال كي تُساعد الطلاب على دراسة كل الأعداد الموجودة في الجدولين (أ)، (ب).

٤-٣

التغير العكسي
Inverse Variation

سوف تتعلم
- التغير العكسي
- ثابت التغير العكسي
- دالة التغير العكسي
- مقارنة بين التغيّر الطردي والتغيّر العكسي

عمل تعاوني
- يرغب فريق من الشباب في استصلاح قطعة أرض لجعلها صالحة للزراعة، ويتطلب هذا العمل ١٦٠ يوم عمل. ويمكن لفريق مكون من ٢٠ شابًا أن يكملوا هذا العمل في ٨ أيام؛
- فإذا استمر العمل بالمعدل نفسه:

١ كم يومًا يتطلب العمل إذا كان عدد أعضاء الفريق مكونًا من ٤٠ شخصًا؟

٢ أكمل الجدول التالي:

عدد أعضاء الفريق (س)	عدد أيام العمل (ص)	س ص
٢	٨٠	١٦٠
٥	٣٢	١٦٠
٨	....	....
....	١٦	....
٢٠	٨	١٦٠
٤٠	....	....

هل تعلم؟

روبرت بويل (١٦٢٧–١٦٩١) عالم إيرلندي. درس العلاقة بين حجم الغاز وضغطه. اشتهر بقانونه:

حجم الغاز × ضغط الغاز = مقدار ثابت.

يسمى القانون أيضًا قانون بويل ماريوت.

٣ يمثل الجدول العلاقة بين س ،ص في هذا النوع من التغيّر.

٤ صف ما يحدث لعدد أيام العمل (ص) عندما يزداد عدد أعضاء الفريق(س).

٥ ماذا تلاحظ على حاصل الضرب س ص في هذا النوع من التغيّر؟

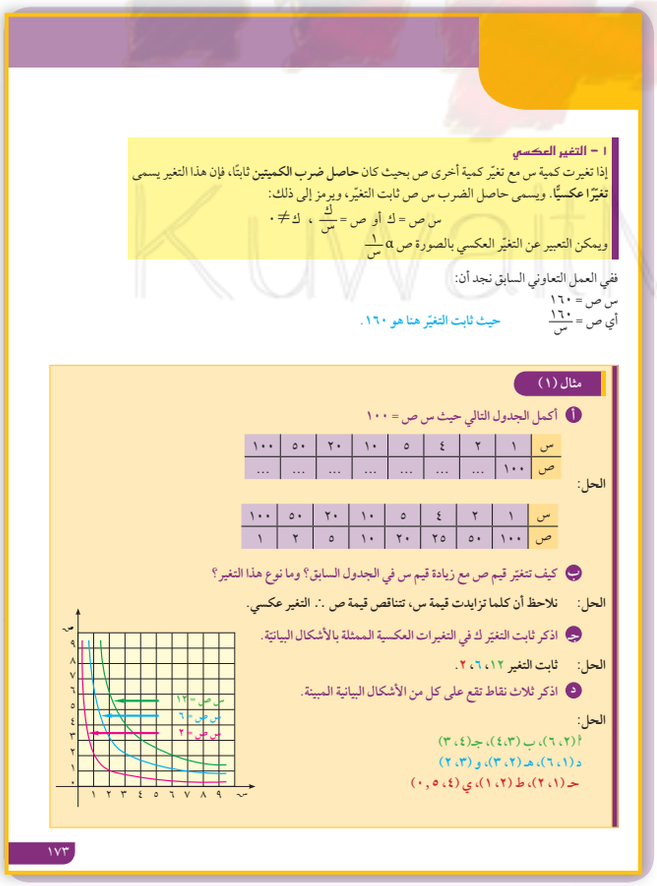
قانون بويل

إن حاصل ضرب حجم الغاز في ضغطه يساوي مقدارًا ثابتًا.

ح × ض = مقدار ثابت

في كل نقطة في الشكل المقابل حاصل الضرب ثابت.

١٧٢



١ – التغير العكسي

إذا تغيرت كمية س مع تغيّر كمية أخرى ص بحيث كان **حاصل ضرب الكميتين** ثابتًا، فإن هذا التغير يسمى **تغيّرًا عكسيًّا**. ويسمى حاصل الضرب س ص ثابت التغيّر، ويرمز إلى ذلك:

س ص = ك أو ص = $\frac{ك}{س}$ ، ك ≠ ٠

ويمكن التعبير عن التغيّر العكسي بالصورة ص $\propto \frac{١}{س}$

ففي العمل التعاوني السابق نجد أن:

س ص = ١٦٠

أي ص = $\frac{١٦٠}{س}$ حيث ثابت التغيّر هنا هو ١٦٠.

مثال (١)

١ أكمل الجدول التالي حيث س ص = ١٠٠

س	١	٢	٤	٥	١٠	٢٠	٥٠	١٠٠
ص	١٠٠	...	...	...	...	...	...	...

الحل:

س	١	٢	٤	٥	١٠	٢٠	٥٠	١٠٠
ص	١٠٠	٥٠	٢٥	٢٠	١٠	٥	٢	١

ب كيف تتغيّر قيم ص مع زيادة قيم س في الجدول السابق؟ وما نوع هذا التغير؟

الحل: نلاحظ أن كلما تزايدت قيمة س، تتناقص قيمة ص. ∴ التغير عكسي.

جـ اذكر ثابت التغيّر ك في التغيرات العكسية الممثلة بالأشكال البيانية.

الحل: ثابت التغير ١٢، ٦، ٢.

د اذكر ثلاث نقاط تقع على كل من الأشكال البيانية المبينة.

الحل:

أ (٢، ٦)، ب (٤، ٣)، جـ (٤، ٣)

د (١، ٦)، هـ (٢، ٣)، و (٣، ٢)

حـ (١، ٢)، ط (٢، ١)، ي (٤، ٠,٥)

١٧٣

KuwaitMath.com

- دعهم يفكرون في ما إذا كان الفريق مكونًا من ١٦٠ شخصًا، فهل يمكن من الناحية العملية إتمام العمل في يوم واحد؟ ساعد الطلاب على أن يتفهموا أهمية الظروف الواقعية في عالم الحقيقة عند تطبيق نموذج رياضي.
- اسأل الطلاب إذا كان بإمكانهم إعطاء عيِّنة يُمكِن أن نستخدم فيها معادلة تغيُّر طردي أو تغيُّر عكسي.

