الوحدة الخامسة: المتتاليات (المتتابعات) Sequences

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

٥ – ١: الأنماط الرياضية والمتتاليات (المتتابعات)

جزء ١: النمط الرياضي

جزء ٢: المتتالية

جزء ٣: المتتالية المنتهية والمتتالية غير المنتهية

جزء ٤: صيغ المتتالية – الحد النوني

جزء ٥: متتالية فيبوناتشي

٥ – ٢: المتتالية الحسابية

جزء ١: تعريف المتتالية الحسابية

جزء ٢: الحد النوني للمتتالية الحسابية

جزء ٣: الأوساط الحسابية.

جزء ٤: مجموع ن حدًّا الأولى من متتالية حسابية

٥ – ٣: المتتالية الهندسية

جزء ١: تعريف المتتالية الهندسية

جزء ٢: الحد النوني للمتتالية الهندسية

جزء ٣: الأوساط الهندسية

جزء ٤: مجموع ن حدًّا الأولى من متتالية هندسية

جزء ٥: رمز المجموع (Σ)

KuwaitMath.com

مقدمة الوحدة

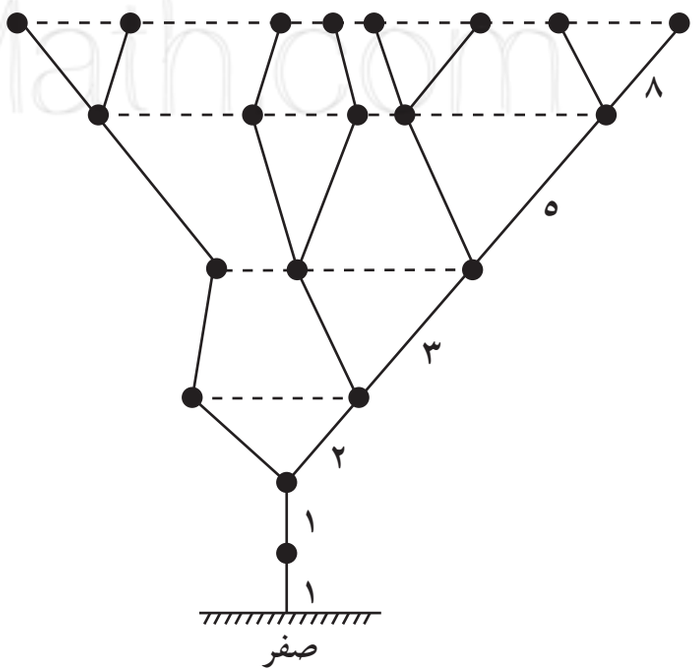
عندما نتكلم على المتتاليات لا بد من التعرض إلى الأنماط.
أنت تنظر حولك، تتابع الحركة في هذا الكون الفسيح تستشعر عظمة الخالق فتستكشف أن كل شيء يخضع لقوانين ثابتة وينتظم في أنماط واضحة: النهار والليل، أيام الأسبوع، فصول السنة، أشهر السنة... كما نجد الأنماط عند الإنسان والحيوان والنبات.
أما في مجال الرياضيات فنجد الأنماط بكثرة في تركيبة الأعداد ويوجد أمثلة كثيرة تتناول هذه الأنماط ومنها المتتاليات.

مشروع الوحدة

إرشادات توجيهية للطلاب:

يتناول مشروع الوحدة إحدى المتتاليات التي لها ارتباط وثيق بالواقع وهي متتالية فيبوناتشي ومن المتعارف عليه أن هذه المتتالية بحسب عرض المشروع يمكن إيجاد أمثلة كثيرة عنها في أوراق الشجر وفي تكوين بعض الثمار مثال ذلك أكواز الصنوبر.

مخطط يمثل متتالية فيبوناتشي



الوحدة الخامسة

المتتاليات (المتتابعات)
Sequences

مشروع الوحدة: استخدام المتتابعات في الرسوم الهندسية والتصاميم.

١ مقدمة المشروع: يدعى كل حد في متتالية فيبوناتشي عدد فيبوناتشي. في العديد من النباتات والزهور والثمار عدد البتلات هو من أعداد فيبوناتشي.

٢ الهدف: دراسة بعض أنواع النباتات والزهور والثمار وتبيان توافق عدد بتلاتها مع أعداد فيبوناتشي.

٣ اللوازم: أوراق رسم بياني، آلة حاسبة، صور: زنابق، قرحية زهور على شكل نجمة، مخروط صنوبر، عباد الشمس (تباع الشمس).

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ ابحث عن إحدى النباتات التي يتوافق نمو ساقها مع متتالية فيبوناتشي. ضع مخططاً وجدولاً يبينان هذا التوافق.

ب ابحث عن بعض الزنابق وعشب الحوزان والقرحية والأقحوانات. اعرض هذه الصور وبين كيف أن عدد بتلات كل منها هو عدد فيبوناتشي.

جـ ابحث عن صورة لزهرة الآلام (PASSI FLORA) واعرض صورتها من الجهتين الأمامية والخلفية، ثم بين أن أعداد مجموعتي بتلاتها الخضراء هي أعداد فيبوناتشي. كذلك من الجهة الخلفية، بيّن العلاقة بين الأوراق الخضراء والبتلات ومتتالية فيبوناتشي.

د اعرض صورة لزهرة إشنسا فرفرية Echinacea Purpura وصورة لقرص عباد الشمس Sun FLower. بين توافق المنحنيات الحلزونية مع أعداد فيبوناتشي.

هـ اجمع بعض مخاريط الصنوبر. عد الحلزونات في الاتجاهين في كل مخروط. ماذا تلاحظ؟ وماذا عن ثمرة الأناناس؟

٥ التقرير: ضع تقريرًا مفصلًا تبيّن فيه كيف استفدت منَ المتتاليات للإجابة عن الأسئلة فيما تنفذ المشروع.

عباد الشمس (تباع الشمس)

كوز صنوبر

أناناس

دروس الوحدة

الأنماط الرياضية والمتتاليات (المتتابعات)	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
١-٥	٢-٥	٣-٥

١٨٠

KuwaitMath.com

ومن الأمثلة المهمة التي أوردها فيبوناتشي توالد الأرانب حيث نمذج ذلك في الجدول التالي:

عدد الأشهر	عدد الأزواج (٢) من الأرانب	أ = رمز لأزواج (٢) الأرانب لا تتوالد ب = رمز لأزواج (٢) الأرانب تتوالد
البدء	–	أ
١	١	ب
٢	٢	ب أ
٣	٣	ب أ ب
٤	٥	ب أ ب أ ب
٥	٨	ب أ ب أ ب أ ب ب

إذا نظرنا بتمعن إلى المخطط وإلى جدول توالد الأرانب لعدة أشهر متتالية تتضح أمامنا فكرة متتالية فيبوناتشي.

وعمومًا إذا أخذنا: $ح_ن$ الحد النوني لمتتالية فيبوناتشي نستنتج العلاقة الصريحة التالية:

$ح_ن = ح_{ن-١} + ح_{ن-٢}$ لكل ن = ٣، ٤، ٥، ٦، ...

المهم أن هذا المشروع يعطي فرصة أمام الطلاب للتعرف على واحدة من المتتاليات حيث لها تطبيقات يشاهدها حوله في النبات وفي الحيوان...

يساعد البحث على تعميق مفهوم هذه المتتالية وتطبيقاتها الحياتية لذا من المهم جدًّا التعامل مع فقرة «أسئلة حول التطبيق» لإنجاز هذا المشروع.

يجب أن يكون التقرير واضحًا ومفصلًا يتضمن العناصر كلها التي توصلت إليها المجموعات. أعد النظر بالحسابات والنتائج إذا كان ذلك ضروريًّا.

سلّم التقييم:

٤.	البحث جيد ومتكامل ومشوق. الصور والنماذج معبرة. التقرير مفصل وكامل.
٣.	البحث مقبول ومعبر. الصور والنماذج ينقصها بعض الدقة. التقرير مقبول مع بعض الأخطاء.
٢.	البحث متوسط الوضوح. الصور والنماذج بمعظمها غير مناسبة. التقرير يتضمن أخطاء كثيرة وغير واضح.
١.	معظم عناصر المشروع ناقصة وغير مقبولة.

٥ـ١: الأنماط الرياضية والمتتاليات (المتتابعات)

١ الأهداف

- يتعرف النمط الرياضي.
- يتعرف المتتالية الحقيقية المنتهية وغير المنتهية.
- يتعرف الصيغة الارتدادية والصيغة الصريحة.
- يكتب الصيغة الارتدادية لمتتالية.
- يكتب الصيغة الصريحة لمتتالية.
- يتعرف متتالية فيبوناتشي.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

متتالية منتهية – متتالية غير منتهية – الحد النوني للمتتالية – صيغة صريحة لمتتالية – صيغة ارتدادية لمتتالية.

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – جهاز إسقاط – حاسوب.

٤ التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(أ) ما النمط الذي تراه في الأعداد التالية؟

١، ٢، ٤، ٧، ١١، ١٦، ٢٢، ... .

+١ +٢ +٣ +٤ +٥ +٦

١، ٢، ٤، ٧، ١١، ١٦، ٢٢، ... .

(ب) ما هي الأعداد الخمسة التالية؟

(جـ) ما قيمة المقدار $(-٣)^{ن}$ لكل: ن = ٢، ٣، ٤، ٥؟

(د) ما قيمة المقدار: ٣ن + ٤ لكل: ن = ١، ٢، ٣، ٤، ٥؟

٥ التدريس

غالبًا ما يفكر الطلاب في المتتالية على أنها مجموعة من الأعداد تمّ تنظيمها بترتيب معين، ولكن يمكن فهم المتتاليات والرسوم البيانية الممثلة لها على أنها دالة مجالها مجموعة الأعداد الكلية أو جزء منها.

ومجالها المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية أو جزء منها.

١-٥

الأنماط الرياضية والمتتاليات (المتتابعات)

Mathematical Patterns and Sequences

سوف تتعلم

- النمط الرياضي
- المتتالية الحقيقية
- الحد النوني للمتتالية

عمل تعاوني

افترض أن كل طالبين من الفصل تجري بينهما مكالمة هاتفية.

ما أقل عدد من المكالمات الهاتفية التي يمكنك الحصول عليها بحيث يتحدث كل طالب من فصلك مع الآخر هاتفيًا؟

ثم أجب عن الأسئلة التالية باستخدام الشكل المجاور:

١ كم مكالمة يمكن أن تجري بين طالبين؟

٢ كم مكالمة يمكن أن تجري بين ٣ طلاب أو ٤ طلاب؟

٣ استخدم الشكل المجاور لتحديد عدد المكالمات الممكنة بين ٥ طلاب، ثم أكمل الجدول التالي:

عدد الطلاب (ن)	١	٢	٣	٤	٥
عدد المكالمات (م)	٠	١			

٤ النمط الرياضي: أي من الصيغ التالية تمثل النمط الموجود في الجدول السابق؟

أ) م = ٢ن – ٣ ب) م = ن (ن – ١) – ٥ جـ) م = $\frac{ن (ن - ١)}{٢}$

حيث ن عدد الطلاب، م عدد المكالمات.

٥ أوجد عدد المكالمات م اللازم لمجموعة من ٧ طلاب مستخدمًا الصيغة المناسبة.

٦ ما عدد المكالمات اللازم ليتحدث كل طلاب صفك مع بعضهم بعضًا؟

مثال (١)

سقطت كرة من ارتفاع ١٢,٥ مترًا عن سطح الأرض وكانت ترتفع إلى ٨٠٪ من الارتفاع السابق في كل مرة نتيجة اصطدامها بالأرض. احسب ارتفاع الكرة بعد الاصطدام الرابع.

الحل:

الارتفاع الأصلي ١٢,٥ م.

- بعد الاصطدام الأول بالأرض، يكون ارتفاع الكرة: ٠,٨ × ١٢,٥ = ١٠ أمتار.
- بعد الاصطدام الثاني بالأرض، يكون ارتفاع الكرة: ٠,٨ × ١٠ = ٨ أمتار.
- بعد الاصطدام الثالث بالأرض، يكون ارتفاع الكرة: ٠,٨ × ٨ = ٦,٤ أمتار.
- بعد الاصطدام الرابع بالأرض، يكون ارتفاع الكرة: ٠,٨ × ٦,٤ = ٥,١٢ أمتار.

وبالتالي يكون الارتفاع ١٢,٥ م بعد الاصطدام الرابع للكرة بالأرض.

لاحظ تتابع الارتفاعات (١٢,٥ ، ١٠ ، ٨ ، ٦,٤ ، ٥,١٢ ، ...)

حاول أن تحل

١ سقطت كرة من ارتفاع ١٠ أمتار، وكانت ترتفع إلى ٦٠٪ من الارتفاع السابق في كل مرة نتيجة اصطدامها بالأرض. احسب ارتفاع الكرة بعد الاصطدام الثالث.

تدريب (١)

صف النمط التالي ثم أكمل بكتابة الحدود الثلاثة التالية:

أ) ٢، ٤، ٦، ٨، —، —، —

ب) ٢٤٣، ٨١، ٢٧، ٩، —، —، —

هل تعلم:

ليس من الضروري أن تكون جميع حدود المتتالية مختلفة. فمثلًا المتتابعة ٢، ٢، ٢، ٢... حيث $ح_ن$ = ٢ جميع حدودها متساوية وهذه تسمى متتابعة ثابتة.

مثل الأنماط الرياضية السابقة تسمى متتابعات أو متتاليات ويمكننا إيجاد الحدود التالية باتباع قاعدة النمط.

معلومة رياضية:

يستخدم الرمز $(ح_ن)$ للتعبير عن المتتابعة. بينما يعبر $ح_ن$ عن الحد النوني لهذه المتتابعة.

اعتبر متتالية الأعداد في (أ):

الحد الأول	الحد الثاني	الحد الثالث	الحد الرابع	...	الحد النوني
$ح_١$	$ح_٢$	$ح_٣$	$ح_٤$		$ح_ن$

$ح_١ = ٢$، $ح_٢ = ٤$، $ح_٣ = ٦$، $ح_٤ = ٨$، ...، ...

ويرمز إلى الحد النوني في المتتابعة بالرمز $ح_ن$ حيث ن ∈ ص، وهي تعبر عن رتبة الحد.

تعريف:

المتتالية الحقيقية هي دالة حقيقية مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة أو مجموعة جزئية منها، مرتبة على الصورة {١، ٢، ٣، ٤، ... ، م} ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية ح.

ملاحظة: يمكن التعبير عن المتتالية بكتابة حدودها $(ح_١، ح_٢، ح_٣، ...)$

ويمكن الحصول على حدود المتتالية من صور عناصر مجال المتتالية.

KuwaitMath.com

ركز أولًا مع الطلاب على الربط بين الأنماط والمتتاليات من خلال فقرة «عمل تعاوني» وفي الأمثلة المتلاحقة على كيفية استنتاج الحد النوني للمتتالية باستخدام النمط.

اعرض تمارين متعددة ومتنوعة مشابهة للأمثلة (٢) و(٣)، لتتأكد من حسن الربط بين الأنماط والمتتاليات.

ناقش معهم المثال (٤) واطلب إليهم تطبيق التعريف للمتتالية لإيجاد الحد السادس والسابع.

المثال (٦)، قد يتساءل الطلاب عن كيفية استكشاف الصيغة الصريحة للمتتالية. شجعهم على كتابة الأعداد وتجزئتها مثلًا:

١ + ٤ = ٥

١ + ٩ = ١٠

١ + ١٦ = ١٧

١ + ٢٥ = ٢٦

أي دعهم يفكرون في مربعات الأعداد الكلية.

المثال (٧)، ذكرهم بهندسة الكسريات وكيفية التعامل معها.

المثال (٨)، ناقش معهم أبعاد هذا المثال من حيث تطبيقاته الواقعية وكيفية الاستفادة من النتائج التي توصلوا إليها وهم ينجزون المشروع المتعلق بمتتالية فيبوناتشي.

٦ الربط

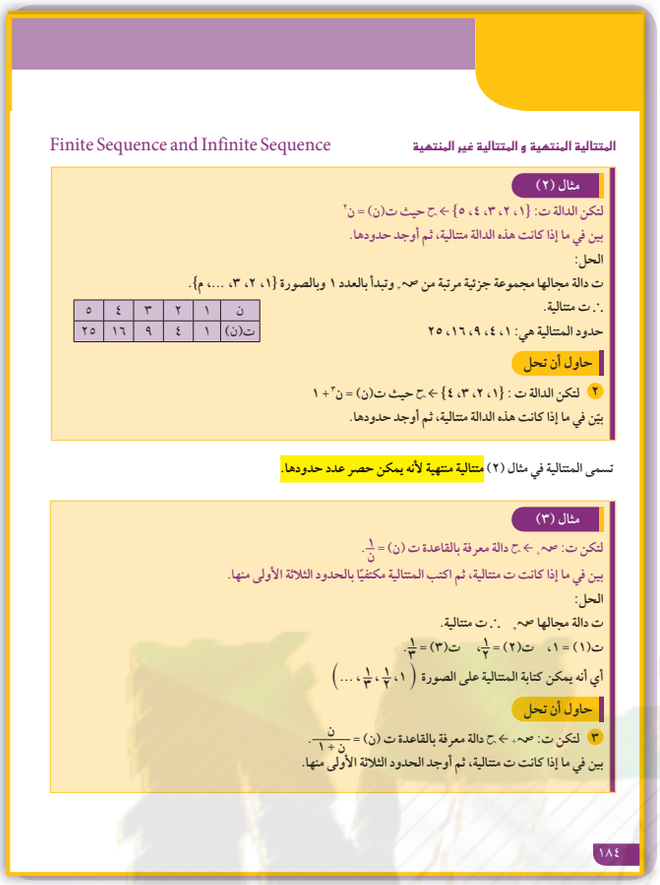
مثال (١)، يشكل سقوط الكرة وإعادة ارتفاعها مثالًا واقعيًّا للمتتالية. تستخدم بعض الكاميرات الخاصة لقياس ارتفاع الكرة بعد كل سقوط.

مثال (٧)، متتالية فيبوناتشي. إنها من المتتاليات الشهيرة جدًّا ولها تطبيقات كثيرة في عالم النبات. يمكن عرض صور بعض الأزهار وأكواز الصنوبر وغيرها التي تتبع قانون متتالية فيبوناتشي على جهاز إسقاط.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يجد الطالب النمط ولكن لا يستطيع استنتاج الصيغة الصريحة للمتتالية.

ساعد الطلّاب من خلال عرض عدد من التمارين وناقش معهم كيفية الاستفادة من النمط لربط ذلك مع الحد النوني.



المتتالية المنتهية و المتتالية غير المنتهية Finite Sequence and Infinite Sequence

مثال (٢)

لتكن الدالة ت: {١، ٢، ٣، ٤، ٥} ← ح حيث ت(ن) = ن^{٢}

بين في ما إذا كانت هذه الدالة متتالية، ثم أوجد حدودها.

الحل:

ت دالة مجالها مجموعة جزئية مرتبة من صـ، وتبدأ بالعدد ١ وبالصورة {١، ٢، ٣، ...، م}.

