الوحدة الثانية: وحدة حساب المثلثات

Trigonometry

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

مقدمة الوحدة


الوحدة
الثانية

وحدة حساب المثلثات
Trigonometry

مشروع الوحدة: صنع المميال (Clinometer) واستخدامه.

١ مقدمة المشروع: كيف لنا أن نعرف كم تبعد الشمس عنا من دون أن نمد أشرطة القياس لملايين الكيلومترات؟
كيف نعرف كتلة إلكترون عندما لا نستطيع أن نراه؟
أوجد الإنسان منذ القدم طرقًا للقياس غير المباشر عندما عجز عن القياس المباشر.

٢ الهدف: صنع آلة مشابهة للآلات التي استخدمها علماء الفلك الأقدمون والرحّالة لقياس ارتفاعات لا يمكن بلوغها.

٣ اللوازم: منقلة، سلك، شريط لاصق، قطعة من الورق المقوّى، مصّاصة شرب.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ انظر من خلال مصّاصة الشرب إلى الهدف الذي تريد قياسه (رأس برج مثلًا).
واطلب إلى أحد طلاب مجموعتك قراءة الزاوية بين المنقلة والخيط المتدلي عموديًّا مع المفتاح.
لماذا تساوي هذه الزاوية زاوية المصّاصة مع خطّ الأفق؟
(الزاوية ١ في الرسم).

ب استخدم آلة المميال لقياس حساب زاوية ارتفاع بناء مدرستك مثلًا؛ وأوجد المسافة الأفقية بينك وبين البناء ثم احسب ارتفاع البناء.

جـ تختار المجموعة بعض المباني أو الأشياء الأخرى الموجودة في المدرسة أو في جوارها ثم يصار إلى قياس ارتفاعات هذه الأشياء من مسافات مختلفة.

٥ التقرير: تضع كل مجموعة تقريرًا مفصلًا حول كيفية صنع المميال وكيفية استخدامه للإجابة عن الأسئلة (أ)، (ب)، (جـ).

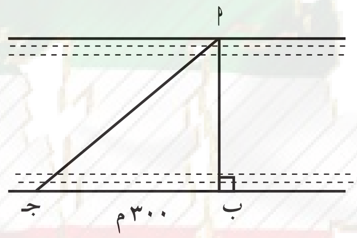
دروس الوحدة

الزوايا وقياساتها	النسب المثلثية: الجيب وجيب التمام ومقلوباتهما	ظل الزاوية ومقلوبه	النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة	حل المثلث القائم الزاوية
٢-١	٢-٢	٢-٣	٢-٤	٢-٥
زوايا الارتفاع والانخفاض	القطاع الدائري والقطعة الدائرية			
٢-٦	٢-٧			

٧٠

مشروع للتفكير

سوف يتعرف الطلاب إلى موضوع «حساب المثلثات» بعمق وتركيز؛ لذا يجب إعطاء فكرة عامة عن هذا العلم أو الفرع من الرياضيات. دعهم يقرأون فقرة «**أضف إلى معلوماتك**» في كتاب الطالب، ثم أكد لهم أن الكثير من الأفكار المتعلقة بحساب المثلثات نشأت أصلًا من مشكلات تتضمن عمل قياسات لمسافات أو زوايا بطرائق غير مباشرة، أي من دون استخدام أداة للقياس. مثلًا: إيجاد عرض نهر عند موقع معين (من دون استخدام شريط قياس ومده بين نقطتين متقابلتين على ضفتي النهر) وذلك لإقامة جسر فوقه عند هذا الموقع. اسأل الطلاب: ماذا يفعلون لو كانوا مهندسين لإيجاد أب.



مثلًا: نرسم طولًا معينًا $\overline{\text{ب جـ}}$ بزاوية قائمة على الشاطئ حيث نقطة ب.
و يمكن قياس الزاوية أ جـ ب بأحد الأجهزة ولتكن ٦٠°. كيف يمكن الحصول على أب؟

أحد الحلول: رسم مثلث قائم الزاوية أ′جـ′ب′ مشابه للمثلث أ جـ ب بقياسات صغيرة، ثم قياس أ′ب′ واستخدام فكرة مقياس الرسم لإيجاد أب.

اذكر لهم أن حساب المثلثات يحل لنا مثل هذه المشكلة. وفي معظم الحالات، نستخدم المثلث قائم الزاوية كما نرى في هذه الوحدة.

إرشادات توجيهية للطلاب:

اسأل الطلاب إعطاء بعض الأمثلة حول المسافات التي لا يمكن قياسها مباشرة، كالمسافة بين الأرض والمريخ والمسافة بين مركز الأرض وسطحها.

اسألهم أيضًا وصف بعض المجالات حيث تستخدم القياسات غير المباشرة. يمكن للأمثلة أن تشمل مساحة الأراضي أو علم الفلك أو علم البحار.

شجّع الطلاب على حفظ كل المعدات وكل ما يتعلق بالمشروع في ملف خاص. ذكّر الطلاب كيف يمكن للرياضيات أن تزيد من قدرتهم على قياس أشياء خارج محيطهم الفيزيائي.

من المستحسن وضع خطة للمشروع. بينما يتشارك الطلاب في إتمام أعمالهم، شجّع المجموعات على شرح الوسائل المستخدمة.

في السؤال (أ) يمكن تقديم المساعدة: الخيط هو دائمًا متعامد مع خط الأفق.

عندما يتقدّم الطلاب بمشروعهم، اسأل كل طالب ماذا فعل وماذا قاس. اسأل الطلاب أن يشرحوا كيفية استخدام الآلة والصعوبات التي واجهتهم عند تنفيذ المشروع.

الوحدة الثانية

اين انت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت كيفية استخدام نظرية فيثاغورث لإيجاد طول أحد أضلاع مثلث قائم الزاوية وإيجاد علاقة بين أطوال أضلاع مثلثات قائمة الزاوية في حالات خاصة، وتطبيق نظرية فيثاغورث على مسائل حياتية.
- تعلمت كيفية إثبات تشابه مثلثات واستنتاج أطوال الأضلاع المتناسبة والزوايا المتساوية القياس.
- استخدمت تشابه المثلثات في حل مسائل حياتية.
- تعلمت تطابق المثلثات واستنتجت تطابق الأضلاع المتناظرة والزوايا المتساوية القياس.

ماذا سوف تتعلم؟

- سوف تتعرف الزاوية الموجهة لتستنتج الزاوية الموجهة الموجبة والزاوية الموجهة السالبة والزاوية الموجهة في الوضع القياسي.
- سوف تتعرف القياس الستيني والقياس الدائري والعلاقة بينهما.
- سوف تستخدم تشابه المثلثات القائمة لتعريف النسب المثلثية.
- سوف تستخدم النسب المثلثية لتحل مسائل حياتية تتضمن إيجاد ارتفاعات ومسافات وزوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض.
- سوف تستخدم النسب المثلثية لإيجاد مساحة المثلث بدلالة ضلعين والزاوية المحصورة بينهما وإيجاد مساحة القطاع الدائري ومساحة القطعة الدائرية.

المصطلحات الأساسية

زاوية موجهة - زاوية موجهة موجبة - زاوية موجهة سالبة - زاوية موجهة في الوضع القياسي - قياس ستيني - قياس دائري - جيب الزاوية - جيب تمام الزاوية - قاطع الزاوية - قاطع تمام الزاوية - ظل الزاوية - ظل تمام الزاوية - زاوية الارتفاع - زاوية الانخفاض - القطاع الدائري - القطعة الدائرية.

أضف إلى معلوماتك

يذكر بعض المؤرخين أن الرياضي العربي نصير الدين الطوسي هو أول من فصل حساب المثلثات عن الفلك، كما يذكر المؤرخون أن طاليس (٦٠٠ قبل الميلاد) تطرق إلى حساب المثلثات، عندما تمكن من قياس ارتفاع الهرم عن طريق المقارنة بين طول عصًا عمودية وطول ظلها وبين ارتفاع الهرم وطول ظله في الوقت نفسه.

ولقد كان لحساب المثلثات نصيبه من اهتمامات العرب. ويذكر أن اصطلاح «الظل» قد وصفه العالم العربي أبو الوفا البوزجاني في القرن العاشر الميلادي. وهذا الاصطلاح مأخوذ من ظلال الأجسام، التي تتكون نتيجة سير الضوء المنبعث من الشمس في خطوط مستقيمة.

كما أن للعرب إضافات عديدة في حساب المثلثات المستوي والكري أو الكروي (نسبة إلى سطح الكرة)، وعنهم أخذ الغربيون المعلومات المهمة وأضافوا أيضًا الكثير، حتى أصبح حساب المثلثات متضمنًا في الكثير من الأبحاث الرياضية، وأصبحت تطبيقاته في شتى المناحي العلمية والعملية.

نصير الدين الطوسي

٧١

سلّم التقييم:

٤.	يعرض الطالب المشروع بشكل كامل. يتعامل مع آلية قياس الميل ويقترح تحسين آدائها. يعطي القياسات والحسابات والأشكال والشروح كلّها بأسلوب منظم ودقيق وواضح.
٣.	يعرض الطالب المشروع بشكل كامل. يتعامل مع آلة قياس الميل ويساهم في تحسين آدائها. يقدم معظم القياسات والحسابات والأشكال والشروح مرتكبًا أخطاءً قليلة، ولكنها معروضة بأسلوب منظم.
٢.	يعرض الطالب المشروع بشكل كامل. يتعامل مع آلة قياس الميل ويقترح تحسين آدائها، يقدم القياسات والحسابات والأشكال والشروح مرتكبًا أخطاء كثيرة، كما أنها معروضة بأسلوب غير منظم.
١.	معظم العناصر في المشروع غير كاملة أو ناقصة.

٢ـ١: الزوايا وقياساتها

١ الأهداف

- يتعرف الزاوية الموجهة الموجبة والسالبة.
- يتعرف الزاوية الموجهة في الوضع القياسي.
- يتعرف الزاوية الربعية والزاوية النصف قطرية.
- يتعرف أنظمة قياس الزاوية: الستيني والدائري ويحول بينهما.
- يحول بين الدرجات والدقائق والثواني.
- يوجد طول القوس.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

الزاوية الموجهة – الزاوية الموجهة الموجبة – الزاوية الموجهة السالبة – الزاوية الموجهة في الوضع القياسي – الزاوية الربعية – القياس الستيني – القياس الدائري – طول القوس – الزاوية النصف قطرية.

٣ الأدوات والوسائل

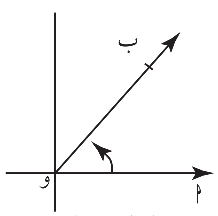
مسطرة مدرجة – منقلة – فرجار – آلة حاسبة.

٤ التمهيد

اسأل الطلاب: كيف نجد محيط الدائرة ومساحتها.
ذكّرهم بعقارب الساعة ودورانها: تحديد الاتجاه السالب والاتجاه الموجب. أشر إلى أن حركة دوران الأرض حول محورها هي عكس دوران عقارب الساعة، وأن حركة دوران الأرض اعتمدت على أنها الاتجاه الموجب لقياس الزوايا.
تناقش معهم حول أجزاء الساعة: الدقيقة والثانية. اعرض ملصقات لأشكال تحوي زوايا في أوضاع مختلفة، ودعهم يقرأونها، ثم دع الطلاب يشكلون بضلعي فرجار زوايا حادة، قائمة، منفرجة.

٥ التدريس

(١) الزاوية وقياسها: على ورقة مربعات ومستوى إحداثي، اصنع زوايا بحيث يكون رأسها عند نقطة الأصل، وأحد أضلاعها على امتداد الاتجاه الموجب لمحور السينات، والضلع الآخر في مواضع مختلفة.



زاوية موجهة

٢ – ١

الزوايا وقياساتها
Angles and their Measurement

سوف تتعلم
- الزاوية الموجهة
- الزاوية الموجهة الموجبة
- الزاوية الموجهة السالبة
- الزاوية في الوضع القياسي
- أنظمة قياس الزاوية
- القياس الستيني
  – أجزاء الدرجة
- القياس الدائري
  – طول القوس
  – الزاوية النصف قطرية
- العلاقة بين القياسين الدائري والستيني

دعنا نفكر ونتناقش

١ – الزاوية: Angle
تعلمنا سابقًا أن الزاوية هي **اتحاد شعاعين لهما نقطة بداية واحدة تسمى «رأس الزاوية»، والشعاعان هما ضلعا الزاوية.**

الزاوية الموجهة Oriented Angle
في الشكل المقابل، رأس الزاوية هو نقطة و، وضلعا الزاوية هما وأ، وب ونرمز للزاوية بالرمز: أوب وتسمى الزاوية في هذه الحالة بالزاوية الموجهة ويرمز لها أيضًا (وأ، وب) ويسمى وأ الضلع الأساسي أو الضلع الابتدائي، وب الضلع النهائي لها.

الزاوية الموجهة الموجبة: The Positive Oriented Angle
إذا كان الضلع الابتدائي هو وأ والضلع النهائي لها هو وب كما في الشكل المقابل، فإن قياس الزاوية في هذه الحالة يكون موجبًا.

الزاوية الموجهة السالبة: The Negative Oriented Angle
إذا كان الضلع الابتدائي هو وأ والضلع النهائي هو وب كما في الشكل المقابل، فإن قياس الزاوية في هذه الحالة يكون سالبًا.

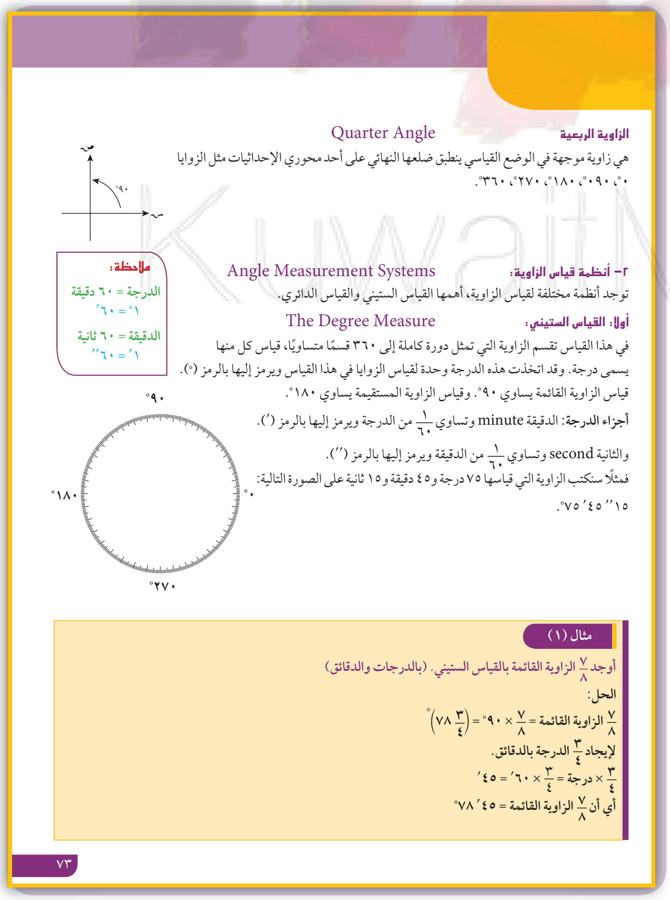
تكون الزاوية الموجهة موجبة إذا كان الانتقال من الضلع الابتدائي وأ إلى الضلع النهائي وب عكس اتجاه دوران عقارب الساعة، وتكون سالبة إذا كان الانتقال من وأ إلى وب مع اتجاه دوران عقارب الساعة.

الزاوية الموجهة في الوضع القياسي: The Angle in the Standard Position
تكون الزاوية الموجهة في الوضع القياسي إذا كان الضلع الابتدائي لها ينطبق على الجزء الموجب من محور السينات ورأسها نقطة الأصل كما في الشكل المقابل.

في الأشكال التالية:
أ) سمّ الضلع الابتدائي والضلع النهائي، واذكر إذا كان قياس الزاوية سالبًا أو موجبًا.
ب) حدّد الزوايا الموجهة التي في وضع قياسي.

(١) (٢) (٣) (٤)

٧٢



الزاوية الربعية Quarter Angle
هي زاوية موجهة في الوضع القياسي ينطبق ضلعها النهائي على أحد محوري الإحداثيات مثل الزوايا ٠°، ٩٠°، ١٨٠°، ٢٧٠°، ٣٦٠°.

٢– أنظمة قياس الزاوية: Angle Measurement Systems
توجد أنظمة مختلفة لقياس الزاوية، أهمها القياس الستيني والقياس الدائري.

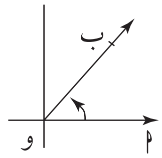
أولاً: القياس الستيني: The Degree Measure
في هذا القياس تقسم الزاوية التي تمثل دورة كاملة إلى ٣٦٠ قسمًا متساويًا، قياس كل منها يسمى درجة. وقد اتخذت هذه الدرجة وحدة لقياس الزوايا في هذا القياس ويرمز إليها بالرمز (°).
قياس الزاوية القائمة يساوي ٩٠°. وقياس الزاوية المستقيمة يساوي ١٨٠°.
أجزاء الدرجة: الدقيقة minute وتساوي $\frac{١}{٦٠}$ من الدرجة ويرمز إليها بالرمز (′).
والثانية second وتساوي $\frac{١}{٦٠}$ من الدقيقة ويرمز إليها بالرمز (″).
فمثلًا سنكتب الزاوية التي قياسها ٧٥ درجة و٤٥ دقيقة و١٥ ثانية على الصورة التالية: ٧٥° ٤٥′ ١٥″.

ملاحظة:
الدرجة = ٦٠ دقيقة
١° = ٦٠′
الدقيقة = ٦٠ ثانية
١′ = ٦٠″

٩٠° ١٨٠° ٠° ٢٧٠°

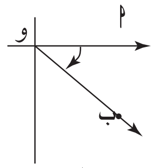
مثال (١)
أوجد $\frac{٧}{٨}$ الزاوية القائمة بالقياس الستيني. (بالدرجات والدقائق)
الحل:
$\frac{٧}{٨}$ الزاوية القائمة = $\frac{٧}{٨}$ × ٩٠° = $(٧٨\ \frac{٣}{٤})°$
لإيجاد $\frac{٣}{٤}$ الدرجة بالدقائق.
$\frac{٣}{٤}$ × درجة = $\frac{٣}{٤}$ × ٦٠′ = ٤٥′
أي أن $\frac{٧}{٨}$ الزاوية القائمة = ٧٨° ٤٥′

٧٣



زاوية موجبة

- عرف الوضع القياسي للزاوية والضلع الابتدائي لها (وليكن $\overleftarrow{و ا}$) والضلع النهائي (وليكن $\overleftarrow{و ب}$) في أوضاع مختلفة، ثمّ وضح الزاوية الموجبة والزاوية السالبة.



زاوية سالبة

- اطلب إليهم رسم زوايا في أوضاع قياسية حادة موجبة وحادة سالبة ومنفرجة موجبة، ... إلخ.
- ذكر الطلاب بالقياس الستيني والمنقلة التي نقيس بها الزوايا والدرجة، وقياسات مختلفة: قائمة، مستقيمة.

(٢) **القياس الستيني**: استخدام الآلة الحاسبة في التعبير عن قياسات زوايا بالدرجات والدقائق والعكس بالعكس.

نبه إلى أن الزاوية يمكن أن تأخذ قياسات من ٠° إلى ٣٦٠° في حالة دورة الضلع النهائي دورة كاملة (عكس اتجاه دوران عقارب الساعة) ويمكن أن يزداد قياس الزاوية بمزيد من الدورات.

- يمكن أن تربط قياس الزاوية الموجبة بقياس الزاوية السالبة، مثلًا: −٣٠٠°، ٦٠°.
- يمكن ربط قياس الزاوية بقياس الزاوية المضافة إليها دورات كاملة. مثلًا: ... ٣٦٠° + ٦٠°، ٦٠°.
- لا تسهب في شرح هذا الجزء، بل اجعله نشاطًا وحوارًا مع الطلاب على الشكل التالي:

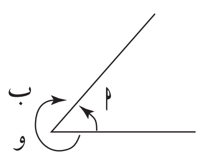
ارسم الضلع النهائي للزوايا: ٣٠°، ٣٩٠°، ٧٥٠°، −٣٠°، −٣٣٠°، −٣٩٠°.