صف أوجه الشبه والاختلاف بين التغير الطردي والتغير العكسي مستعينًا بالمعادلات والرسوم البيانية.

اطلب إليهم إعطاء أمثلة أو مواقف تتضمن متغيرين تمثل العلاقة بينهما تغيرًا عكسيًّا.

ضع على لوحة ملصقًا يوضح العلاقتين:

$ص = \frac{ك}{س}$ (التغير العكسي)

$ص = ك\,س$ (التغير الطردي)

وجانب كل من العلاقتين الرسم البياني الممثل لها:

اطلب إلى الطلاب التعبير بصيغ أخرى عن العلاقتين:

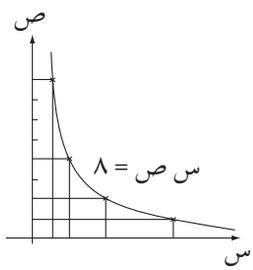
$ص\,س = ك$ ومنه: $ص_١ س_١ = ص_٢ س_٢ = ك$،

ثم $ص = ك\,س$ أي $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{ص_٢}{س_٢}$

وحقق ذلك من خلال الأمثلة والتمارين مع المقارنة بين نوعي التغير.

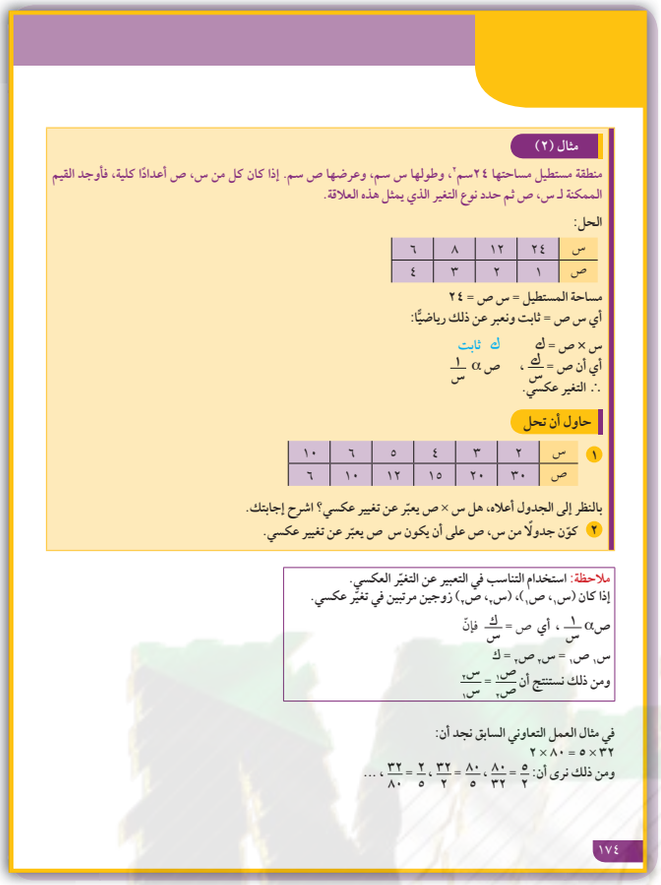
- دع الطلاب يقدرون بين الحين والآخر النتائج عقليًّا قبل إجراء العمليات الحسابية بدقة. كوِّن حِسًّا رياضيًّا عند طلابك.
- استخدم الجدول والشكل البياني والمعادلة للتعبير عن التغير، ودع الطلاب يستنتجون إحدى الصيغ من صيغ أخرى.

تفكير: اسأل الطلاب كيف يمكنهم أن يصفوا الفرق بين التغيّر الطردي والتغيّر العكسي.



٦ الربط

- ناقش مع الطلاب أمثلة عن التغير العكسي والطردي من خلال ما يدرسونه في العلوم الأخرى. نبّه الطلاب إلى القانون الفيزيائي:



مثال (٢)

منطقة مستطيل مساحتها ٢٤سم٢، وطولها س سم، وعرضها ص سم. إذا كان كل من س، ص أعدادًا كلية، فأوجد القيم الممكنة لـ س، ص ثم حدد نوع التغير الذي يمثل هذه العلاقة.

الحل:

س	٢٤	١٢	٨	٦
ص	١	٢	٣	٤

مساحة المستطيل = س ص = ٢٤

أي س ص = ثابت ونعبر عن ذلك رياضيًّا:

$س \times ص = ك$ ك ثابت

أي أن $ص = \frac{ك}{س}$، $ص \propto \frac{١}{س}$

∴ التغير عكسي.

حاول أن تحل

١

س	٢	٣	٤	٥	٦	١٠
ص	٣٠	٢٠	١٥	١٢	١٠	٦

بالنظر إلى الجدول أعلاه، هل س × ص يعبّر عن تغير عكسي؟ اشرح إجابتك.

٢ كوّن جدولًا من س، ص على أن يكون س ص يعبّر عن تغير عكسي.

ملاحظة: استخدام التناسب في التعبير عن التغيّر العكسي.

إذا كان (س، ص)، (س، ص) زوجين مرتبين في تغيّر عكسي.