∴ ت متتالية.

ن	١	٢	٣	٤	٥
ت(ن)	١	٤	٩	١٦	٢٥

حدود المتتالية هي: ١، ٤، ٩، ١٦، ٢٥

حاول أن تحل

٢ لتكن الدالة ت : {١، ٢، ٣، ٤} ← ح حيث ت(ن) = ن^{٣} + ١

بيّن في ما إذا كانت هذه الدالة متتالية، ثم أوجد حدودها.

تسمى المتتالية في مثال (٢) **متتالية منتهية لأنه يمكن حصر عدد حدودها**

مثال (٣)

لتكن ت: صـ ← ح دالة معرفة بالقاعدة ت (ن) = $\frac{١}{ن}$.

بين في ما إذا كانت ت متتالية، ثم اكتب المتتالية مكتفيًا بالحدود الثلاثة الأولى منها.

الحل:

ت دالة مجالها صـ ∴ ت متتالية.

ت(١) = ١، ت(٢) = $\frac{١}{٢}$، ت(٣) = $\frac{١}{٣}$.

أي أنه يمكن كتابة المتتالية على الصورة $\left(١، \frac{١}{٢}، \frac{١}{٣}، ...\right)$

حاول أن تحل

٣ لتكن ت: صـ ← ح دالة معرفة بالقاعدة ت (ن) = $\frac{ن}{ن + ١}$.

بين في ما إذا كانت ت متتالية، ثم أوجد الحدود الثلاثة الأولى منها.

١٨٤

تسمى المتتالية في مثال (٣) **متتالية غير منتهية لأن مجالها صـ**

الصيغة الإرتدادية Recursive Formula

تعرف الصيغة الارتدادية حدود المتتالية بربط كل حد بالحد (أو بالحدود) الذي يسبقه مباشرة ويمكن اعتبارها حد عام للمتتالية.

في مثال (١) كان النمط ارتداديًا لأن ارتفاع الكرة بعد كل اصطدام بالأرض يساوي ٨٠٪ من الارتفاع الذي يسبقه مباشرة.

الصيغة الارتدادية التي تصف ارتفاع الكرة هي ح$_{ن}$ = ٠,٨ × ح$_{ن-١}$ مع ح$_{١}$ = ١٢,٥ حيث ن عدد طبيعي أكبر من ١.

مثال (٤)

١ صف النمط الذي يسمح بإيجاد الحد التالي من المتتالية (٦، ١، -٤، -٩، ...).

ب أوجد الحدين الخامس والسادس (ح$_{٥}$، ح$_{٦}$) من هذه المتتالية.

ملاحظة:
في كل متتالية معرفة بالصيغة الارتدادية، يجب إعطاء الحد الأول (أو الحدود الأولى).

الحل:

١ نحصل على أي حد من المتتالية بطرح ٥ من الحد الذي يسبقه مباشرة.

٦ - ١ = ٥، ١ - (-٤) = ٥، -٤ - (-٩) = ٥ ∴ النمط ارتدادي

∴ الصيغة الارتدادية هي: ح$_{ن}$ = ح$_{ن-١}$ - ٥ مع ح$_{١}$ = ٦

ب بما أن ح$_{٤}$ = -٩، ح$_{٥}$ = ح$_{٤}$ - ٥ = -٩ - ٥ = -١٤،

ح$_{٦}$ = ح$_{٥}$ - ٥ = -١٤ - ٥ = -١٩.

حاول أن تحل

٤ اكتب الصيغة الارتدادية (الحد العام) مما يلي ثم أوجد الحد التالي:

١ (-٢، -١، ٠، ١، ٢، ...)

ب (٤٣، ٤١، ٣٩، ٣٧، ٣٥، ...)

ج (٤٠، ٢٠، ١٠، ٥، $\frac{٥}{٢}$، ...)

د $\left(\frac{١}{٢}، \frac{١}{٤}، \frac{١}{٨}، \frac{١}{١٦}، \frac{١}{٣٢}، ...\right)$

الصيغة الصريحة (الحد النوني للمتتالية) Explicit Formula

يمكنك أحيانًا معرفة قيمة الحد في متتالية دون معرفة الحد الذي يسبقه. بدلًا منه يمكنك استخدام عدد الحدود لحساب قيمة الحد. الصيغة التي تعبر عن الحد النوني بدلالة ن تسمى **صيغة صريحة**.

١٨٥

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يحاولون الإجابة عن فقرات «حاول أن تحل» وتأكد من أعمالهم.

اختبار سريع

١ صف النمط ثم أكمل بكتابة الحدود الثلاثة التالية.

١، ٣، ٦، ١٠، ١٥، ... أضيف ٢، ٣، ٤، ٥، ...

٢١، ٢٨، ٣٦

٢ اكتب الصيغة الارتدادية للمتتالية ٢، ٦، ١٨، ٥٤، ... . ثم أوجد الحد التالي. $ح_ن = ٣ح_{ن-١}$ ؛ ١٦٢

٣ اكتب الصيغة الصريحة للمتتالية ٦٠، ٣٠، ٢٠، ١٥، ... ثم أوجد $ح_{١٠}$. $ح_ن = \frac{٦٠}{ن}$ ؛ ٦.

٩ إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

١ ، ٣

عدد الطلاب (ن)	١	٢	٣	٤	٥
عدد الاتصالات (م)	٠	١	٣	٦	١٠

٤ الصيغة (جـ)، حيث $م = \frac{ن(ن-١)}{٢}$.

٥ $م = \frac{٧(٧-١)}{٢} = ٢١$، أي ٢١ مكالمة.

٦ تتنوع الإجابات بحسب عدد التلاميذ ولكن يمكن استخدام الصيغة $م = \frac{ن(ن-١)}{٢}$.

« تدريب (١) »

(أ) كل عنصر = العنصر الذي يسبقه مباشرة + ٢

١٠، ١٢، ١٤.

(ب) نقسم كل عنصر على ٣ للحصول على العنصر التالي.

٣، ١، $\frac{١}{٣}$.

مثال (٥) الهندسة

يمثل الجدول التالي أطوال أضلاع المربعات ومحيطاتها.

الحد	$ح_١$	$ح_٢$	$ح_٣$	$ح_٤$	$ح_٥$	$ح_٦$	$ح_٧$
طول ضلع المربع	١	٢	٣	٤	٥	٦	...
المحيط	٤	٨	١٢	١٦	٢٠	٢٤	...

١ في كل متتالية، أوجد الحد التالي ($ح_ن$) والحد الرابع والعشرين ($ح_{٢٤}$).

ب اكتب صيغة صريحة لكل متتالية.

الحل:

١ في المتتالية الخاصة بأطوال أضلاع المربع، كل حد يساوي قيمة رتبته، وبالتالي $ح_٧ = ٧$، $ح_{٢٤} = ٢٤$.

في المتتالية الخاصة بالمحيط، كل حد يساوي أربعة أمثال قيمة رتبته، وبالتالي $ح_٧ = ٤ \times ٧ = ٢٨$.

$ح_{٢٤} = ٤ \times ٢٤ = ٩٦$.

ب الصيغة الصريحة للمتتالية الخاصة بأطوال أضلاع المربع هي $ح_ن = ن$،

والصيغة الصريحة الخاصة بالمحيط هي: $ح_ن = ٤ن$.

حاول أن تحل

٥ ١ في المثال (٥) اكتب الحدود الستة الأولى للمتتالية التي تبين مساحة المربع.

ب اكتب الصيغة الصريحة لهذه المتتالية.

٦ اكتب الصيغة الصريحة (الحد النوني) لكل متتالية في ما يلي، ثم أوجد $ح_{٢٠}$.

١ (٤، ٧، ١٠، ١٣، ١٦، ...)

ب (٣، ٧، ١١، ١٥، ١٩، ٢٠٠)

ج $\left(-٢\frac{١}{٢}, -١\frac{١}{٢}, -\frac{١}{٢}, ...\right)$

مثال (٦)

اكتب الصيغة الصريحة (الحد النوني) للمتتالية (٢، ٥، ١٠، ١٧، ٢٦، ...).

الحل:

$ح_١ = ١ + ١^٢ = ٢$

$ح_٢ = ١ + ٢^٢ = ٥$

$ح_٣ = ١ + ٣^٢ = ١٠$

$ح_٤ = ١ + ٤^٢ = ١٧$

$ح_٥ = ١ + ٥^٢ = ٢٦$

الصيغة الصريحة هي $ح_ن = ن^٢ + ١$.

حاول أن تحل

٧ اكتب الصيغة الصريحة (الحد النوني) للمتتالية (٠، ٣، ٨، ١٥، ٢٤، ...).

مثال (٧) صنع متتالية

لإيجاد ضلع من «رقعة كوش» Koch snowflake، استبدل كل ـــ بـ ـــ.

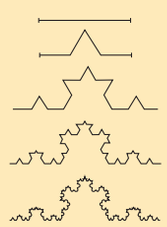
١ ارسم الأشكال الأربعة الأولى من النمط.

ب اكتب عدد القطع في كل شكل من ١ أعلاه على صورة متتالية.

ج توقع الحد التالي من المتتالية ثمّ فسّر اختيارك.

الحل:

١



ب في الشكل الأول قطعة واحدة (١)

في الشكل الثاني ٤ قطع (٤)

في الشكل الثالث ١٦ قطعة (١٦)

في الشكل الرابع ٦٤ قطعة (٦٤)

∴ المتتالية (١، ٤، ١٦، ٦٤، ...)

ج كل حد يساوي ٤ أمثال الحد السابق.

الحد التالي = ٤ × ٦٤ = ٢٥٦. يوجد ٢٥٦ قطعة في الشكل التالي أي الحد الخامس من المتتالية = ٢٥٦.

حاول أن تحل

٨ صف كل نمط وأوجد الحدود الثلاثة التالية.

١ ٢٧، ٣٤، ٤١، ٤٨، ...

ب ٢٤٣، ٨١، ٢٧، ٩، ...

KuwaitMath.com

«حاول أن تحل»

١ ١٠ × ٠,٦ = ٦ (٦ أمتار)

٦ × ٠,٦ = ٣,٦ (٦, ٣ أمتار)

٦,٣ × ٠,٦ = ٢,١٦ (١٦, ٢ متر)

∴ ارتفاع الكرة بعد الاصطدام الثالث = ١٦, ٢ متر

٢ ت(١) = $٢^{١-١}$ = ١ = ٢

ت(٢) = $٢^{٢-١}$ = ١ = ٩

ت(٣) = $٣^{٣-١}$ = ١ = ٢٨

ت(٤) = $٤^{٣-١}$ = ١ = ٦٥

متتالية حيث إن مجالها مجموعة جزئية مرتبة من صه$^{+}$.

بالصورة {١، ٢، ٣، ...، م}

٣ ت(١) = $\frac{١}{١+١} = \frac{١}{٢}$

ت(٢) = $\frac{٢}{١+٢} = \frac{٢}{٣}$

ت(٣) = $\frac{٣}{١+٣} = \frac{٣}{٤}$

متتالية حيث إن مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ومرتبة ابتداءً من الواحد.

٤ (أ) ١ − (−٢) = ١

٠ − (−١) = ١

١ − (٠) = ١

٢ − (١) = ١

لذا يكون: $ح_{ن+١} = ح_ن + ١$، $ح_١ = -٢$

$ح_٦ = ح_٥ + ١$، $ح_٦ = ٢ + ١ = ٣$

(ب) ٤١ − ٤٣ = −٢

٣٩ − ٤١ = −٢

٣٧ − ٣٩ = −٢

٣٥ − ٣٧ = −٢

لذا يكون $ح_{ن+١} = ح_ن - ٢$، $ح_١ = ٤٣$

$ح_٦ = ح_٥ - ٢$، $ح_٦ = ٣٥ - ٢ = ٣٣$

مثال (٨) متتالية فيبوناتشي Fibonacci Sequence

الصيغة الارتدادية لمتتالية فيبوناتشي هي: $ف_ن = ف_{ن-١} + ف_{ن-٢}$ حيث $ف_١ = ١$، $ف_٢ = ١$.
استخدم الصيغة الارتدادية لإيجاد الحدود السبعة الأولى من المتتالية ثم اكتب المتتالية.

الحل:

$ف_١ = ١$

$ف_٢ = ١$

$ف_٣ = ف_١ + ف_٢ = ١ + ١ = ٢$

$ف_٤ = ف_٢ + ف_٣ = ١ + ٢ = ٣$

$ف_٥ = ف_٣ + ف_٤ = ٢ + ٣ = ٥$

$ف_٦ = ف_٤ + ف_٥ = ٣ + ٥ = ٨$

$ف_٧ = ف_٥ + ف_٦ = ٥ + ٨ = ١٣$

∴ متتالية فيبوناتشي هي (١، ١، ٢، ٣، ٥، ٨، ١٣، ...)

حاول أن تحل

٩ اختر عددين متساويين غير العدد ١، ١ واكتب الحدود الخمسة الأولى لمتتالية مشابهة لمتتالية فيبوناتشي.

غالبًا ما نجد أعداد فيبوناتشي في الطبيعة.

زهرة البق
٨ بتلات: الحد السادس

الحوذان الزاحف
٥ بتلات: الحد الخامس

الترليوم
٣ بتلات: الحد الرابع

بالنسبة إلى زهرة تباع الشمس، عند حساب عدد بتلاتها من الداخل إلى الخارج سنجدها: ١، ١، ٢، ٣، ٥، ٨، ...

١٨٨

تمرّن ١-٥

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

الأنماط الرياضيّة والمتتاليات (المتتابعات)

Mathematical Patterns and Sequences

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمارين (١-٤) اكتشف النمط ثم اكتب الحدين التاليين.

(١) ٨٠، ٧٧، ٧٤، ٧١، ٦٨، ...

(٢) ٤، ٨، ١٦، ٣٢، ٦٤، ...

(٣) ١٠٠، ١٠، ١، ٠,١، ٠,٠١، ...

(٤) ٠، ١، ٠، $\frac{١}{٣}$، ٠، $\frac{١}{٥}$، ٠، ...

في التمارين (٥-٧) أكتب صيغة ارتداديّة لكل متتالية. ثم أوجد الحد التالي.

(٥) (−٢، −١، ٠، ١، ٢، ...)

(٦) (١٤٤، ٣٦، ٩، $\frac{٩}{٤}$، ...)

(٧) ($\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٤}$، $\frac{١}{٨}$، $\frac{١}{١٦}$، $\frac{١}{٣٢}$، ...)

في التمارين (٨-١٠) اكتب صيغة صريحة لكل متتالية. ثم أوجد $ح_{٦}$.

(٨) (٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ...)

(٩) (٤، ٧، ١٠، ١٣، ١٦، ...)

(١٠) ($\frac{١}{٢}$، ٢، −٢، $\frac{١}{٢}$، ١، −١، ...)

١٢٤

(جـ) $\frac{١}{٢} = ٤٠ \div ٢٠$

$\frac{١}{٢} = ٢٠ \div ١٠$

$\frac{١}{٢} = ١٠ \div ٥$

$\frac{١}{٢} = ٥ \div \frac{٥}{٢}$

فيكون $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{١}{٢}$ أي $ح_{ن+١} = \frac{١}{٢} ح_ن$، $ح_١ = ٤٠$

$ح_٦ = \frac{١}{٢} ح_٥$ أي $ح_٦ = \frac{١}{٢} \times \frac{٥}{٢} = \frac{٥}{٤}$

(د) $\frac{١}{٤} \div \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

$\frac{١}{٨} \div \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

$\frac{١}{١٦} \div \frac{١}{٨} = \frac{١}{٢}$

$\frac{١}{٣٢} \div \frac{١}{١٦} = \frac{١}{٢}$

فيكون $ح_{ن+١} = \frac{١}{٢} ح_ن$، $ح_١ = \frac{١}{٢}$

$ح_٦ = \frac{١}{٢} ح_٥$ أي $ح_٦ = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٣٢} = \frac{١}{٦٤}$

٥ (أ) ١، ٤، ٩، ١٦، ٢٥، ٣٦

(ب) $ح_ن = ن^٢$

٦ (أ) $ح_ن = ٣ن + ١$؛ $ح_{١٢} = ٣ \times ١٢ + ١ = ٣٧$

(ب) $ح_ن = ٤ن - ١$؛ $ح_{١٢} = ٤٧$

(جـ) $ح_ن = ن - \frac{١}{٢}$ ٣؛ $ح_{١٢} = ٨\frac{١}{٢}$

٧ المتتالية هي على الشكل التالي:

$٠ = ١^٢ - ١$، $٣ = ٢^٢ - ١$، $٨ = ٣^٢ - ١$،

$١٥ = ٤^٢ - ١$، $٢٤ = ٥^٢ - ١$

فيكون: $ح_ن = ن^٢ - ١$

ملاحظة: على المعلم عدم التوسع في هذا المفهوم وهو تعيين الحد النوني لمتتالية ليست حسابية أو متتالية هندسية.

في التمارين (١١-١٣) حدّد ما إذا كان كل مما يلي صيغة ارتداديّة أو صيغة صريحة. ثم أوجد الحدود الثلاثة الأولى.

(١١) $ح_ن = ٢ح_{ن-١} + ٣$، $ح_١ = ٣$ _____

(١٢) $ب_ن = \frac{١}{٢} ن (ن - ١)$ _____

(١٣) $ك_ن = ٢ك^٢ + ١$ _____

(١٤) **الكتابة في الرياضيّات:** اشرح الفرق بين الصيغة الارتداديّة والصيغة الصريحة.

_____

_____

(١٥) **السؤال المفتوح**

(أ) اكتب أربعة حدود من متتالية حقيقية يمكن وصفها بأنها ارتداديّة وصريحة معًا.

_____

(ب) اكتب صيغة ارتداديّة وصيغة صريحة للمتتالية التي اخترتها.

_____

(جـ) أوجد الحد السادس باستخدام كلٍّ من الصيغتين.

_____

التحدّي: في التمرينين (١٦-١٧) استخدم الصيغة الارتداديّة لكتابة صيغة صريحة لكلّ متتالية.

*(١٦) $ح_١ = ١٠$، $ح_ن = ح^٢_{ن-١}$ _____

*(١٧) $ح_١ = -٢$، $ح_ن = \frac{١}{٢} ح_{ن-١}$ _____

*(١٨) **الهندسة:** تشكل الأعداد المثلثة متتالية. يمثّل المخطط

$ح_١$ $ح_٢$ $ح_٣$

أوّل ٣ أعداد مثلثة: ١، ٣، ٦

(أ) أوجد العدد المثلث السادس. _____

(ب) اكتب صيغة ارتداديّة للعدد النوني المثلثي. _____

(جـ) هل الصيغة الصريحة: $ح_ن = \frac{١}{٢} (ن^٢ + ن)$ تصلح لهذه المتتالية؟ اشرح.

_____

*(١٩) **تفكير ناقد:** في الصيغة $ح_ن = ح_{ن-١} + ٣$، هل يمكنك إيجاد الحد الرابع $ح_٤$؟ اشرح.