أشر إلى أنه بعد الثواني نستخدم الأجزاء من مئة من الثانية، بخاصة في المباريات الرياضية.

تطبيق حياتي

ناقش مع الطلاب المثال التالي: في ميدان دائري، دارت سيارة ثلاث دورات وربع الدورة بالاتجاه الموجب ثم توقفت. أوجد قياس الزاوية (٣ × ٣٦٠° + ٩٠°).

تابعت السيارة سيرها ودارت دورتين، أوجد قياس الزاوية (٥ × ٣٦٠° + ٩٠°). افترض أن السيارة تراجعت دورة كاملة، فأصبح قياس زاويتها ٤ × ٣٦٠° + ٩٠°.



لاحظ أن نقطة توقف السيارة لم تتغير.

حاول أن تحل

١ اكتب كلًّا مما يلي بالقياس الستيني.

أ $\frac{٧}{٣٢}$ الزاوية القائمة ب ٠,٦٢٥ الزاوية القائمة

مثال (٢)

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد $\frac{٥}{١١}$ الزاوية المستقيمة بالقياس الستيني (بالدرجات والدقائق والثواني والأجزاء من مئة من الثانية).

الحل:

$\frac{٥}{١١}$ الزاوية المستقيمة = $\frac{٥}{١١}$ × ١٨٠°

باستخدام الآلة الحاسبة:

5 ÷ 11 × 180 °‚‚‚ =

فيظهر على الشاشة 81° 49′ 5.45″

أي ٨١ درجة و٤٩ دقيقة و٥ ثوانٍ و٤٥ جزءًا من مئة من الثانية.

حاول أن تحل

٢ استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد $\frac{٣}{٧}$ الزاوية المستقيمة بالقياس الستيني.

ثانيا: القياس الدائري (الراديان): The Radian Measure

الزاوية المركزية زاوية رأسها مركز الدائرة.

ضلعا هذه الزاوية المركزية يقطعان الدائرة في نقطتين ا، ب.

طول القوس $\overset{\frown}{اب}$ هو المسافة على الدائرة بين النقطتين ا، ب.

ملاحظة: يتشكل من تقاطع ضلعي الزاوية المركزية مع الدائرة قوسان: القوس الأصغر $\overset{\frown}{اب}$ (باللون الأحمر)، القوس الأكبر ($\overset{\frown}{اب}$) (باللون الأخضر) ويمكن التعبير عنه بـ ($\overset{\frown}{اجـ ب}$). يعتمد القياس الدائري على طول القوس في الدائرة الذي تحصره الزاوية المركزية وعلى طول نصف قطر الدائرة.

حقيقة هندسية: في الدوائر المتحدة المركز، النسبة بين طول قوس أي زاوية مركزية وطول نصف قطر دائرتها المناظرة تساوي مقدارًا ثابتًا يتوقف على قياس الزاوية التي تحصر هذا القوس.

في الشكل المجاور: $\frac{\overset{\frown}{من}}{وم} = \frac{\overset{\frown}{اب}}{وا} = \frac{\overset{\frown}{جـ د}}{وجـ}$

٧٤

أي أن $\frac{\text{طول القوس من الدائرة الذي تحصره زاوية مركزية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$ = مقدارًا ثابتًا

وهذا يعد نظامًا آخر لقياس الزاوية يسمى بالقياس الدائري للزاوية.

تعريف:

القياس الدائري لزاوية مركزية في دائرة = $\frac{\text{طول القوس الذي تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$

ويرمز إليه بالرمز هـ^د.

فإذا رمزنا إلى طول القوس بالرمز (ل) وإلى طول نصف القطر بالرمز نق

فإن هـ^د = $\frac{ل}{نق}$ ومنها ل = هـ^د نق

وحدة قياس الزوايا لهذا النوع من القياس تسمى **الراديان** ويرمز لها بالرمز (١^د)

ملاحظة:

- في بعض الأنظمة، تقسم الزاوية القائمة إلى ١٠٠ جزء متساوٍ، كل منها يسمى "جراد" Grad.
- كل ١ جراد يعادل $\frac{٩}{١٠}$ من الدرجة.

تعريف الزاوية النصف قطرية: Radial Angle

هي زاوية مركزية في دائرة تحصر قوسًا طوله يساوي طول نصف قطر هذه الدائرة.

وقياس الزاوية نصف القطرية يساوي ١ راديان (١^د).

وعلى هذا فإن الزاوية التي قياسها ٥^د هي زاوية مركزية في دائرة تحصر قوسًا من هذه الدائرة طوله يساوي خمسة أمثال طول نصف قطر هذه الدائرة.

مثال (٣)

ع$\hat{و}$د زاوية مركزية في دائرة طول نصف قطرها ٤ سم. أوجد طول القوس $\overset{\frown}{ع د}$ الذي تحصره هذه الزاوية إذا كان:

أ ق(ع$\hat{و}$د) = $\left(\frac{٣}{٤}\right)^د$ ب ق(ع$\hat{و}$د) = (٣,١٤)^د

الحل:

أ نفرض طول القوس = ل فيكون ل = هـ^د نق

∴ ل = طول $\overset{\frown}{ع د}$ = $\left(\frac{٣}{٤}\right)$ × ٤ سم = ٣ سم

ب ل = طول $\overset{\frown}{ع د}$ = ٣,١٤ × ٤ = ١٢,٥٦ سم.

٧٥

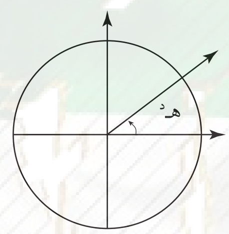
اذكر قياسات ٣ زوايا تكافئ في وضعها الزاوية التي قياسها ٩٠°، ٤٥° ...

لتوضيح الحقيقة الهندسية:

القياس الدائري: $\dfrac{\text{طول القوس الذي يحصر زاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$ = مقدارًا ثابتًا

استخدم عدة شفافيات، مرسومًا على كل منها مستوى إحداثي بالمواصفات نفسها، وارسم على كل شفافية زاوية لها القياس نفسه، يقع مركزها في كل من الدوائر المرسومة في كل شفافية وبأنصاف أقطار مختلفة، ثم ضع الشفافيات على جهاز العرض واحدة تلو الأخرى بحيث تقع مراكز الدوائر على بعضها بعضًا، فيتضح أمام الطلاب فكرة ثبات قياس الزاوية الدائري كما يتضح في التعريف:

$\dfrac{\text{ل}}{\text{نق}} = \dfrac{\text{طول القوس}}{\text{نصف قطر الدائرة}} = \text{هـ}^{\text{د}}$



ومنها: ل = هـ$^{\text{د}}$ نق

نبه الطلاب إلى وحدة القياس الدائري (الزاوية النصف قطرية) وذكرهم بوحدة القياس الستيني (الدرجة) - وصورها بأشكال تقريبية.

اربط بين القياسين ٣٦٠° تعادل ٢π (راديان)

١٨٠° تعادل π (راديان)

لاحظ أن π عدد حقيقي غير نسبي يساوي تقريبًا ٣,١٤ ولا يمكن التعبير عنه بالضبط بعدد نسبي.

عبر عن الدرجة الواحدة (في قياس الزوايا) بعدد حقيقي مناظر ١° = $\dfrac{\pi}{١٨٠°}$ ≃ ٠,٠١٧٥

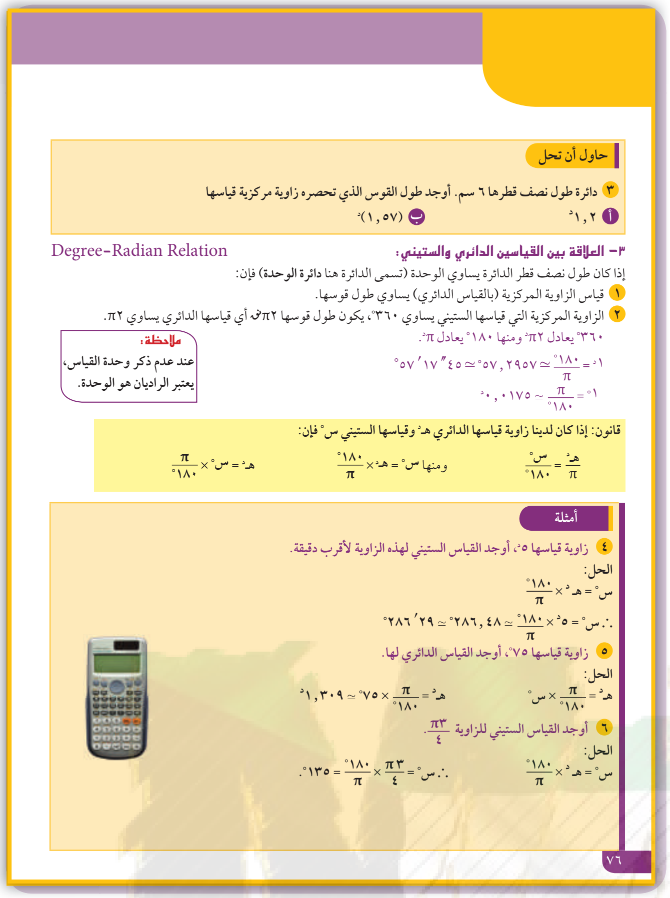
(سيفيد ذلك في مقرر آخر عند عرض فكرة الدوال المثلثية أو الدوال الدائرية باعتبارها دوال متغيراتها أعداد حقيقية).

استخدم العلاقة $\dfrac{\text{هـ}^{\text{د}}}{\pi} = \dfrac{\text{س}°}{١٨٠°}$ للتحويل من قياس إلى آخر.

مثال

ذكر الطلاب بمعنى زاوية قائمة. اكتب على اللوح أن

١° = ٦٠′، ١′ = ٦٠″



حاول أن تحل

٣ دائرة طول نصف قطرها ٦ سم. أوجد طول القوس الذي تحصره زاوية مركزية قياسها

أ ١,٢$^{\text{د}}$ ب (١,٥٧)$^{\text{د}}$

٣- العلاقة بين القياسين الدائري والستيني: Degree-Radian Relation

إذا كان طول نصف قطر الدائرة يساوي الوحدة (تسمى الدائرة هنا **دائرة الوحدة**) فإن:

١ قياس الزاوية المركزية (بالقياس الدائري) يساوي طول قوسها.

٢ الزاوية المركزية التي قياسها الستيني يساوي ٣٦٠°، يكون طول قوسها ٢πنق أي قياسها الدائري يساوي ٢π.

٣٦٠° يعادل ٢$\pi^{\text{د}}$ ومنها ١٨٠° يعادل $\pi^{\text{د}}$.

١$^{\text{د}}$ = $\dfrac{١٨٠°}{\pi}$ ≃ ٥٧,٢٩٥٧° ≃ ٥٧° ١٧′ ٤٥″

١° = $\dfrac{\pi}{١٨٠°}$ ≃ ٠,٠١٧٥$^{\text{د}}$

ملاحظة: عند عدم ذكر وحدة القياس، يعتبر الراديان هو الوحدة.

قانون: إذا كان لدينا زاوية قياسها الدائري هـ$^{\text{د}}$ وقياسها الستيني س° فإن:

$\dfrac{\text{هـ}^{\text{د}}}{\pi} = \dfrac{\text{س}°}{١٨٠°}$ ومنها س° = هـ$^{\text{د}}$ × $\dfrac{١٨٠°}{\pi}$ هـ$^{\text{د}}$ = س° × $\dfrac{\pi}{١٨٠°}$

أمثلة

٤ زاوية قياسها ٥$^{\text{د}}$، أوجد القياس الستيني لهذه الزاوية لأقرب دقيقة.

الحل:

س° = هـ$^{\text{د}}$ × $\dfrac{١٨٠°}{\pi}$

∴ س° = ٥$^{\text{د}}$ × $\dfrac{١٨٠°}{\pi}$ ≃ ٢٨٦,٤٨° ≃ ٢٨٦° ٢٩′

٥ زاوية قياسها ٧٥°، أوجد القياس الدائري لها.

الحل:

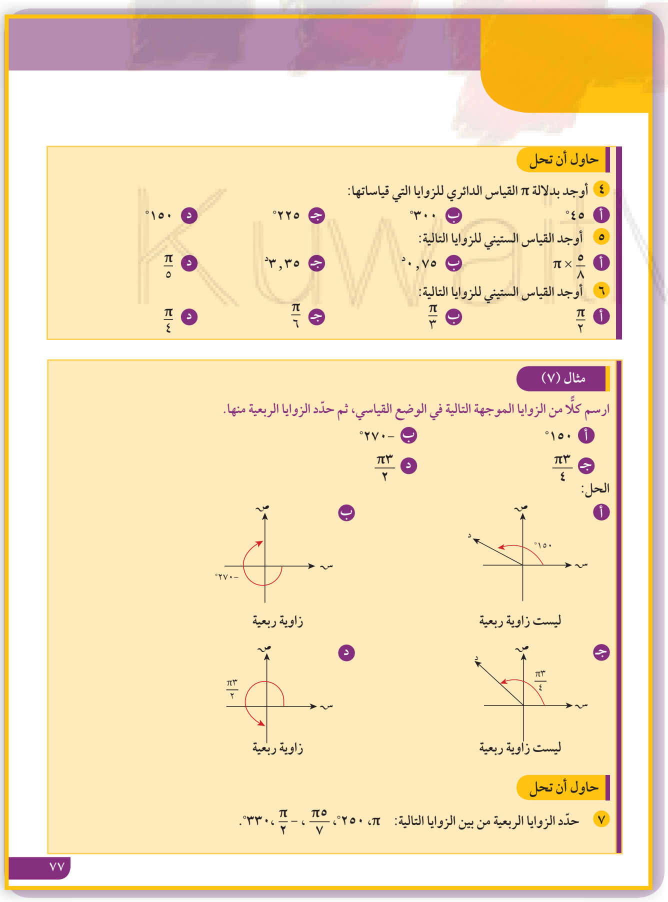
هـ$^{\text{د}}$ = $\dfrac{\pi}{١٨٠°}$ × س° هـ$^{\text{د}}$ = $\dfrac{\pi}{١٨٠°}$ × ٧٥° ≃ ١,٣٠٩$^{\text{د}}$

٦ أوجد القياس الستيني للزاوية $\dfrac{٣\pi}{٤}$.

الحل:

س° = هـ$^{\text{د}}$ × $\dfrac{١٨٠°}{\pi}$ ∴ س° = $\dfrac{٣\pi}{٤}$ × $\dfrac{١٨٠°}{\pi}$ = ١٣٥°.

٧٦



حاول أن تحل

٤ أوجد بدلالة π القياس الدائري للزوايا التي قياساتها:

أ ٤٥° ب ٣٠٠° ج ٢٢٥° د ١٥٠°

٥ أوجد القياس الستيني للزوايا التالية:

أ $\dfrac{٥}{٨}$ × π ب ٠,٧٥$^{\text{د}}$ ج ٣,٣٥$^{\text{د}}$ د $\dfrac{\pi}{٥}$

٦ أوجد القياس الستيني للزوايا التالية:

أ $\dfrac{\pi}{٢}$ ب $\dfrac{\pi}{٣}$ ج $\dfrac{\pi}{٦}$ د $\dfrac{\pi}{٤}$

مثال (٧)

ارسم كلًّا من الزوايا الموجهة التالية في الوضع القياسي، ثم حدّد الزوايا الربعية منها.

أ ١٥٠° ب -٢٧٠°

ج $\dfrac{٣\pi}{٤}$ د $\dfrac{٣\pi}{٢}$

الحل:

أ ليست زاوية ربعية

ب زاوية ربعية

ج ليست زاوية ربعية

د زاوية ربعية

حاول أن تحل

٧ حدّد الزوايا الربعية من بين الزوايا التالية: π، ٢٥٠°، $\dfrac{٥\pi}{٧}$، - $\dfrac{\pi}{٢}$، ٣٣٠°.

٧٧

قد يجد الطلاب صعوبة في عملية ضرب عدد صحيح بكسر. مد يد المساعدة واشرح لهم أننا نبدأ بضرب العدد الصحيح بالبسط ثم نقسم النتيجة على المقام. ساعدهم على إكمال العملية الحسابية إذ يمكن أن نحصل على كسر عشري.

اشرح لهم أن الكسر العشري يضرب بالعدد ٦٠ لنحصل على الدقائق. وإذا كان الكسر العشري في الدقائق، نكمل أيضًا ونضرب بالرقم ٦٠ لنحصل على الثواني.

على سبيل المثال: س° = ٢١,٢٥٦°

نأخذ ٠,٢٥٦ × ٦٠ = ١٥,٣٦′.

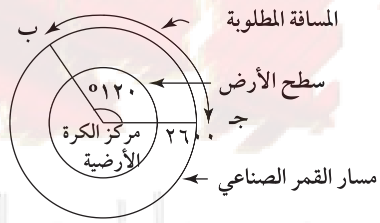
بعد ذلك نأخذ ٠,٣٦′ × ٦٠″ = ٢١,٦″ ≈ ٢٢″

فيكون: س° ≃ ٢٢″ ١٥′ ٢١°

مثال (٩) (كتاب الطالب ص: ٧٨)

لاحظ أن المطلوب هو طول القوس الدائري $\overset{\frown}{\text{جـب}}$ الذي يقابل زاوية قياسها $\frac{١}{٣}$ دورة كاملة، أي: $\frac{١}{٣} \times ٢\pi$ حيث ٢π قياس الزاوية المقابلة للدورة الكاملة.

اشرح للطلاب أن سرعة القمر الصناعي حول الأرض نعتبرها ثابتة. إذًا، المسافة التي يقطعها في ساعة واحدة هي $\frac{١}{٣}$ المسافة الإجمالية التي يقطعها في ثلاث ساعات.



ساعدهم على إيجاد المتغيرات لتطبيق القاعدة ل = نق هـ^د.

٦ الربط

قمر صناعي يدور حول الأرض بسرعة ثابتة وبشكل دائري، يقطع مسافة ٥٤ ٠٠٠ كم في كل دورة. ما بعد القمر الصناعي عن مركز الأرض؟

$$\text{نق هـ}^{\text{د}} = \text{ل} \Leftarrow \text{نق} = \frac{٥٤\,٠٠٠}{٢ \times ٣,١٤} \simeq ٨\,٥٩٨,٧٣$$

يبعد القمر الصناعي عن مركز الأرض حوالى ٨ ٥٩٨,٧٣ كم.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخلط الطلاب بين الدرجة والراديان. وضح لهم أن زاوية قياسها ١٨٠° هي نفسها π راديان، وأن $\frac{\pi}{١٨٠°} \neq ١$.

أمثلة

٨ زاوية قياسها ٢٣″ ١٨′ ٨٥°، أوجد القياس الدائري لهذه الزاوية مقربًا الناتج إلى رقمين عشريين.

الحل:

إذا كان هـ^د هو القياس الدائري فإن: هـ^د = $\frac{\pi}{١٨٠°}$ × س°

تضغط على المفاتيح بالترتيب التالي من جهة اليسار

π ÷ 180 °,,, × 85 °,,, 18 °,,, 23 °,,, =

يظهر على الشاشة 1.488877359 ∴ القياس الدائري ≈ ١,٤٩

٩ مثال من الفضاء: قمر صناعي للبث التلفزيوني يدور في شكل دائري حول الأرض في زمن قدره ٣ ساعات. إذا علمت أن طول نصف قطر الأرض حوالى ٦ ٤٠٠ كم، وكان ارتفاع القمر ٢ ٦٠٠ كم عن سطح الأرض، فأوجد المسافة التي يقطعها القمر خلال ساعة واحدة.

الحل:

نفرض ف المسافة التي قطعها القمر في ساعة.

بعد القمر عن مركز الأرض = ب م = ب س + س م

٢ ٦٠٠ + ٦ ٤٠٠ = ٩ ٠٠٠ كم

الزاوية بالقياس الدائري المعادل لـ $\frac{١}{٣}$ الدورة هي θ حيث:

$\theta = \frac{١}{٣} \times ٢\pi = \frac{٢}{٣}\pi$

المسافة التي قطعها القمر:

طول $\overset{\frown}{\text{جـب}}$ الأصغر = نق θ = ٩ ٠٠٠ × $\frac{٢}{٣}\pi$

≃ ١٨ ٨٤٩,٥٥٥٩

فيكون القمر قد قطع مسافة ١٩ ٠٠٠ كم تقريبًا في زمن قدره ساعة.