$ص \propto \frac{١}{س}$، أي $ص = \frac{ك}{س}$ فإنّ

$س_١ ص_١ = س_٢ ص_٢ = ك$

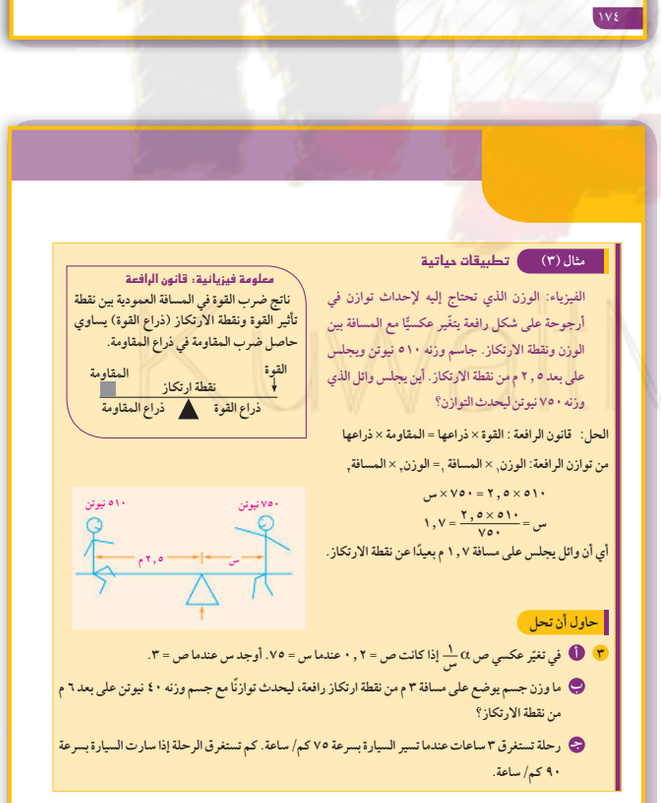
ومن ذلك نستنتج أن $\frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{س_٢}{س_١}$

في مثال العمل التعاوني السابق نجد أن:

$٣٢ \times ٥ = ٨٠ \times ٢$

ومن ذلك نرى أن: $\frac{٥}{٢} = \frac{٨٠}{٣٢}$، $\frac{٨٠}{٥} = \frac{٣٢}{٢}$، $\frac{٣٢}{٨٠} = \frac{٢}{٥}$، ...

١٧٤



مثال (٣) تطبيقات حياتية

الفيزياء: الوزن الذي تحتاج إليه لإحداث توازن في أرجوحة على شكل رافعة يتغير عكسيًّا مع المسافة بين الوزن ونقطة الارتكاز. جاسم وزنه ٥١٠ نيوتن ويجلس على بعد ٢,٥ م من نقطة الارتكاز. أين يجلس وائل الذي وزنه ٧٥٠ نيوتن ليحدث التوازن؟

معلومة فيزيائية: قانون الرافعة

ناتج ضرب القوة في المسافة العمودية بين نقطة تأثير القوة ونقطة الارتكاز (ذراع القوة) يساوي حاصل ضرب المقاومة في ذراع المقاومة.

القوة ↓ — نقطة ارتكاز — المقاومة

ذراع القوة ▲ ذراع المقاومة

الحل: قانون الرافعة: القوة × ذراعها = المقاومة × ذراعها

من توازن الرافعة: الوزن$_١$ × المسافة$_١$ = الوزن$_٢$ × المسافة$_٢$

$٥١٠ \times ٢,٥ = ٧٥٠ \times س$

$س = \frac{٥١٠ \times ٢,٥}{٧٥٠} = ١,٧$

أي أن وائل يجلس على مسافة ١,٧ م بعيدًا عن نقطة الارتكاز.

حاول أن تحل

٣ ١ في تغيّر عكسي $ص \propto \frac{١}{س}$ إذا كانت ص = ٠,٢ عندما س = ٧٥. أوجد س عندما ص = ٣.

ب ما وزن جسم يوضع على مسافة ٣ م من نقطة ارتكاز رافعة، ليحدث توازنًا مع جسم وزنه ٤٠ نيوتن على بعد ٦ م من نقطة الارتكاز؟

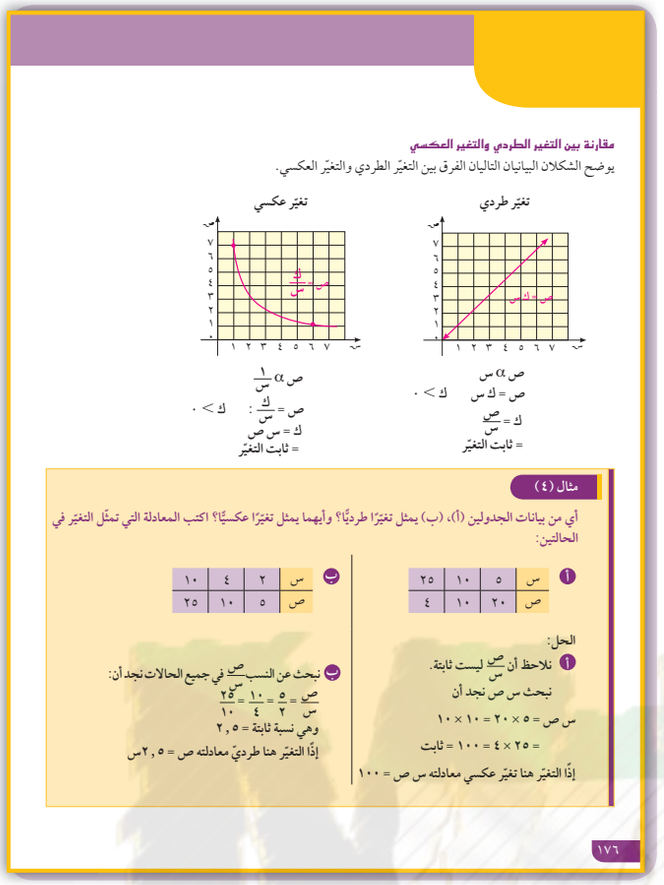
ج رحلة تستغرق ٣ ساعات عندما تسير السيارة بسرعة ٧٥ كم/ ساعة. كم تستغرق الرحلة إذا سارت السيارة بسرعة ٩٠ كم/ ساعة.

١٧٥

- ح × ض = مقدار ثابت ، في العلاقة بين الحجم والضغط في حالة ثبوت درجة الحرارة، والعلاقة بين الحجم ودرجة الحرارة في حالة ثبوت الضغط. استفد مما هو موجود في كتب العلوم.
- استخدم نماذج مبسَّطة للرافعة (الأرجوحة) كما في المثال (٣)، ودع الطلاب يجربون العلاقة بأنفسهم باستخدام مسطرة تستند إلى قلم (مثلًا).