_____

١٢٥

المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمارين (١-٤) اكتشف النمط ثم اكتب الحدين التاليين.

(١) ١، ٤، ٧، ١٠، ١٣، ...

(٢) ٤، -٨، ١٦، -٣٢، ٦٤، ...

(٣) ١، ٢، ٦، ٢٤، ١٢٠، ...

(٤) $\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٤}$، $\frac{١}{٨}$، $\frac{١}{١٦}$، $\frac{١}{٣٢}$، ...

في التمارين (٥-٧) اكتب صيغة ارتداديّة لكل متتالية. ثم اكتب الحد التالي.

(٥) (٤٣، ٤١، ٣٩، ٣٧، ٣٥، ...)

(٦) (٤٠، ٢٠، ١٠، ٥، $\frac{٥}{٢}$، ...)

(٧) (٦، ١، -٤، -٩، ...)

في التمارين (٨-١٠) اكتب صيغة صريحة لكل متتالية. ثم أوجد $ح_٨$.

(٨) ($\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٣}$، $\frac{١}{٤}$، $\frac{١}{٥}$، $\frac{١}{٦}$، ...)

(٩) (٣، ٧، ١١، ١٥، ١٩، ...)

*(١٠) (٢، ٥، ١٠، ١٧، ٢٦، ...)

في التمارين (١١-١٣) حدّد ما إذا كانت كل صيغة ارتداديّة أم صريحة. ثم أوجد الحدود الثلاثة الأولى.

(١١) $ح_ن = (ن - ٥)(ن + ٥)$

(١٢) $ل_ن = -٣ل_{ن-١}$، $ل_١ = -٢$

(١٣) $ح_ن = -٤ن^٢ - ٢$

١٢٦

في التمارين (١٤-١٦) استخدم الصيغة المعطاة لكتابة الحدين الرابع والخامس في كل متتالية.

(١٤) $ح_1 = -1$ ، $ح_ن = (ح_{ن-1})^2 + 1$

(١٥) $ح_1 = -2$ ، $ح_ن = (ح_{ن-1} + 2)$

(١٦) $ح_ن = (ن + 1)^2$

* (١٧) ما ناتج طرح الحد الثالث لمتتالية صيغتها الارتداديّة $ح_ن = 2ح_{ن-1} + 1$ ، $ح_1 = -5$ من الحد الثالث لمتتالية صيغتها الارتداديّة $ح_ن = -ح_{ن-1} + 3$ ، $ح_1 = -3$؟

(أ) ٢ (ب) ١٤ (جـ) ٢٠ (د) ٣٢

* (١٨) ما الصيغة الارتداديّة للمتتالية التي صيغتها الصريحة $ح_ن = (ن + 1)^2$؟

(أ) $ح_ن = (ح_{ن-1} + 1)^2$ ، $ح_1 = 1$

(ب) $ح_ن = (\sqrt{ح_{ن-1}} + 1)^2$ ، $ح_1 = 4$

(جـ) $ح_ن = ح_{ن-1} + 4$ ، $ح_1 = 4$

(د) $ح_ن = (ح_{ن-1})^2 + 1$ ، $ح_1 = 4$

١٢٧

٨ (أ) اجمع ٧: ٥٥، ٦٢، ٦٩.

(ب) اقسم على ٣: ٣، ١، $\frac{1}{3}$.

٩ تتنوع الإجابات. إجابة ممكنة ٢، ٢، ٤، ٦، ١٠.

KuwaitMath.com

٥ـ٢: المتتالية الحسابية

١ الأهداف

- يتعرف المتتالية الحسابية وأساسها.
- يوجد الحد النوني لمتتالية حسابية بمعلومية الحد الأول وأساس المتتالية.
- يستخدم الصيغة الصريحة لإيجاد أحد حدود المتتالية.
- يوجد الوسط الحسابي لعددين.
- يوجد مجموع ن حدًّا الأولى من حدود متتالية حسابية في الحالتين:
  - بمعلومية الحد الأول والحد الأخير.
  - بمعلومية الحد الأول والأساس.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

متتالية حسابية – مجموع ن حدًّا الأولى من حدود المتتالية الحسابية – أوساط حسابية.

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة.

٤ التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(أ) أكمل النمط في كلٍّ مما ياتي:

٤، ٩، ١٤، ١٩، ٢٤، ...

١٣، ٩، ٥، ١، ...

(ب) أوجد صيغة صريحة في المتتالية: ٧، ١٣، ١٩، ٢٥، ٣١

(جـ) نأخذ المتتالية: $ح_ن = ٧ن + ٤$

أثبت أن $ح_{ن+١} - ح_ن$ = عددًا ثابتًا.

٥ التدريس

بعد أن تعرف الطلاب المتتاليات بشكل عام وتعرفوا أيضًا بشكل خاص متتالية فيبوناتشي وتطبيقاتها الحياتية، سوف يجدون أمامهم الآن حالات من الأنماط العددية تحت اسم واحد هي المتتاليات الحسابية.

٥-٢

المتتالية الحسابية
Arithmetic Sequence

سوف تتعلم
- المتتالية الحسابية وأساسها
- الحد النوني للمتتالية الحسابية
- الأوساط الحسابية
- مجموع (ن) حدًّا الأولى من حدود المتتالية الحسابية

عمل تعاوني

١ أ) أوجد الحد السادس من المتتالية المبينة جهة اليسار.

ب) اكتب صيغة للحد السادس مستخدمًا الحد الخامس.

جـ) اكتب صيغة ارتدادية للمتتالية.

٢) في المتتالية (٩، ١٤، ١٩، ٢٤، ٢٩، ...)، ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة هو مقدار ثابت.

أ) كون متتاليتين، إحداهما بإضافة عدد ثابت والأخرى بطرح العدد الثابت نفسه من كل حد من حدود المتتالية الأصلية.

ب) أوجد ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة في كل متتابعة حصلت عليها. ماذا تلاحظ.

جـ) ارسم في شكل بياني واحد العلاقة بين ن، $ح_ن$ للمتتالية الأصلية والمتتاليات التي حصلت عليها في ٢ – أ.
قارن بين الرسوم الثلاثة. ماذا تلاحظ؟

$ح_١ \leftarrow ٩$
$ح_٢ \leftarrow ١٤$
$ح_٣ \leftarrow ١٩$
$ح_٤ \leftarrow ٢٤$
$ح_٥ \leftarrow ٢٩$

تعريف:
المتتالية (المتتابعة) الحسابية هي متتالية ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة عددًا ثابتًا. يسمى هذا الناتج أساس المتتالية ويرمز إليه بالرمز ء. وعلى ذلك $ح_{ن+١} - ح_ن = ء$ أو $ح_{ن+١} = ح_ن + ء$.

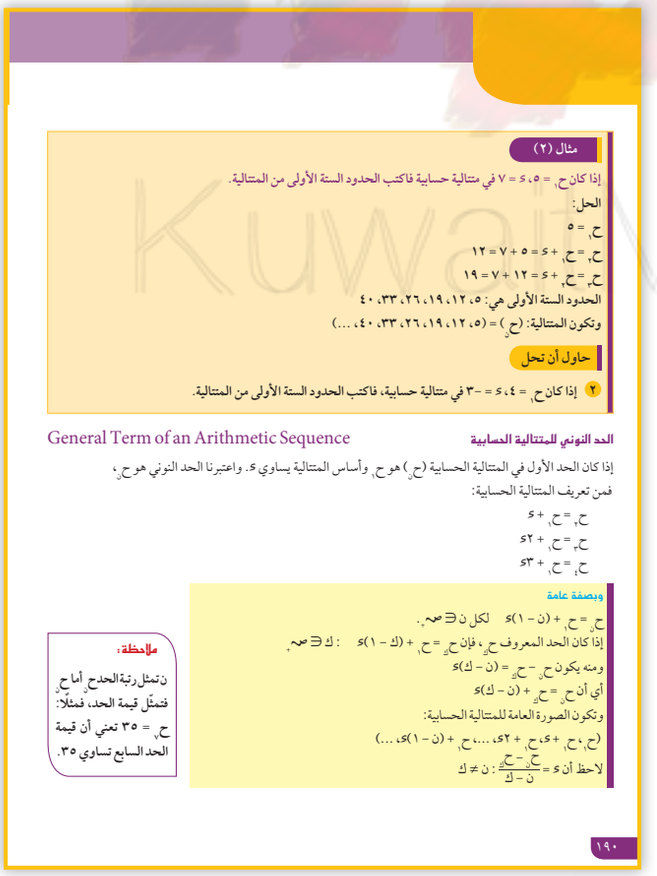
أي أنه يمكن الحصول على أي حد من حدود المتتالية الحسابية (بعد الحد الأول) وذلك بإضافة ء إلى الحد الذي يسبقه مباشرة.

مثال (١)
يبين أن المتتالية (٦، ١٢، ١٨، ٢٤) هي متتالية حسابية.

الحل:
١٢ – ٦ = ١٨ – ١٢ = ٢٤ – ١٨ = ٦
ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة يساوي ٦. لاحظ أن أساس المتتالية ء = ٦.
إذًا، المتتالية حسابية.

حاول أن تحل
١) هل المتتاليتان التاليتان حسابيتان؟ إذا كانتا كذلك، فأوجد أساس كل منهما.
أ) المتتالية (٢، ٥، ٧، ١٢)
ب) المتتالية (٤٨، ٤٥، ٤٢، ٣٩)

١٨٩



مثال (٢)
إذا كان $ح_١ = ٥$، ء = ٧ في متتالية حسابية فاكتب الحدود الستة الأولى من المتتالية.

الحل:
$ح_١ = ٥$
$ح_٢ = ح_١ + ء = ٥ + ٧ = ١٢$
$ح_٣ = ح_٢ + ء = ١٢ + ٧ = ١٩$
الحدود الستة الأولى هي: ٥، ١٢، ١٩، ٢٦، ٣٣، ٤٠
وتكون المتتالية: $(ح_ن) = (٥، ١٢، ١٩، ٢٦، ٣٣، ٤٠، ...)$

حاول أن تحل
٢) إذا كان $ح_١ = ٤$، ء = –٣ في متتالية حسابية، فاكتب الحدود الستة الأولى من المتتالية.

الحد النوني للمتتالية الحسابية
General Term of an Arithmetic Sequence

إذا كان الحد الأول في المتتالية الحسابية $(ح_ن)$ هو $ح_١$ وأساس المتتالية يساوي ء. واعتبرنا الحد النوني هو $ح_ن$، فمن تعريف المتتالية الحسابية:
$ح_٢ = ح_١ + ء$
$ح_٣ = ح_١ + ٢ء$
$ح_٤ = ح_١ + ٣ء$

وبصفة عامة
$ح_ن = ح_١ + (ن – ١)ء$ لكل ن ∈ صـ.
إذا كان الحد المعروف $ح_ك$، فإن $ح_ن = ح_ك + (ك – ١)ء$: ك ∈ صـ
ومنه يكون $ح_ن – ح_ك = (ن – ك)ء$
أي أن $ح_ن = ح_ك + (ن – ك)ء$
وتكون الصورة العامة للمتتالية الحسابية:
$(ح_١، ح_١ + ء، ح_١ + ٢ء، ...، ح_١ + (ن – ١)ء، ...)$
لاحظ أن $ء = \frac{ح_ن – ح_ك}{ن – ك}$: ن ≠ ك

ملاحظة:
ن تمثل رتبة الحد، أما $ح_ن$ فتمثل قيمة الحد، فمثلًا: $ح_ن = ٣٥$ تعني أن قيمة الحد السابع تساوي ٣٥.

١٩٠

من المهم الإشارة هنا إلى أن الأعداد ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ... تشكل متتالية حسابية غير منتهية.

الأعداد الزوجية: ٢، ٤، ٦، ٨، ... تشكل متتالية حسابية غير منتهية.

الأعداد الفردية: ١، ٣، ٥، ٧، ... تشكل متتالية حسابية غير منتهية.

ركز مع الطلاب على الصيغة الصريحة للمتتالية الحسابية.

أعطِ أمثلة متعددة تثبت أن $ح_{ن+١} - ح_{ن}$ = عددًا ثابتًا، كما في المثال (٥).

أعطِ أمثلة عن متتاليات حسابية منتهية وغير منتهية.

في المثالين: (١٢)، (١٣).

ناقش مع الطلاب لمَ: ن = −١٥، ن = −٢٤ هما قيمتان مرفوضتان؟

افتح حوارًا حول مفهوم الأوساط الحسابية في المتتالية الحسابية.

- اطلب إليهم تشكيل متتالية حسابية، و اسألهم اختيار ثلاثة أعداد متتالية منها،ثم اطلب إليهم إيجاد ناتج جمع العددين الأول والثالث ومقارنته بالعدد الثاني.

نبّه الطلاب إلى أن الحد النوني يعني أن نتوقف عند حد معروف من المتتالية الحسابية وهذا يساعد أيضًا على إيجاد ناتج جمع ن حدًّا أول من المتتالية الحسابية باستخدام القواعد.

٦ الربط

تستخدم المتتاليات الحسابية في الحالات حيث تزداد القيم بشكل ثابت، مثل:

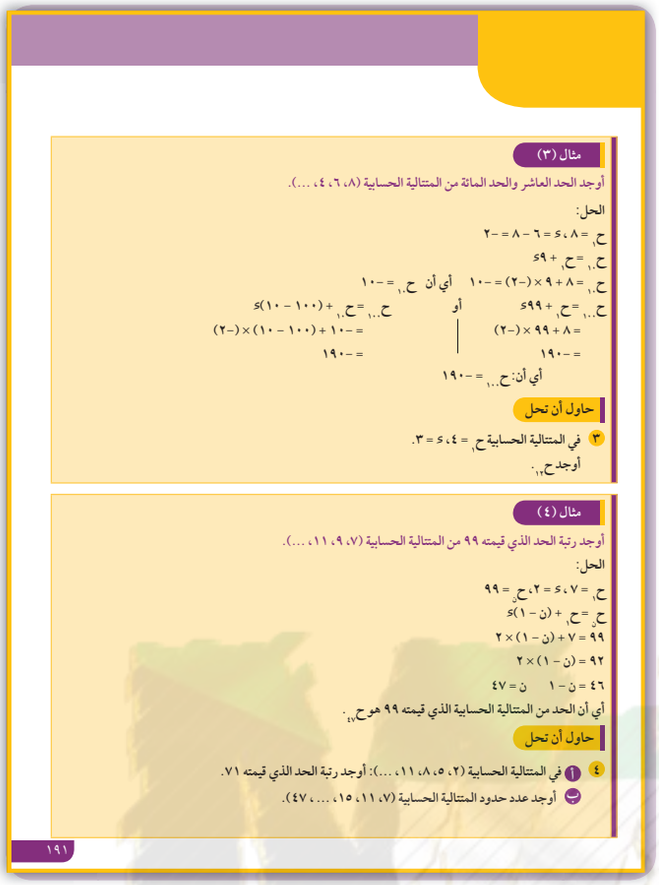
- توفير مبلغ شهري وإضافة كمية ثابتة إلى المبلغ الموفر شهريًّا.

تشكل القيم الشهرية الموفرة حدود متتالية حسابية.

- عندما ينتسب شخص إلى أحد النوادي يدفع مبلغًا ثابتًا شهريًّا.

يشكل مجموع المبالغ المدفوعة خلال الأشهر، متتالية حسابية. لاحظ أن المبلغ المدفوع شهريًّا ثابت.

- المتتاليات الحسابية قديمة جدًّا في التاريخ وهذا ما يبينه وجود المسألة التالية على ورق البردى (الأقصر).



مثال (٣)

أوجد الحد العاشر والحد المائة من المتتالية الحسابية (٨، ٦، ٤، ...).

الحل:

$ح_{١} = ٨، ٥ = ٦ - ٨ = -٢$

$ح_{١٠} = ح_{١} + ٩٥$

$ح_{١٠} = ٨ + ٩ \times (-٢) = -١٠$ أي أن $ح_{١٠} = -١٠$

$ح_{١٠٠} = ح_{١} + ٩٩٥$ أو $ح_{١٠٠} = ح_{١٠} + (١٠٠ - ١٠)٥$

$= ٨ + ٩٩ \times (-٢)$ | $= -١٠ + (١٠٠ - ١٠) \times (-٢)$

$= -١٩٠$ | $= -١٩٠$

أي أن: $ح_{١٠٠} = -١٩٠$

حاول أن تحل

٣ في المتتالية الحسابية $ح_{ن}$، $ح_{١} = ٤، ٥ = ٣$.

أوجد $ح_{١٢}$.

مثال (٤)

أوجد رتبة الحد الذي قيمته ٩٩ من المتتالية الحسابية (٧، ٩، ١١، ...).

الحل:

$ح_{١} = ٧، ٥ = ٢، ح_{ن} = ٩٩$

$ح_{ن} = ح_{١} + (ن - ١)٥$

$٩٩ = ٧ + (ن - ١) \times ٢$

$٩٢ = (ن - ١) \times ٢$

$٤٦ = ن - ١$ ن = ٤٧

أي أن الحد من المتتالية الحسابية الذي قيمته ٩٩ هو $ح_{٤٧}$.

حاول أن تحل

٤ أ في المتتالية الحسابية (٢، ٥، ٨، ١١، ...): أوجد رتبة الحد الذي قيمته ٧١.

ب أوجد عدد حدود المتتالية الحسابية (٧، ١١، ١٥، ...، ٤٧).

١٩١

مثال (٥)

في المتتالية $(ح_{ن})$ حيث $ح_{ن} = ٧ن - ٣$ لكل ن ∈ صـ، أثبت أن المتتالية حسابية.

الحل:

$ح_{ن} = ٧ن - ٣$

$ح_{ن+١} = ٧(ن + ١) - ٣ = ٧ن + ٤$

$ح_{ن+١} - ح_{ن} = (٧ن + ٤) - (٧ن - ٣) = ٧$

= مقدارًا ثابتًا

∴ المتتالية $(ح_{ن})$ حيث $ح_{ن} = ٧ن - ٣$ متتالية حسابية.

حاول أن تحل

٥ في المتتالية $(ح_{ن})$ حيث $ح_{ن} = ٣ن + ٥$: ن ∈ صـ،

أثبت أن المتتالية حسابية.

مثال (٦)

إذا كان الحد الخامس من متتالية حسابية يساوي ٩ والحد الثامن يساوي ١٥، فأوجد أساس المتتالية.

الطريقة الأولى	الطريقة الثانية
$ح_{ن} = ح_{١} + (ن - ١)٥$	$ح_{ن} = ح_{ك} + (ن - ك)٥$
$ح_{٥} = ح_{١} + ٤٥$	$ح_{٥} = ٩، ح_{٨} = ١٥$
$\therefore ح_{١} + ٤٥ = ٩$ (١)	$ح_{٨} - ح_{٥} = (٨ - ٥)٥$
$ح_{٨} = ح_{١} + ٧٥$	$٥٣ = ٩ - ١٥$
$\therefore ح_{١} + ٧٥ = ١٥$ (٢)	$\therefore ٥٣ = ٦$
بطرح (١) من (٢)	$\therefore ٥ = ٢$
$\therefore ٥٣ = ٦$	
$\therefore ٥ = ٢$	

إذًا، أساس المتتالية الحسابية هو ٢.