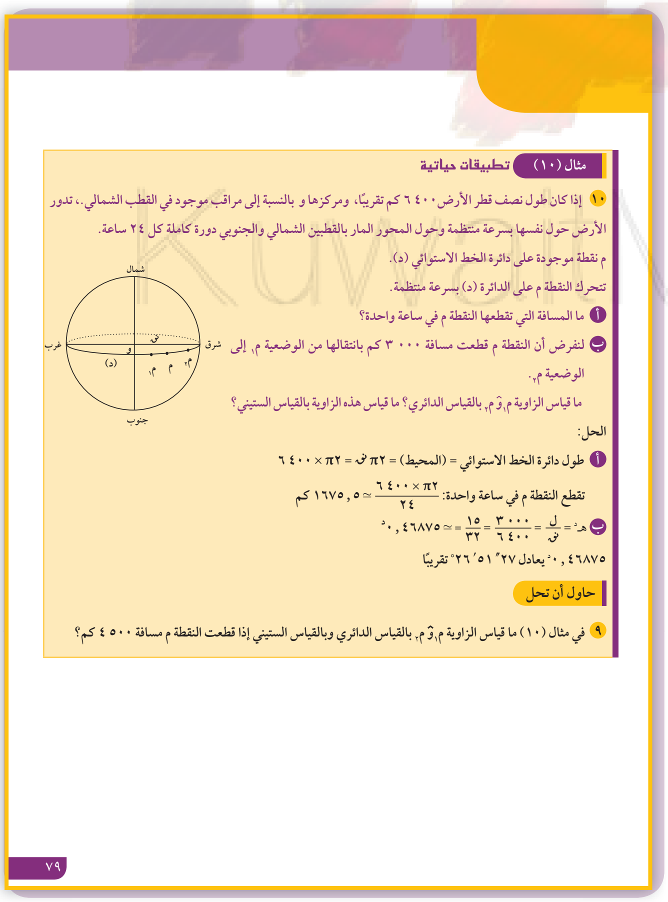
حاول أن تحل

٨ زاوية مركزية في دائرة طول نصف قطرها نق، تحصر قوسًا طوله ل. أوجد طول القوس في الحالتين:

أ هـ^د = $\frac{١}{٤}\pi$ ، نق = ٧ سم

ب س° = ١٢٠°، نق = ٢٤ سم

٧٨



مثال (١٠) تطبيقات حياتية

١٠ إذا كان طول نصف قطر الأرض ٦ ٤٠٠ كم تقريبًا، ومركزها و بالنسبة إلى مراقب موجود في القطب الشمالي.، تدور الأرض حول نفسها بسرعة منتظمة وحول المحور المار بالقطبين الشمالي والجنوبي دورة كاملة كل ٢٤ ساعة.

م نقطة موجودة على دائرة الخط الاستوائي (د).

تتحرك النقطة م على الدائرة (د) بسرعة منتظمة.

أ ما المسافة التي تقطعها النقطة م في ساعة واحدة؟

ب لنفرض أن النقطة م قطعت مسافة ٣ ٠٠٠ كم بانتقالها من الوضعية م١ إلى الوضعية م٢.

ما قياس الزاوية م١وم٢ بالقياس الدائري؟ ما قياس هذه الزاوية بالقياس الستيني؟

شمال، جنوب، شرق، غرب، نق، و، (د)، م١، م، م٢

الحل:

أ طول دائرة الخط الاستوائي = (المحيط) = ٢π نق = ٢π × ٦ ٤٠٠

تقطع النقطة م في ساعة واحدة: $\frac{٢\pi \times ٦\,٤٠٠}{٢٤} \simeq ١٦٧٥,٥$ كم

ب هـ^د = $\frac{\text{ل}}{\text{نق}} = \frac{٣\,٠٠٠}{٦\,٤٠٠} = \frac{١٥}{٣٢} \simeq ٠,٤٦٨٧٥$^د

٠,٤٦٨٧٥^د يعادل ٢٧″ ٥١′ ٢٦° تقريبًا

حاول أن تحل

٩ في مثال (١٠) ما قياس الزاوية م١وم٢ بالقياس الدائري وبالقياس الستيني إذا قطعت النقطة م مسافة ٤ ٥٠٠ كم؟

٧٩

٨ التقييم

اطلب إلى الطلاب حل التمارين في فقرتي «حاول أن تحل» (٢)، (٣). تأكد من أنهم يستخدمون التحويل بين القياس الستيني وبين القياس الدائري.

اختبار سريع

أوجد الناتج:

١ أوجد $\frac{٣}{٥}$ الزاوية المستقيمة بالقياس الستيني. °١٠٨

٢ $\angle$ أ و ب زاوية مركزية في دائرة طول نصف قطرها ٥ سم. أوجد طول القوس $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ إذا كان

ﻕ ($\angle$ أ و ب) = ١,٣ ^{د}. ل = ٦,٥ سم.

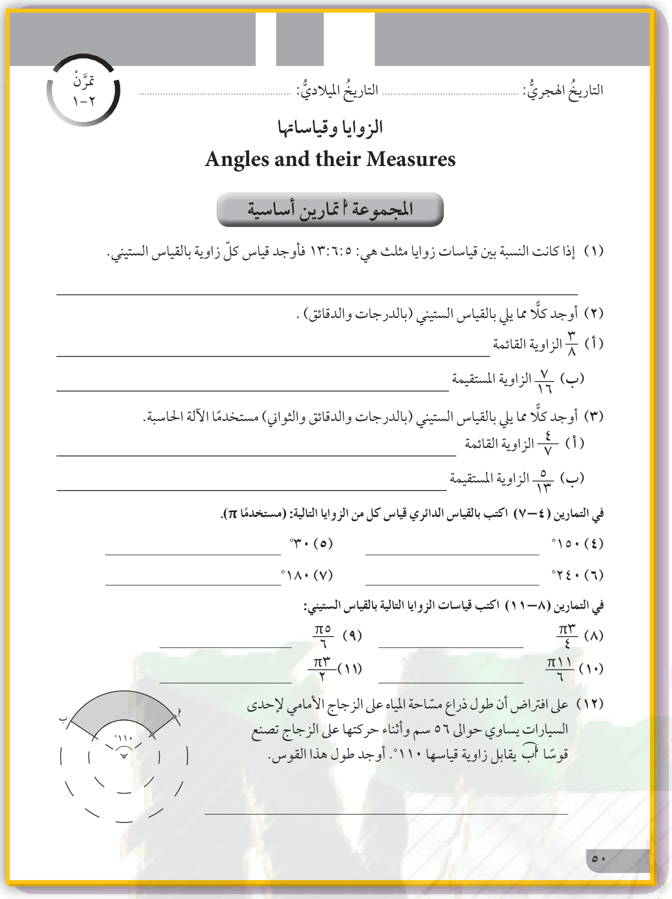
٣ زاوية قياسها الدائري $\frac{٣\pi}{٤}$، أوجد قياسها الستيني. °١٣٥

٩ إجابات وحلول

كتاب الطالب (ص ٧٢) «في الأشكال التالية»

(أ) الضلع الابتدائي للزاوية أ و ب هو $\overleftarrow{\text{و أ}}$ والضلع النهائي هو $\overleftarrow{\text{و ب}}$ وقياس الزاوية أ و ب موجب.

(ب) في الشكلين الأخيرين (٣) و(٤) أ و ب، م و ن الضلع الابتدائي للزاوية م و ن $\overleftarrow{\text{و م}}$ والضلع النهائي هو $\overleftarrow{\text{و ن}}$ وقياس الزاوية م و ن سالب.


التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ ٢-١

الزوايا وقياساتها

Angles and their Measures

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا مثلث هي: ٥:٦:١٣ فأوجد قياس كلّ زاوية بالقياس الستيني.

(٢) أوجد كلًّا مما يلي بالقياس الستيني (بالدرجات والدقائق).

(أ) $\frac{٣}{٨}$ الزاوية القائمة

(ب) $\frac{٧}{١٦}$ الزاوية المستقيمة

(٣) أوجد كلًّا مما يلي بالقياس الستيني (بالدرجات والدقائق والثواني) مستخدمًا الآلة الحاسبة.

(أ) $\frac{٤}{٧}$ الزاوية القائمة

(ب) $\frac{٥}{١٣}$ الزاوية المستقيمة

في التمارين (٤–٧) اكتب بالقياس الدائري قياس كل من الزوايا التالية: (مستخدمًا π).

(٤) °١٥٠ (٥) °٣٠

(٦) °٢٤٠ (٧) °١٨٠

في التمارين (٨–١١) اكتب قياسات الزوايا التالية بالقياس الستيني:

(٨) $\frac{٣\pi}{٤}$ (٩) $\frac{٥\pi}{٦}$

(١٠) $\frac{١١\pi}{٦}$ (١١) $\frac{٣\pi}{٢}$

(١٢) على افتراض أن طول ذراع مسّاحة المياه على الزجاج الأمامي لإحدى السيارات يساوي حوالى ٥٦ سم وأثناء حركتها على الزجاج تصنع قوسًا $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ يقابل زاوية قياسها ١١٠°. أوجد طول هذا القوس.

°١١٠ أ ب

٥٠


(١٣) يحدد البحارون موقع أي مَعْلم في البحر بقياس الزاوية بين جهة الشمال والمَعْلَم باتجاه دوران عقارب الساعة. (انظر الشكل المقابل). قياس هذه الزاوية يسمى موقع المَعْلَم. على افتراض أن منارة على شاطئ البحر تصنع زاوية قياسها ١١٢° مع مركب في عرض البحر.

(أ) ارسم مخططًا على مستوى إحداثي متعامد يبين الاتجاهات الأربعة وموضع المنارة والمركب. اعتمد اتجاه الشمال على طول محور الصادات.

(ب) حدّد موقع المنارة على المستوى الإحداثي مستخدمًا قياس زاوية في الوضع القياسي.

شمال اتجاه دوران عقارب الساعة

في التمرينين (١٤–١٥) إذا علمت أن طول نصف قطر أحد التروس (س) والزاوية التي يدوّرها الترس (θ)، فاحسب الطول الذي يتركه طرف الترس المقابل للزاوية علمًا بأن:

(١٤) س = ١٠ سم، $\theta = \frac{٧\pi}{٨}$.

(١٥) س = ٢٠ سم، $\theta = \frac{١١\pi}{٨}$.

(١٦) عندما يفرد الطاووس جناحيه يصنع زاوية مركزية في أعلى رأسه قياسها ٢٥٥° ويتشكل تقريبًا جزء من دائرة في الأطراف النهائية حيث طول نصف قطر الدائرة يساوي حوالى ٦٠ سم.

أوجد طول القوس الذي يقابل هذه الزاوية.

°٢٥٥

(١٧) أوجد القياس الدائري للزاويتين التاليتين مقربًا الناتج لأقرب جزء من مئة.

(أ) ٢٤″ ١٦′ ٥٢°

(ب) ١٣″ ٤′ ١٠١°

٥١

المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

(١) زاويتان مجموع قياسيهما ١٧′ ١٤٨°، والفرق بين قياسيهما $\frac{١}{١٦}$ من القائمة. أوجد القياس الستيني لكل منهما.

في التمارين (٢—٥) اكتب بالقياس الدائري قياس كل من الزوايا التالية: (مستخدمًا π).

(٢) ٩٠° (٣) ٤٥° (٤) ٣٠٠° (٥) ٢٧٠°

في التمارين (٦—١٠) اكتب قياسات الزوايا التالية بالقياس الستيني:

(٦) ٢π (٧) π (٨) $\frac{π}{٦}$

(٩) $\frac{٣π}{٢}$ (١٠) $\frac{٧π}{٦}$

في التمارين (١١—١٣) إذا علمت أن طول نصف قطر أحد التروس (س) والزاوية التي يدوّرها الترس (θ)، فاحسب الطول الذي يتركه طرف الترس المقابل للزاوية علمًا بأن:

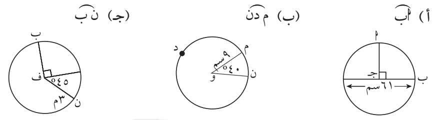
(١١) س = ١,٢ مم، θ = $\frac{٣π}{٢}$

(١٢) س = ١٦ سم، θ = $\frac{π}{٦}$

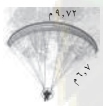
(١٣) س = ٤ سم، θ = $\frac{٥π}{٦}$

(١٤) أوجد طول القوس.

(أ) $\overset{\frown}{أب}$ (ب) $\overset{\frown}{م د ن}$ (جـ) $\overset{\frown}{ن ب}$



(١٥) يسقط رائد فضاء بالمظلة حيث طول الحبل المربوط إلى كتفيه يساوي ٦,٧ أمتار وطول القوس على المظلة بين الحبلين يساوي ٩,٧٢ أمتار. أوجد قياس الزاوية بين الحبلين بالراديان ثم بالدرجات.



٥٢

«حاول أن تحل»

١ $\frac{٧}{٣٢}$ القائمة = ١٥″ ٤١′ ١٩°

٠,٦٢٥ القائمة = ١٥′ ٥٦°

٢ $\frac{٣}{٧}$ المستقيمة = $\frac{٣}{٧}$ × ١٨٠° ≃ ٣٥″ ٨′ ٧٧°

٣ (أ) ٧,٢ سم (ب) ٩,٤٢ سم

استخدم القاعدة $\frac{هـ^{د}}{π} = \frac{س^{\circ}}{١٨٠^{\circ}}$

٤ (أ) $\frac{π}{٤}$ (ب) $\frac{٥π}{٣}$

(جـ) $\frac{٥π}{٤}$ (د) $\frac{٥π}{٦}$

٥ (أ) ٣٠′ ١١٢° (ب) ٤٣° تقريبًا

(جـ) ١٩٢° تقريبًا (د) ٣٦°

٦ (أ) ٩٠° (ب) ٦٠°

(جـ) ٣٠° (د) ٤٥°

٧ π، $-\frac{π}{٢}$

٨ (أ) ل = هـ^{د} نق ≃ ٥,٤٩٨ سم

(ب) ≃ ٥٠,٢٦٥ سم

٩ ٠,٧٠٣^{د} يعادل ١٠″ ١٧′ ٤٠°

٢-٢: النسب المثلثية: الجيب وجيب التمام ومقلوباتهما

١ الأهداف

- يتعرف جيب الزاوية جا(sin).
- يتعرف جيب تمام الزاوية جتا(cos).
- يتعرف قاطع الزاوية.
- يتعرف قاطع تمام الزاوية.
- يوجد قياس زاوية علم جيبها أو علم جيب تمامها.
- يستخدام الجيب وجيب التمام لحساب أضلاع غير معلومة الأطوال في المثلث قائم الزاوية.

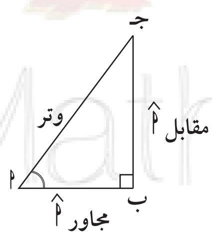
٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

جيب الزاوية (sin) – جيب تمام الزاوية (cos) – قاطع الزاوية (sec) – قاطع تمام الزاوية (cosec).

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة مدرجة – منقلة – فرجار – آلة حاسبة – مثلث قائم الزاوية – ورق رسم بياني.

٤ التمهيد



ارسم مثلثًا قائم الزاوية. ذكّر الطلاب بأن الضلع المقابل للزاوية القائمة يسمى وترًا في المثلث قائم الزاوية.

اطلب إلى الطلاب حساب النسب لكل زاوية حادة على الشكل التالي:

$\dfrac{\text{الضلع المقابل للزاوية}}{\text{وتر المثلث}}$ ، $\dfrac{\text{الضلع المجاور للزاوية}}{\text{وتر المثلث}}$

- يتعرف مفهوم الزاويتين المتتامتين (٣٠°، ٦٠°) (٥٠°، ٤٠°)، (٥٤°، ٣٦°).

اطلب إلى الطلاب إعطاء أمثلة.

- اكتب على السبورة الأعداد التالية: ٥، ١٠، ٢٠، ٣٠، ٤٠، ٥٠، ٦٠، ١٠٠ . اسأل الطلاب عن مقلوب هذه الأعداد. ماذا يلاحظون؟ هل تكبر باستمرار أو تصغر باستمرار؟


٢-٢
النسب المثلثية: الجيب وجيب التمام ومقلوباتهما
Trigonometric Ratios and their Reciprocals
Sine, Cosine, Secant and Cosecant

سوف تتعلم
- جيب الزاوية
- جيب تمام الزاوية
- قاطع الزاوية
- قاطع تمام الزاوية
- إيجاد قياس زاوية علم جيبها أو جيب تمامها

دعنا نفكر ونتناقش

١- المقابل والمجاور لزاوية حادة في مثلث قائم الزاوية
The Opposite and Adjacent of an Acute Angle in a Right Triangle

في المثلث أ ب جـ الموضح بالشكل:

أ ب يسمى الضلع المقابل للزاوية جـ، ب جـ يسمى الضلع المجاور للزاوية جـ، أ جـ يسمى الوتر.
وعلى هذا الأساس أكمل ما يلي:
.... هو مقابل أ̂
.... هو مجاور أ̂

في المثلث ل ن م الموضح بالشكل المقابل:
الضلع المقابل لـ م̂ هو ...
الضلع المجاور لـ ل̂ هو ...
ن ل هو مجاور الزاوية ...
م ن هو مجاور الزاوية ...

ملاحظة: للاختصار سنستخدم المقابل للدلالة على طول الضلع المقابل لزاوية، والمجاور للدلالة على طول الضلع المجاور لزاوية، والوتر للدلالة على طول الوتر.

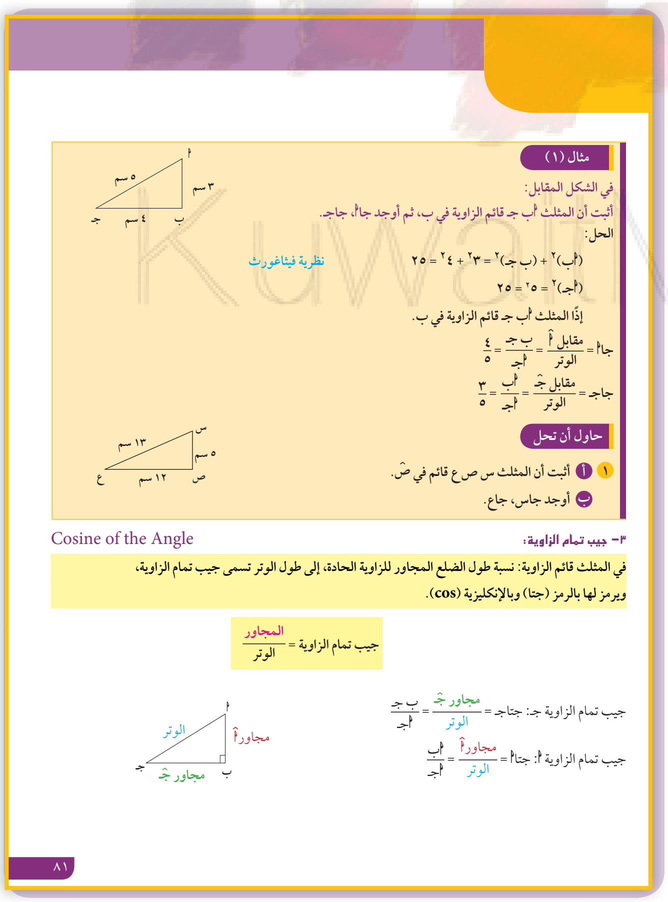
٢- جيب الزاوية Sine of the Angle

في المثلث قائم الزاوية: نسبة طول الضلع المقابل للزاوية الحادة إلى طول الوتر تسمى جيب الزاوية، ويرمز لها بالرمز (جا) بالإنكليزية (sin).

أي أن جيب الزاوية = $\dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

في الشكل المقابل:
جيب الزاوية أ:
جا أ = $\dfrac{\text{مقابل أ}}{\text{الوتر}}$ = $\dfrac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$
بالمثل جيب الزاوية ب:
جا ب = $\dfrac{\text{مقابل ب}}{\text{الوتر}}$ = $\dfrac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}}$

٨٠


مثال (١)
في الشكل المقابل:
أثبت أن المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب، ثم أوجد جا أ، جا جـ.
الحل:
(أ ب)² + (ب جـ)² = ٣² + ٤² = ٢٥ نظرية فيثاغورث
(أ جـ)² = ٥² = ٢٥
إذًا المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب.
جا أ = $\dfrac{\text{مقابل أ}}{\text{الوتر}}$ = $\dfrac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$ = $\dfrac{٤}{٥}$
جا جـ = $\dfrac{\text{مقابل جـ}}{\text{الوتر}}$ = $\dfrac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ = $\dfrac{٣}{٥}$

حاول أن تحل
١ أثبت أن المثلث س ص ع قائم في ص.
٢ أوجد جا س، جا ع.