٧ أخطاء متوقعة وطرق معالجتها

لا يستطيع الطلاب في بعض المسائل التمييز بين التغير الطردي والتغير العكسي، وبين التغير الذي لا يمثل تغيرًا طرديًّا أو عكسيًّا. دع الطلاب يحددون كلًّا من التغيرين.



مقارنة بين التغير الطردي والتغير العكسي

يوضح الشكلان البيانيان التاليان الفرق بين التغيّر الطردي والتغيّر العكسي.

تغيّر طردي

تغيّر عكسي

ص ∝ س
ص = ك س ، ك > ٠
ك = ص / س
= ثابت التغيّر

ص ∝ ١ / س
ص = ك / س ، ك > ٠
ك = س ص
= ثابت التغيّر

مثال (٤)

أي من بيانات الجدولين (أ)، (ب) يمثل تغيرًا طرديًّا؟ وأيهما يمثل تغيرًا عكسيًّا؟ اكتب المعادلة التي تمثّل التغير في الحالتين:

(أ)

س	٥	١٠	٢٥
ص	٢٠	١٠	٤

(ب)

س	٢	٤	١٠
ص	٥	١٠	٢٥

الحل:

(أ) نلاحظ أن ص/س ليست ثابتة.

نبحث س ص نجد أن

س ص = ٥ × ٢٠ = ١٠ × ١٠

= ٢٥ × ٤ = ١٠٠ = ثابت

إذًا التغيّر هنا تغيّر عكسي معادلته س ص = ١٠٠

(ب) نبحث عن النسب ص/س في جميع الحالات نجد أن:

ص/س = ٥/٢ = ١٠/٤ = ٢٥/١٠

وهي نسبة ثابتة = ٢,٥

إذًا التغيّر هنا طرديّ معادلته ص = ٢,٥ س

حاول أن تحل

٤ بيّن نوع التغيّر المناسب للموقف في كل من الحالات التالية، ثم اكتب رقم المعادلة التي تمثله:

(١) المبلغ الذي يأخذه كل شخص عند توزيع مبلغ ١٠٠ دينار على عدة أشخاص بالتساوي. (أ) ص = ٥ س

(٢) تكلفة شراء عدد من الأقلام علمًا أن ثمن القلم ٢٠ فلسًا. (ب) س ص = ٥

(٣) أنت تمشي ٥ كم كل يوم. سرعتك في المشي والزمن يتغيّران من يوم إلى يوم. (ج) ص = ١٠٠/س

(٤) عدد من الأشخاص يشترون هدايا تذكارية سعر الواحدة ٥ دنانير. (د) ص = ٢٠ س

مثال (٥) تطبيقات حياتية

توفي رجل وترك لزوجته وأبنائه مبلغ ٣ ٤٥٠ ٠٠٠ دينار. (والداه متوفيان).

أوجد نصيب كل فرد إذا تألفت عائلته من:

(أ) ٥ أولاد و٤ بنات (ب) ٤ أولاد و٣ بنات (ج) ولد واحد وابنتين

ماذا تلاحظ؟

الحل:

للزوجة الثمن أي ١/٨ × ٣ ٤٥٠ ٠٠٠ = ٤ ٣١ ٢٥٠

يبقى لأبنائه: ٣ ٤٥٠ ٠٠٠ − ٤ ٣١ ٢٥٠ = ٣ ٠١٨ ٧٥٠

(أ) عدد الحصص = عدد الأبناء × ١ + عدد البنات × ١/٢

= ٥ × ١ + ٤ × ١/٢ = ٧

نصيب الولد = ٣ ٠١٨ ٧٥٠ ÷ ٧ = ٤٣١ ٢٥٠ دينارًا.

نصيب الابنة = ١/٢ × ٤٣١ ٢٥٠ = ٢١٥ ٦٢٥ دينارًا.

(ب) عدد الحصص = ٤ × ١ + ٣ × ١/٢ = ١١/٢

نصيب الولد = ٣ ٠١٨ ٧٥٠ ÷ ١١/٢ ≃ ٥٤٨ ٨٦٣,٦ دينارًا.

نصيب الابنة = ٥٤٨ ٨٦٣,٦ ÷ ٢ ≃ ٢٧٤ ٤٣١,٨ دينارًا.

(ج) عدد الحصص = ١ × ١ + ٢ × ١/٢ = ٢

نصيب الولد = ٣ ٠١٨ ٧٥٠ ÷ ٢ = ١ ٥٠٩ ٣٧٥ دينارًا.

نصيب الابنة = ١ ٥٠٩ ٣٧٥ ÷ ٢ = ٧٤٥ ٦٨٧,٥ دينارًا.

﴿ يُوصِيكُمُ ٱللَّهُ فِيٓ أَوۡلَٰدِكُمۡۖ لِلذَّكَرِ مِثۡلُ حَظِّ ٱلۡأُنثَيَيۡنِۚ فَإِن كُنَّ نِسَآءٗ فَوۡقَ ٱثۡنَتَيۡنِ فَلَهُنَّ ثُلُثَا مَا تَرَكَۖ وَإِن كَانَتۡ وَٰحِدَةٗ فَلَهَا ٱلنِّصۡفُۚ وَلِأَبَوَيۡهِ لِكُلِّ وَٰحِدٖ مِّنۡهُمَا ٱلسُّدُسُ مِمَّا تَرَكَ إِن كَانَ لَهُۥ وَلَدٞۚ فَإِن لَّمۡ يَكُن لَّهُۥ وَلَدٞ وَوَرِثَهُۥٓ أَبَوَاهُ فَلِأُمِّهِ ٱلثُّلُثُۚ فَإِن كَانَ لَهُۥٓ إِخۡوَةٞ فَلِأُمِّهِ ٱلسُّدُسُۚ مِنۢ بَعۡدِ وَصِيَّةٖ يُوصِي بِهَآ أَوۡ دَيۡنٍۗ ءَابَآؤُكُمۡ وَأَبۡنَآؤُكُمۡ لَا تَدۡرُونَ أَيُّهُمۡ أَقۡرَبُ لَكُمۡ نَفۡعٗاۚ فَرِيضَةٗ مِّنَ ٱللَّهِۗ إِنَّ ٱللَّهَ كَانَ عَلِيمًا حَكِيمٗا ﴿١١﴾ ﴾

سورة النساء

حاول أن تحل

٥ هندسة: خصصت قطعتا أرض لبناء مجمعين سكنيين لهما المساحة نفسها، كل منهما على شكل مستطيل: أبعاد القطعة الأولى ٤٢ م × ٣٥ م، فإذا كان طول القطعة الثانية ٥٢,٥ م فاحسب عرضها.