حاول أن تحل

٦ إذا كان الحد الثاني من متتالية حسابية يساوي ٩ والحد السادس يساوي −٣، فأوجد أساس المتتالية ثم أوجد المتتالية الحسابية مكتفيًا بالحدود الأربعة الأولى منها.

١٩٢

كيف توزّع ١٠٠ رغيف خبز على ٥ أشخاص بحيث تشكل الحصص الخمس حدود متتالية حسابية ويكون $\frac{١}{٧}$ من مجموع الثلاث الكبرى مساويًا لمجموع الحصتين الأصغرين.

$\frac{٥}{٣} = \frac{١٠}{٦}$ ، $\frac{٦٥}{٦}$ ، ٢٠ = $\frac{١٢٠}{٦}$ ، $\frac{١٧٥}{٦}$ ، $\frac{١١٥}{٣} = \frac{٢٣٠}{٦}$.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يعتقد بعض الطلاب أن أساس المتتالية الحسابية هو دائمًا عدد سالب باعتبار تعريف المتتالية الحسابية يتحدث عن طرح عدد ثابت.

اعرض أمثلة عن متتاليات حسابية تزايدية فيكون الأساس عددًا ثابتًا موجبًا، ثم أمثلة عن متتاليات حسابية تناقصية فيكون الأساس عددًا ثابتًا سالبًا.

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من حسن أدائهم.

اختبار سريع

١ اكتب الصيغة الارتدادية للمتتالية الحسابية:

−٤، −١، ٢، ٥، ٨... $ح_١ = -٤$ ، $ح_ن = ح_{ن-١} + ٣$

٢ اكتب صيغة صريحة للمتتالية ٧، ٥، ٣، ١، −١، ....

$ح_ن = ٩ - ٢ن$

٣ أوجد الوسط الحسابي للحدين $ح_{ن-١} = ٣$ ، $ح_{ن+١} = ١٢$، $ح_ن = ٧,٥$.

٩ إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

١ (أ) $ح_٦ = ٣٤$

(ب) $ح_٦ = ح_٥ + ٥$

(جـ) $ح_ن = ح_{ن-١} + ٥$ ، $ح_١ = ٩$

٢ (أ) إضافة ٢.

١١، ١٦، ٢١، ٢٦، ٣١، ...

طرح ٣

مثال (٧)

بفرض أنك تشارك في سباق دراجات لدعم مشروع خيري. على المتسابق الأول تأمين مبلغ ٥ دنانير. وكل متسابق تالي يؤمن مبلغ يزيد ١,٥ دينارًا عن المتسابق الذي يسبقه مباشرةً. ما المبلغ الذي سيدفعه المتسابق الخامس والسبعون؟

الحل:

$ح_١ = ٥$ ، $ح_٢ = ٦,٥$ ، $ح_٣ = ٨$ ، ... لماذا؟

$ح_ن = ح_١ + ١,٥(ن - ١)$ استخدام الصيغة الصريحة

$ح_{٧٥} = ٥ + ١,٥ \times (٧٥ - ١)$ التعويض

$ح_{٧٥} = ٥ + ١,٥ \times ٧٤$

$= ١١٦$

سيدفع المتسابق الخامس والسبعون ١١٦ دينارًا.

حاول أن تحل

٧ استخدم الصيغة الصريحة لإيجاد الحد الخامس والعشرين ($ح_{٢٥}$) من المتتالية الحسابية (٥، ١١، ١٧، ٢٣، ٢٩، ...).

الأوساط الحسابية Arithmetic Means

إذا كونت أ، ب، جـ متتالية حسابية حيث أ، ب، جـ هي عناصر من ح (أعداد حقيقية):

فإن: ب − أ = جـ − ب

٢ب = جـ + أ

$ب = \frac{أ + جـ}{٢}$

أي أن ب هو **الوسط الحسابي** للعددين أ، جـ.

مثال (٨)

إذا كانت (٨٤، س، ١١٠) متتالية حسابية، فأوجد قيمة س.

الحل:

الحد س هو الوسط الحسابي بين ٨٤، ١١٠.

$س = \frac{٨٤ + ١١٠}{٢} = ٩٧$

حاول أن تحل

٨ أوجد قيمة ص من المتتالية الحسابية (٤٣، ص، ٥٧).

بصورة عامة

إذا كانت (أ، ب، جـ، د، ...، ف، ص) متتالية حسابية فإن ب، جـ، د، ...، ف تسمى أوساطًا حسابية للعددين أ، ص.

وتسمى عملية إيجاد الأوساط الحسابية إدخال أوساط حسابية بين العددين أ، ص.

مثال (٩)

أدخل ٥ أوساط حسابية بين ٢٣، ٦٥.

الحل:

(٢٣، ■، ■، ■، ■، ■، ٦٥).

$ح_١ = ٢٣$، عدد الحدود: ٥ + ٢ = ٧، $ح_٧ = ٦٥$.

إذًا $ح_٧ = ح_١ + ٦ء$

$٦ء + ٢٣ = ٦٥$

$٦ء = ٤٢$

$ء = ٧$

الأوساط الحسابية هي ٣٠، ٣٧، ٤٤، ٥١، ٥٨.

حاول أن تحل

٩ أ أدخل ثلاثة أوساط حسابية بين −٩، ٣.

ب أدخل خمسة أوساط حسابية بين ١٣، ١.

مجموع ن حدا الأولى من حدود متتالية حسابية

Sum of The First n Terms of an Arithmetic Sequence

مجموع ن حدًا الأولى من حدود متتالية حسابية ($ح_ن$) يعطى بالقاعدة:

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}(ح_١ + ح_ن)$ أو $جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢ح_١ + (ن - ١)ء]$

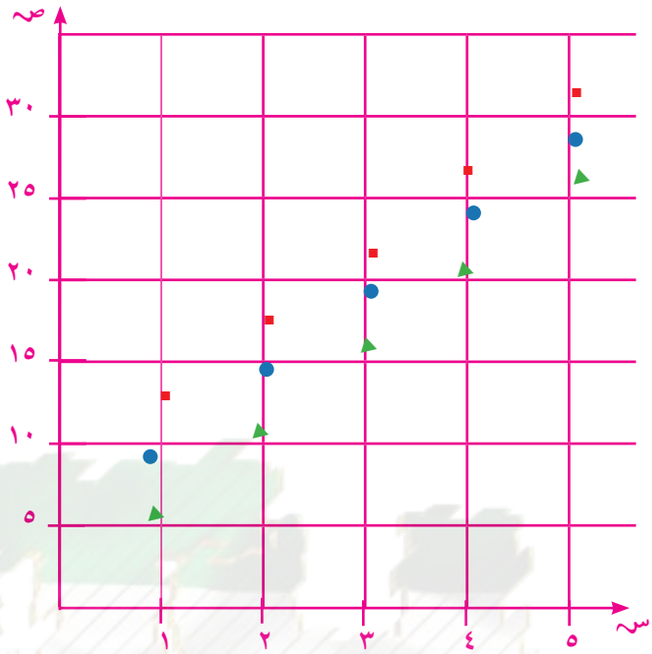
حيث $ح_ن$ هو الحد الذي ترتيبه ن من المتتالية الحسابية وحدها الأول $ح_١$.

Kuwaitmath.com

٦، ١١، ١٦، ٢١، ٢٦، ...

(ب) ناتج الطرح = ٥.

العدد نفسه في (١).



نلاحظ أن حدود المتتالية الحسابية تقع على استقامة واحدة.

«حاول أن تحل»

١ (أ) ٥ − ٢ = ٣، ٧ − ٥ = ٢، ليست متتالية حسابية.

(ب) ٤٥ − ٤٨ = −٣، ٤٢ − ٤٥ = −٣، ٣٩ − ٤٢ = −٣

= −٣ الفرق ثابت لذا تكون المتتالية حسابية.

٢ ٤، ١، −٢، −٥، −٨، −١١.

٣ $ح_{١٢} = ح_١ + ١١ \times ٣ = ٤ + ٣٣ = ٣٧$.

٤ (أ) $ح_ن = ح_١ + (ن - ١)ء$ حيث $ء = ٣$

$٧١ = ٢ + (ن - ١) \times ٣$ ومنها ن = ٢٤

(ب) $ء = ٤$

$ح_ن = ح + (ن-١)ء$

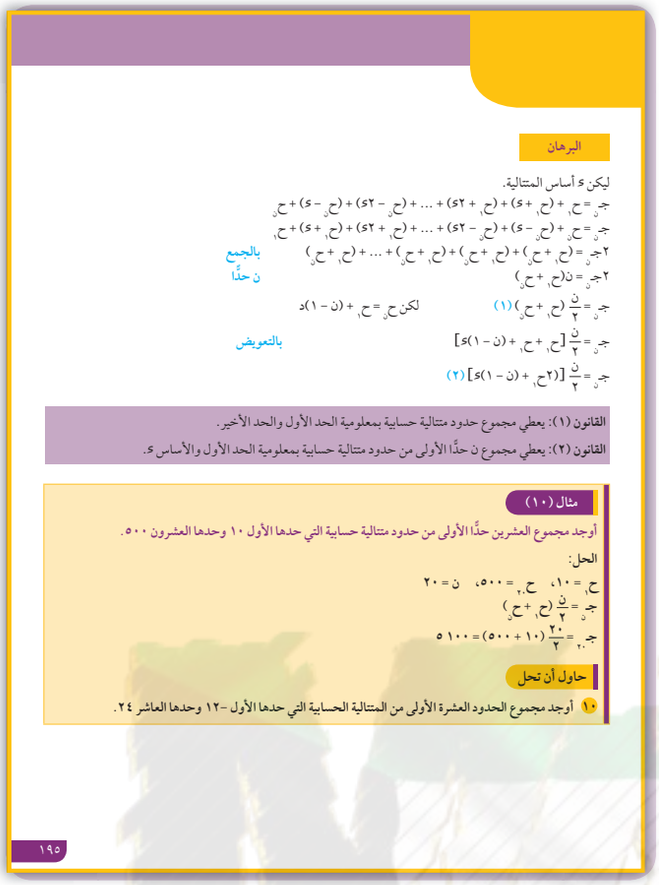
$٤٧ = ٧ + (ن-١) \times ٤$؛ ن = ١١

٥ $ح_{ن+١} - ح_ن = ٣(ن + ١) + ٥ - (٣ن + ٥) = ٣$ حيث

إن الفرق قيمة ثابتة لذا تكون المتتالية حسابية.

٦ $ح_ن = ح_ك + (ن - ك)ء$

$-٣ = ٩ + (٦ - ٢)ء$ نحصل على الأساس $ء = -٣$.



البرهان

ليكن ء أساس المتتالية.

$جـ_ن = ح_١ + (ح_١ + ء) + (ح_١ + ٢ء) + ... + (ح_ن - ٢ء) + (ح_ن - ء) + ح_ن$

$جـ_ن = ح_ن + (ح_ن - ء) + (ح_ن - ٢ء) + ... + (ح_١ + ٢ء) + (ح_١ + ء) + ح_١$

$٢جـ_ن = (ح_١ + ح_ن) + (ح_١ + ح_ن) + (ح_١ + ح_ن) + ... + (ح_١ + ح_ن)$ بالجمع ن حدًّا

$٢جـ_ن = ن(ح_١ + ح_ن)$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}(ح_١ + ح_ن)$ (١) لكن $ح_ن = ح_١ + (ن - ١)ء$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}[ح_١ + ح_١ + (ن - ١)ء]$ بالتعويض

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}[(٢ح_١ + (ن - ١)ء]$ (٢)

القانون (١): يعطي مجموع حدود متتالية حسابية بمعلومية الحد الأول والحد الأخير.

القانون (٢): يعطي مجموع ن حدًّا الأولى من حدود متتالية حسابية بمعلومية الحد الأول والأساس ء.

مثال (١٠)

أوجد مجموع العشرين حدًّا الأولى من حدود متتالية حسابية التي حدها الأول ١٠ وحدها العشرون ٥٠٠.

الحل:

$ح_١ = ١٠$، $ح_{٢٠} = ٥٠٠$، $ن = ٢٠$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}(ح_١ + ح_ن)$

$جـ_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢}(١٠ + ٥٠٠) = ٥١٠٠$

حاول أن تحل

١٠ أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الحسابية التي حدها الأول −١٢ وحدها العاشر ٢٤.

١٩٥

مثال (١١)

أوجد مجموع الستة عشر حدًّا الأولى من المتتالية الحسابية التي حدها الأول ١٥ وأساسها ٧.

الحل:

$جـ_{١٦} = ١٥$، $ء = ٧$، $ن = ١٦$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢ح_١ + (ن - ١)ء]$

$جـ_{١٦} = \frac{١٦}{٢}(٢ \times ١٥ + ١٥ \times ٧)$

$جـ_{١٦} = ٨(٣٠ + ١٠٥)$

$جـ_{١٦} = ١٠٨٠$

حاول أن تحل

١١ ا متتالية حسابية حدها الأول −٧ وأساسها ٤. أوجد مجموع أول خمسة وعشرين حدًّا منها.

ب أوجد مجموع حدود المتتالية الحسابية (٥، ٧، ٩، ...، ٩٥).

مثال (١٢)

كم حدًّا يلزم أخذه من المتتالية الحسابية (١٠، ١٥، ٢٠، ...) ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع ٤٥٠؟

الحل:

$ح_١ = ١٠$، $ء = ٥$، $جـ_ن = ٤٥٠$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢ح_١ + (ن - ١)ء]$

$٤٥٠ = \frac{ن}{٢}[٢٠ + (ن - ١)٥]$

$\frac{ن}{٢}(١٥ + ٥ن) = ٤٥٠$

$٩٠٠ = ١٥ن + ٥ن^٢$

$ن^٢ + ٣ن - ١٨٠ = ٠$

$(ن + ١٥)(ن - ١٢) = ٠$

$ن = -١٥$، $ن = ١٢$

وحيث إن $ن = -١٥$ مرفوض لأن $-١٥ \notin$ صـ

∴ ن = ١٢ أي أن عدد الحدود المطلوبة هو ١٢ حدًّا.

١٩٦

$ح_١ = ١٢، ح_٢ = ٩، ح_٣ = ٦، ح_٤ = ٣.$

$\therefore$ المتتالية $(١٢، ٩، ٦، ٣، ...)$

٧ $ح_ن = ح_١ + (ن-١)ء$

(ب) $ح_{٢٥} = ح_١ + (٢٥ - ١) \times ء$ حيث $ء = -٦$.

$ح_{٢٥} = ٥ + ٢٤ \times -٦ = -١٤٩$.

٨ $ص = \frac{٤٣ + ٥٧}{٢} = ٥٠$.

٩ (أ) $ح_١ = -٩$ $ح_٥ = ٣$.

$-٩ + ٤ ء = ٣$

$ء = ٣$ الأوساط الحسابية هي $-٦، -٣، ٠$

(ب) $ح_١ = ١٣$ $ح_٧ = ١$

$١٣ + ٦ ء = ١$ ؛ $ء = -٢$

الأوساط: $١١، ٩، ٧، ٥، ٣$.

١٠ $جـ_{١٠} = \frac{١٠}{٢}(-١٢ + ٢٤) = ٦٠$.

١١ (أ) $جـ_{٢٥} = \frac{٢٥}{٢}[٢ \times -٧ + ٢٤ \times ٤]$

$جـ_{٢٥} = ١٠٢٥$

(ب) الأساس $ء = -٢$ نوجد عدد الحدود ن

$٩٥ = ٥ + (ن - ١) \times -٢$، ومنها ن $= ٤٦$

$جـ_{٤٦} = \frac{٤٦}{٢}(٥ + ٩٥) = ٢٣٠٠$

١٢ (أ) $٩٤٨ = \frac{ن}{٢}[١٠ + (ن - ١) \times -٣]$

$-٣ن^٢ + ٧ن - ١٨٩٦ = ٠$

$ن_١ = -٢٦,\overline{٣}$ (مرفوض)

$ن_٢ = ٢٤$ يلزم ٢٤ حدًّا.

(ب) الأساس $ء = -٥$

$١٠٠ = \frac{ن}{٢}[٦٠ + (ن - ١) \times -٥]$

$ن^٢ - ١٣ن + ٤٠ = ٠$

ن $= ٥$ مقبولة

ن $= ٨$ مقبولة وتفسيرها

$ح_٦ + ح_٧ + ح_٨ = ٠$

١٣ $جـ_{٢٥} = \frac{٢٥}{٢}[١٤ + ٢٤ \times ٢] = ٧٧٥$

الكلفة $= ٧٧٥$ دينارًا

حاول أن تحل

١٢ ١ كم حدًّا يلزم أخذه من المتتالية الحسابية التي حدها الأول ٥ وأساسها ٣ ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع ٩٤٨؟

ب كم حدًّا يلزم أخذه من المتتالية الحسابية $(٣٠، ٢٥، ٢٠، ...)$ ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع ١٠٠؟

مثال (١٣)

أراد فهد حفر بئر في مزرعته. تبلغ كلفة حفر المتر الأول ٧ دنانير، وتزيد كلفة حفر كل متر دينارين عن كلفة حفر المتر السابق. دفع فهد للمتعهد ٤٣٢ دينارًا. ما عمق البئر الذي حفره؟

الحل: بما أن الزيادة ثابتة وهي ديناران، إذًا المتتالية حسابية. ليكن جـ$_ن$ المبلغ المدفوع لقاء حفر ن متر.

جـ$_ن = \frac{ن}{٢}[٢ح_١ + (ن - ١) \times ٢]$

$٤٣٢ = \frac{ن}{٢}(٢ \times ٧ + ٢ن - ٢)$

$٤٣٢ = ٦ن + ن^٢$

أي $ن^٢ + ٦ن - ٤٣٢ = ٠$

$(ن + ٢٤)(ن - ١٨) = ٠$

ن $= -٢٤$ (مرفوض)، ن $= ١٨$

يبلغ عمق البئر ١٨ مترًا.

حاول أن تحل

١٣ في المثال (١٣)، كم ستبلغ كلفة الحفر بالدينار إذا بلغ عمق البئر ٢٥ مترًا؟

١٩٧

تمرّنْ ٢-٥

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

المتتالية الحسابيّة
Arithmetic Sequence

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمارين (١-٤) هل المتتالية المعطاة حسابية؟ إذا كانت كذلك حدّد الأساس.

(١) $(١، ٤، ٩، ١٦، ...)$ _____

(٢) $(١٠، ٢٠، ٣٠، ٤٠، ...)$ _____

(٣) $(-٢١، -١٨، -١٥، -١٢، ...)$ _____

(٤) $(١٠٠، ١٠، ١، ٠,١، ٠,٠١، ...)$ _____

في التمارين (٥-٨) في كل متتالية حسابيّة أوجد الحد الثاني والثلاثون.