٣- جيب تمام الزاوية Cosine of the Angle

في المثلث قائم الزاوية: نسبة طول الضلع المجاور للزاوية الحادة، إلى طول الوتر تسمى جيب تمام الزاوية، ويرمز لها بالرمز (جتا) وبالإنكليزية (cos).

جيب تمام الزاوية = $\dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

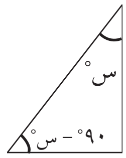
جيب تمام الزاوية جـ: جتا جـ = $\dfrac{\text{مجاور جـ}}{\text{الوتر}}$ = $\dfrac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$
جيب تمام الزاوية أ: جتا أ = $\dfrac{\text{مجاور أ}}{\text{الوتر}}$ = $\dfrac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

٨١

٥ التدريس

ناقش مع الطلاب كل خطوة متبعة لإيجاد الجيب وجيب التمام.

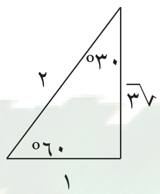
تأكد من أن الطلاب فهموا جيدًا العلاقة:



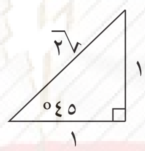
جا(س°) = جتا(٩٠° − س°) من خلال استقراء قيم النسب الحاصلة. أرشد الطلاب إلى فهم أن نسب الجيب وجيب التمام هي فقط في المثلث قائم الزاوية.

ارسم مثلثًا قائم الزاوية، واطلب إلى الطلاب إيجاد العلاقات بين كل زوجين من أطوال أضلاع المثلث.

ذكر الطلاب بالنسب المثلثية في المثلثات الخاصة التالية:



١. المثلث قائم الزاوية وهو نصف مثلث متطابق الأضلاع.



٢. المثلث قائم الزاوية ومتطابق الضلعين. (انظر إلى الصورتين).

وضح أن النسب المثلثية بخاصة جتا(cos)، جا(sin) لها تطبيقات عملية كثيرة حيث إنها تعتبر النموذج الرياضي لمظاهر حياتية، مثل الأعمال البحرية وتمثيل الدورانات الهندسية وتحركات الموجات الصوتية وموجات المد والجزر...

وضّح للطلاب ما يلي بالنسبة إلى الزاوية الحادة في المثلث القائم الزاوية:

(أ) كلما كبرت الزاوية، كبر جيب الزاوية ولكن قاطع تمام الزاوية قتا (cosec) صغر.

(ب) كلما كبرت الزاوية، صغر جيب التمام ولكن قاطع الزاوية قا(sec) كبر.

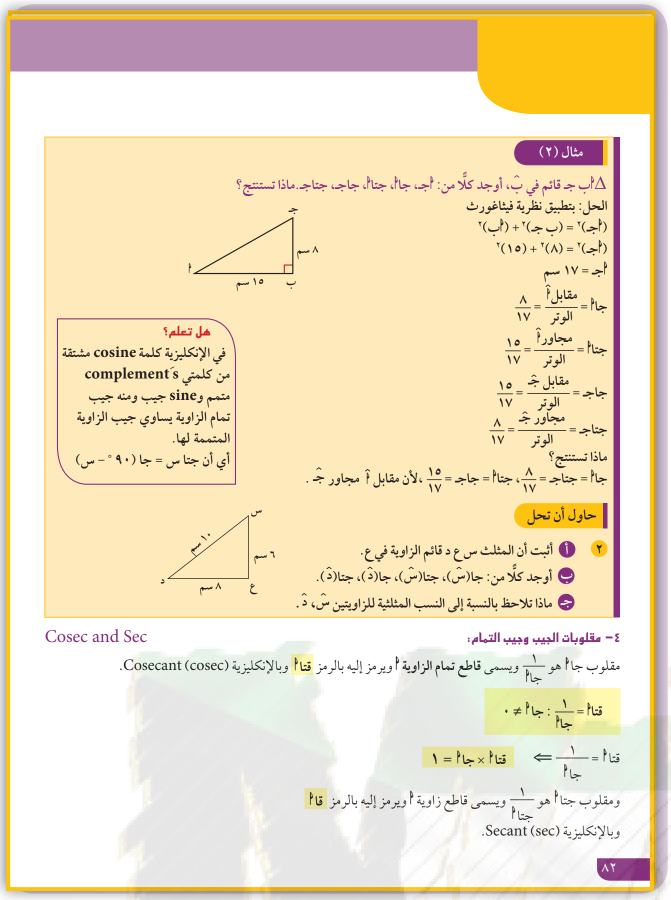
ثم شجع الطلاب على استنتاج:

(قاطع تمام الزاوية) قتاأ = $\frac{1}{\text{جاأ}}$: جاأ $\neq$ ٠

(قاطع الزاوية) قاأ = $\frac{1}{\text{جتاأ}}$: جتاأ $\neq$ ٠

مثال (٥)

تأكد من أن الطلاب فهموا الصورة جيدًا. اسألهم: أين الأرض؟ وأين عطارد؟ وإلامَ يرمز كل ضلع في المثلث؟ لم هذا المثلث هو قائم الزاوية؟



مثال (٢)

$\triangle$أب جـ قائم في بَ، أوجد كلًّا من: أجـ، جاأ، جتاأ، جاجـ، جتاجـ. ماذا تستنتج؟

الحل: بتطبيق نظرية فيثاغورث

$(\text{أجـ})^2 = (\text{ب جـ})^2 + (\text{أب})^2$

$(\text{أجـ})^2 = (8)^2 + (15)^2$

أجـ = ١٧ سم

جاأ = $\frac{\text{مقابل أ}}{\text{الوتر}} = \frac{8}{17}$

جتاأ = $\frac{\text{مجاور أ}}{\text{الوتر}} = \frac{15}{17}$

جاجـ = $\frac{\text{مقابل جـ}}{\text{الوتر}} = \frac{15}{17}$

جتاجـ = $\frac{\text{مجاور جـ}}{\text{الوتر}} = \frac{8}{17}$

ماذا تستنتج؟

جاأ = جتاجـ = $\frac{8}{17}$، جتاأ = جاجـ = $\frac{15}{17}$ ،لأن مقابل أ مجاور جـ.

هل تعلم؟

في الإنكليزية كلمة **cosine** مشتقة من كلمتي **complement´s** متمم و**sine** جيب ومنه جيب تمام الزاوية يساوي جيب الزاوية المتممة لها.

أي أن جتا س = جا (٩٠° − س)

حاول أن تحل

٢ (أ) أثبت أن المثلث س ع د قائم الزاوية في ع.

(ب) أوجد كلًّا من: جا(سَ)، جتا(سَ)، جا(دَ)، جتا(دَ).

(جـ) ماذا تلاحظ بالنسبة إلى النسب المثلثية للزاويتين سَ، دَ.

٤− **مقلوبات الجيب وجيب التمام:** Cosec and Sec

مقلوب جاأ هو $\frac{1}{\text{جاأ}}$ ويسمى **قاطع تمام الزاوية** أ ويرمز إليه بالرمز **قتاأ** وبالإنكليزية Cosecant (cosec).

قتاأ = $\frac{1}{\text{جاأ}}$: جاأ $\neq$ ٠

قتاأ = $\frac{1}{\text{جاأ}}$ $\Leftarrow$ قتاأ × جاأ = ١

ومقلوب جتاأ هو $\frac{1}{\text{جتاأ}}$ ويسمى قاطع زاوية أ ويرمز إليه بالرمز قاأ وبالإنكليزية Secant (sec).

٨٢

ركز على معرفة الوتر والضلع المقابل للزاوية أ.

ساعد الطلاب على حساب المسافة بين عطارد والشمس.

(نجد بواسطة الآلة الحاسبة جا ٢٢,٣°).

تفكير ناقد: اطلب إلى الطلاب إيجاد المسافة بين الأرض وعطارد بطريقتين مختلفتين.

$\frac{\text{المسافة بين عطارد والأرض}}{\text{المسافة بين الشمس والأرض}}$ = جتا ٢٢,٣°.

$\frac{\text{المسافة بين الشمس والأرض}}{\text{المسافة بين عطارد والأرض}}$ = قا ٢٢,٣°.

ساعد الطلاب على فهم طريقة إيجاد قيمة الزاوية على الآلة الحاسبة باستخدام: جتا^{-1}، جا^{-1}.

٦ الربط

درِّب الطلاب على استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد النسب المثلثية لزوايا معينة، وكذلك إيجاد قياس زاوية معلومة نسبتها المثلثية.

ارسم على السبورة مثلثًا قائم الزاوية له زاوية قياسها معروف وله ضلع واحد طوله معروف، واطلب إليهم إيجاد قياس الزاوية الأخرى وأطوال بقية الأضلاع.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخلط الطلاب بين جيب الزاوية وجيب تمام الزاوية.
وضح لهم النسبة في المثلث قائم الزاوية التي تدل على جيب الزاوية وجيب تمام الزاوية.
قد يجد بعض الطلاب صعوبة في إيجاد المجهول س في المعادلة، مدّ يد المساعدة. اطلب إليهم استخدام الضرب التقاطعي أو استخدام المضاعف المشترك الأصغر. قد يجد الطلاب صعوبة في التفرقة بين جتا$(\cos\theta)$، قتا$(\operatorname{cosec}\theta)$.
وضّح لهم أن قتاθ = $\frac{١}{\text{جا}\theta}$: جا$\theta \neq$ ٠.

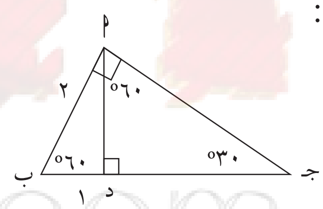
٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» في كتاب الطالب.

اختبار سريع

أوجد الناتج:

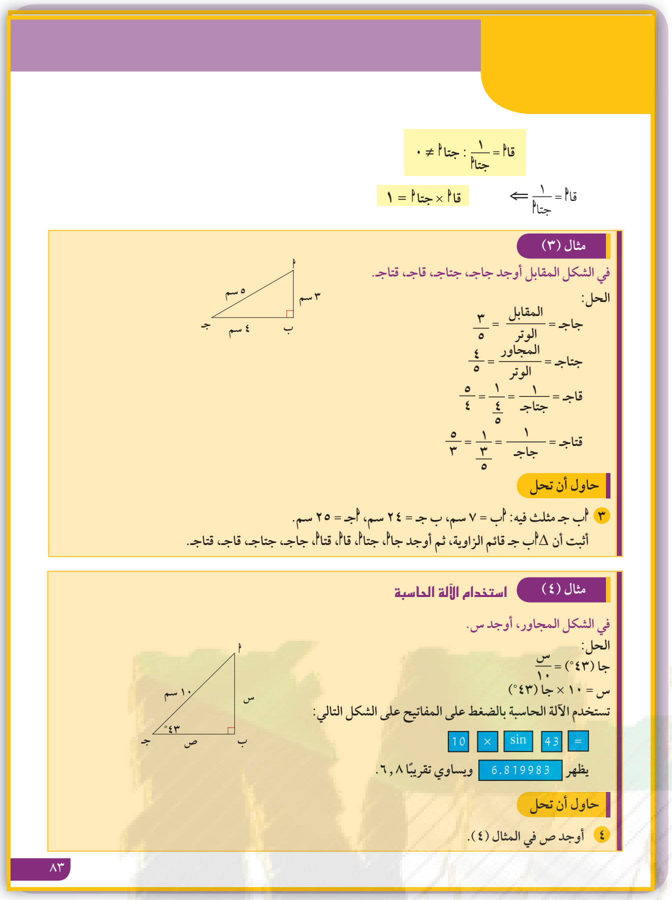
١ أوجد أطوال الأضلاع غير المعلومة في الشكل التالي:



أد = $\sqrt{٣}$، جـ د = ٣، أجـ = $٢\sqrt{٣}$.

٢ أوجد جا θ، إذا كان قتاθ = ٣. $\frac{١}{٣}$

٣ أوجد قا θ، إذا كان قاθ = $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$. $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$



قا أ = $\frac{١}{\text{جتا أ}}$: جتا أ $\neq$ ٠

قا أ = $\frac{١}{\text{جتا أ}}$ $\Leftarrow$ قا أ × جتا أ = ١

مثال (٣)

في الشكل المقابل أوجد جاجـ، جتاجـ، قاجـ، قتاجـ.

الحل:

جاجـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{٣}{٥}$

جتاجـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{٤}{٥}$

قاجـ = $\frac{١}{\text{جتاجـ}}$ = $\frac{١}{\frac{٤}{٥}}$ = $\frac{٥}{٤}$

قتاجـ = $\frac{١}{\text{جاجـ}}$ = $\frac{١}{\frac{٣}{٥}}$ = $\frac{٥}{٣}$

حاول أن تحل

٣ أب جـ مثلث فيه: أب = ٧ سم، ب جـ = ٢٤ سم، أجـ = ٢٥ سم.
أثبت أن $\triangle$أب جـ قائم الزاوية، ثم أوجد جاأ، جتاأ، قاأ، قتاأ، جاجـ، جتاجـ، قاجـ، قتاجـ.

مثال (٤) استخدام الآلة الحاسبة

في الشكل المجاور، أوجد س.

الحل:

جا (٤٣°) = $\frac{\text{س}}{١٠}$

س = ١٠ × جا (٤٣°)

تستخدم الآلة الحاسبة بالضغط على المفاتيح على الشكل التالي:

10 × sin 43 =

يظهر 6.819983 ويساوي تقريبًا ٦,٨.

حاول أن تحل

٤ أوجد ص في المثال (٤).

٨٣

كان نيكولاي كوبرنيك Nicolaus Copernicus (١٤٧٣م - ١٥٤٣م) عالمًا رياضيًّا وفلكيًّا، درس الطب وألمّ بمعظم العلوم في عصره. يعتبر أول من صاغ نظرية مركزية الشمس وأن الأرض جرم يدور في فلكها.
يعتبر كوبرنيك مؤسس الفلك الحديث.
وحدة الفلك (و.ف أو AU) تمثل متوسط المسافة بين الأرض والشمس وهي تساوي تقريبًا ١٤٩٦٠٠٠٠٠ كم.

مثال (٥) تطبيقات حياتية

هل تعلم؟ ١ ميل ≃ ١,٦٠٩ كم

في الشكل المقابل، إذا كان ق(أ) = ٢٢,٣°،
أوجد بعد كوكب عطارد عن الشمس علمًا بأن بعد الأرض عن الشمس يساوي ١ وحدة الفلك AU١.

الحل:

بفرض أن: س = بعد كوكب عطارد عن الشمس.
ل = بعد الأرض عن الشمس

فيكون:

جا (٢٢,٣°) = $\frac{\text{س}}{\text{ل}}$.

$\therefore$ بعد عطارد عن الشمس = س = ل × جا (٢٢,٣°).

≈ ١ × ٠,٣٨ ≈ ٠,٣٨ AU

حاول أن تحل

٥ أ كما في التطبيق السابق، أوجد بعد كوكب الزهرة عن الشمس علمًا بأن ق(أ) = ٤٦,١°
ب أوجد قيمة س لأقرب جزء من عشرة.

٨٤

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ (أ) باستخدام عكس نظرية فيثاغورث نجد:

$(صع)^٢ + (ص س)^٢ = (١٢)^٢ + (٥)^٢ = ١٦٩$

$= (١٣)^٢ = (س ع)^٢$

(ب) $جاس = \frac{١٢}{١٣}$ ، $جاع = \frac{٥}{١٣}$

٢ (أ) باستخدام عكس نظرية فيثاغورث نجد:

$(س ع)^٢ + (ع د)^٢ = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠$

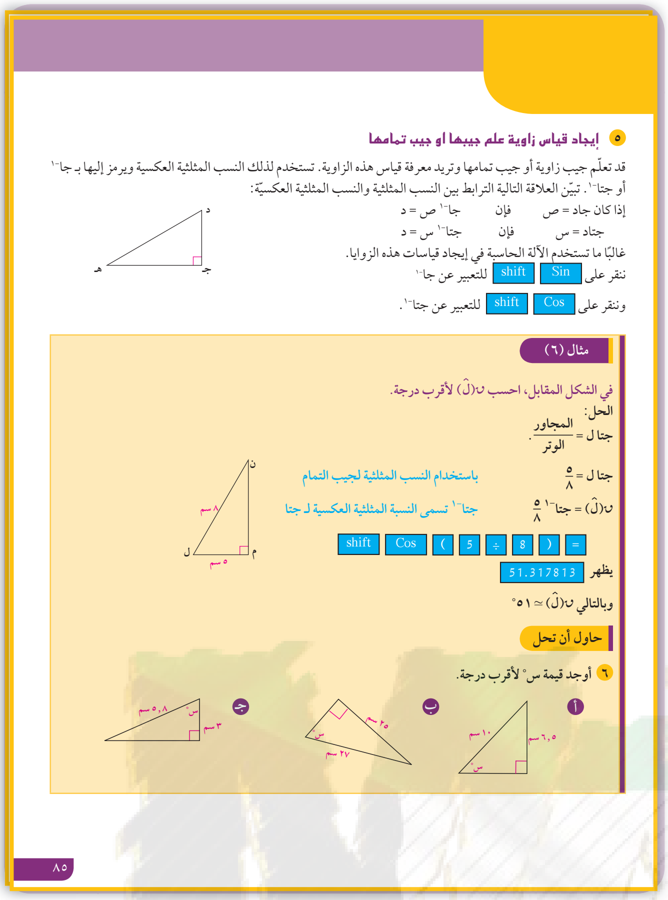
$(س د)^٢ = ١٠٠$ ، لذا $(س ع)^٢ + (ع د)^٢ = (س د)^٢$

والمثلث قائم في ع.

(ب) $جا(\hat{س}) = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$ ؛ $جتا(\hat{س}) = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$

$جا(\hat{د}) = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$ ؛ $جتا(\hat{د}) = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$

(جـ) $جا(\hat{س}) = جتا(\hat{د})$ ، $جتا(\hat{س}) = جا(\hat{د})$



٥ إيجاد قياس زاوية علم جيبها أو جيب تمامها

قد تعلّم جيب زاوية أو جيب تمامها وتريد معرفة قياس هذه الزاوية. تستخدم لذلك النسب المثلثية العكسية ويرمز إليها بـ $جا^{-١}$ أو $جتا^{-١}$. تبيّن العلاقة التالية الترابط بين النسب المثلثية والنسب المثلثية العكسيّة:

إذا كان جاد = ص فإن $جا^{-١}$ ص = د

جتاد = س فإن $جتا^{-١}$ س = د

غالبًا ما تستخدم الآلة الحاسبة في إيجاد قياسات هذه الزوايا.

نقر على Sin shift للتعبير عن $جا^{-١}$.

وننقر على Cos shift للتعبير عن $جتا^{-١}$.

مثال (٦)

في الشكل المقابل، احسب ق(لَ) لأقرب درجة.

الحل:

جتا ل = المجاور / الوتر

جتا ل = $\frac{٥}{٨}$ — باستخدام النسب المثلثية لجيب التمام

ق(لَ) = $جتا^{-١} \frac{٥}{٨}$ — $جتا^{-١}$ تسمى النسبة المثلثية العكسية لـ جتا

shift Cos (5 ÷ 8) =

يظهر 51.317813

وبالتالي ق(لَ) ≃ °٥١

حاول أن تحل

٦ أوجد قيمة س° لأقرب درجة.

أ ب جـ

تمرّن ٢-٢

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

النسب المثلثية: الجيب وجيب التمام ومقلوباتها

Trigonometric Ratios and their Reciprocals

sine cosine secant and cosecant

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) Δ أ ب جـ فيه: ق(أ) = °٣٠، ق(جـ) = °٦٠.

إذا كان ب جـ = س، فإن أ جـ = ٢ س (نظرية).

احسب كلًّا من: أ ب، جا °٣٠، جتا °٣٠، جا °٦٠، جتا °٦٠.