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

تمرّنْ ٣-٤

التغير العكسي
Inverse Variation

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمارين (١-٣) أوجد ثابت التغير لكل من التغيرات العكسية التالية:

(١) ن = ٦ عندما ب = ٩

(٢) ص = ١٣ عندما س = ٧

(٣) س = ٨ عندما ص = ٩,٥

في التمرينين (٤-٥) أوجد قيمة م لكي تمثل الأزواج التالية في كل مسألة تناسبات عكسية.

(٤) (٥، ٨) ، (٤، م)

(٥) (٤، ٨) ، (م، ٢)

(٦) إذا كان حجم الغاز (ح) الموجود في إناء يتناسب عكسيًّا مع الضغط (ض)، وكان الحجم (ح) = ٢٠ م³ عندما الضغط (ض) = ١ جوي.

(أ) أوجد الحجم عندما يكون الضغط = ٤ جوي.

(ب) أوجد الحجم عندما يكون الضغط = ٣٦ جوي.

في التمارين (٧-٩) في البيانات الموجودة في كل جدول،

اختبر في ما إذا كانت العلاقة بين س، ص تمثل تغيرًا طرديًّا أم تغيرًا عكسيًّا. أكتب المعادلة التي تمثّل نوع التغير.

(٧)

س	ص
٢	٤
٤	٨
١٠	٢٠
١٢,٥	٢٥

(٨)

س	ص
٠,٢	١٢
١	٢,٤
٣	٠,٨
١٠	٠,٢٤

(٩)

س	ص
١	٤٠
٢	٢٠
٤	١٠
٥	٨

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يعملون في فقرات «حاول أن تحل» تأكد من أنهم تفهموا جيدًا الفرق بين التغير الطردي والتغير العكسي.

اختبار سريع

١ الزوجان المرتبان (٥، ١)، (١٠، ص) هما في تغير عكسي. أوجد قيمة ص. ٠,٥

٢ أوجد ثابت التغير العكسي إذا كانت ص = ٧ عندما س = ٢,٥. ١٧,٥

٣ أوجد معادلة تنمذج البيانات التالية ثم أكمل الجدول

س		٢		٦
ص	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٩}$	

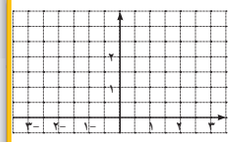
س × ص = $\frac{١}{٣}$. س =٣، ص = $\frac{١}{١٨}$.

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ ٢ × ٣٠ = ٣ × ٢٠ = ٤ × ١٥ = ٥ × ١٢ = ٦ × ١٠

= ١٠ × ٦ = ٦٠



* (١٠) إذا كانت ل تتغير عكسيًّا مع مربع ز حيث ل = $\frac{٠,٥}{ز^٢}$:
ارسم شكلًا بيانيًّا يبيّن ل كدالة في (ز) ثم استخدم الرسم البياني لإيجاد ل عندما ز = ٠,٥ . _____

(١١) بيّن نوع التغير المناسب للموقف في كل من الحالات التالية ثم اكتب رقم المعادلة التي تمثله.

المعادلات

(١) ص = ٥س

(٢) س ص = ٥

(٣) ص = $\frac{١٠٠}{س}$

(٤) ص = ٠,٢٠٠ س

(أ) المبلغ الذي يأخذه كل شخص عند توزيع ١٠٠ دينار على عدة أشخاص بالتساوي. _____

(ب) تكلفة شراء عدد من الأقلام علمًا أن ثمن القلم الواحد ٠,٢٠٠ دينار. _____

(جـ) أنت تمشي ٥ كم كل يوم. سرعتك في المشي والزمن يتغيران من يوم إلى يوم. _____

(د) عدد من الأشخاص يشترون هدايا تذكارية سعر الواحدة ٥ دنانير. _____

(١٢) (أ) إذا أردت أن تكسب ٨٠ دينارًا، فكم ساعة تعمل في كل مما يلي:

١. إذا كنت تكسب في الساعة ٥ دنانير.

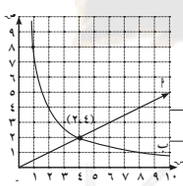
٢. إذا كنت تكسب في الساعة ٨ دنانير.

٣. إذا كنت تكسب في الساعة ١٠ دنانير.

(ب) ما المتغير في (أ)؟

(جـ) اكتب المعادلة التي تمثل هذا الموقف.

١١٦



(١٣) تفكير ناقد: الرسمان البيانيان (أ)، (ب) أحدهما يمثل تغيرًا طرديًّا والآخر يمثل تغيرًا عكسيًّا. اكتب معادلة كل من المتغيرين.

(١٤) إذا كانت شدة التيار (ش) في موصل تتغير عكسيًّا مع المقاومة (م) لذلك الموصل، وإذا كانت شدة التيّار $\frac{١}{٣}$ أمبير عندما كانت المقاومة ٣٦٠ أوم، فاكتب العلاقة بين شدة التيّار والمقاومة لذلك الموصل.

(١٥) إذا كان حجم الأسطوانة الدائرية القائمة (ح) يُعطى بالعلاقة ح = π نق^٢ ع، حيث (نق) طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة، (ع) ارتفاعها. إذا كان حجم الأسطوانة: ٢٠π سم^٣، فحدّد العلاقة بين (ع) كدالة في (نق) واستخدمها في إيجاد قيمة تقريبية لـ (ع) عندما نق = ٢,٥ سم.

١١٧

KuwaitMath.com

س × ص = ٦٠ ، تغير عكسي.

٢ تتنوع الإجابات.