(٥) $(٣٤، ٣٧، ٤٠، ٤٣، ...)$ _____

(٦) $(١، ٠,٥، ٠، ٠,٥، ١، ١,٣، ...)$ _____

(٧) $(٢١٣، ٢٠١، ١٨٩، ١٧٧، ...)$ _____

(٨) $(-٩، -٨,٧، -٨,٤، ...)$ _____

في التمرينين (٩ - ١٠) أوجد س في كل متتالية حسابيّة.

(٩) $(-١٦، س، ١، ...)$ _____

(١٠) $(\frac{١٣}{٢}، س، \frac{٥١}{٢}، ...)$ _____

في التمرينين (١١ - ١٢) أوجد الوسط الحسابي.

(١١) $ح_{١٠-ن} = ٧، ح_{١٠+ن} = ١$ _____

(١٢) $ح_{١٠-ن} = \frac{٣}{٥}، ح_{١٠+ن} = ١$ _____

١٢٨

KuwaitMath.com

(١٣) تحليل الخطأ:
قال خالد أن الحد التالي في المتتالية (٠، ٢، ٤، ...) هو ٨. ما الخطأ الذي اقترفه؟

(١٤) أوجد الحد السابع عشر من المتتالية:
(أ) $ح_{١٦} = ١٨ ، س = ٥$
(ب) $ح_{١٨} = ١٨ ، س = -٤$

في التمارين (١٥-١٨)، لكل متتالية اكتب الصيغة الصريحة والصيغة الارتدادية.
(١٥) (٠، ٦، ١٢، ١٨، ٢٤، ...)
(١٦) (-٤، -٨، -١٢، -١٦، ...)
(١٧) (٢٧، ١٥، ٣، -٩، ...)
(١٨) $(٠، \frac{١}{٨}، \frac{١}{٤}، \frac{٣}{٨}، ...)$

في التمارين (١٩-٢١)، في كل متتالية حسابيّة أوجد الحد الأول $ح_١$ والأساس س.
(١٩) $ح_٣ = ٥ ، ح_٥ = ١١ ، ...$
(٢٠) $ح_{١٠} = ١٧ ، ح_{١٤} = ٣٤ ، ...$
(٢١) $ح_٤ = -٥,٣٤ ، ح_٩ = -١٢,٥ ، ...$
*(٢٢) المتتالية الحسابيّة التي لا تتضمن حدًّا قيمته ٣٣ في ما يلي هي:
(أ) (١، ٥، ٩، ١٣، ...)
(ب) (١، ١١، ٢١، ...)
(جـ) (٣، ٩، ١٥، ...)
(د) (٨٥، ٧٢، ٥٩، ...)

*(٢٣) **الكتابة في الرياضيات:** أوجد الحد المائة $(ح_{١٠٠})$ من المتتالية الحسابيّة (٣، ١٠، ١٧، ٢٤، ٣١، ...)
اشرح خطوات الحل.

في التمرينين (٢٤ - ٢٥) أوجد مجموع حدود كل متتالية مما يلي:
(٢٤) $(٠، \frac{١}{٢}، \frac{٣}{٢}، \frac{٥}{٢}، ...، \frac{١٥}{٢})$
(٢٥) (-٣,٥، -٢٥,١، ١، ...، ١٢,٢٥)
(٢٦) (أ) ما عدد حدود المتتالية: (١٠، ١٣، ١٦، ...، ٣١)؟ اشرح.
(ب) أوجد مجموع هذه الحدود.
(٢٧) في متتالية حسابيّة $جـ_٨ = ٤٤٠$، الأساس $س = ٦$، أوجد $ح_١$.
(٢٨) أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الحسابيّة (٥، ٧، ٩، ...).
(٢٩) أوجد الحد الأربعون $ح_{٤٠}$ في المتتالية الحسابيّة حيث $ح_١ = ٤$، $جـ_{٤٠} = ٦٠٨٠$. ثم أوجد $ح_{٣٠}$.
(٣٠) كم حدًّا يلزم أخذها بدءًا من الحدّ الأول من المتتالية الحسابيّة (١٦، ١٢، ٨، ...) ليكون مجموعها -٢٠؟
(٣١) مسرح مدرسي فيه ١٥ مقعدًا في الصف الأول وكان كل صف آخر يتسع لعدد من المقاعد يزيد عن الصف الذي يسبقه مباشرة بمقدار ٤ مقاعد. كم عدد المقاعد في هذا المسرح إذا كان يتسع لعدد ١٤ صفًا؟

*(٣٢) يعرض أحد المخازن الغذائية علب البسلة على شكل مثلث. فيضع علبتين في الصف الأول و٣ علب في الصف الثاني نزولًا و٤ علب في الصف الثالث وهكذا...
(أ) اكتب صيغة صريحة لعدد العلب في الصف ن:
(ب) ما مجموع العلب في ٩ صفوف؟
(جـ) **التفكير الناقد:** هل يمكن وضع ١١٠ علب بهذه الطريقة؟ اشرح.

*(٣٣) **التحدي:** $(ح_ن)$ متتالية حيث $جـ_ن = ح_١ + ح_٢ + ... + ح_ن = ٣ن^٢ + ٥ن$
(أ) أثبت أن $(ح_ن)$ متتالية حسابيّة.
(ب) أوجد $ح_{٢٠١٢}$.

المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمارين (١-٤) هل المتتالية المعطاة حسابيّة؟ إذا كانت كذلك حدّد الأساس.
(١) (١، ١، ٢، ٣، ٥، ٨)
(٢) (٠، ١، ٠، ٣، ٦، ١٠)
(٣) (٣، ٧، ١١، ١٥، ١٩)
(٤) (٩٧، ٨٦، ٧٥، ٦٤، ٥٣)

في التمارين (٥-٨) في كل متتالية حسابيّة أوجد الحد الثاني والثلاثون.
(٥) (١٠١، ١٠٥، ١٠٩، ١١٣، ...)
(٦) (٣، ١، -١، -٣، ...)
(٧) (٢٣، ٣٠، ٣٧، ٤٤، ...)
(٨) (٠,٠٠٢٣، ٠,٠٠٢٥، ٠,٠٠٢٧، ٠، ...)

في التمرينين (٩-١٠) أوجد الحد الناقص في كل متتالية حسابيّة.
(٩) (١٠١، □، -١٥٥)
(١٠) (١٤، □، ٢٨)

في التمارين (١١-١٣) أوجد الوسط الحسابي.
(١١) $ح_{١٠-} = ١٠٠ ، ح_{١٠+} = ١٤٠$
(١٢) $ح_{٥-} = ر ، ح_{٥+} = ر + ز$
(١٣) أوجد الحد السابع عشر من المتتالية: $ح_{١٨} = ١٨ ، س = -١١$

في التمارين (١٤-١٧)، لكل متتالية حسابيّة اكتب الصيغة الصريحة والصيغة الارتدادية.
(١٤) (-٥، -٤، -٣، -٢، ...)
(١٥) (-٢، ٥، ١٢، ١٩، ...)
(١٦) (-٥، -٥,٣، -٢، -٥,٠، ...)
(١٧) $(١، \frac{١}{٣}، ١، \frac{٢}{٣}، ٢، ...)$

في التمارين (١٨-٢٠) في كل متتالية حسابيّة أوجد الحد الأول $ح_١$ والأساس س وفقًا للمعطيات التالية:
(١٨) $ح_٤ = ٨ ، ح_٧ = ٢٠$
(١٩) $ح_٣ = ٣٢ ، ح_٧ = -٨$
(٢٠) $ح_٤ = -٤,٢ ، ح_٩ = ٢$

*(٢١) أي متتالية حسابيّة تحوي الحد الذي قيمته ٢٧؟
(I) $ح_١ = ٧ ، ح_ن = ح_{ن-١} + ٥$
(II) $ح_ن = ٤(ن - ١) + ٣$
(III) $ح_ن = -٦ن + ٥٧$
(أ) I فقط
(ب) I، II فقط
(جـ) II، III فقط
(د) I، II، III

في كل من التمرينين (٢٢-٢٣) **مجموع لحدود متتالية حسابيّة، أوجد هذا المجموع.**
(٢٢) $٥ + ١٣ + ٢١ + ... + ٦١$
(٢٣) $(-١٣) + (-١٤,٥) + (-١٦) + ... + (-٢٣,٥)$
(٢٤) إذا كان $ح_١ = -٦ ، جـ_{٥٠} = ١٥٠٥$ في متتالية حسابيّة. فأوجد $ح_٥$. ثم أوجد $ح_{٣٤}$.
(٢٥) في متتالية حسابيّة $جـ_{٣٠} = ٢٤٠$، الأساس $س = -٢$، أوجد $ح_١$.
(٢٦) أوجد مجموع العشرين حدًّا الأولى من المتتالية الحسابيّة (٢٠، ١٦، ١٢، ...)
*(٢٧) إذا كان مجموع ن حدًّا الأولى من متتالية حسابيّة هو $\frac{ن}{٢}(٤٩ - ٣ن)$، أوجد المتتالية ثم احسب قيمة ن التي تجعل هذا المجموع يساوي ٣٠.
(٢٨) أدخل ثمانية أوساط حسابيّة بين العددين ٥، ٣٢.
(٢٩) أدخل ستة أوساط حسابيّة بين العددين -٣، $\frac{١}{٢}$.
(٣٠) أدخل تسعة أوساط حسابيّة بين العددين ٠، ١٥.

Kuwait Math.com

٥ـ٣: المتتالية الهندسية

١ الأهداف

- يتعرف المتتالية الهندسية وأساسها.
- يوجد الحد النوني للمتتالية الهندسية.
- يستخدم المتتاليات الهندسية لحل مسائل حياتية.
- يوجد الوسط الهندسي لعددين.
- يدخل أوساطًا هندسية بين عددين.
- يوجد مجموع ن حدًّا الأولى من متتالية هندسية.
- يتعرف رمز المجموع ويستخدمه في كتابة مجاميع.
- يوجد قيم تعابير حسابية مكتوبة بصيغة تستخدم رمز المجموع

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

متتالية هندسية – حد نوني – أوساط هندسية، مجموع ن حدًّا الأولى من متتالية هندسية.

٣ الأدوات والوسائل

ورق مقوى ملون – مقص – مسطرة – منقلة – أقلام تأشير – جهاز إسقاط – آلة حاسبة – حاسوب.

٤ التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(أ) ٣، ٧، ٥، ٩، ٧، ١١، ٩، ... اكتب ٤ أعداد متممة لهذا النمط. هل يشكل هذا النمط متتالية حسابية؟

(ب) –١٧، –١١، –٥، ١، ٧، ... اكتب ٣ أعداد متممة لهذا النمط. هل يشكل هذا النمط متتالية حسابية؟

(جـ) ٥، ١٠، ٢٠، ٤٠، ٨٠، ... اكتب ٤ أعداد متممة لهذا النمط. هل يشكل هذا النمط متتالية حسابية؟

(د) أوجد الناتج: $\frac{١٨}{٦}$، $\frac{٢٤}{٤}$، $\frac{٤٨}{٤}$

$\sqrt{١٦}\times٧$ ، $\sqrt[٣]{٢٧}\times٧$ ، $\sqrt[٥]{٣٢}\times٧$

٥ التدريس

من المهم جدًّا أن يستكشف الطالب المتتالية الهندسية وذلك بإيجاد

٣-٥

المتتالية الهندسية
Geometric Sequence

سوف تتعلم
- المتتالية الهندسية وأساسها
- الحد النوني للمتتالية الهندسية
- الأوساط الهندسية
- مجموع (ن) حدًا الأولى من حدود متتالية هندسية

عمل تعاوني

- ارسم مثلثًا قائم الزاوية ومتطابق الضلعين.
- قصّ المثلث إلى مثلثين قائمي الزاوية، وكل منهما متطابق الضلعين.

كرّر الشيء نفسه كما في الشكل واحسب عدد المثلثات في كل مرة.

ح١ = ■ ، ح٢ = ■ ، ح٣ = ■ ، ح٤ = ■

هل الحدود الناتجة تكون متتالية حسابية؟ وإذا لم تكن كذلك، فلماذا؟

ماذا تلاحظ في العلاقة بين الحدود الناتجة؟

هل يمكنك إيجاد الحد السادس ح٦؟

هل يمكنك إيجاد الحد السادس ح٦ بدلالة الحد الخامس ح٥؟

هل يمكنك إيجاد الحد النوني ح ن بدلالة الحد ح ن-١؟

جملة مفتوحة:

في المتتالية السابقة، اضرب كل حد من حدود المتتالية في عدد ثابت غير صفري واكتب المتتالية الجديدة الناتجة. ما العلاقة التي تجدها بين المتتاليتين؟

لنأخذ المتتالية (١، ٢، ٤، ٨، ١٦، ...). لاحظ النمط المتمثل في كل حد وسابقه.

تعريف:

المتتالية الهندسية: هي متتالية ناتج قسمة أي حد فيها على الحد السابق له مباشرة، يساوي عددًا حقيقيًّا ثابتًا غير صفري،

فيكون $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = ر$ حيث $ح_ن \neq ٠$.

لكل ن ∈ صم، ر عدد حقيقي ثابت يسمى أساس المتتالية الهندسية common ratio

فمثلًا، المتتالية (٥، ١٠، ٢٠، ٤٠) متتالية هندسية.

أما (٥، ١٠، ١٥، ٢٠، ...) فليست متتالية هندسية.

لماذا لا يمكن لأي حد في المتتالية الهندسية أن يساوي الصفر؟

مثال (١)

لتكن (ح ن) متتالية حيث $ح_ن = ٣^ن$.

١ اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية (ح ن).

ب أثبت أن (ح ن) متتالية هندسية.

الحل:

١ $ح_١ = ٣^١ = ٣$ ، $ح_٢ = ٣^٢ = ٩$

$ح_٣ = ٣^٣ = ٢٧$ ، $ح_٤ = ٣^٤ = ٨١$

$ح_٥ = ٣^٥ = ٢٤٣$

الحدود الخمسة الأولى هي: ٣، ٩، ٢٧، ٨١، ٢٤٣.

∴ المتتالية (ح ن) = (٣، ٩، ٢٧، ٨١، ٢٤٣، ...)

ب $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٣^{ن+١}}{٣^ن} = ٣^{ن+١-ن} = ٣$ مقدار ثابت.

∴ المتتالية هندسية.

حاول أن تحل

١ أثبت أن المتتالية (ح ن) حيث $ح_ن = (٢)^ن$، هي متتالية هندسية.

الحد النوني للمتتالية الهندسية General term of an Geometrie Sequence

إذا كانت (ح ن) متتالية هندسية أساسها $ر \neq ٠$ فإن $ح_ن = ح_١ \times ر^{ن-١}$

حيث $ح_١$ هو الحد الأول، $ح_ن$ هو الحد النوني، ر هو أساس المتتالية الهندسية.

ويكون $ح_٢ = ح_١ \times ر$ ، $ح_٣ = ح_١ \times ر^٢$ ، $ح_٤ = ح_١ \times ر^٣$ ، ...

وتكون الصورة العامة للمتتالية الهندسية $ح_١$، $ح_١ ر$، $ح_١ ر^٢$، $ح_١ ر^٣$، ...، $ح_١ ر^{ن-١}$، ...

إذا كان الحد المعروف $ح_ك$ فإن $ح_ن = ح_ك \times ر^{ن-ك}$

ومنه يكون $\frac{ح_ن}{ح_ك} = \frac{ح_١ \times ر^{ن-١}}{ح_١ \times ر^{ك-١}} = ر^{ن-ك}$

أي أن $ح_ن = ح_ك \times ر^{ن-ك}$

KuwaitMath.com

النسبة المشتركة بين الحدود المتتابعة.

ركز مع الطلاب على أنه يجب التأكد من أن العلاقة بين الحدود في أي متتالية هي: $\frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{ح_٣}{ح_٢} = \frac{ح_٤}{ح_٣} = \ldots = ر$ كي تصبح متتالية هندسية.

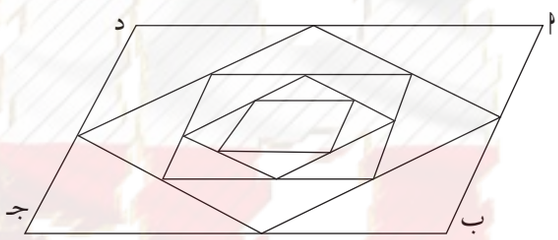
نبه إلى الفرق بين المتتالية الهندسية والمتتالية الحسابية.

أكد على أن المتتالية الهندسية يمكن أن تكون منتهية أو غير منتهية ويمكن أيضًا أن تكون تزايدية أو تناقصية وذلك بحسب قيمة الأساس وإشارته أو بحسب إشارة الحد الأول.

ناقش معهم النتائج التي توصلوا إليها في فقرة «عمل تعاوني»

أعطِ أمثلة مشابهة لاستكشاف المتتالية الهندسية على أشكال هندسية.

مثال إضافي



أ ب جـ د متوازي أضلاع مساحته م وحدة مربعة. نجمع على التوالي منتصفات الأضلاع لنحصل على متوازيات أضلاع.

أوجد مساحة متوازي الأضلاع بعد n عملية بدلالة المساحة م.

مساحة الأول = م وحدة مربعة

مساحة الثاني = $\frac{م}{٢}$ وحدة مربعة

مساحة الثالث = $\frac{م}{٤}$ وحدة مربعة

أكمل...

أعطِ أمثلة متعددة لإيجاد الحد النوني في المتتابعة الهندسية.

ركز على التطبيقات الحياتية كما في المثالين (٥)، (٦).

اشرح جيدًا الوسط الهندسي. أكد على وجود إجابتين. أبرز تعميمًا في المتتالية الهندسية يرتكز على أن أي ثلاثة حدود متتالية تقع بين حدين تشكل في ما بينها أوساطًا هندسية أي:

٣، ٦، ١٢، ٢٤، ٤٨، ... متتالية هندسية

الحدود ٦، ١٢، ٢٤، تعطينا:

مثال (٢)

اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية الهندسية التي حدها الأول ٩ وأساسها ٣.

الحل:

$ح_١ = ٩$ ، $ر = ٣$

$ح_٢ = ح_١ \times ر = ٩ \times ٣ = ٢٧$

$ح_٣ = ح_١ \times ر^٢ = ٩ \times ٣^٢ = ٨١$

$ح_٤ = ح_١ \times ر^٣ = ٩ \times ٣^٣ = ٢٤٣$

$ح_٥ = ح_١ \times ر^٤ = ٩ \times ٣^٤ = ٧٢٩$

∴ الحدود الخمسة الأولى هي: ٩، ٢٧، ٨١، ٢٤٣، ٧٢٩

حاول أن تحل

٢ اكتب الحدود الأربعة الأولى من المتتالية الهندسية التي حدها الأول ٥ وأساسها −٣.

مثال (٣)

متتالية هندسية حدها الأول ٤ وحدها السادس ١٢٨ . اكتب المتتالية الهندسية مكتفيًا بالحدود الأربعة الأولى منها.