(٢) في المثلث أ ب جـ القائم في جـ، أوجد:

(أ) قا أ (ب) قتا ب

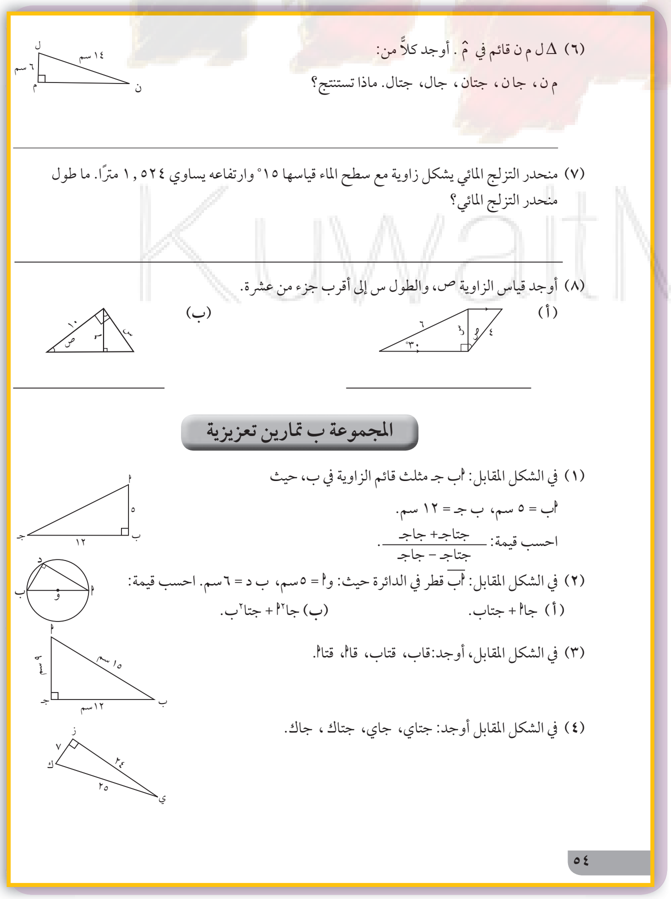
(٣) تطبيق حياتي: أطول سلم كهربائي متحرك في العالم موجود في إحدى محطات مترو الأنفاق في روسيا. إذا كان ارتفاع قمة السلم عن قاعدته ٦,٣ أمتار وكان السلم يميل على الأفقي بزاوية قياسها °١٠,٤. فأوجد طول السلم إلى أقرب متر.

(٤) أوجد قيمة س إلى أقرب جزء من عشرة.

(أ) (ب) (جـ)

(٥) أثبت أن المثلث س ص ع قائم الزاوية في (ص).

أوجد جاس، جتاس، قاس، قتاس.



(٦) Δ ل م ن قائم في مَ. أوجد كلاًّ من:

م ن، جان، جتان، جال، جتال. ماذا تستنتج؟

(٧) منحدر التزلج المائي يشكل زاوية مع سطح الماء قياسها °١٥ وارتفاعه يساوي ١,٥٢٤ مترًا. ما طول منحدر التزلج المائي؟

(٨) أوجد قياس الزاوية ص، والطول س إلى أقرب جزء من عشرة.

(أ) (ب)

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) في الشكل المقابل: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، حيث

أ ب = ٥ سم، ب جـ = ١٢ سم.

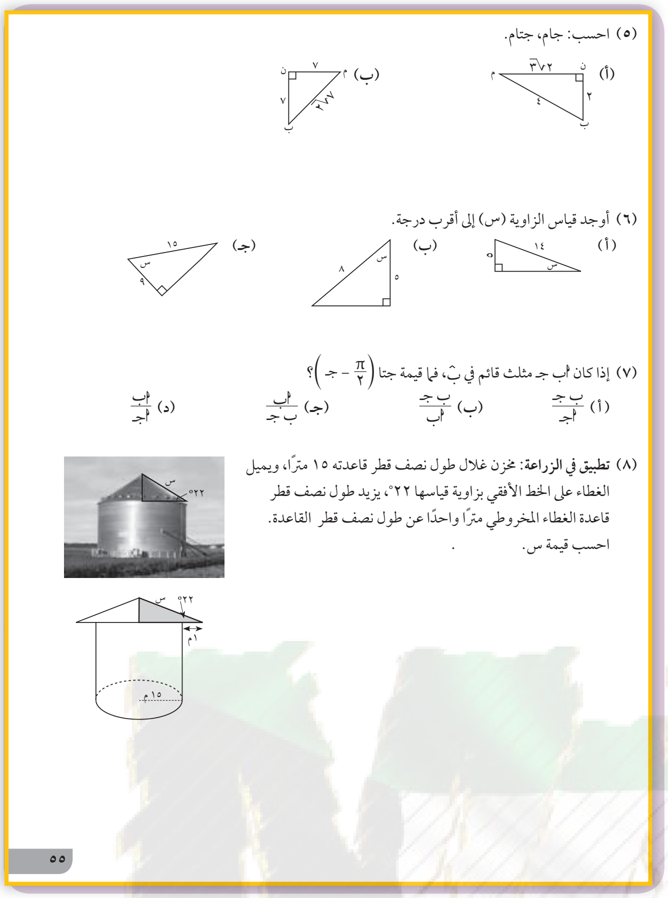
احسب قيمة: $\frac{جتاجـ + جاجـ}{جتاجـ - جاجـ}$.

(٢) في الشكل المقابل: أ ب قطر في الدائرة حيث: و أ = ٥ سم، ب د = ٦ سم. احسب قيمة:

(أ) جاأ + جتاب. (ب) جا²أ + جتا²ب.

(٣) في الشكل المقابل، أوجد: قاب، قتاب، قاأ، قتاأ.

(٤) في الشكل المقابل أوجد: جتاي، جاي، جتاك، جاك.



(٥) احسب: جام، جتام.

(أ) (ب)

(٦) أوجد قياس الزاوية (س) إلى أقرب درجة.

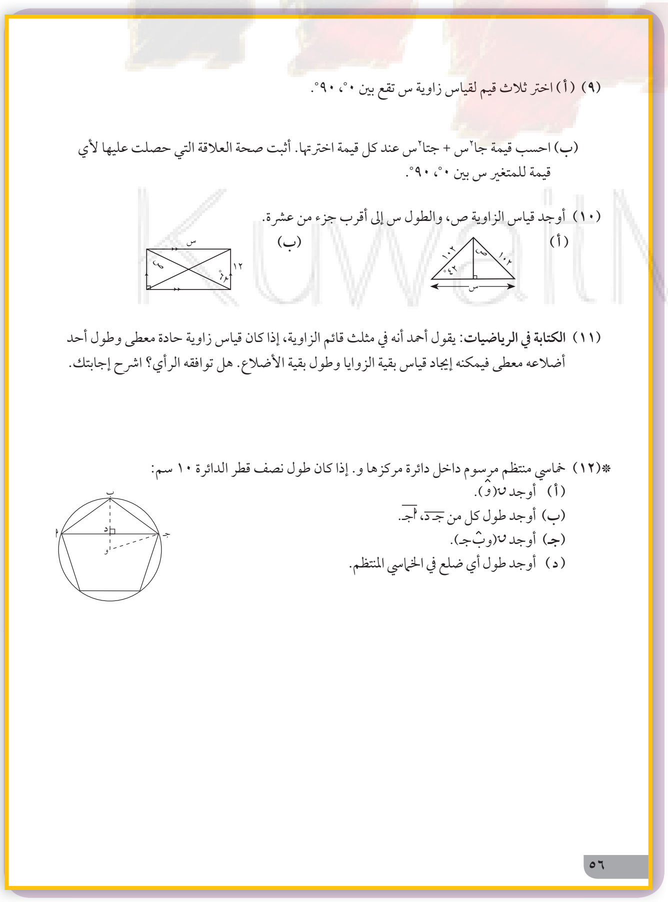
(أ) (ب) (جـ)

(٧) إذا كان أب جـ مثلث قائم في بَ، فما قيمة جتا $\left(\frac{\pi}{2} - \text{جـ}\right)$؟

(أ) $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أجـ}}$ (ب) $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أب}}$ (جـ) $\frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}}$ (د) $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$

(٨) **تطبيق في الزراعة:** مخزن غلال طول نصف قطر قاعدته ١٥ مترًا، ويميل الغطاء على الخط الأفقي بزاوية قياسها ٢٢°، يزيد طول نصف قطر قاعدة الغطاء المخروطي مترًا واحدًا عن طول نصف قطر القاعدة. احسب قيمة س.

٥٥



(٩) (أ) اختر ثلاث قيم لقياس زاوية س تقع بين ٠°، ٩٠°.

(ب) احسب قيمة جا^{٢}س + جتا^{٢}س عند كل قيمة اخترتها. أثبت صحة العلاقة التي حصلت عليها لأي قيمة للمتغير س بين ٠°، ٩٠°.

(١٠) أوجد قياس الزاوية ص، والطول س إلى أقرب جزء من عشرة.

(أ) (ب)

(١١) **الكتابة في الرياضيات:** يقول أحمد أنه في مثلث قائم الزاوية، إذا كان قياس زاوية حادة معطى وطول أحد أضلاعه معطى فيمكنه إيجاد قياس بقية الزوايا وطول بقية الأضلاع. هل توافقه الرأي؟ اشرح إجابتك.

*(١٢) خماسي منتظم مرسوم داخل دائرة مركزها و. إذا كان طول نصف قطر الدائرة ١٠ سم:

(أ) أوجد ق(وَ).

(ب) أوجد طول كل من $\overline{\text{جـ د}}$، $\overline{\text{أجـ}}$.

(جـ) أوجد ق(وبَجـ).

(د) أوجد طول أي ضلع في الخماسي المنتظم.

٥٦

٣ (٢٥)^{٢} = (٢٤)^{٢} + (٧)^{٢} (تطبيق عكس نظرية فيثاغورث)

جاأ = $\frac{\text{٢٤}}{\text{٢٥}}$ ، جتاأ = $\frac{\text{٧}}{\text{٢٥}}$ ، قاأ = $\frac{\text{٢٥}}{\text{٧}}$ ، قتاأ = $\frac{\text{٢٥}}{\text{٢٤}}$

جاجـ = $\frac{\text{٧}}{\text{٢٥}}$ ، جتاجـ = $\frac{\text{٢٤}}{\text{٢٥}}$ ، قاجـ = $\frac{\text{٢٥}}{\text{٢٤}}$ ، قتاجـ = $\frac{\text{٢٥}}{\text{٧}}$

٤ جتا ٤٣° = $\frac{\text{ص}}{\text{١٠}}$ ، ص = ١٠ × جتا ٤٣°،

ص = ٧,٣ (تقريبًا).

٥ (أ) جا ٤٦,١ = $\frac{\text{س}}{\text{ل}}$، س = ٠,٧٢ AU

(ب) (أ) جتا ٥٨° = $\frac{\text{٥}}{\text{س}}$ ، س = $\frac{\text{٥}}{\text{جتا ٥٨°}}$ ≃ ٩,٤

(ب) جا ٣٦° = $\frac{\text{١٠}}{\text{س}}$ ، س = $\frac{\text{١٠}}{\text{جا ٣٦°}}$ ≃ ١٧

(جـ) جا ٢١° = $\frac{\text{س}}{\text{١٢}}$ ، س = ١٢ × جا ٢١° ≃ ٤,٣

٦ (أ) ق(سَ) ≃ ٤٠° ٣٢′ ٣٠″

(ب) ق(سَ) ≃ ٦٧° ٤٨′ ٣٠″

(جـ) ق(سَ) ≃ ٥٨° ٥١′ ٩″

٢ـ٣: ظل الزاوية ومقلوبه

١ الأهداف

- يتعرف ظل الزاوية في المثلثات قائمة الزاوية.
- يستخدام ظل الزاوية في إيجاد أطوال أضلاع مثلث وقياسات زواياه وفي حل مسائل حياتية.
- يوجد قياس الزاوية إذا علم ظلها.
- يوجد قياس الزاوية التي يصنعها مستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.
- يتعرف مقلوب ظل الزاوية في المثلثات قائمة الزاوية.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

ظل الزاوية ظا (tangent) – مقلوب ظل الزاوية ظتا (cotangent).

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة مدرجة – منقلة – فرجار – آلة حاسبة علمية – جهاز إسقاط – حاسوب.

٤ التمهيد

أوّلًا: مراجعة ما يلي:

- مفهوم النسبة.
- رسم مستقيم في المستوى الإحداثي.

ثانيًا: طرح موقف حياتي يبيّن أهمية دراسة ظل الزاوية مثل: كيف يمكن حساب ارتفاع برج من نقطة تبعد عنه مسافة معينة؟

٥ التدريس

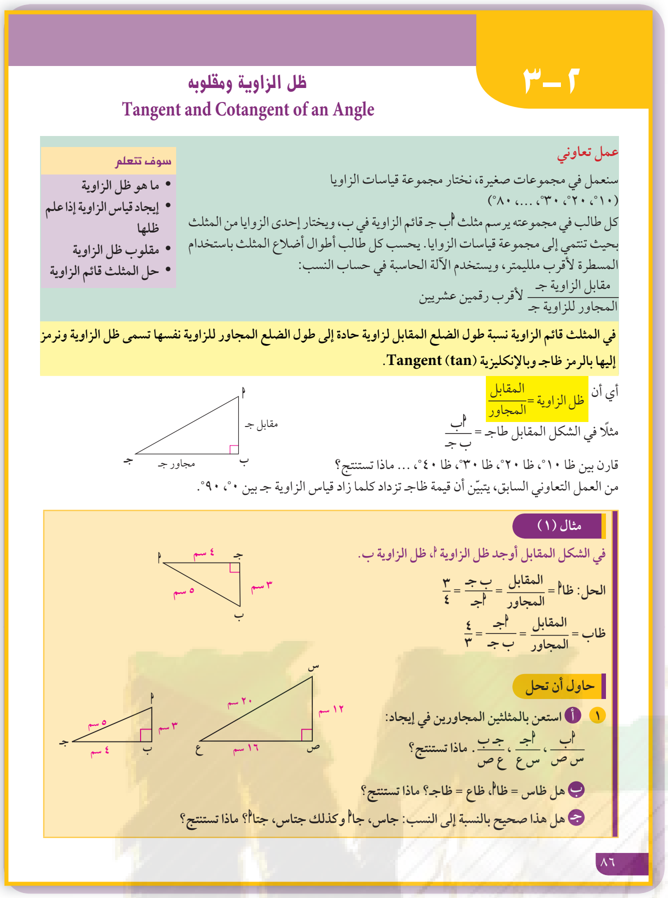
ابدأ بالعمل التعاوني الوارد في كتاب الطالب على مرحلتين:

تأكد من أن جميع الطلاب قد استخدموا برنامج الدرجات على الآلة الحاسبة.

اطلب إليهم رسم مثلث قائم الزاوية، وليكن قياس إحدى زواياه ٣٠°، ثم اطلب إليهم إيجاد النسبة التالية:

$$\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية}}.$$

استنتج من هذه الأعمال أنهم توصلوا إلى القيمة نفسها، واطلب إليهم تسمية هذه النسبة ظل الزاوية ٣٠°.



٢ـ٣

ظل الزاوية ومقلوبه
Tangent and Cotangent of an Angle

عمل تعاوني

سنعمل في مجموعات صغيرة، نختار مجموعة قياسات الزوايا (١٠°، ٢٠°، ٣٠°، ...، ٨٠°)

كل طالب في مجموعته يرسم مثلث أب جـ قائم الزاوية في ب، ويختار إحدى الزوايا من المثلث بحيث تنتمي إلى مجموعة قياسات الزوايا. يحسب كل طالب أطوال أضلاع المثلث باستخدام المسطرة لأقرب ملليمتر، ويستخدم الآلة الحاسبة في حساب النسب:

$\frac{\text{مقابل الزاوية جـ}}{\text{المجاور للزاوية جـ}}$ لأقرب رقمين عشريين

سوف تتعلم

- ما هو ظل الزاوية
- إيجاد قياس الزاوية إذا علم ظلها
- مقلوب ظل الزاوية
- حل المثلث قائم الزاوية

في المثلث قائم الزاوية نسبة طول الضلع المقابل لزاوية حادة إلى طول الضلع المجاور للزاوية نفسها تسمى ظل الزاوية ونرمز إليها بالرمز ظاجـ وبالإنكليزية Tangent (tan).

أي أن $\text{ظل الزاوية} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

مثلًا في الشكل المقابل طاجـ = $\frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}}$

أ، ب، جـ، مقابل جـ، مجاور جـ

قارن بين ظا ١٠°، ظا ٢٠°، ظا ٣٠°، ظا ٤٠°، ... ماذا تستنتج؟

من العمل التعاوني السابق، يتبيّن أن قيمة ظاجـ تزداد كلما زاد قياس الزاوية جـ بين ٠°، ٩٠°.

مثال (١)

في الشكل المقابل أوجد ظل الزاوية أ، ظل الزاوية ب.

أ، ب، جـ، ٤ سم، ٣ سم، ٥ سم

الحل: $\text{ظاأ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أجـ}} = \frac{٣}{٤}$

$\text{ظاب} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{٤}{٣}$

حاول أن تحل

١ أ استعن بالمثلثين المجاورين في إيجاد: $\frac{\text{أب}}{\text{س ص}}$، $\frac{\text{أجـ}}{\text{س ع}}$، $\frac{\text{جـ ب}}{\text{ع ص}}$. ماذا تستنتج؟

س، ص، ع، ١٢ سم، ٢٠ سم، ١٦ سم

أ، ب، جـ، ٣ سم، ٥ سم، ٤ سم

ب هل ظاس = ظاأ، ظاع = ظاجـ؟ ماذا تستنتج؟

جـ هل هذا صحيح بالنسبة إلى النسب: جاس، جاأ وكذلك جتاس، جتاأ؟ ماذا تستنتج؟

٨٦

مثال (٢) تطبيقات حياتية

أراد أحد أعضاء فريق الكشافة قياس المسافة بين قمتي جبلين، فوقف على قمة أحد الجبلين عند النقطة أ وحدّد علامة مميزة أمامه على قمة الجبل الآخر ولتكن ب، ثم اتبع التالي:

١ وضع مؤشر البوصلة باتجاه العلامة المميزة ب وحدّد قراءة المؤشر.

٢ سار مسافة ٥٠ مترًا على خط مستقيم عمودي على الخط المستقيم الواصل بين القمتين.

٣ وضع مؤشر البوصلة مرة ثانية في اتجاه العلامة المميزة وحدّد قراءة المؤشر.

٤ باستخدام قراءتي المؤشر وجد أن: ق(جـ) = ٨٦°.

استخدم ظل الزاوية في حساب المسافة بين قمتي الجبلين عند النقطة التي بدأ منها القياس.

ب، أ، جـ، ٥٠ م، ٨٦°

الحل: باستخدام ظل الزاوية

$\text{ظا}(٨٦°) = \frac{\text{أب}}{٥٠}$

أب = ٥٠ × ظا (٨٦°)

تستخدم الآلة الحاسبة

50 × TAN 86 =

يظهر 715.03331

إذًا، المسافة بين قمتي الجبلين هي ٧١٥ مترًا تقريبًا.

حاول أن تحل

٢ أوجد قيمة س لأقرب جزء من عشرة.

أ ٢,٥ سم، س سم، ٥٧°، ٣٣°

ب ١٠٠ سم، س سم، ٢٨°

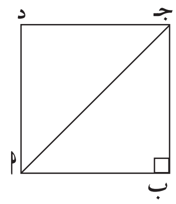
جـ ١٠ سم، ٥٤°، س سم

٨٧

اطلب إلى الطلاب، ضمن المجموعات، استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد:

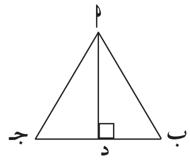
ظا ١٠°، ظا ٢٠°، ظا ٣٠°، ظا ٤٠°.

ثم مقارنة القيم الناتجة للتوصل إلى التعميم: كلما زاد قياس الزاوية، زاد ظلّها.