س	٢	٣	٤	٦	٩	١٢	١٨
ص	١٨	١٢	٩	٦	٤	٣	٢

٣ (أ) ك = ٠,٢ × ٧٥ = ١٥ ومنه: ٣ س = ١٥
أي س = ٥.

(ب) م١ و١ = م٢ و٢ ؛ ٣ و١ = ٤٠ × ٦ ، ومنه يكون الوزن و١ = ٨٠ كجم.

(جـ) ٣ × ٧٥ = ز × ٩٠ ومنه ز = ٢,٥ ساعة

٤ (١) س ص = ١٠٠ (جـ) عكسي

(٢) ص = ٢٠س (د) طردي

(٣) س ص = ٥ (ب) عكسي

(٤) ص = ٥س (أ) طردي

٥ ٤٢ × ٣٥ = ٥٢,٥ × س

س = ٢٨ م.

المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمرينين (١-٢) أوجد (ن) لكي تمثل الأزواج التالية في كل مسألة على تناسبات عكسية.

(١) (ن، ٧) ، (٢، ١٤)

(٢) $\left(\frac{٣}{٤}، ن\right)$ ، $\left(١٨، \frac{٢}{٣}\right)$

اختبر ما إذا كانت العلاقة بين س، ص تمثل تغيرًا طرديًا أم تغيرًا عكسيًا. أكتب المعادلة التي تمثل نوع التغير.

(٣)

س	ص
١	٨
٢	٤
٤	٢
٨	١

(٤)

س	ص
٠,٠١	٩
٠,٩	٠,١
٠,١	٠,٩
٣	٠,٠٣

(٥)

س	ص
١٤,٤	١,٢
١٢	١
٩	٠,٧٥
٣,٦	٠,٣

(٦) أي التناسبات التالية تمثل تغيرًا عكسيًا؟

(أ) $\frac{س_٢}{ص_٢} = \frac{ص_٢}{س_١}$ (ب) $\frac{س_٢}{ص_١} = \frac{ص_٢}{س_١}$

(جـ) $\frac{س_٢}{ص_١} = \frac{س_٢}{ص_٢}$

(٧) الزمن اللازم (ن) لقطع مسافة معينة (ف) يتناسب عكسيًا مع السرعة. بفرض أنك تستغرق $٢\frac{١}{٢}$ ساعة للسفر بين مدينتين عندما يكون متوسط سرعة السيارة ٩٠ كم/ ساعة.

(أ) احسب ثابت التغير. ماذا يمثل هذا الثابت؟

(ب) كم تستغرق سيارة «ميكرو باص» لقطع المسافة نفسها إذا كان متوسط سرعتها ٧٥ كم/ ساعة؟

(٨) خصصت قطعتا أرض لهما المساحة نفسها لبناء مجمعين سكنيين، كل منهما على شكل مستطيل. أبعاد القطعة الأولى ٣٤ × ٢١ م. إذا كان طول القطعة الثانية ٥٢,٥ م فهل تتوقع أن عرضها يزيد عن عرض القطعة الأولى أم يقل عنه؟ ولماذا؟ احسب ذلك العرض لتتأكد من صحة توقعك.

(٩) إذا كان بإمكان فريق مؤلف من ٤ عمال طلاء صفوف المدرسة خلال ٦ أيام. فكم يومًا يلزم فريق مؤلف من ٦ عمال للقيام بالعمل نفسه؟

اختبار الوحدة الرابعة

اختر الإجابة الصحيحة.

(١) إذا كان ٢س - ٥ص = ٠ فإن $\frac{س}{ص}$ تساوي

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) $\frac{٥}{٢}$ ____

(٢) إذا كان $\frac{س}{ص} = ٧$ فإن س + ٧ص تساوي

(أ) ٧ س (ب) ٨س (جـ) ٢س (د) ليس أيًا مما سبق صحيحًا ____

(٣) إذا كان أ ∝ ب، $\frac{١}{جـ}$ ∝ ب فإن جـ تساوي

(أ) $\frac{\text{مقدار ثابت}}{أ}$ (ب) أ × مقدار ثابت

(جـ) ب × مقدار ثابت (د) $\frac{\text{مقدار ثابت}}{أب}$ ____

(٤) إذا كانت $\frac{س}{٨} = \frac{١}{ص}$ فإن إحدى الإجابات الصحيحة هي:

(أ) س = $\frac{١}{٤}$ ، ص = $\frac{١}{٢}$ (ب) س = ٢ ، ص = -٤

(جـ) س = ٢ ، ص = ٤ (د) س = -١ ، ص = ٨ ____

(٥) إذا كانت ٦، ٩، س، ١٥ في تناسب فإن س تساوي

(أ) ٣٠ (ب) ٢٥ (جـ) ٢٠ (د) ١٠ ____

(٦) العدد الذي إذا طرح من كل من الأعداد ١٦، ١٠، ١١، ٧ بالترتيب نفسه صارت متناسبة هو:

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١ ____

(٧) إذا كانت ٤٢ب، س، ٧ب، ٢أ٢ أربع كميات متناسبة فإن س تساوي

(أ) ١٤أ٢ (ب) $\frac{١}{٣}$أ٢ (جـ) ٣أ٢ (د) ١٢أ٢ ____

(٨) إذا كانت ٢٠، س، ٣٢ في تناسب متسلسل فإن س تساوي

(أ) $\pm ١٠\sqrt{٢}$ (ب) $\pm ١٠\sqrt{٤}$ (جـ) $\pm ١٠\sqrt{٨}$ (د) $\pm \frac{١}{١٠\sqrt{٨}}$ ____

(٩) إذا كانت $\frac{س}{٢ص} = \frac{٣}{٥}$ فإن $\frac{س + ٢ص}{٣س - ص}$ تساوي

(أ) $\frac{١٥}{٩}$ (ب) $\frac{١٦}{٧}$ (جـ) $\frac{٧}{١٦}$ (د) $\frac{٩}{١٥}$ ____

(١٠) إذا كان ٢س^٢ - ٧س ص + ٣ص^٢ = ٠ حيث ص، س موجبان فإن $\frac{س}{ص}$ يمكن أن تساوي:

(أ) $\frac{٣}{١}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{-٣}{١}$ (د) $\frac{-١}{٣}$ ____

(١١) الوسط المتناسب بين ٤أ^٢ ب^٣، ٩أ^٤ ب يساوي:

(أ) ±٦أ^{٣}ب^٢ (ب) ±٦أ^{٤}ب^٢ (جـ) ±٦أب (د) ±٦أ^{٤}ب ____

(١٢) إذا كانت $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن $\frac{أ + ب}{ب}$ تساوي:

(أ) $\frac{أ + جـ}{ب + جـ}$ (ب) $\frac{جـ + د}{ب}$ (جـ) $\frac{أ + جـ}{ب}$ (د) $\frac{جـ + د}{د}$ ____

(١٣) إذا كان ص ∝ $\frac{١}{س}$ ، ص = ٥ عندما س = ١٠ فإن س ص تساوي:

(أ) ١٠٠ (ب) ٢٥٠ (جـ) ٥٠ (د) ١٥٠ ____

(١٤) إذا كانت $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$ فإن $\frac{س + ص}{٢ص}$ تساوي:

(أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٦}{٥}$ (د) $\frac{٥}{٦}$ ____

(١٥) إذا كانت أ، ٣س، ٢ب، ٤س في تناسب فإن $\frac{أ}{ب}$ تساوي:

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٢}$ ____

(١٦) الرابع المتناسب للمقادير (أ + ب)^٢، (أ^٢ - ب^٢)، (أ - ب) يساوي:

(أ) $\frac{ب - أ}{(أ + ب)^٢}$ (ب) $\frac{٢(ب - أ)}{أ + ب}$ (جـ) $\frac{(أ + ب)^٢}{أ - ب}$ (د) $\frac{(أ - ب)^٢}{أ + ب}$ ____

(١٧) إذا كانت ص = $\frac{٥}{س}$ فإن:

(أ) ص ∝ $\frac{١}{س^٢}$ (ب) ص ∝ س^٢ (جـ) ص ∝ $\frac{١}{س}$ (د) ص ∝ س ____

(١٨) إذا كان ص ∝ س وكانت ص = ٨ عندما س = ٤، فإنه عندما ص = ٦ فإن س تساوي:

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) ٣ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) $\frac{١}{٨}$ ____

(١٩) إذا كانت $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن $\frac{٢أ - ٣جـ}{٢ب - ٣د}$ تساوي:

(أ) $\frac{ب}{د}$ (ب) $\frac{أ}{جـ}$ (جـ) $\frac{ب}{أ}$ (د) $\frac{أ}{ب}$ ____

(٢٠) إذا كانت ص = أ + ب حيث أ ثابت، ب ∝ س وكانت ص = ١٣ عندما س = ٢، ص = ١ عندما س = ١ فإن قيمة ص عندما س = -٥ تساوي:

(أ) -٧١ (ب) -٦٠ (جـ) -١١ (د) ١٢ ____

(٢١) مساحة سطح الكرة م = ٤πنق^٢ فإن المساحة م تتناسب طرديًا مع:

(أ) نق (ب) πنق (جـ) نق^٢ (د) π ____

KuwaitMath.com

المرشد لحل المسائل

إجابة «مسألة إضافية»

(أ) نأخذ س الوزن المطلوب

١٢٠ × ٢٠٠ = ١٥٠ × س

س = ١٦٠ جم

كلما قل الوزن زادت المسافة، لذا يجب أن يكون وزن الكرة أقل من ١٦٠ جم.

يباع الحجر المصنوع من الإسمنت المعد سلفًا ويوزع في شاحنات تتسع كل منها لِـ ٨,٥ م٣.
أبعاد حجر الأسمنت المعتمدة هي ١٥ سم، ١٨ سم، ٢٠ سم.
يريد جاسم تغطية رقعة مساحتها ٢٨٠ مترًا مربعًا ويريد معرفة عدد الشاحنات اللازم للعملية.

كيف فكر جاسم

أ كلما زاد عمق الرقعة المغطاة بالأسمنت قلت مساحتها. استنتج أن تغيّر عمق الرقعة مع تغيّر المساحة هو عكسي.

ب قام بوضع جدول يبيّن الأمتار المكعبة من الأسمنت اللازمة وفق كل عمق.

إذا كان العمق ١٥ سم: ح = ٢٨٠ × ٠,١٥ = ٤٢ م٣.

يتغيّر عدد الشاحنات طرديًا مع حجم الأسمنت: ٤٢ ÷ ٨,٥ ≃ ن شاحنات.

العمق بالأمتار	الأمتار المكعبة	عدد الشاحنات
٠,١٥	٤٢	٥
٠,١٨	٥٠,٤	٦
٠,٢٠	٥٦	٧

استشار جاسم أحد مهندسي الإنشاءات فأفاده أن عمق ٢٠ سم غير ضروري، ولكن يجب أن لا يقل عن ١٥ سم.
قرّر جاسم اعتماد عمق ١٨ سم.
برأيك، هل اختيار جاسم موفق؟ وهل كمية حجر الاسمنت المتبقية كبيرة (تشكل هدرًا للمال؟) فسّر.

مسألة إضافية

في أحد المهرجانات الرياضيّة، تقذف آلة كهربائية كراتًا إلى البعيد. تتغير المسافة التي تقطعها الكرة عكسيًّا مع وزنها.

أ يريد عبدالله قذف الكرة مسافة تزيد على ١٥٠ مترًا بأقل وزن ممكن للكرة. وضع في الآلة كرة تزن ٢٠٠ جم فقذفتها الآلة مسافة ١٢٠ م.

ب ما الوزن المناسب لكي تقطع الكرة مسافة تزيد على ١٥٠ مترًا؟

(٢٢) مثلث طول قاعدته س وارتفاعه المناظر لهذه القاعدة ص، إذا كانت مساحته ١٢ سم٢ فإن:

(أ) ص − س = ١٢ (ب) س + ص = ٢٤

(جـ) ص ∝ $\frac{١}{س}$ (د) ص ∝ س _____

(٢٣) إذا كان ٩س + ٦س = ٥ (٥س − ص) فإن

(أ) س ∝ ص (ب) س ∝ ص٢

(جـ) س ∝ $\frac{١}{ص}$ (د) ليس أيًّا مما سبق صحيحًا _____

(٢٤) إذا كان $\frac{٩}{١٣} = \frac{٣س + ص}{٢س + ٣ص}$، فأوجد القيمة العددية للمقدار $\frac{س + ٣ص}{٣س + ٢ص}$.