الحل:

الحد الأول: $ح_١ = ٤$ ، الحد السادس: $ح_٦ = ١٢٨$

نعلم أن $ح_ن = ح_١ \times ر^{ن-١}$

$ح_٦ = ح_١ \times ر^٥$

$١٢٨ = ٤ \times ر^٥$

$ر^٥ = ٣٢$ ∴ $ر = ٢$

∴ الحدود الأربعة الأولى هي: ٤، ٨، ١٦، ٣٢.

المتتالية هي: (٤، ٨، ١٦، ٣٢، ...)

حاول أن تحل

٣ متتالية هندسية حدها الأول ٢٧ وحدها الخامس $\frac{١}{٣}$. اكتب المتتالية مكتفيًا بالحدود الخمسة الأولى منها.

مثال (٤)

متتالية هندسية حدودها موجبة، ومجموع الحدين الأول والثاني ٣٦، وحدها الثالث يساوي ٣. أوجد الحد الخامس.

الحل:

$ح_١ + ح_٢ = ٣٦$ ، $ح_٣ = ٣$

في المتتالية الهندسية: $ح_ن = ح_١ \times ر^{ن-١}$

$\therefore ح_١ + ح_١ ر = ٣٦$

$ح_١ (١ + ر) = ٣٦$

$ح_٣ = ح_١ ر^٢ = ٣$

بالقسمة $\frac{ح_١ ر^٢}{ح_١ (١ + ر)} = \frac{٣}{٣٦}$

$\frac{ر^٢}{١ + ر} = \frac{١}{١٢}$

$١٢ر^٢ = ر + ١$ الضرب التقاطعي

$١٢ر^٢ - ر - ١ = ٠$

$(٤ر + ١)(٣ر - ١) = ٠$

$ر = -\frac{١}{٤}$ (مرفوض لأن الحدود موجبة) أو $ر = \frac{١}{٣}$.

$ح_٥ = ح_١ \times ر^٤$

$= ٣ \times \left(\frac{١}{٣}\right)^٤ = \frac{١}{٣}$.

الحد الخامس = $\frac{١}{٣}$.

حاول أن تحل

٤ $(ح_ن)$ متتالية هندسية، مجموع حديها الأول والثاني يساوي ٢، ومجموع حديها الثالث والرابع يساوي ٨.
أوجد الحد الأول والحد الخامس منها.

$٦ \times ٢٤ = ١٤٤ = ١٢^{٢}$.

أعطِ أمثلة تتناول مجموع الحدود المنتهية في المتتالية الهندسية وتطبيقاتها الحياتية كما في المثال (١٢).

أخبرهم أن للمتتالية الهندسية تطبيقات متعددة في الحسابات المالية ومواقف حياتية سوف يتعرفون عليها لاحقًا.

٦ الربط

المتتاليات الهندسية أكثر تطبيقًا في مجالات الحياة اليومية من المتتاليات الحسابية. مثلًا:

- النمو أو التزايد السكاني يتم على أساس متتابعة هندسية.
- تحتسب الفوائد المصرفية على أساس المتتابعات الهندسية.
- تتزايد الخلايا البكتيرية في مجتمع معين على أساس المتتابعات الهندسية.

من الروايات القديمة أن أحد الملوك أراد مكافأة مخترع لعبة الشطرنج. بعد التفكير طلب المخترع من الملك ما يلي:

ضع لي حبة قمح واحدة في الخانة الأولى من رقعة الشطرنج، وحبتين في الرقعة الثانية، أربعة في الرقعة الثالثة وهكذا في كل رقعة مثلي عدد حبات القمح في الرقعة التي هي قبلها حتى الانتهاء من كل خانات رقعة الشطرنج.

احتار الملك لهذا الطلب الوضيع. ولكن...

في رقعة الشطرنج ٦٤ خانة

كتلة حبة القمح حوالى ٤٠ ملجم.

بلغ الإنتاج العالمي من القمح سنة ١٩٩٩، ٥٨٠ مليون طن.

ما طلبه مخترع رقعة الشطرنج يساوي الإنتاج العالمي سنة ١٩٩٩ لأكثر من ١ ٢٧٠ مرة.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخلط الطلاب بين أساس المتتالية الحسابية والمتتالية الهندسية. ساعدهم في استكشاف الفرق بين الحالتين.

٨ التقييم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من أنهم تمكنوا من استخدام القواعد الصحيحة في المتتالية الهندسية.

مثال (٥) مسألة حياتية

يزداد عدد سكان مدينة بمعدل ثابت ٢٪ كل سنة. فكم يكون عدد سكان هذه المدينة في بداية السنة السادسة إذا كان عددهم الحالي ٤٠٠ ٠٠٠ نسمة؟

الحل:

عدد السكان في بداية السنة الأولى: $ح_{١}$ = ٤٠٠ ٠٠٠ نسمة.

النسبة المئوية للتزايد = ٢٪

عدد السكان في بداية السنة الحالية = عدد السكان من السنة السابقة × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد).

عدد السكان في بداية السنة الثانية = $ح_{٢}$ = ٤٠٠ ٠٠٠ × (١٠٠٪ + ٢٪)

= ٤٠٠ ٠٠٠ × (١,٠٢)

عدد السكان في بداية السنة الثالثة = $ح_{٣} = ح_{٢} \times (١,٠٢)$

= ٤٠٠ ٠٠٠ × $(١,٠٢)^{٢}$

... وهكذا

مما سبق يتضح أن متتالية تزايد السكان هي متتالية هندسية أساسها (١,٠٢).

الحد النوني لها هو

$ح_{ن} = ح_{١} \times (١,٠٢)^{ن-١}$

عدد السكان في بداية السنة السادسة = $ح_{٦}$ = ٤٠٠ ٠٠٠ × $(١,٠٢)^{٥}$

≃ ٤٤١٦٣٢

يبلغ عدد سكان المدينة في بداية السنة السادسة ٤٤١ ٦٣٢ نسمة تقريبًا.

ملاحظة:

- النسبة المئوية التزايدية:
  القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد).
- النسبة المئوية التناقصية:
  القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ − النسبة المئوية للتناقص).

حاول أن تحل

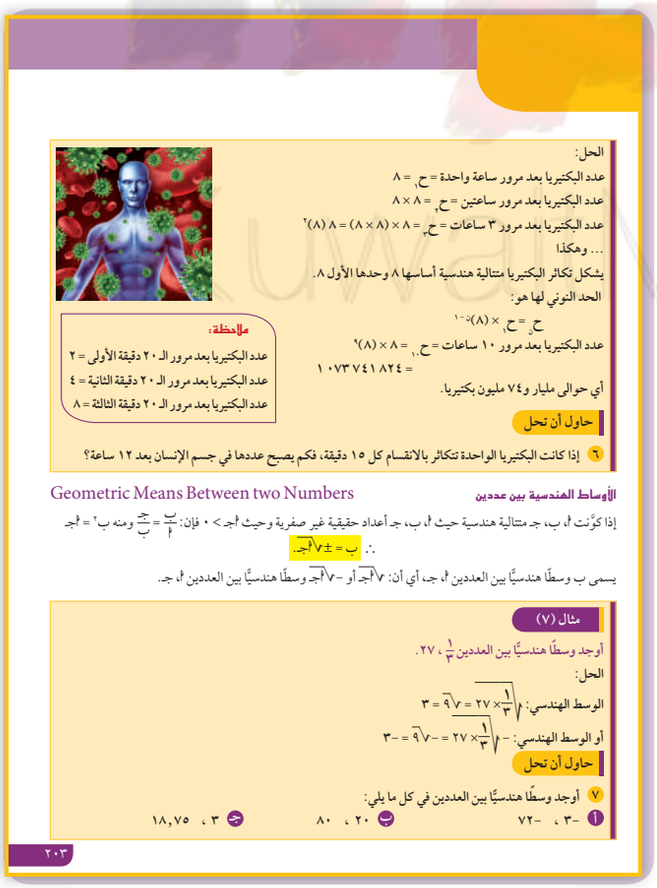
٥ يبلغ عدد سكان مدينة ما ٤٤١ ٦٣٢ نسمة. نتيجة لإقفال بعض المصانع الكبيرة فيها هاجر العديد من سكانها مما أدى إلى انخفاض عددهم بمعدل ٤٪ سنويًا. بعد حوالى كم سنة يصبح عدد سكان هذه المدينة ٤٠٠ ٠٠٠ نسمة؟

مثال (٦)

الخلية البكتيرية الواحدة التي تنجح في دخول جسم الإنسان يمكنها أن تتكاثر في متتالية هندسية لوقت طويل إذا لم تتم مهاجمتها بالجهاز المناعي للجسم.

فالبكتيريا تتكاثر بالانقسام الثنائي، ويمكن للعديد منها أن يتكاثر كل ٢٠ دقيقة. ففي الساعة الواحدة يمكن للبكتيريا الواحدة أن تصبح ثمانية. إذا دخلت بكتيريا واحدة جسم الإنسان، فكم يصبح عدد البكتيريا في الجسم بعد ١٠ ساعات؟

٢٠٢



الحل:

عدد البكتيريا بعد مرور ساعة واحدة = $ح_{١}$ = ٨

عدد البكتيريا بعد مرور ساعتين = $ح_{٢}$ = ٨ × ٨

عدد البكتيريا بعد مرور ٣ ساعات = $ح_{٣}$ = ٨ × (٨ × ٨) = $(٨)^{٣}$

... وهكذا

يشكل تكاثر البكتيريا متتالية هندسية أساسها ٨ وحدها الأول ٨.

الحد النوني لها هو:

$ح_{ن} = ح_{١} \times (٨)^{ن-١}$

عدد البكتيريا بعد مرور ١٠ ساعات = $ح_{١٠}$ = ٨ × $(٨)^{٩}$

= ١ ٠٧٣ ٧٤١ ٨٢٤

أي حوالى مليار و٧٤ مليون بكتيريا.

ملاحظة:

عدد البكتيريا بعد مرور الـ ٢٠ دقيقة الأولى = ٢

عدد البكتيريا بعد مرور الـ ٢٠ دقيقة الثانية = ٤

عدد البكتيريا بعد مرور الـ ٢٠ دقيقة الثالثة = ٨

حاول أن تحل

٦ إذا كانت البكتيريا الواحدة تتكاثر بالانقسام كل ١٥ دقيقة، فكم يصبح عددها في جسم الإنسان بعد ١٢ ساعة؟

الأوساط الهندسية بين عددين Geometric Means Between two Numbers

إذا كوَّنت أ، ب، جـ متتالية هندسية حيث أ، ب، جـ أعداد حقيقية غير صفرية وحيث أجـ > ٠ فإن: $\frac{ب}{أ} = \frac{جـ}{ب}$ ومنه $ب^{٢}$ = أجـ

∴ $ب = \pm\sqrt{أجـ}$.

يسمى ب وسطًا هندسيًا بين العددين أ، جـ، أي أن: $\sqrt{أجـ}$ أو $-\sqrt{أجـ}$ وسطًا هندسيًا بين العددين أ، جـ.

مثال (٧)

أوجد وسطًا هندسيًا بين العددين $\frac{١}{٣}$ ، ٢٧.

الحل:

الوسط الهندسي: $\sqrt{\frac{١}{٣} \times ٢٧} = \sqrt{٩} = ٣$

أو الوسط الهندسي: $-\sqrt{\frac{١}{٣} \times ٢٧} = -\sqrt{٩} = -٣$

حاول أن تحل

٧ أوجد وسطًا هندسيًا بين العددين في كل ما يلي:

أ −٣ ، −٧٢ ب ٢٠ ، ٨٠ جـ ٣ ، ١٨,٧٥

٢٠٣

اختبار سريع

١ أوجد أساس المتتالية الهندسية: ٢٤، ١٢، ٦، ٣، ٥, ١ .

$\frac{١}{٢}$

٢ أوجد الحدين التاليين من المتتالية الهندسية:

٦، ١٢، ٢٤، ... ٩٦، ٤٨

٣ أوجد الحد الثاني عشر من المتتالية الهندسية:

٢، ٤، ٨، ١٦، ... ٤٠٩٦

٤ أوجد الوسيط الهندسي للعددين: ١٠، ٢٠.

$\pm ١٠\sqrt{٢}$

٩ إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

لا تشكل متتالية حسابية، لأن الفرق بين الحدود المتتالية ليس ثابتًا.

$ح_١ = ١، ح_٢ = ٢، ح_٣ = ٤، ح_٤ = ٨$

نلاحظ: $\frac{ح_٢}{ح_١} = ٢، \frac{ح_٣}{ح_٢} = \frac{٤}{٢} = ٢$

$\frac{ح_٤}{ح_٣} = ٢$

الحد الخامس = $٨ \times ٢ = ١٦$

الحد السادس = $١٦ \times ٢ = ٣٢$

الحد السادس = الحد الخامس $\times ٢$

$ح_ن = ح_{ن-١} \times ٢$.

جملة مفتوحة: تتنوع الإجابات. $\frac{ح_ن}{ح_{ن-١}} = ٢$

«حاول أن تحل»

١ $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٢^{ن+١}}{٢^ن} = ٢$ = مقدارًا ثابتًا

لذا فإن المتتالية هي هندسية.

٢ ٥، −١٥، ٤٥، −١٣٥

٣ $ح_ن = ح_١ \times ر^{ن-١}$ ؛ $\frac{١}{٣} = ٢٧ \times ر^٤$

$ر^٤ = \frac{١}{٨١}$ أي $ر = \frac{١}{٣}$ أو $ر = -\frac{١}{٣}$

الحدود: ٢٧، ٩، ٣، ١، $\frac{١}{٣}$ أو ٢٧ − ٩، ٣، −١، $\frac{١}{٣}$

المتتالية هي $(٢٧، ٩، ٣، ١، \frac{١}{٣}، ...)$ أو $(٢٧، -٩، ٣، -١، \frac{١}{٣}، ...)$

مثال (٨)

عندما يتأرجح ولد دون تأثير قوة خارجية فإن مقاومة الهواء تؤدي إلى تناقص في طول قوس التأرجح. ويشكل التناقص في طول القوس متتالية هندسية. أوجد الوسط الهندسي لطولي القوسين (لأقرب عدد كلي.)

الحل:

الوسط الهندسي = $\sqrt{٣,٢ \times ٢,٨}$

$= \sqrt{٨,٩٦}$

$\simeq ٣$

الوسط الهندسي لطولي القوسين يساوي حوالى ٣ أمتار.

حاول أن تحل

٨ يتدرب عماد على القفزة الثلاثية. حقق في المحاولة الأولى ٨,٨ أمتار وفي المحاولة الثانية ٩,٢ أمتار. ما الوسط الهندسي لطولي القفزتين؟

بصورة عامة

في المتتالية الهندسية (أ، ب، جـ، د، ...، ك، ل). تسمى ب، جـ، د، ...، ك أوساطًا هندسية للعددين الحقيقيين أ، ل.

وتسمى عملية إيجاد ب، جـ، د، ...، ك عملية إدخال أوساط هندسية بين العددين أ، ل.

مثال (٩)

أدخل خمسة أوساط هندسية موجبة بين العددين ٥١٢ ، ٨.

الحل: (٥١٢، ■، ■، ■، ■، ■، ٨).

عدد حدود المتتالية الهندسية = عدد الأوساط + ٢.

ن = ٥ + ٢ = ٧

$ح_١ = ٥١٢$

$ح_٧ = ٨$ أي أن $ح_٧ = ٨$

$\therefore ح_٧ = ح_١ \times ر^{٧-١}$

$\therefore ٨ = ٥١٢ \times ر^٦$

$ر^٦ = \frac{٨}{٥١٢} = \frac{١}{٦٤} = (\frac{١}{٢})^٦$

$ر = \frac{١}{٢}$ أو $ر = -\frac{١}{٢}$ مرفوضة لأن الأوساط موجبة.

الأوساط هي: ٢٥٦، ١٢٨، ٦٤، ٣٢، ١٦.

حاول أن تحل

٩ أدخل ثمانية أوساط هندسية بين ٢ ، ١٠٢٤.

مجموع ن حدا الأولى من متتالية هندسية Sum of n First Terms of a Geometric Sequence

قانون

إذا كانت $(ح_ن)$ متتالية هندسية، $جـ_ن = ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ... + ح_ن$ هو مجموع ن حدًا الأولى، فإن:

١ $جـ_ن = ح_١ \times \frac{ر^ن - ١}{ر - ١}$ أو $جـ_ن = ح_١ \times \frac{١ - ر^ن}{١ - ر}$ ، $ر \neq ١$

٢ إذا كانت $ر = ١$ فإن $جـ_ن = ن ح_١$

البرهان

ليكن ر أساس المتتالية.

$جـ_ن = ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ... + ح_ن$

$جـ_ن = ح_١ + ح_١ ر + ح_١ ر^٢ + ... + ح_١ ر^{ن-١}$ (١)

$ر جـ_ن = ح_١ ر + ح_١ ر^٢ + ح_١ ر^٣ + ... + ح_١ ر^ن$ (٢) بضرب طرفي المعادلة (١) في $ر \neq ٠$

بطرح (١) من (٢) وبالتبسيط ينتج:

$ر جـ_ن - جـ_ن = ح_١ ر^ن - ح_١$

$جـ_ن \times (ر - ١) = ح_١ (ر^ن - ١)$

$جـ_ن = ح_١ \times \frac{ر^ن - ١}{ر - ١}$ أو $جـ_ن = ح_١ \times \frac{١ - ر^ن}{١ - ر}$ ، $ر \neq ١$

أما إذا كانت $ر = ١$ فإن حدود المتتالية متساوية فيكون مجموع الحدود = قيمة الحد الأول مضروبة في عدد الحدود أي $جـ_ن = ح_١ \times ن$.

KuwaitMath.com

٤ $ح_{١} + ح_{٢} = ٢ ، ح_{٣} + ح_{٤} = ٨ ،$

$ح_{١} (١ + ر) = ٢ ، ح_{١} (ر^{٢} + ر^{٣}) = ٨ ،$

$ر = \pm ٢$ أي $ر = ٢$ أو $ر = -٢ ، ر \neq -١$

إذا كان $ر = ٢$ نحصل على $ح_{١} = \frac{٢}{٣} ، ح_{٥} = \frac{٣٢}{٣} ،$

إذا كان $ر = -٢$ نحصل على $ح_{١} = -٢ ، ح_{٥} = -٣٢$

٥ في نهاية السنة الأولى: $٦٣٢\ ٤٤١ \times ٠,٩٦$

$= ٤٢٣\ ٩٦٧$ نسمة

في نهاية السنة الثانية: $٤٢٣\ ٩٦٧ \times ٠,٩٦$

$= ٤٠٧\ ٠٠٨$ نسمة

في نهاية السنة الثالثة: $٤٠٧\ ٠٠٨ \times ٠,٩٦$

$= ٣٩٠\ ٧٢٨$ نسمة أي بعد ٣ سنوات تقريبًا.