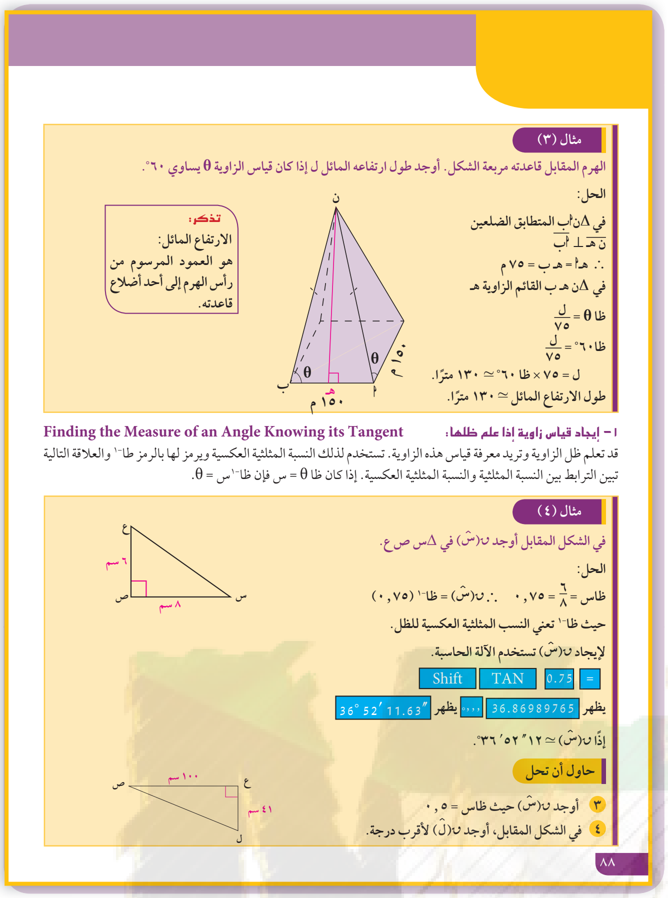
راجع مع الطلاب جدول النسب المثلثية.

استخدم مربعًا طول ضلعه ١، ثم ارسم وتره أجـ. أشر إلى أن طول الوتر يساوي $\sqrt{٢}$، واطلب إليهم إيجاد قيم جا، جتا، ظا لزاوية قياسها ٤٥°.



ثم استخدم مثلثًا متطابق الأضلاع طول ضلعه ل.

أشر إلى أن جـ د = $\frac{١}{٢}$ ل، أد = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل، واطلب إليهم إيجاد قيم جا، جتا، ظا للزوايا التي قياساتها ٣٠°، ٦٠°. ناقش معهم العلاقة بين النسب المثلثية للزاويتين ٣٠°، ٦٠°.



مثال (٣)

الهرم المقابل قاعدته مربعة الشكل. أوجد طول ارتفاعه المائل ل إذا كان قياس الزاوية θ يساوي ٦٠°.

الحل:

في Δن أب المتطابق الضلعين

$\overline{نهـ} \perp \overline{أب}$

∴ هـ أ = هـ ب = ٧٥ م

في Δن هـ ب القائم الزاوية هـ

ظا θ = $\frac{ل}{٧٥}$

ظا ٦٠° = $\frac{ل}{٧٥}$

ل = ٧٥ × ظا ٦٠° ≃ ١٣٠ مترًا.

طول الارتفاع المائل ≃ ١٣٠ مترًا.

تذكر:
الارتفاع المائل:
هو العمود المرسوم من رأس الهرم إلى أحد أضلاع قاعدته.

١ – إيجاد قياس زاوية إذا علم ظلها: Finding the Measure of an Angle Knowing its Tangent

قد تعلم ظل الزاوية وتريد معرفة قياس هذه الزاوية. تستخدم لذلك النسبة المثلثية العكسية ويرمز لها بالرمز طا$^{-١}$ والعلاقة التالية تبين الترابط بين النسبة المثلثية والنسبة المثلثية العكسية. إذا كان ظا θ = س فإن ظا$^{-١}$س = θ.

مثال (٤)

في الشكل المقابل أوجد ق($\hat{س}$) في Δس ص ع.

الحل:

ظاس = $\frac{٦}{٨}$ = ٠,٧٥ ∴ ق($\hat{س}$) = ظا$^{-١}$ (٠,٧٥)

حيث ظا$^{-١}$ تعني النسب المثلثية العكسية للظل.

لإيجاد ق($\hat{س}$) تستخدم الآلة الحاسبة.

Shift TAN 0.75 =

يظهر 36.86989765 °''' يظهر 36° 52′ 11.63″

إذًا ق($\hat{س}$) ≃ ٣٦° ٥٢′ ١٢″.

حاول أن تحل

٣ أوجد ق($\hat{س}$) حيث ظاس = ٠,٥

٤ في الشكل المقابل، أوجد ق($\hat{ل}$) لأقرب درجة.

٨٨

ملاحظة حول المثال (١)

ركِّز مع الطلاب على أن ظل الزاوية يُمكن أن يكون أصغر من ١ أو أكبر من ١ للزاوية الحادّة في المثلث قائم الزاوية.

تحقق من استخدام الطلاب للآلة الحاسبة بشكل صحيح، وكلّفهم بإيجاد ظا ٤٥°، ثم تأكد من فهم الطلاب أن:

ظا٤٥° = ١.

إذا كانت ٤٥° < س < ٩٠° يكون ظاس > ١

إذا كانت ٠° < س < ٤٥° يكون ظاس < ١

للمتفوقين: إذا كانت $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ ، $\hat{جـ}$ ثلاث زوايا حادة في مثلث، قارن بين:

ظاأ + ظاب + ظاجـ ، ظاأ × ظاب × ظاجـ ، في الحالات التالية:

(أ) ق(أ) = ٦٠° ، ق($\hat{ب}$) = ٥٠°

(ب) ق($\hat{أ}$) = ٦٠° ، ق($\hat{ب}$) = ٤٥°

(جـ) ق($\hat{أ}$) = ٧٠° ، ق($\hat{ب}$) = ٧٠°

إثرائي للمعلم:

في Δأب جـ، أثبت أن ظاأ + ظاب + ظاجـ = ظاأ × ظاب × ظاجـ.

البرهان:

ق($\hat{أ}$) + ق($\hat{ب}$) + ق($\hat{جـ}$) = π مجموع قياسات زوايا المثلث.

ق($\hat{أ}$) + ق($\hat{ب}$) = π − ق($\hat{جـ}$)

$$\text{ظاأ} \times \text{ظاب} \times \text{ظاجـ} = \frac{\text{جا(أ + ب)}}{\text{جتاأ جتاب}} + \frac{\text{جاجـ}}{\text{جتاجـ}}$$

$$= \frac{\text{جا(π − جـ)}}{\text{جتاأ جتاب}} + \frac{\text{جاجـ}}{\text{جتاجـ}}$$

$$= \frac{\text{جاجـ}}{\text{جتاأ جتاب}} + \frac{\text{جاجـ}}{\text{جتاجـ}}$$

$$= \text{جاجـ} \left(\frac{١}{\text{جتاأ جتاب}} + \frac{١}{\text{جتاجـ}} \right)$$

$$= \text{جاجـ} \frac{\text{جتاجـ + جتاأ جتاب}}{\text{جتاأ جتاب جتاجـ}}$$

$$= \frac{\text{جاجـ}}{\text{جتاجـ}} \times \frac{\text{جتا[π − (أ + ب)] + جتاأ جتاب}}{\text{جتاأ جتاب}}$$

$$= \text{ظاجـ} \frac{\text{−جتاأ جتاب + جاأ جاب + جتاأ جتاب}}{\text{جتاب جتاأ}}$$

$$= \text{ظاجـ} \frac{\text{جاأ جاب}}{\text{جتاب جتاأ}}$$

$$= \text{ظاأ} \times \text{ظاب} \times \text{ظاجـ}$$

مثال (٢)   تطبيقات حياتية

في مناقشة المثال، يستحسن استخدام بوصلة وتمثيل ما قام به الكشاف (ويمكن تطبيقه عمليًّا في ساحة المدرسة) وأخذ القراءات من الطلاب نفسهم. وفي الحل بيّن لهم أننا نحصل على قيمة س بالضرب التقاطعي ظا٨٦° = $\frac{\text{س}}{٥٠}$.

ساعد الطلاب كي يتأكدوا من أن نظام الآلة الحاسبة هو بالدرجات قبل استخدامها، ثم وضّح كيفيّة استخدامها للحصول على ظل الزاوية ووظفه في إيجاد قيمة س.

فكر متطور: اطلب إلى الطلاب تحديد المثلث قائم الزاوية، إذا كان كل من زاويتيه الحادتين متساويين.

مثال (٤)

اشرح للطلاب أن باستطاعتهم استخدام الآلة الحاسبة ومعكوس الظل لإيجاد قياس زاوية حادّة (باستخدام $\tan^{-1}$).

مثال (٥)

تأكد من أن الطلاب فهموا جيّدًا الزاوية الموجودة بين المحور الموجب للسينات والمستقيم. ساعدهم على رسم مستقيم أفقي موازٍ لمحور السينات يتقاطع مع مستقيم رأسي موازٍ لمحور الصادات، فنحصل على زاوية قائمة. ونحدد الزاوية ٲ التي هي زاوية محور السينات مع المستقيم.

٦ الربط

وقف رجل أمام أحد الأبراج وأراد قياس ارتفاعه عن سطح الأرض باستخدام قياس الزاوية بين الخط الأفقي $\overleftrightarrow{\text{ٲب}}$ والخط المائل $\overleftrightarrow{\text{ٲجـ}}$، فوجد أن هذه الزاوية قياسها يساوي ٧٠°. إذا كانت المسافة بين نقطة وقوفه ٲ ونقطة التقاء حائط البرج مع الأرض ب تساوي ٦٠ مترًا، فما ارتفاع هذا البرج؟

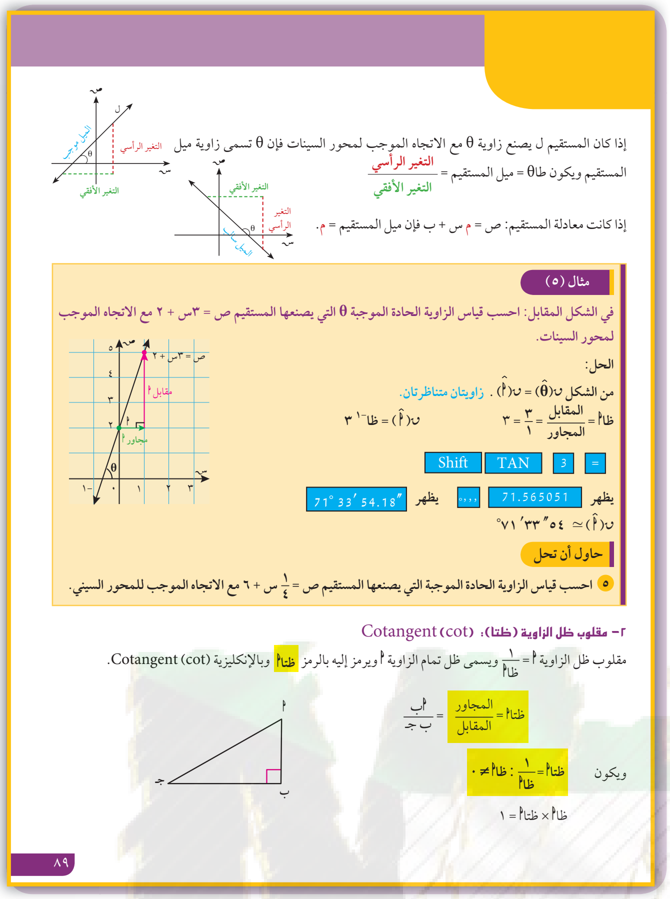
ظا٧٠° = $\frac{\text{ع}}{٦٠}$ ⟸ ع = ٦٠ × ظا ٧٠° ≃ ١٦٥ مترًا.

تأكد من أن الطلاب يستخدمون الآلة الحاسبة بشكل صحيح.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

يرتكب بعض الطلاب الأخطاء بين الضلع المقابل للزاوية والضلع المجاور للزاوية.

مدّ يد المساعدة: ارسم مثلثًا قائم الزاوية في عدة مواقف، حتى يتمكن الطلاب من تسمية الضلع المقابل أو الضلع المجاور للزاوية الحادة.


إذا كان المستقيم ل يصنع زاوية θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن θ تسمى زاوية ميل المستقيم ويكون ظاθ = ميل المستقيم = $\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$

إذا كانت معادلة المستقيم: ص = م س + ب فإن ميل المستقيم = م.

مثال (٥)

في الشكل المقابل: احسب قياس الزاوية الحادة الموجبة θ التي يصنعها المستقيم ص = ٣س + ٢ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

الحل:

من الشكل ق($\hat{\theta}$) = ق($\hat{ٲ}$) . زاويتان متناظرتان.

ظاٲ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٣}{١} = ٣$ ق($\hat{ٲ}$) = ظا$^{-1}$ ٣

Shift TAN 3 =

يظهر 71.565051 °''' يظهر 71° 33′ 54.18″

ق($\hat{ٲ}$) ≃ ٥٤″ ٣٣′ ٧١°

حاول أن تحل

٥ احسب قياس الزاوية الحادة الموجبة التي يصنعها المستقيم ص = $\frac{١}{٤}$ س + ٦ مع الاتجاه الموجب للمحور السيني.

٢- مقلوب ظل الزاوية (ظتا): Cotangent (cot)

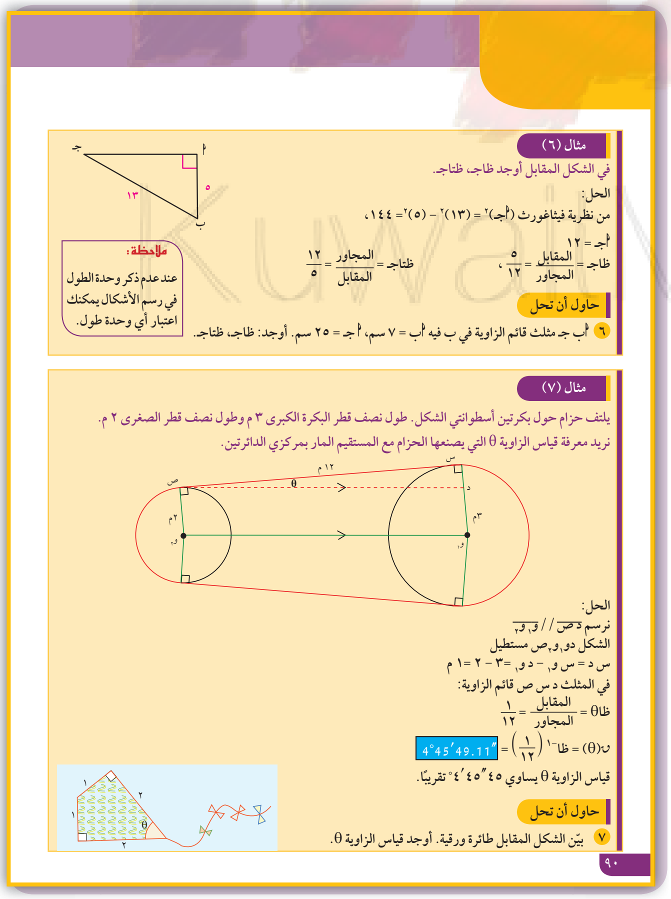
مقلوب ظل الزاوية ٲ = $\frac{١}{\text{ظاٲ}}$ ويسمى ظل تمام الزاوية ٲ ويرمز إليه بالرمز ظتاٲ وبالإنكليزية Cotangent (cot).

ظتاٲ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{\text{ٲب}}{\text{ب جـ}}$

ويكون ظتاٲ = $\frac{١}{\text{ظاٲ}}$: ظاٲ ≠ ٠

ظاٲ × ظتاٲ = ١

٨٩


مثال (٦)

في الشكل المقابل أوجد ظاجـ، ظتاجـ.

الحل:

من نظرية فيثاغورث (ٲجـ)^٢ = (١٣)^٢ − (٥)^٢ = ١٤٤،

ٲجـ = ١٢

ظاجـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٥}{١٢}$ ، ظتاجـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{١٢}{٥}$

ملاحظة: عند عدم ذكر وحدة الطول في رسم الأشكال يمكنك اعتبار أي وحدة طول.

حاول أن تحل

٦ ٲب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه ٲب = ٧ سم، ٲجـ = ٢٥ سم. أوجد: ظاجـ، ظتاجـ.

مثال (٧)

يلتف حزام حول بكرتين أسطوانتي الشكل. طول نصف قطر البكرة الكبرى ٣ م وطول نصف قطر الصغرى ٢ م.

نريد معرفة قياس الزاوية θ التي يصنعها الحزام مع المستقيم المار بمركزي الدائرتين.

الحل:

نرسم $\overline{\text{د ص}}$ // $\overline{\text{و}_١\text{و}_٢}$

الشكل دو$_١$و$_٢$ص مستطيل

س د = س و$_١$ − د و$_١$ = ٣ − ٢ = ١ م

في المثلث د س ص قائم الزاوية:

ظاθ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{١}{١٢}$

ق(θ) = ظا$^{-1}$ $\left(\frac{١}{١٢}\right)$ = 4°45′49.11″

قياس الزاوية θ يساوي ٤٥″ ٤٥′ ٤° تقريبًا.

حاول أن تحل

٧ بيّن الشكل المقابل طائرة ورقية. أوجد قياس الزاوية θ.

٩٠

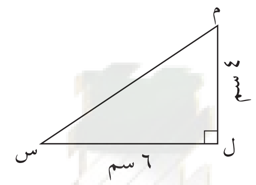
ساعد الطلاب على رؤية أن ظل الزاوية مُعرّف إذا كانت الزاوية حادّة في المثلث قائم الزاوية أي إذا كان قياسها بين ٠°، ٩٠°.

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» الواردة في كتاب الطلاب، وتأكد من فهمهم للفرق بين ظل الزاوية ومقلوبه.

اختبار سريع

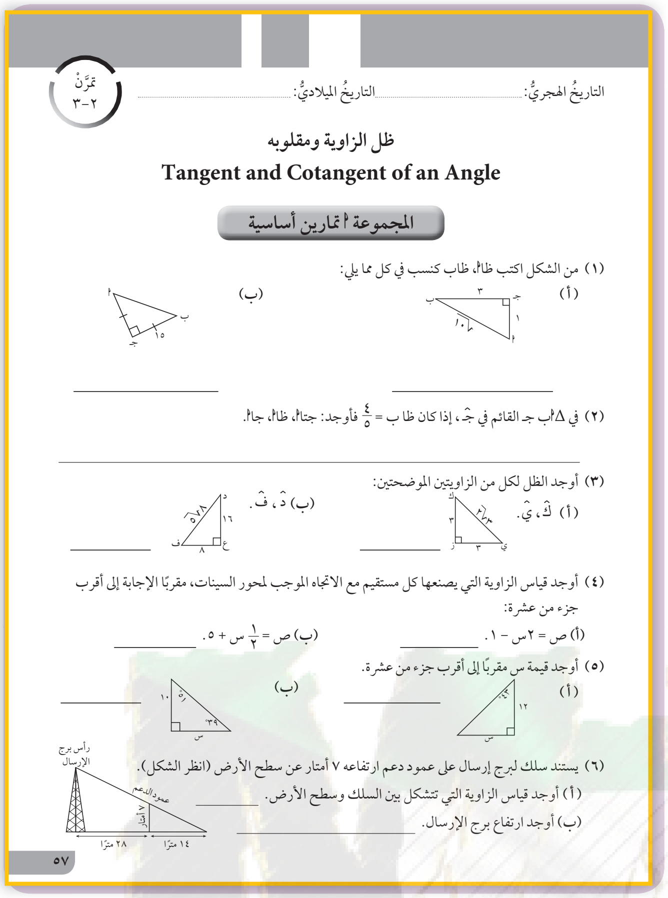
❶ في الشكل المقابل أوجد ظام، ظاس.



$\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$

❷ أوجد ظل الزاوية التي يصنعها المستقيم ص = $\frac{٢}{٣}$ س + ٤ مع القسم الموجب من المحور السيني. $\frac{٢}{٣}$

❸ أكمل: ظا θ = $\frac{٣}{٤}$ ∴ ظتا θ = ... $\frac{٤}{٣}$


التاريخُ الهجريُّ:.................. التاريخُ الميلاديُّ:..................

تمرَّنْ ٢-٣

ظل الزاوية ومقلوبه

Tangent and Cotangent of an Angle

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) من الشكل اكتب ظاأ، ظاب كنسب في كل مما يلي:

(أ) (ب)

(٢) في Δأب جـ القائم في جـ، إذا كان ظا ب = $\frac{٤}{٥}$ فأوجد: جتاأ، ظاأ، جاأ.