(٢٥) تتناسب مقاومة سلك كهربائي (م) عكسيًّا مع مربع طول نصف قطر مقطعه (نق٢)، إذا كانت مقاومة السلك = ٠,٤ (أوم) عندما يكون طول نصف قطر مقطعه نق = ٠,٣ سم، فأوجد العلاقة بين م، نق، ثم احسب مقاومة السلك عندما يكون نق = ٠,٢ سم.

(٢٦) إذا كانت العلاقة بين حجم الأسطوانة (ح) وطول نصف قطر قاعدتها (نق) وارتفاعها (ع) هي ح = π نق٢ ع، فأوجد نوع العلاقة في الحالات التالية:

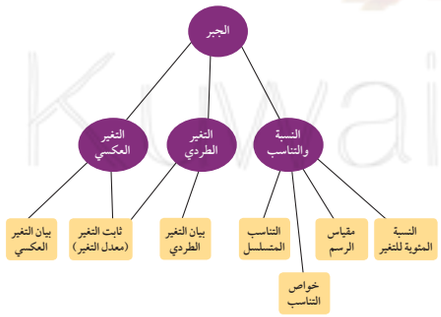
(أ) بين ح، نق٢ بفرض ثبوت ع. _____

(ب) بين ح، ع عند ثبوت نق. _____

(٢٧) (أ) إذا كانت أ، ب، جـ أعدادًا متناسبة مع الأعداد ٣، ٥، ٢ فأوجد القيمة العددية للمقدار $\frac{٥أ + ب}{٣ب + جـ}$.

(ب) إذا أنتج ٢٠ عاملًا في مصنع ٣٠٠٠ آلة في ١٢ يوم عمل، فما المدة التي سوف يستغرقها ١٥ عاملًا لإنتاج ٣٠٠٠ آلة؟

مخطط تنظيمي للوحدة الرابعة



ملخص

- النسبة هي مقارنة بين كميتين من النوع نفسه ويمكن تمثيلها بكسر .
- مقياس الرسم هو النسبة بين الطول على الخريطة والمسافة الحقيقية.
- التناسب هو تساوي نسبتين أو أكثر.
- إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإنه يقال إن الأعداد أ، ب، جـ في تناسب متسلسل والعكس صحيح.
- النسبة المئوية للتغير = $\frac{\text{قيمة التغير}}{\text{القيمة الأصلية}} \times ١٠٠$
- بيان التغير الطردي هو دالة خطية تكتب بالصورة: ص = ك س حيث ك ≠ ٠، ك: ثابت التغير.
- في التغير الطردي: النسبة $\frac{ص}{س}$ ثابتة لكل زوج مرتب (س ≠ ٠).
- إذا تغيرت كمية ص مع تغير كمية أخرى س بحيث كان حاصل ضرب الكميتين ثابتًا، فإن هذا التغير يسمى تغيرًا عكسيًّا.
- في التغير العكسي: س١ × ص١ = س٢ × ص٢ أو $\frac{س_١}{س_٢} = \frac{ص_٢}{ص_١}$.
- حاصل الضرب هو ثابت التغير أي س × ص = ك (ثابت).

KuwaitMath.com

تمارين إثرائيّة

(١) وضع ١٠٠ كيلوجرام من العنب للتجفيف للحصول على الزبيب. يحتوي هذا العنب على ٩٥٪ ماء. بعد ٣ أسابيع من التجفيف ، انخفضت نسبة الماء فيه إلى ٩٠٪. فكم أصبح وزن العنب؟

(٢) (أ) إحداثيات النقطتين أ، ب هي: (-١، -٢) ، (١٣٢,٥، ٢٦٥).
هل يمكن معرفة ما إذا كانت النقاط أ، ب، و نقطة الأصل على استقامة واحدة؟ كيف؟
(ب) كرر نفس السؤال في (أ) بالنسبة لأزواج النقاط:
م، ن حيث م ($\sqrt{٢}$ - ١، $\sqrt{٧}$ + ١) ، ن (١، ٣ + ٢ $\sqrt{٧}$)
ك، ل حيث ك ($\overline{٣}$, ٠, ٥ ، ٠) ، ل ($\overline{٣}$, ٢ ، ٥, ٣)

(٣) ارتفع سعر عدسة آلة تصوير تلفزيونية ٤,٣٪ ثم ارتفع السعر الجديد ٦,١٦٪ ليصبح سعرها الحالي ٤٨,١٦ دينارًا. فكم كان سعر العدسة قبل الزيادات؟

(٤) هل توجد دالة تغير طردي في كل مما يلي:
(أ) س سعر سلعة بالدولار ، ص سعرها بالدينار.

(ب) س طول ضلع مكعب، ص حجم هذا المكعب.

(جـ) س ارتفاع أسطوانة طول نصف قطرها ٥ سم، ص حجم هذه الأسطوانة بالسنتيمترات المكعبة.

(٥) يعمل طلال في إحدى الشركات، ويتألف راتبه الشهري من راتب ثابت قيمته ٩٧٠ دينارًا وعمولة قدرها ٤٪ على مجمل مبيعاته الشهريّة. إذا بلغ راتب طلال في نهاية هذا الشهر ١٥٠٠ دينار، فما مجمل مبيعاته خلاله؟

(٦) يقبض صالح راتبًا شهريًّا قدره ٩٠٠ دينار مقابل ٦٠ ساعة عمل، فيدفع منه ١٥٪ لشراء بعض حاجياته. وقد اضطر هذا الشهر إلى العمل ساعات إضافية من أجل تسديد دين قيمته ١٢٠٠ دينار، على أن يقبض أجرة ساعة ونصف لقاء كل ساعة عمل إضافية. فكم ساعة عمل إضافية عليه أن يعمل؟

KuwaitMath.com