٦ تتكاثر في الساعة الواحدة ليصبح العدد ١٦

$ح_{١٢} = ١٦ \times (١٦)^{١١} = ٦٧\ ٧٤٩\ ٤١٤\ ٨٢ \times ١٠^{٥}$

٧ (أ) $ف^{٢} = (-٣) \times (-٧٢) = ٢١٦ ، ف = \pm \sqrt{٢١٦}$

(ب) $ف^{٢} = ٢٠ \times ٨٠ = ١٦٠٠ ، ف = \pm ٤٠$

(جـ) $ف^{٢} = ٣ \times ١٨,٧٥ = ٥٦,٢٥ ،$

$ف = \pm \sqrt{٥٦,٢٥} = \pm ٧,٥$

حاول أن تحل

١١ أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الهندسية $(٤ ، ■ ، ١ ، ■ ، \frac{١}{٤} ، ...)$

مثال (١٢)

فكرت عائلة محمد بأن تقوم برحلة في أول شهر سبتمبر لمدة أسبوع، وكانت تكاليف الرحلة ١٣٧٥٠ دينارًا. ولكي تتوفر لدى محمد هذه التكلفة بدأ يوفّر من مصاريفه ١٢٥٠ دينارًا ابتداءً من شهر مارس على أن يزيد ما يوفره بمقدار ٢٠٪ كل شهر عن الشهر السابق له. هل يمكن أن يوفر محمد كل تكلفة الرحلة حتى يقوم بها في أول سبتمبر؟

الحل:

إذا وفر محمد س دينارًا في شهر ما، فسيوفر في الشهر التالي:

$س + \frac{٢٠}{١٠٠} \times س = س + ٠,٢ س = ١,٢ س$

تشكل المبالغ المالية التي يوفرها محمد شهريًا متتالية هندسية أساسها ١,٢ .

يعطي القانون $جـ_{ن} = ح_{١} \times \frac{ر^{ن} - ١}{ر - ١}$ مجموع ما يوفره محمد حيث

$ح_{١} = ١٢٥٠ ، ر = ١,٢ ، ن = ٦$ (من أول مارس إلى أول سبتمبر)

$جـ_{٦} = ١٢٥٠ \times \frac{(١,٢)^{٦} - ١}{١,٢ - ١}$

$جـ_{٦} = ١٢٤١٢,٤$ دينارًا. باستخدام الآلة الحاسبة

لا تستطيع عائلة محمد القيام بالرحلة في أول سبتمبر.

حاول أن تحل

١٢ في المثال (١٢)، هل تستطيع العائلة القيام بالرحلة إذا جعلت التوفير ٢٥٪ زيادة عن كل شهر سابق؟

مثال (١٠)

أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الهندسية (٢، ٤، ٨، ...).

الحل:

$ح_{١} = ٢ ، ر = \frac{ح_{٢}}{ح_{١}} = \frac{٤}{٢} = ٢ ، ن = ١٠$

$جـ_{ن} = ح_{١} \times \frac{ر^{ن} - ١}{ر - ١}$

$جـ_{١٠} = \frac{٢ \times (٢^{١٠} - ١)}{(٢ - ١)}$

$جـ_{١٠} = ٢ \times ١٠٢٣ = ٢٠٤٦$.

حاول أن تحل

١٠ أوجد مجموع الحدود الثمانية الأولى من المتتالية الهندسية (٣، ٩، ٢٧، ...).

مثال (١١)

الحد الأول من متتالية هندسية يساوي ٨ والحد الثالث منها يساوي $\frac{٨}{٩}$. أوجد مجموع الحدود الستة الأولى منها.

الحل: ∵ المتتالية هندسية

∴ $ح_{٣} = ح_{١} \times ر^{٢}$

$\frac{٨}{٩} = ٨ \times ر^{٢}$

$ر^{٢} = \frac{١}{٩}$

$ر = \frac{١}{٣}$ أو $ر = -\frac{١}{٣}$.

إذا كانت $ر = \frac{١}{٣}$

$جـ_{٦} = ٨ \times \frac{١ - (\frac{١}{٣})^{٦}}{١ - \frac{١}{٣}}$

$= ٨ \times \frac{١ - (\frac{١}{٣})^{٦}}{\frac{٢}{٣}}$

$= \frac{٢٩١٢}{٢٤٣} \simeq ١١,٩٨$

إذا كانت $ر = -\frac{١}{٣}$

$جـ_{٦} = ٨ \times \frac{١ - (-\frac{١}{٣})^{٦}}{١ - (-\frac{١}{٣})}$

$= ٨ \times \frac{١ - (-\frac{١}{٣})^{٦}}{\frac{٤}{٣}}$

$= \frac{١٤٥٦}{٢٤٣} \simeq ٥,٩٩٢$

رمز المجموع Summation Symbol

لكتابة مجموعة حدود المتتالية: $ب_{١} + ب_{٢} + ب_{٣} + ... + ب_{ن} + ... + ب_{ك}$

بطريقة مختصرة استخدم الرياضيون الحرف اليوناني Σ (سيغما) على الشكل التالي: $\sum_{ن=١}^{ك} ب_{ن}$

يقرأ: مجموع الأعداد $ب_{ن}$ من ن = ١ إلى ن = ك

فمثلًا، المجموع: $\frac{٥}{٢} \times (١) + \frac{٥}{٢} \times (٢) + \frac{٥}{٢} \times (٣) + ... + \frac{٥}{٢} \times (١٣)$ يكتب $\sum_{ن=١}^{١٣} \frac{٥}{٢} ن$.

الحد الأعلى أكبر قيمة لـ ن

$\sum_{ن=١}^{١٣} \frac{٥}{٢} ن$ ← الصيغة الصريحة للمتتالية

الحد الأدنى أصغر قيمة لـ ن

لكتابة: $١ + ٢ + ٣ + ٤ + ... + ٤٥$ نكتب $\sum_{ن=١}^{٤٥} ن$

لكتابة: $١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + ٤^{٢} + ... + ١٠^{٢}$ نكتب $\sum_{ن=١}^{١٠} ن^{٢}$

ملاحظة:

في دراستنا للمجموع Σ سنقتصر على الحالات التي تكون فيها ن تبدأ من العدد ١ حيث ن ∈ {١، ٢، ٣، ...} وهذا يمثل مجال المتتالية.

مثال (١٣)

١ أوجد قيمة $\sum_{ن=١}^{١٠٠} ن$.

الحل:

$\sum_{ن=١}^{١٠٠} ن = ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ... + ١٠٠$

(١، ٢، ٣، ... ، ١٠٠) متتالية حسابية حدها الأول ١ واساسها ١ وحدها الأخير $ح_{١٠٠} = ١٠٠$ لماذا؟

$\therefore \sum_{ن=١}^{١٠٠} ن = جـ_{١٠٠}$

وحيث إن $جـ_{ن} = \frac{ن}{٢} (ح_{١} + ح_{ن})$

$جـ_{١٠٠} = \frac{١٠٠}{٢} (١ + ١٠٠)$

$جـ_{١٠٠} = \frac{١٠١ \times ١٠٠}{٢} = ٥٠٥٠$

٨ $أ^{٢} = ٨,٨ \times ٩,٢ = ٨٠,٩٦$

$أ \simeq ٩$ أمتار

٩ $١٠٢٤ = ٢ \times ر^{٩}$

$ر^{٩} = ٥١٢$، $ر = ٢$

الأوساط الهندسية هي: ٤، ٨، ١٦، ٣٢، ٦٤، ١٢٨، ٢٥٦، ٥١٢.

ملاحظة: إدخال عدد فردي من الأوساط الهندسية فيوجد في هذه الحالة حلان وإذا كان المطلوب إدخال أوساط هندسية عددها زوجي فيوجد حل واحد.

١٠ الأساس: $\frac{٩}{٣} = ٣$

$جـ_{٨} = ٣ \times \frac{١ - ٣^{٨}}{١ - ٣}$

$جـ_{٨} = ٣ \times \frac{١ - ٦٥٦١}{٢} = ٩٨٤٠$

١١ الأساس: $ر = \frac{١}{٢}$ أو $ر = -\frac{١}{٢}$

$جـ_{١٠} = ٤ \times \frac{١ - \left(\frac{١}{٢}\right)^{١٠}}{١ - \frac{١}{٢}}$

$جـ_{١٠} = ٧,٩٩٢١٨٧٥ \simeq ٨$

حاول أن تحل

١٣ أوجد قيمة: $\sum_{ن=١}^{٤٥} ن$

تعميم

مجموع الأعداد الصحيحة الموجبة الأولى التي عددها ن $= \frac{ن \times (ن + ١)}{٢}$

لاحظ أن $\sum_{ن=١}^{٤٥} ن = \frac{٤٥ \times ٤٦}{٢} = ١٠٣٥$

مثال (١٤)

أوجد قيمة $\sum_{ن=١}^{١٣} \frac{٥}{٢} ن$.

الحل:

$$\sum_{ن=١}^{١٣} \frac{٥}{٢} ن = \frac{٥}{٢} \times (١) + \frac{٥}{٢} \times (٢) + \frac{٥}{٢} \times (٣) + ... + \frac{٥}{٢} \times (١٣)$$

$$= \frac{٥}{٢} \times (١ + ٢ + ٣ + ... + ١٣)$$

$$= \frac{٥}{٢} \times \frac{١٤ \times ١٣}{٢}$$

$$= ٢٢٧,٥$$

حاول أن تحل

١٤ أوجد قيمة: $\sum_{ن=١}^{١٠} ٢ن$.

مثال (١٥)

أوجد قيمة $\sum_{ن=١}^{٥} (٦ن - ٤)$

الحل:

نفرض $ح_{ن} = ٦ن - ٤$ هي الصيغة الصريحة للمتتالية.

فيكون $ح_{ن+١} = ٦(ن + ١) - ٤$

$= ٦ن + ٢$

$\therefore ح_{ن+١} - ح_{ن} = (٦ن + ٢) - (٦ن - ٤)$

$= ٦$

= مقدارًا ثابتًا

$\therefore$ المتتالية $(ح_{ن})$ حيث $ح_{ن} = ٦ن - ٤$ متتالية حسابية أساسها ٦.

والمطلوب هو إيجاد مجموع ٩ حدود الأولى منها وهو $جـ_{٩}$.

$\therefore \sum_{ن=١}^{٥} (٦ن - ٤) = \frac{ن}{٢} [٢ح_{١} + (ن - ١)د]$

$= \frac{٩}{٢} [٢ \times ٢ + (٩ - ١) \times ٦]$

$= \frac{٩}{٢} \times ٥٢$

$= ٢٣٤$

حاول أن تحل

١٥ أوجد قيمة $= \sum_{ن=١}^{٥} (٣ن + ٥)$.

مثال (١٦)

أوجد قيمة $\sum_{ن=١}^{١٠} ٣^{ن}$

الحل:

الصيغة الصريحة للمتتالية: $ح_{ن} = ٣^{ن}$

$ح_{١٠} = ٣^{١٠}$

$\therefore \frac{ح_{١٠}}{ح_{ن}} = \frac{٣^{١٠}}{٣^{ن}} = ٣$ = مقدارًا ثابتًا

$\therefore$ المتتالية $(ح_{ن})$ حيث $ح_{ن} = ٣^{ن}$ متتالية هندسية حدها الأول ٣ وأساسها ٣.

وهي على الصورة (٣، ٩، ٢٧، ...)

والمطلوب إيجاد مجموع ٨ حدود الأولى للمتتالية الهندسية.

$\sum_{ن=١}^{٨} ٣^{ن} = ح_{١} \times \frac{ر^{ن} - ١}{ر - ١}$

$= ٣ \times \frac{٣^{٨} - ١}{٣ - ١} = ٩٨٤٠$

حاول أن تحل

١٦ أوجد قيمة $= \sum_{ن=١}^{١٠} ٢^{ن}$

KuwaitMath.com

$$\text{أ و ج}_{١٠} = ٤ \times \frac{١ - \left(-\frac{١}{٢}\right)^{١٠}}{١ - \left(-\frac{١}{٢}\right)}$$

$$\text{ج}_{١٠} = ٠,٦٦٦$$

١٢ $$\text{ج}_{٦} = ١٢٥٠ \times \frac{١ - (١,٢٥)^{٦}}{١ - ١,٢٥}$$

$$\text{ج}_{٦} = ١٤٠٧٣,٥$$

تستطيع القيام بالرحلة لأن المبلغ

$$١٣٧٥٠ < ١٤٠٧٣,٥$$

١٣ $$\sum_{ن=١}^{٨٠} = \frac{٨١ \times ٨٠}{٢} = ٣٢٤٠$$

١٤ $$\sum_{ن=١}^{١٠} (٢ن) = ٢ \times (١ + ٢ + \ldots + ١٠)$$

$$= ٢ \times ٥٥ = ١١٠$$

١٥ $$\sum_{ن=١}^{٨} (٣ن + ٥) = ٣(١ + ٢ + \ldots + ٨) + ٨ \times ٥$$

$$= ١٤٨$$

١٦ $$\sum_{ن=١}^{١٠} ٢^{ن} = ٢^{١} + ٢^{٢} + ٢^{٣} + \ldots + ٢^{١٠} = ٤٠٩٤$$

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

تمرَّنْ ٣-٥

المتتالية الهندسيّة
Geometric Sequence

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمارين (١-٤) هل المتتاليات الآتية هندسيّة؟ إذا كانت كذلك أوجد الأساس.

(١) (١، ٢، ٤، ٨، ١٦)

(٢) (١، -٢، ٤، -٨، ١٦)

(٣) (١، -١، ١، -١، ١)

(٤) $(١، \frac{١}{٢}، \frac{١}{٣}، \frac{١}{٤}، \frac{١}{٥})$

في التمارين (٥-٧) اكتب صيغة صريحة لكل متتالية هندسيّة. ثم اكتب الحدود الأربعة الأولى.

(٥) $\text{ح}_{ن} = ٥ \times (-٣)^{ن-١}$

(٦) $\text{ح}_{ن} = \frac{١}{٢} \times (\frac{٢}{٣})^{ن-١}$

(٧) $\text{ح}_{ن} = ١٠٠ \times (-٢٠)^{ن-١}$

في التمارين (٨-١٠) أوجد قيمة س في المتتالية الهندسيّة.

(٨) (٥، س، ٢٥، ٩١١,٥، ...)

(٩) $(\frac{٢}{٥}، س، \frac{٨}{٤٥}، \frac{١٦}{١٣٥})$

(١٠) (١٨٠، ٩٠، س، ٢٥٥، ...)

في التمارين (١١-١٣) حدّد ما إذا كانت المتتالية حسابيّة أم هندسيّة. ثم أوجد الحد التالي.

(١١) (٤٥، ٩٠، ١٨٠، ٣٦٠، □)

(١٢) (٣٠، ٣٥، ٤٠، ٤٥، □)

(١٣) (١٥، ١١، ٧، ٣، □)

في التمرينين (١٤- ١٥) في كل متتالية هندسيّة أوجد الحدود الناقصة □.

(١٤) (١٩٦٨٣، □، □، □، ٢٤٣)

(١٥) (٥, ٢، □، □، □، ٥, ٢٠٢)

في التمرينين (١٦، ١٧) في المتتالية الهندسيّة (٣، ١٢، ٤٨، ١٩٢، ...) أوجد:

(١٦) الحد الخامس.

(١٧) الحد النوني.

في التمارين (١٨-٢٠) أوجد الحد العاشر في كل متتالية هندسيّة.

(١٨) $\text{ح}_{١٠} = ٨، ر = \frac{١}{٢}$

(١٩) $\text{ح}_{١٠} = -٥، ر = -\frac{١}{٢}$

(٢٠) $\text{ح}_{١٠} = -\frac{١}{٣}، ر = \frac{١}{٢}$

(٢١) **الكتابة في الرياضيّات:** صف التشابه والاختلاف بين أساس المتتالية الحسابيّة وأساس المتتالية الهندسيّة.

*(٢٢) بفرض أن بالون منطاد يخسر في اليوم ربع الهيليوم الموجود فيه. كان حجم البالون ٥٠٠٠ سم^{٣}.

(أ) اكتب متتالية هندسيّة تبين حجم الهيليوم في البالون صباح كل يوم لخمسة أيّام.

(ب) ما أساس المتتالية؟

(جـ) كم سيكون حجم الهيليوم في البالون صباح اليوم العاشر؟ (مقربًا الإجابة لأقرب جزء من مائة)

(٢٣) أوجد الحد الأول $\text{ح}_{١}$ للمتتالية الهندسيّة حيث $\text{ح}_{٤} = ١١٢$، $\text{ح}_{٧} = ٤٤٨$.

(٢٤) أي متتالية هندسيّة لا تتضمن حدًّا قيمته ١٠٠.

(أ) (٥، ١٠، ٢٠، ...)

(ب) (٥, ٣٣٧، ٢٢٥، ١٥٠، ...)

(جـ) $\text{ح}_{١} = ٢٥، \text{ح}_{ن} = ٢\text{ح}_{ن-١}$

(د) $\text{ح}_{ن} = ٤ \times ٥^{ن}$

في التمارين (٢٥-٢٧) أوجد مجموع حدود المتتاليات الهندسيّة حيث:

(٢٥) $\text{ح}_{١} = ٣، ر = \frac{١}{٢}$ عدد الحدود = ٥

(٢٦) $\text{ح}_{١} = ١٧، ر = ٠,٩$ عدد الحدود = ٥

(٢٧) $\text{ح}_{١} = ٥٠، ر = ٠,٨$ عدد الحدود = ٩

في التمارين (٢٨-٣١) أوجد:

(٢٨) $\sum_{ن=١}^{٤٠} ٤ن$

(٢٩) $\sum_{ن=١}^{٢٠} (٢ - ن)$

(٣٠) $\sum_{ن=٥}^{١٠} (\frac{٣}{٢})^{ن-٥}$

(٣١) $\sum_{ن=١}^{٥} (-٢)^{ن}$

*(٣٢) بفرض أنك وضعت لنفسك خطّة لممارسة رياضة المشي تدريجيًّا، فإذا ابتدأت الخطة بممارسة رياضة المشي من المنزل بالسير كيلومترين يوميًّا لمدّة أسبوع، وأردت زيادة المسافة التي تمشيها يوميًّا $\frac{١}{٨}$ كم في الأسبوع التالي وهكذا:

أُحسب

(أ) المسافة التي تمشيها في الأسبوع العشرين.

(ب) المسافة التي تمشيها في الأسبوع الثلاثين.

(جـ) مجموع المسافات التي تمشيها في ٢٠ أسبوعًا.

*(٣٣) إذا كانت نهاية طرف رقّاص الساعة تتحرّك ٦٠ سم في كلّ مرّة في الذهاب، وفي كل مرّة تالية تقطع مسافة ٩٠٪ من المسافة السابقة:

أُحسب:

(أ) المسافة المقطوعة في الذهاب للمرة الرّابعة.

(ب) المسافة المقطوعة في الذهاب للمرّة الثامنة.

(جـ) المسافة المقطوعة في الذهاب للمرّة السادسة عشرة.

هل تتوقّع أن تصل المسافة إلى الصفر بعد عدد محدود من المرّات؟ (استخدم حاسبة الجيب)

المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمارين (١-٤) متتاليات هندسيّة أوجد الأساس والحد التالي.

(١) (١٠، ٢, ٥، ١, ٦، ٤, ٠، ٦٤، ...)