(٣) أوجد الظل لكل من الزاويتين الموضحتين:

(أ) كَ، يَ. (ب) دَ، فَ.

(٤) أوجد قياس الزاوية التي يصنعها كل مستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، مقربًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة:

(أ) ص = ٢س − ١. (ب) ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٥.

(٥) أوجد قيمة س مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة.

(أ) (ب)

(٦) يستند سلك لبرج إرسال على عمود دعم ارتفاعه ٧ أمتار عن سطح الأرض (انظر الشكل).

(أ) أوجد قياس الزاوية التي تتشكل بين السلك وسطح الأرض.

(ب) أوجد ارتفاع برج الإرسال.

رأس برج الإرسال

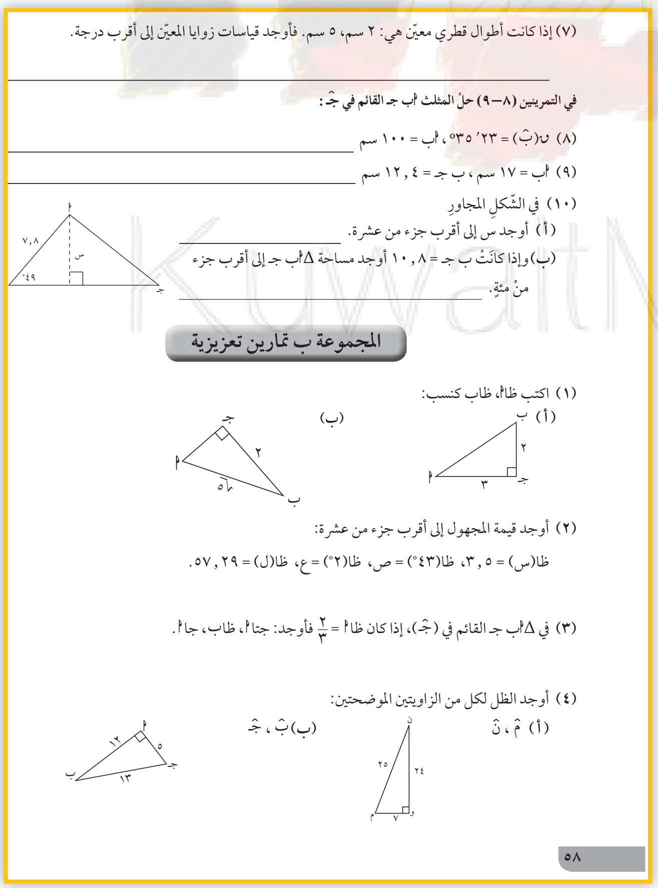
عمود الدعم

٧ أمتار

٢٨ مترًا

١٤ مترًا

٥٧


(٧) إذا كانت أطوال قطري معيّن هي: ٢ سم، ٥ سم. فأوجد قياسات زوايا المعيّن إلى أقرب درجة.

في التمرينين (٨–٩) حلّ المثلث أب جـ القائم في جـ:

(٨) ق(بَ) = ٣٥° ٢٣′، أب = ١٠٠ سم

(٩) أب = ١٧ سم، ب جـ = ١٢,٤ سم

(١٠) في الشّكلِ المجاورِ

(أ) أوجد س إلى أقرب جزء من عشرة.

(ب) وإذا كانَتْ ب جـ = ١٠,٨ أوجد مساحة Δأب جـ إلى أقرب جزء من مئةٍ.

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) اكتب ظاأ، ظاب كنسب:

(أ) (ب)

(٢) أوجد قيمة المجهول إلى أقرب جزء من عشرة:

ظا(س) = ٣,٥، ظا(٤٣°) = ص، ظا(٢°) = ع، ظا(ل) = ٥٧,٢٩.

(٣) في Δأب جـ القائم في (جـ)، إذا كان ظاأ = $\frac{٢}{٣}$ فأوجد: جتاأ، ظاب، جاأ.

(٤) أوجد الظل لكل من الزاويتين الموضحتين:

(أ) مَ، نَ (ب) بَ، جَ

٥٨

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

❶ (أ) $\frac{\text{أب}}{\text{س ص}} = \frac{٣}{١٢} = \frac{١}{٤}$ ، $\frac{\text{أجـ}}{\text{س ع}} = \frac{٥}{٢٠} = \frac{١}{٤}$ ،

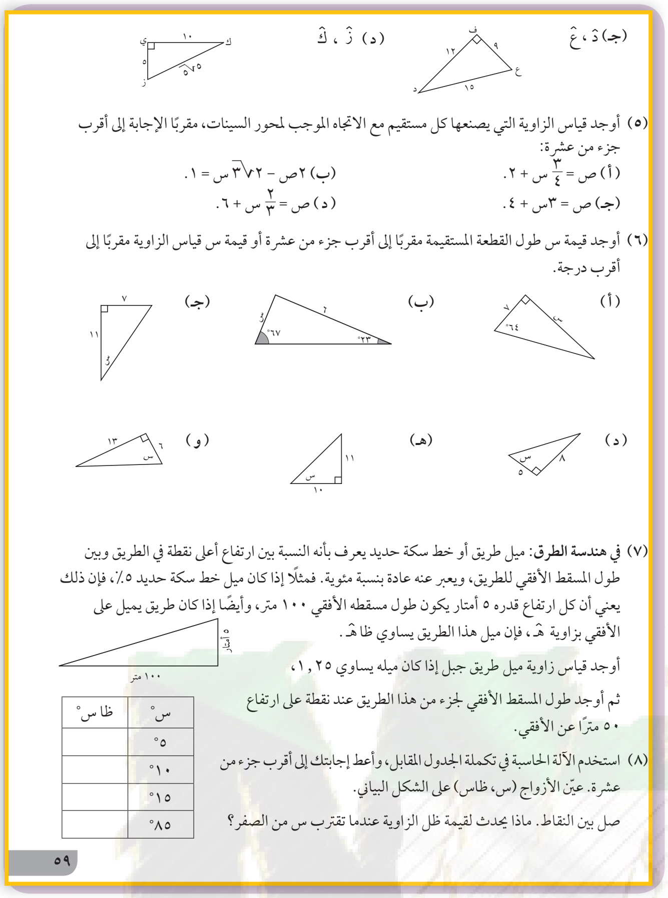
$\frac{\text{جـ ب}}{\text{ع ص}} = \frac{٤}{١٦} = \frac{١}{٤}$ لذا يكون

$\frac{\text{أب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{س ع}} = \frac{\text{جـ ب}}{\text{ع ص}}$

(ب) نعم، نعم، ق(سَ) = ق(أَ).

ق(عَ) = ق(جَ).

(جـ) نعم، نعم، ق(سَ) = ق(أَ).


(جـ) دَ ، عَ

(د) زَ ، كَ

(٥) أوجد قياس الزاوية التي يصنعها كل مستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، مقربًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة:

(أ) ص = $\frac{٣}{٤}$ س + ٢.　　(ب) ٢ص − $٢\sqrt{٣}$ س = ١.

(جـ) ص = ٣س + ٤.　　(د) ص = $\frac{٢}{٣}$ س + ٦.

(٦) أوجد قيمة س طول القطعة المستقيمة مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة أو قيمة س قياس الزاوية مقربًا إلى أقرب درجة.

(أ)　(ب)　(جـ)

(د)　(هـ)　(و)

(٧) **في هندسة الطرق:** ميل طريق أو خط سكة حديد يعرف بأنه النسبة بين ارتفاع أعلى نقطة في الطريق وبين طول المسقط الأفقي للطريق، ويعبر عنه عادة بنسبة مئوية. فمثلًا إذا كان ميل خط سكة حديد ٥٪، فإن ذلك يعني أن كل ارتفاع قدره ٥ أمتار يكون طول مسقطه الأفقي ١٠٠ متر، وأيضًا إذا كان طريق يميل على الأفقي بزاوية هـَ، فإن ميل هذا الطريق يساوي ظا هـَ.

أوجد قياس زاوية ميل طريق جبل إذا كان ميله يساوي ١,٢٥،

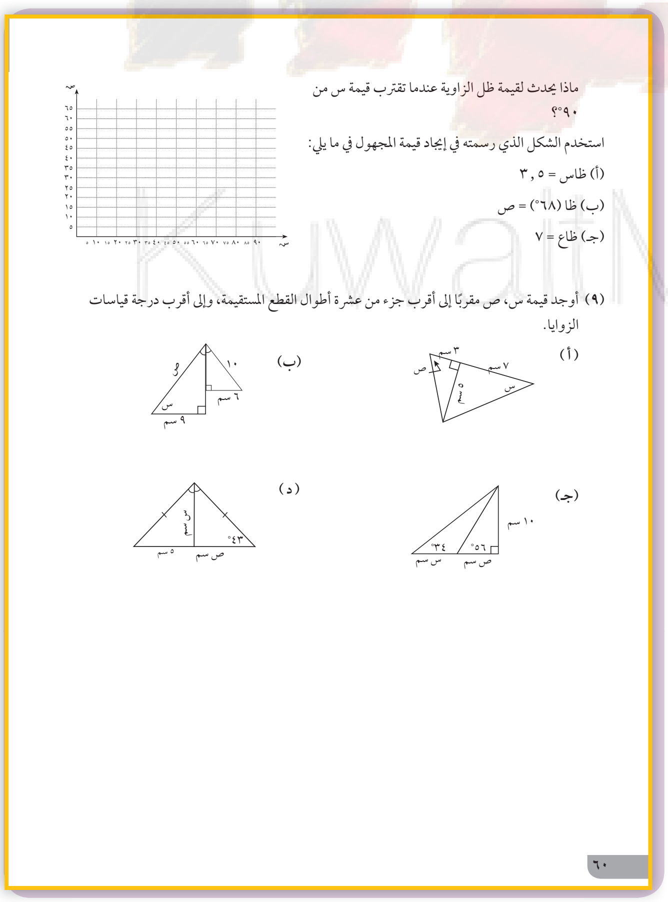
ثم أوجد طول المسقط الأفقي لجزء من هذا الطريق عند نقطة على ارتفاع ٥٠ مترًا عن الأفقي.

(٨) استخدم الآلة الحاسبة في تكملة الجدول المقابل، وأعط إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة. عيّن الأزواج (س، ظاس) على الشكل البياني.

س°	ظا س°
٥°	
١٠°	
١٥°	
٨٥°	

صل بين النقاط. ماذا يحدث لقيمة ظل الزاوية عندما تقترب س من الصفر؟

٥٩


ماذا يحدث لقيمة ظل الزاوية عندما تقترب قيمة س من ٩٠°؟

استخدم الشكل الذي رسمته في إيجاد قيمة المجهول في ما يلي:

(أ) ظاس = ٣,٥

(ب) ظا (٦٨°) = ص

(جـ) ظاع = ٧

(٩) أوجد قيمة س، ص مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة أطوال القطع المستقيمة، وإلى أقرب درجة قياسات الزوايا.

(أ)　(ب)

(جـ)　(د)

٦٠

٢ (أ) ظا ٥٧° = $\frac{\text{س}}{٢,٥}$ ⟸ س = ٢,٥ × ظا ٥٧°

≃ ٣,٨٥.

س ≃ ٣,٨٥

(ب) ظا ٦٢° = $\frac{\text{س}}{١٠٠}$ ⟸ س = ١٠٠ × ظا ٦٢°

≃ ١٨٨.

س ≃ ١٨٨

(جـ) ظا ٥٤° = $\frac{\text{س}}{١٠}$ ⟸ س ≃ ١٣,٧٦.

٣ ق(سَ) = ظا$^{-1}$ (٠,٥) ≃ ٢٦° ٣٣′ ٥٤″

٤ ق(لَ) = ظا$^{-1}$ $\left(\frac{١٠٠}{٤١}\right)$ = ٦٧° ٤٢′ ٢٣″ ≃ ٦٨°

٥ ق(أَ) = ظا$^{-1}$ $\left(\frac{١}{٤}\right)$ ≃ ١٤° ٢′ ١٠″.

٦ ظاجـ = $\frac{٧}{٢٤}$ ، ظتاجـ = $\frac{٢٤}{٧}$.

٧ ∵ جا$\left(\frac{\theta}{٢}\right)$ = $\frac{١}{٢}$

∴ $\left(\frac{\theta}{٢}\right)$ = ظا$^{-1}$ $\left(\frac{١}{٢}\right)$

θ ≃ ٥٣° ٧′ ٤٨″.

٢-٤: النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

١ الأهداف

- يوجد النسب المثلثية للزوايا: ٣٠°، ٦٠°، ٤٥°، ٩٠°.
- يستخدم النسب المثلثية في المثلث: ثلاثيني ستيني.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

زوايا خاصة – مثلث ثلاثيني ستيني – متطابقات مثلثية.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة مدرجة – منقلة – فرجار – آلة حاسبة – ورقة رسم بياني – مثلث خشبي ثلاثيني ستيني – مثلث خشبي قائم الزاوية متطابق الضلعين – جهاز إسقاط – حاسوب.

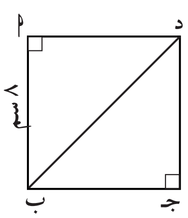
٤ التمهيد

اسأل الطلاب:

- ما المثلث متطابق الأضلاع؟
- ما المثلث متطابق الضلعين؟
- ما العمود في المثلث؟
- ما مساحة المثلث؟
- ما المنصف للزاوية؟
- اطلب إليهم رسم زوايا موجهة موجبة وزوايا موجهة سالبة.
- اطلب إليهم رسم زوايا موجهة في الوضع القياسي.

٥ التدريس

اطلب إلى الطلاب استخدام ورقة الرسم البياني، ودعهم يستخدمون المسطرة ليرسموا مربعًا طول ضلعه ٨ سم، ثم يرسموا أحد قطريه.

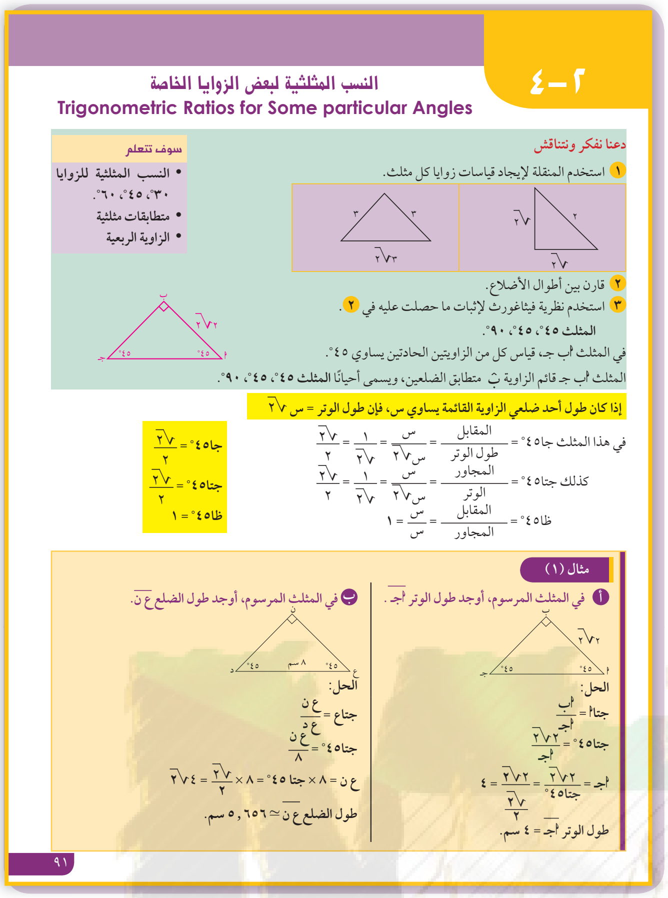


اسأل...

(أ) كم مثلثًا حصلتم عليه؟

(ب) ما نوع كل مثلث؟

(جـ) اطلب إليهم استخدام نظرية فيثاغورث لإيجاد طول القطر $\overline{\text{دب}}$.



٢-٤

النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

Trigonometric Ratios for Some particular Angles

سوف تتعلم

- النسب المثلثية للزوايا ٣٠°، ٤٥°، ٦٠°.
- متطابقات مثلثية
- الزاوية الربعية

دعنا نفكر ونتناقش

١ استخدم المنقلة لإيجاد قياسات زوايا كل مثلث.

٢ قارن بين أطوال الأضلاع.

٣ استخدم نظرية فيثاغورث لإثبات ما حصلت عليه في ٢.

المثلث ٤٥°، ٤٥°، ٩٠°.

في المثلث أ ب جـ، قياس كل من الزاويتين الحادتين يساوي ٤٥°.

المثلث أ ب جـ قائم الزاوية ب متطابق الضلعين، ويسمى أحيانًا المثلث ٤٥°، ٤٥°، ٩٠°.

إذا كان طول أحد ضلعي الزاوية القائمة يساوي س، فإن طول الوتر = س $\sqrt{٢}$

في هذا المثلث جا٤٥° = $\frac{\text{المقابل}}{\text{طول الوتر}} = \frac{\text{س}}{\text{س}\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

كذلك جتا٤٥° = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{س}}{\text{س}\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

ظا٤٥° = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{س}}{\text{س}} = ١$

جا٤٥° = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

جتا٤٥° = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

ظا٤٥° = ١

مثال (١)

أ في المثلث المرسوم، أوجد طول الوتر $\overline{\text{أجـ}}$.

الحل:

جتاأ = $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$

جتا٤٥° = $\frac{٢\sqrt{٢}}{\text{أجـ}}$

أجـ = $\frac{٢\sqrt{٢}}{\text{جتا٤٥°}} = \frac{٢\sqrt{٢}}{\frac{\sqrt{٢}}{٢}} = ٤$

طول الوتر $\overline{\text{أجـ}}$ = ٤ سم.

ب في المثلث المرسوم، أوجد طول الضلع $\overline{\text{ع ن}}$.

الحل:

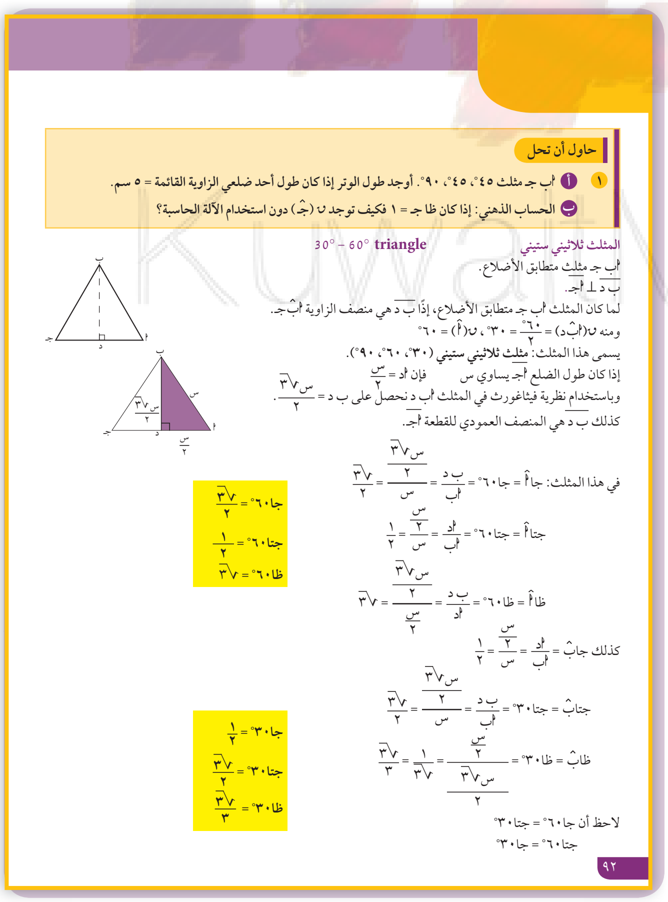
جتاع = $\frac{\text{ع ن}}{\text{ع د}}$

جتا٤٥° = $\frac{\text{ع ن}}{٨}$

ع ن = ٨ × جتا ٤٥° = ٨ × $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ = ٤$\sqrt{٢}$

طول الضلع $\overline{\text{ع ن}}$ ≃ ٥,٦٥٦ سم.

٩١



حاول أن تحل

١ أ أ ب جـ مثلث ٤٥°، ٤٥°، ٩٠°. أوجد طول الوتر إذا كان طول أحد ضلعي الزاوية القائمة = ٥ سم.