(٢) (٧، ٠, ٧، ٠, ٠٧، ٠, ٠، ...)

(٣) (١٨، −٦، ٢، $-\frac{٢}{٣}$، ...)

(٤) (−٢، ٢، −٢، ٢، ...)

في التمارين (٥-٧) اكتب صيغة صريحة لكل متتالية هندسيّة وفقًا للمعطيات. ثم اكتب الحدود الأربعة الأولى.

(٥) $ح_١ = ١$ $ر = ٠,٥$

(٦) $ح_١ = ١٠٢٤$ $ر = ٠,٥$

(٧) $ح_١ = ١٠$ $ر = -١$

في التمارين (٨-١٠) أوجد الحد الناقص □ في المتتالية الهندسيّة علمًا بأن الحدود موجبة.

(٨) (٣، □، ٠,٧٥، ...)

(٩) (٥، □، ٢,٨١٢٥، ...)

(١٠) (١٢، □، ٣، ...)

في التمارين (١١-١٣) حدّد ما إذا كانت المتتالية هندسيّة أو حسابيّة. ثم أوجد الحد التالي □.

(١١) (٢٥، ٥٠، ٧٥، ١٠٠، □)

(١٢) (−٥، ١٠، −٢٠، ٤٠، □)

(١٣) (٢، ٢، ٢، □)

في التمرينين (١٤ - ١٥) في كل متتالية هندسيّة أوجد الحدود الناقصة □ علمًا بأن الأساس موجب.

(١٤) (٥, ١٢، □، □، ١٢, ٥، ...)

(١٥) (−٤، □، □، □، −٣٢٤، ...)

في التمارين (١٦ - ١٧) لديك المتتالية الهندسيّة (٣، ١٢، ٤٨، ١٩٢، ...) أوجد:

(١٦) الحد السابع

(١٧) الحد السابع عشر

في التمارين (١٨-٢٠) أوجد الحد العاشر في كل متتالية هندسيّة.

(١٨) $ح_{١١} = ٨$، $ر = \frac{١}{٢}$

(١٩) $ح_{١١} = -٥$، $ر = \frac{١}{٢}$

(٢٠) $ح_{١١} = -\frac{١}{٣}$، $ر = \frac{١}{٢}$

(٢١) أوجد الحد الأول من المتتالية الهندسيّة حيث $ح_٤ = \frac{١}{٢}$، $ح_{١٢} = \frac{١}{١٦}$

*(٢٢) ما ناتج ضرب الوسط الهندسيّ السالب للعددين ٢، ٣٢ والوسط الهندسي السالب للعددين ١، ٤؟

(أ) −١٦ (ب) ١٦ (جـ) ٣٢ (د) ٢٥٦

في التمارين (٢٣-٢٥) أوجد مجموع حدود المتتاليات الهندسيّة حيث:

(٢٣) $ح_١ = ٤$، $ر = \frac{١}{٢}$ عدد الحدود = ٦

(٢٤) $ح_١ = ٢٠$، $ر = ٠,٤$ عدد الحدود = ٧

(٢٥) $ح_١ = ٧٠$، $ر = ١,٠$ عدد الحدود = ١٠

في التمارين (٢٦-٢٩) أوجد.

(٢٦) $\sum_{ن=١}^{١٢} (ن + ٢)$

(٢٧) $\sum_{ن=١}^{٨} (\frac{١}{٢})^{ن-١}$

(٢٨) $\sum_{ن=١}^{١٢} (٤ن + ١)$

(٢٩) $\sum_{ن=١}^{٨} (-٢ن + ١٥)$

*(٣٠) إذا كان عدد السكّان في إحدى البلدات التي اهتمّت بمشروع تنظيم النسل هذا العام ٥٣٧ ٢ نسمةً، وكان معدّل تزايد السكّان عن السنة السابقة ٠٢٥, ١:

(أ) اُكتب صيغة تعبّر عن تزايد السكان في هذه البلدة علمًا بأن معدّل التزايد ثابت في السنوات اللاحقة.

(ب) أوجد عدد السكّان المتوقّع في نهاية العام الرابع.

(جـ) أوجد عدد السكّان المتوقّع في نهاية السنة السادسة.

*(٣١) إذا أردت تكبير صورة عدّة مرّات بمقدار ١٥٠٪ كلّ مرة بالنسبة إلى المرّة السابقة، وإذا عرفت أن عرض الصورة ١٢ سم بعد أوّل تكبير:

(أ) أوجد عرض الصورة قبل التكبير.

(ب) أكتب صيغة تعبّر عن تكبير الصورة.

(جـ) أوجد عرض الصورة بعد ثالث تكبير.

اختبار الوحدة الخامسة

في التمرينين (١ - ٢) اكتب صيغة صريحة وصيغة ارتداديّة لكل متتالية ثم أوجد الحدّ التالي.

(١) (٧، ١٣، ١٩، ٢٥، ٣١، □)

(٢) (١٠، ٢٠، ٤٠، ٨٠، ١٦٠، □)

(٣) بعد شهر في عملك الجديد، استطعت توفير ٥٠ دينارًا. قرّرت أن توفر ٥ دنانير إضافية كل شهر.

(أ) اكتب صيغة صريحة تنمذج القيم التي توفرها كل شهر.

(ب) ما المبلغ الذي ستوفره في الشهر السادس؟

في التمارين (٤-٦) حدّد ما إذا كانت كل متتالية حسابيّة أو هندسيّة. ثم أوجد الحد العاشر، جـ١٠ الأولى.

(٤) (٢٣، ٢٧، ٣١، ٣٥، ٣٩، ...)

(٥) (−١٢، −٥، ٢، ٩، ١٦، ...)

(٦) (−٥، ١٥، −٤٥، ١٣٥، −٤٠٥، ...)

في التمرينين (٨ - ٧) أوجد الوسط الحسابيّ.

(٧) $ح_{٥-} = ٤$، $ح_{١٠+٥} = ١٢$

(٨) $ح_٨ = -١١$، $ح_{١٠} = ٢٣$

(٩) **السؤال المفتوح:** اكتب متتالية حسابيّة. ثم اكتب صيغة صريحة لها.

في التمارين (١٠-١٢) حدّد ما إذا كانت المتتالية حسابيّة أو هندسيّة. ثم أوجد أساسها.

(١٠) (١٦٢٠، ٥٤٠، ١٨٠، ٦٠، ٢٠، ...)

(١١) (٧٨، ٧٥، ٧٢، ٦٩، ٦٦، ...)

(١٢) ($\frac{٣}{٣٢}$، $\frac{٣}{١٦}$، $\frac{٣}{٨}$، $\frac{٣}{٤}$، $\frac{٣}{٢}$، ٣، ...)

في التمرينين (١٣ - ١٤) اكتب الحدود الخمسة الأولى في المتتالية الهندسيّة.

(١٣) $ح_١ = ٢$، $ر = -٢$

(١٤) $ح_{١٠٠} = -١٠٠$، $ر = \frac{١}{٥}$

في التمرينين (١٥ - ١٦) اكتب الحدود الخمسة الأولى في المتتالية الحسابيّة.

(١٥) $ح_١ = ٣$، $ع = ٧$

(١٦) $ح_١ = ١٩$، $ع = -٤$

KuwaitMath.com

في كل من التمرينين (١٧ – ١٨) أوجد الحد الناقص في □ للمتتالية الهندسية.

(١٧) (٢، □، ٠,٥، $\frac{١}{٤}$)

(١٨) (٢، □، ٨، ١٦)

في التمارين (١٩–٢١) مجموع لحدود متتالية حسابية أو هندسية. أوجد المجموع.

(١٩) ٢ + ٧ + ١٢ + ... + ح٨.

(٢٠) ٥٠٠٠ + ١٠٠٠ + ٢٠٠ + ... + ح١٥.

(٢١) ١ + ٠,٠١ – ٠,٩٨ – ... + ح٥.

في التمرينين (٢٢–٢٣) في كل مجموع أوجد عدد الحدود، والحد الأول والحد الأخير ثم أوجد المجموع.

(٢٢) $\sum_{ن=٥}^{٥٠}$ (٣ن + ١)

(٢٣) $\sum_{١}^{٥}$ ٢(٣)$^{ن-١}$

* (٢٤) يبلغ سعر ألماسة ٢ ٥٠٠ دينار. بفرض أن قيمتها تزيد ٥٪ سنويًا. كم سيصبح سعر الألماسة بعد ٨ سنوات؟

* (٢٥) إذا كانت ٦، س، ... ، ٤س – ٣، ٣٦ متتالية حسابية فإن س تساوي:

(أ) ٣٣ (ب) ١٢ (جـ) ٩ (د) ٢١

* (٢٦) أراد نبيل أن يدخر مبلغًا من المال لحين إحالته لسن التقاعد بعد ٢٠ سنةً، فبدأ بمبلغ ١ ٢٠٠ دينار في السنة الأولى، وأراد أن يزيد المبلغ الذي يوفّره كل سنةٍ ١٠٠ دينار عن السنة السابقة لها. أحسبْ:

(أ) المبلغ الذي يوفّره في السنة العاشرة.

(ب) المبلغ الذي يوفّره في السنة الخامسة عشرة.

(جـ) المبلغ الذي يوفّره في السنة السابقة على التقاعد.

(د) مجموع المبالغ التي وفّرها.

(هـ) أعد الأسئلة (أ)، (ب)، (جـ)، (د) السابقة إذا أراد نبيل أن يزيد المبلغ الذي سيوفره كل سنة ١٥٪ عن السنة السابقة لها.

(٢٧) أدخل خمسة أوساط هندسيّة بين العددين $\frac{١}{٣}$، ٢٤٣.

(٢٨) أدخل ستة أوساط هندسيّة بين العددين $-\frac{١}{٢}$، –٦٤.

(٢٩) أدخل سبعة أوساط حسابيّة بين العددين ٣، ٥٩.

تمارين إثرائيّة

(١) (ح$_ن$) متتالية حسابيّة حيث إن: ح$_{١٠}$ + ح$_{١٢}$ + ح$_{١٤}$ = ٣٣، ح$_{١٠٠}$ = ٥٥. أوجد الحد الأول ح$_١$ والأساس ﻫ.

(٢) (ح$_ن$) متتالية هندسيّة جميع حدودها قيم سالبة وأساسها قيمة موجبة حيث إن: ح$_١$ × ح$_٣$ = $\frac{٤}{٩}$، ح$_١$ + ح$_٢$ + ح$_٣$ = – $\frac{١٩}{٩}$

أوجد الحد الأول ح$_١$ والأساس ﻫ.

(٣) أوجد ثلاثة أعداد حقيقية أ، ب، جـ تشكل على الترتيب متتالية حسابيّة حيث إن:

أ + ب + جـ = ٣٩؛ أ^٢ + ب^٢ + جـ^٢ = ٥٢٥.

(٤) أوجد ثلاثة أعداد حقيقية أ، ب، جـ تشكل على الترتيب متتالية هندسيّة حيث إن:

أ + ب + جـ = ٢١؛ ٢ أ + ب – جـ = ٢٧.

(٥) (ح$_ن$) متتالية معرفة بصيغة ارتدادية كما يلي: لكل ن ≥ ١.

ح$_{ن+١}$ = ٢ح$_ن$ + ٦، ح$_١$ = ٢.

(أ) أوجد قيم ح$_٢$ ، ح$_٣$ ، ح$_٤$.

(ب) لكل ن ≥ ١ نأخذ المتتالية (ع$_ن$) معرفة بصيغة ارتدادية كما يلي: ع$_ن$ = ح$_ن$ + ٦.

١. أوجد قيم ع$_١$ ، ع$_٢$ ، ع$_٣$ ، ع$_٤$.

٢. أثبت أن $\frac{ع_{ن+١}}{ع_ن}$ قيمة ثابتة لكل قيم ن ≥ ١. استنتج أن (ع$_ن$) هي متتالية هندسيّة حدها الأول ع$_١$ وأساسها قيمة ثابتة.

(جـ) أوجد الحد النوني ع$_ن$ بدلالة ن فقط.

(د) استنتج الحد النوني ح$_ن$ بدلالة ن فقط.

KuwaitMath.com

المرشد لحل المسائل

إجابة «مسألة إضافية»

٣ أبعاد المستطيل (١) $أ$، $أ + ٣ء$

أبعاد المستطيل (٢) $أ + ء$، $أ + ٢ء$

مساحة المستطيل (١) $= أ(أ + ٣ء) = أ^{٢} + ٣أء$

مساحة المستطيل (٢) $= (أ + ء)(أ + ٢ء)$

$= أ^{٢} + ٣أء + ٢ء^{٢}$

مساحة المستطيل (٢) – مساحة المستطيل (١) $= ٢ء^{٢}$

أي كمية ثابتة غير سالبة: مساحة المستطيل (٢) ≥ مساحة المستطيل (١)

إجابة «تفكير منطقي»

٤ (أ) $م_{١} = \frac{١}{٢} \times (١)^{٢}\pi - \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}\pi \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٨}\pi$

$م_{٢} = \frac{١}{٢}\left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢}\pi - \frac{١}{٢} \times (٢)^{٢}\pi(١) = \frac{٥}{٨}\pi$

$م_{٣} = \frac{١}{٢} \times (٢)^{٢}\pi - \frac{١}{٢}\left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢}\pi \times \frac{١}{٢} = \frac{٧}{٨}\pi$

$م_{٢} - م_{١} = \frac{١}{٤}\pi$ $\quad م_{٣} - م_{١} = \frac{١}{٤}\pi$

نستنتج: $م_{ن} = \frac{١}{٢}\left(\frac{ن + ١}{٢}\right)^{٢}\pi - \frac{١}{٢}\left(\frac{ن}{٢}\right)^{٢}\pi = \frac{٢ن + ١}{٢}\pi$

$م_{ن} - م_{ن-١} = \left(\pi \times \frac{١ + (ن - ١)٢}{٨} - \pi \frac{٢ن + ١}{٨}\right)$

$= \frac{\pi}{٤}$

لذا تشكل هذه المساحات متتالية حسابية

(ب) باستخدام القاعدة:

$جـ_{١٠} = \frac{١٠}{٢}\left[٢ \times \frac{\pi٣}{٢} + \frac{١}{٤}\pi \times ٩\right]$

$جـ_{١٠} = ٥(\pi٣) = \pi١٥$

طريقة ثانية:

$جـ_{١٠}$ = مساحة نصف الدائرة التي طول قطرها ١١ – مساحة نصف الدائرة التي طول قطرها ١.

$= \frac{١}{٢} \times \pi \times \left(\frac{١١}{٢}\right)^{٢} - \pi \times \frac{١}{٢}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$

$= \pi١٥$

المرشد لحل المسائل

١ إذا كانت الأعداد $أ$، ب، جـ، هـ، على هذا الترتيب تمثل أبعاد المستطيلين (١)، (٢) كما في الشكل.

أ قارن بين مساحتي المستطيلين (١)، (٢). إذا كانت هذه الأعداد بنفس الترتيب تمثّل الحدود الأربعة الأولى من متتالية هندسية أساسها ر.

ب قارن بين محيطي المستطيلين (١)، (٢). إذا كانت هذه الأعداد بنفس الترتيب تمثّل الحدود الأربعة الأولى من متتالية حسابية أساسها ء.

٢ **كيف نفكر في حل المسألة**

أ في المتتالية الهندسية كل حد يساوي الحد الذي يسبقه مضروبًا في الأساس ر.

∴ ب = $أ$ر، جـ = ب ر = $أ$ر^{٢}، هـ = جـ ر = $أ$ر^{٣}

مساحة المستطيل = الطول × العرض

ومنه مساحة المستطيل (١) = $أ$ × هـ = $أ$ × $أ$ر^{٣} = $أ^{٢}$ر^{٣}

مساحة المستطيل (٢) = ب × جـ = $أ$ر × $أ$ر^{٢} = $أ^{٢}$ر^{٣}

الاستنتاج: وهكذا نستنتج أن مساحتي المستطيلين متساويتان.

ب بما أن المتتالية حسابية أساسها ء فإن ب = $أ$ + ء، جـ = ب + ء = $أ$ + ٢ء، هـ = جـ + ء = $أ$ + ٣ء

محيط المستطيل (١) = ٢ × ($أ$ + هـ) = ٢ × ($أ$ + $أ$ + ٣ء) = ٤$أ$ + ٦ء

محيط المستطيل (٢) = ٢ × (ب + جـ) = ٢ × ($أ$ + ء + $أ$ + ٢ء) = ٤$أ$ + ٦ء

الاستنتاج: للمستطيلين المحيط نفسه.

٣ **مسألة إضافية**

قارن بين مساحتي المستطيلين (١)، (٢) في الحالة (ب).

* ٤ **تفكير منطقي**

في الشكل المقابل، تمثل $م_{١}$، $م_{٢}$، ...، $م_{ن}$ المساحات المحصورة بين أنصاف الدوائر.

أ أثبت أن المتتالية ($م_{١}$، $م_{٢}$، ...، $م_{ن}$) حسابية.

ب احسب بطريقتين مختلفتين المجموع: $جـ_{١٠} = م_{١١} + م_{٢} + ... + م_{١٠}$.

٢١٢

مخطط تنظيمي للوحدة الخامسة

ملخص

– تعرّف الصيغة الارتدادية حدود المتتالية بربط كل حد بالحد (أو بالحدود) الذي يسبقه مباشرة.

– تعبر الصيغة الصريحة عن الحد النوني بدلالة ن.

– متتالية فيوناتشي: ف$_{ن}$ = ف$_{ن-١}$ + ف$_{ن-٢}$ مع ف$_{١}$ = ف$_{٢}$ = ١.

– في المتتالية الحسابية يكون الفرق بين كل حد والحد السابق له عددًا ثابتًا يسمى أساس المتتالية: ح$_{ن+١}$ = ح$_{ن}$ + د.

– الحد النوني للمتتالية الحسابية: ح$_{ن}$ = ح$_{ك}$ + (ن – ك)د.

– إذا كونت أ، ب، جـ متتالية حسابية، فإن ب = $\frac{أ + جـ}{٢}$. ب هو الوسط الحسابي لـ أ، جـ.

– مجموع n حدًا الأولى من حدود متتالية حسابية: جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ (ح$_{١}$ + ح$_{ن}$).

– في المتتالية الهندسية إن ناتج قسمة أي حد فيها على الحد السابق له مباشرة يساوي عددًا ثابتًا يسمى أساس المتتالية الهندسية ح$_{ن+١}$ = ح$_{ن}$ × ر أساس المتتالية الهندسية.

– مجموع ن حد الأولى من حدود متتالية هندسية: جـ$_{ن}$ = ح$_{١}$ × $\frac{ر^{ن} - ١}{ر - ١}$ = ح$_{١}$ × $\frac{١ - ر^{ن}}{١ - ر}$ حيث ر ≠ ١

– إذا كونت أ، ب، جـ متتالية هندسية فإن ب^{٢} = أ × جـ. ب هو الوسط الهندسي لـ أ، جـ وهو يساوي $\sqrt{أجـ}$ أو $-\sqrt{أجـ}$.

٢١٣

KuwaitMath.com