ب الحساب الذهني: إذا كان ظا جـ = ١ فكيف توجد ق (جـ) دون استخدام الآلة الحاسبة؟

المثلث ثلاثيني ستيني 30° – 60° triangle

أ ب جـ مثلث متطابق الأضلاع.

$\overline{\text{ب د}}$ ⊥ $\overline{\text{أجـ}}$.

لما كان المثلث أ ب جـ متطابق الأضلاع، إذًا $\overline{\text{ب د}}$ هي منصف الزاوية أ ب جـ.

ومنه ق(أ ب د) = $\frac{٦٠°}{٢}$ = ٣٠°، ق(أ) = ٦٠°

يسمى هذا المثلث: مثلث ثلاثيني ستيني (٣٠°، ٦٠°، ٩٠°).

إذا كان طول الضلع أجـ يساوي س فإن أد = $\frac{\text{س}}{٢}$

وباستخدام نظرية فيثاغورث في المثلث أ ب د نحصل على ب د = $\frac{\text{س}\sqrt{٣}}{٢}$.

كذلك $\overline{\text{ب د}}$ هي المنصف العمودي للقطعة $\overline{\text{أجـ}}$.

في هذا المثلث: جاأ = جا٦٠° = $\frac{\text{ب د}}{\text{أب}} = \frac{\frac{\text{س}\sqrt{٣}}{٢}}{\text{س}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتاأ = جتا٦٠° = $\frac{\text{أد}}{\text{أب}} = \frac{\frac{\text{س}}{٢}}{\text{س}} = \frac{١}{٢}$

ظاأ = ظا٦٠° = $\frac{\text{ب د}}{\text{أد}} = \frac{\frac{\text{س}\sqrt{٣}}{٢}}{\frac{\text{س}}{٢}} = \sqrt{٣}$

كذلك جاب = $\frac{\text{أد}}{\text{أب}} = \frac{\frac{\text{س}}{٢}}{\text{س}} = \frac{١}{٢}$

جتاب = جتا٣٠° = $\frac{\text{ب د}}{\text{أب}} = \frac{\frac{\text{س}\sqrt{٣}}{٢}}{\text{س}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظاب = ظا٣٠° = $\frac{\frac{\text{س}}{٢}}{\frac{\text{س}\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

جا٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتا٦٠° = $\frac{١}{٢}$

ظا٦٠° = $\sqrt{٣}$

جا٣٠° = $\frac{١}{٢}$

جتا٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظا٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

لاحظ أن جا٦٠° = جتا٣٠°

جتا٦٠° = جا٣٠°

٩٢

(د) اسأل: على افتراض أن طول ضلع المربع هو س، ما طول القطر $\overline{\text{دب}}$ بدلالة س؟

(هـ) أوجد جا($\widehat{\text{أدب}}$)، جتا($\widehat{\text{أدب}}$). ماذا تستنتج؟

ركّز مع الطلاب على فهم المثلث الثلاثيني الستيني وعلاقته بالمثلث متطابق الأضلاع. دعهم يحلون مسائل تتضمن إعطاء طول ضلع واحد، ثم إيجاد بقية الأضلاع في المثلث الثلاثيني الستيني.

شجّع الطلاب على استخدام المتطابقات المثلثية، لأنها تساعد على إيجاد النسب المثلثية في حال كان معطى إحداها.

مثال ذلك: لتكن أ زاوية في مثلث قائم، حيث جا(أ) = $\frac{٤}{٥}$.

أوجد: جتا(أ)، ظا(أ)، ظتا(أ)، قا(أ)، قتا(أ).

في المثال (٤) صفحة (٩٤)

ناقش مع الطلاب زاوية انحناء برج بيزا، واطلب إليهم إجراء بحث عن هذا البرج وكيفية تدعيمه.

٦ الربط

تطبيق على برج بيزا حيث يقف مراقبان يشاهدان رأس البرج بزاويتين ٤٥°، ٣٠°.

استخدمت النسب المثلثية ٤٥°، ٣٠° لمعرفة ارتفاع هذا البرج.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ بعض الطلاب في تحديد ارتفاعات المثلث منفرج الزاوية.

مد يد المساعدة: وضح للطلاب كيفية الحصول على هذه الارتفاعات.

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» الواردة في كتاب الطالب وتحقق من دقة عملهم.

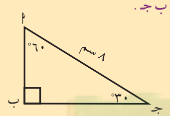
باستخدام الحاسبة يمكنك إيجاد كل من الجيب، جيب التمام والظل لكل زاوية ربعية. والجدول التالي يبيّن النسب المثلثية للزوايا الخاصة والربعية.

الزاوية هـ		جاهـ	جتاهـ	ظاهـ
القياس الستيني	القياس الدائري			
٠°	٠	٠	١	٠
٣٠°	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$
٤٥°	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	١
٦٠°	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\sqrt{٣}$
٩٠°	$\frac{\pi}{٢}$	١	٠	غير معرّف
١٨٠°	π	٠	−١	٠
٢٧٠°	$\frac{٣\pi}{٢}$	−١	٠	غير معرّف
٣٦٠°	٢π	٠	١	٠

هل تعلم؟
وضعت جداول النسب المثلثية منذ أكثر من ٢٠٠٠ عام لتستخدم في علم الفلك.

مثال (٢)

أب جـ مثلث ثلاثيني ستيني. طول الوتر = ٨ سم. أوجد طول كل من الضلعين $\overline{\text{أب}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$.



الحل:

في Δأب جـ، جاجـ = جا٣٠° = $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$

$\frac{١}{٢} = \frac{\text{أب}}{٨}$

أب = ٤

جتاجـ = جتا(٣٠°) = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أجـ}}$

$\frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{\text{ب جـ}}{٨}$

ب جـ = $٤\sqrt{٣}$

طول الضلع $\overline{\text{أب}}$ = ٤ سم وطول الضلع $\overline{\text{ب جـ}}$ = $٤\sqrt{٣} \simeq ٦,٩$ سم.

حاول أن تحل

٢ في مثلث ثلاثيني ستيني إذا كان طول الضلع الأصغر = $\sqrt{٦}$ سم، فأوجد طول الضلعين الباقيين.

مثال (٣) **تطبيق لوحة إرشادية لمدرسة**

تشير إحدى لوحات السير على وجود مدرسة. اللوحة على شكل مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه ٦٠ سم. أوجد مساحة هذه اللوحة.

الحل:

طول العمود النازل من رأس مثلث متطابق الأضلاع إلى القاعدة = طول الضلع × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (أي ارتفاع المثلث)

= ٦٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢} \simeq ٥٢$ سم.

مساحة اللوحة = $\frac{\text{طول القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{٢} = \frac{٦٠ \times ٥٢}{٢} = ١\,٥٦٠$ سم^{٢}.

مساحة اللوحة تساوي حوالى ١ ٥٦٠ سم^{٢}.

حاول أن تحل

٣ معيّن يتكوّن من مثلثين متطابقي الأضلاع. أوجد مساحة المعين إذا كان طول ضلع المثلث = ٨ سم.

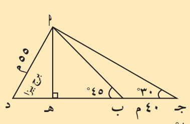
مثال (٤) **تطبيقات حياتية**

برج بيزا معلم أثري مشهور في إيطاليا. كان ارتفاع البرج ٥٥ مترًا قبل ميله نحو الجنوب. ($\overline{\text{أد}}$ في الرسم).
شاهد مراقبان موجودان في النقطتين ب، جـ قمة البرج بزاويتين قياساهما ٤٥°، ٣٠° على الترتيب.

أ عبّر عن طول كل من $\overline{\text{هـ ب}}$، $\overline{\text{هـ جـ}}$ بدلالة طول $\overline{\text{أهـ}}$.

ب أوجد أهـ علمًا أن المسافة بين النقطتين ب، جـ تساوي ٤٠ مترًا.

جـ نتيجة للأشغال المهمة على البرج بين العامين ١٩٩٣ – ٢٠٠١ تقلص البعد بين النقطتين هـ، د من ٤,٥ مترًا إلى ٤ أمتار. ما قياس ($\widehat{\text{أدهـ}}$) التي يصنعها البرج مع الأرض قبل الأشغال؟ وبعد الأشغال؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.



الحل: أ في المثلث أهـ ب: ظا ٤٥° = $\frac{\text{هـأ}}{\text{هـ ب}}$ = ١ ومنه هـ ب = هـأ

في المثلث أهـ جـ: ظا ٣٠° = $\frac{\text{هـأ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومنه هـ جـ = $\sqrt{٣}$ هـأ

ب هـ جـ = هـ ب + ب جـ

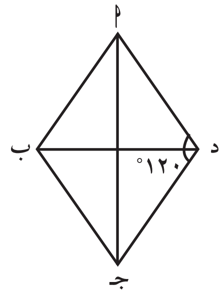
$\sqrt{٣}$ أهـ = هـأ + ٤٠ أي ($\sqrt{٣}$ − ١) أهـ = ٤٠

أهـ = $\frac{٤٠}{\sqrt{٣} - ١} \simeq ٥٤,٦٤$

جـ قبل الأشغال: جتا($\widehat{\text{أدهـ}}$) = $\frac{٤,٥}{٥٥}$، ق($\widehat{\text{أدجـ}}$) = جتا$^{-١}$ $\left(\frac{٤,٥}{٥٥}\right) \simeq$ ٥٦″ ٢١′ ٨٤°

بعد الأشغال: جتا($\widehat{\text{أدهـ}}$) = $\frac{٤}{٥٥}$، ق($\widehat{\text{أدجـ}}$) = جتا$^{-١}$ $\left(\frac{٤}{٥٥}\right) \simeq$ ٤٦″ ٤٩′ ٨٥°

اختبار سريع

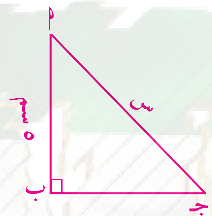


أب جـ د معيّن حيث
ق(∠أدجـ) = ١٢٠°،
ومساحته $٥٠\sqrt{٣}$ سم². أوجد
طول ضلعه وطول كل من قطريه.

$٥\sqrt{٢}$ سم، $\frac{٥\sqrt{٢}}{٢}$ سم، $\frac{٥\sqrt{٦}}{٢}$ سم

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»



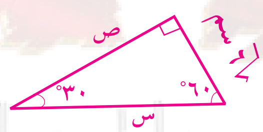
١ (أ) س = $٥\sqrt{٢}$ سم

(ب) ظا(جـ) = ١ = $\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المجاور}}$

أي: الضلع المقابل = الضلع المجاور

ويكون المثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين.

فتكون ق(جـ) = ٤٥°.



٢ جا(٣٠°) = $\frac{\sqrt{٦}}{س}$ ، $\frac{١}{٢} = \frac{\sqrt{٦}}{س}$ ،

س = $٢\sqrt{٦}$ سم

ظا(٣٠°) = $\frac{\sqrt{٦}}{ص}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٦}}{ص}$ ،

ص = $٣\sqrt{٢}$ سم

٣ كل مثلث هو متطابق الأضلاع وطول ضلعه ٨ سم،
لذا يكون الارتفاع $٤\sqrt{٣}$ سم.

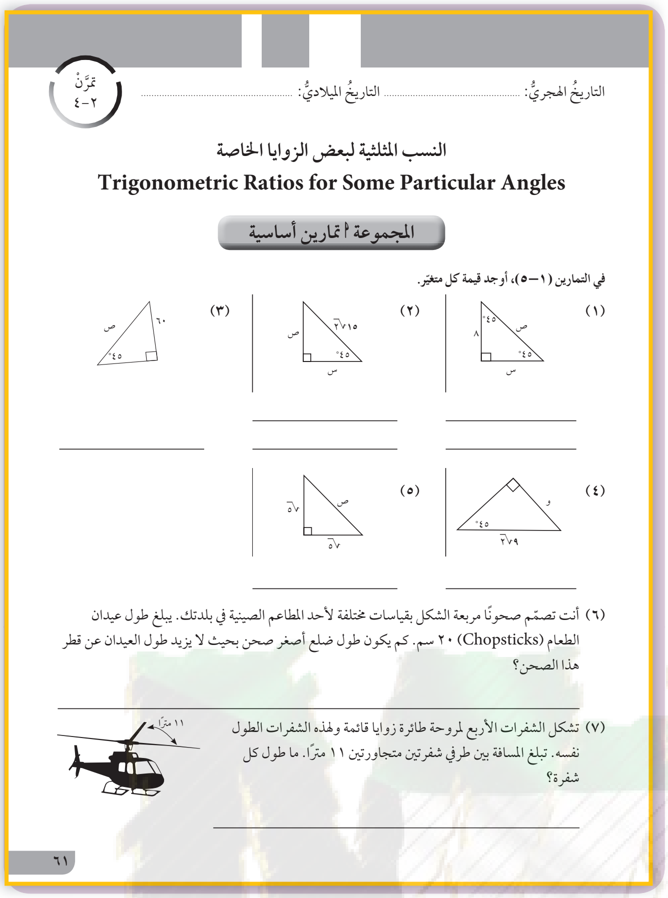
مساحة المعين = ٢ × مساحة أحد المثلثين

= ٢ × $\left(\frac{١}{٢} \times ٨ \times ٤\sqrt{٣}\right)$ = $٣٢\sqrt{٣}$ سم²

حل آخر

مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب القطرين

= $\frac{١}{٢} \times ٨ \times ٨\sqrt{٣}$ = $٣٢\sqrt{٣}$ سم²



التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ ٢-٤

النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

Trigonometric Ratios for Some Particular Angles

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمارين (١–٥)، أوجد قيمة كل متغيّر.

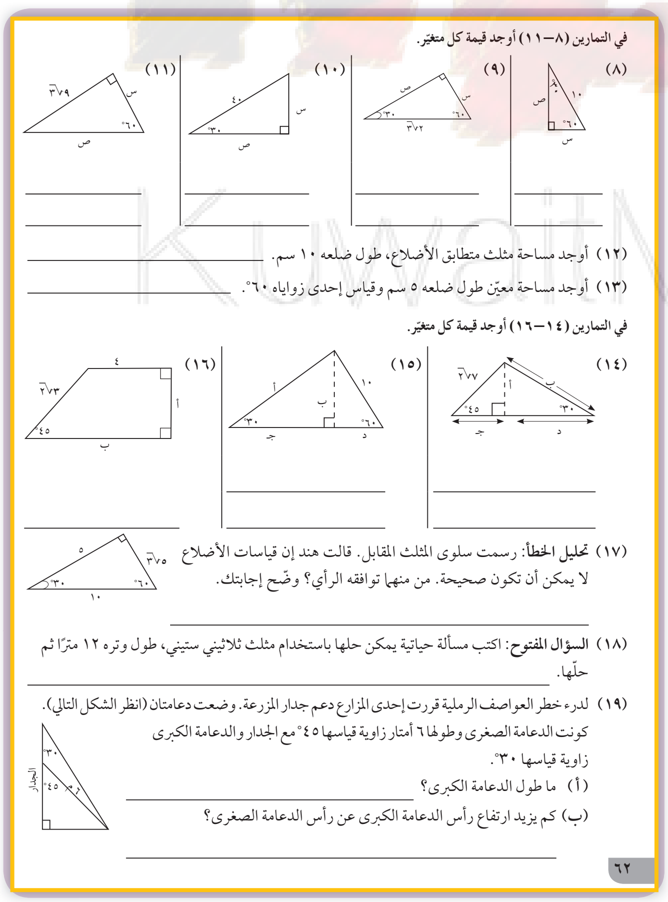
(١) (٢) (٣)

(٤) (٥)

(٦) أنت تصمّم صحونًا مربعة الشكل بقياسات مختلفة لأحد المطاعم الصينية في بلدتك. يبلغ طول عيدان الطعام (Chopsticks) ٢٠ سم. كم يكون طول ضلع أصغر صحن بحيث لا يزيد طول العيدان عن قطر هذا الصحن؟

(٧) تشكل الشفرات الأربع لمروحة طائرة زوايا قائمة ولهذه الشفرات الطول نفسه. تبلغ المسافة بين طرفي شفرتين متجاورتين ١١ مترًا. ما طول كل شفرة؟

٦١



في التمارين (٨–١١) أوجد قيمة كل متغيّر.

(٨) (٩) (١٠) (١١)

(١٢) أوجد مساحة مثلث متطابق الأضلاع، طول ضلعه ١٠ سم.

(١٣) أوجد مساحة معيّن طول ضلعه ٥ سم وقياس إحدى زواياه ٦٠°.

في التمارين (١٤–١٦) أوجد قيمة كل متغيّر.

(١٤) (١٥) (١٦)

(١٧) **تحليل الخطأ**: رسمت سلوى المثلث المقابل. قالت هند إن قياسات الأضلاع لا يمكن أن تكون صحيحة. من منهما توافقه الرأي؟ وضّح إجابتك.

(١٨) **السؤال المفتوح**: اكتب مسألة حياتية يمكن حلها باستخدام مثلث ثلاثيني ستيني، طول وتره ١٢ مترًا ثم حلّها.

(١٩) لدرء خطر العواصف الرملية قررت إحدى المزارع دعم جدار المزرعة. وضعت دعامتان (انظر الشكل التالي). كونت الدعامة الصغرى وطولها ٦ أمتار زاوية قياسها ٤٥° مع الجدار والدعامة الكبرى زاوية قياسها ٣٠°.

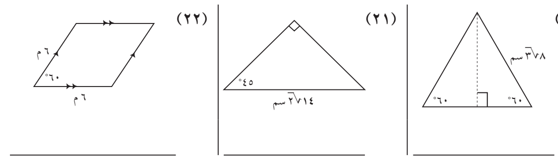
(أ) ما طول الدعامة الكبرى؟

(ب) كم يزيد ارتفاع رأس الدعامة الكبرى عن رأس الدعامة الصغرى؟

٦٢

في التمارين (٢٠–٢٢) أوجد مساحة كل شكل.

(٢٠) (٢١) (٢٢)



(٢٣) أ ب جـ مثلث قائم في أ̂، جتا ب = $\frac{٣}{٥}$

أوجد جا ب ثم ظا ب.

(٢٤) س ر ب مثلث قائم في ب̂. ظا ر = $\frac{٥}{١٢}$

أوجد جا ر ثم ظا س.

(٢٥) ارسم مثلثًا أب جـ قائم في ب̂ إذا كان ظا جـ = $\frac{١٣}{٢٠}$

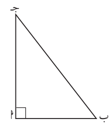
صح أم خطأ. برّر إجابتك.

(٢٦) يوجد مثلث أب جـ قائم في أ̂ حيث جا ب = $\frac{٢٤}{١٩}$.

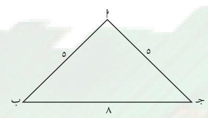
(٢٧) يوجد مثلث أب جـ قائم في أ̂ حيث ظا ب = $\frac{٤٥}{٢٦}$.

(٢٨) في المثلث م ك ل القائم في م̂، ظا ل × جتا ل = جا ل.

(٢٩) في المثلث المقابل، جا ب = جتا جـ.



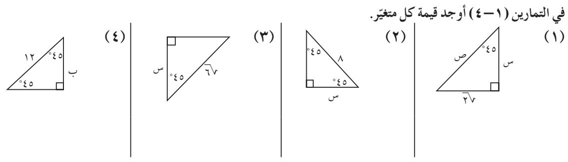
(٣٠) في المثلث المقابل، جا ب = $\frac{٥}{٨}$.



المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمارين (١–٤) أوجد قيمة كل متغيّر.

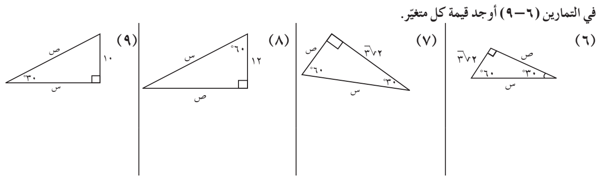
(١) (٢) (٣) (٤)



(٥) أوجد مساحة مثلث قائم الزاوية طول وتره ١٢ سم وقياس إحدى زواياه ٤٥°.

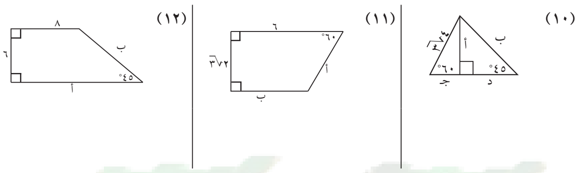
في التمارين (٦–٩) أوجد قيمة كل متغيّر.

(٦) (٧) (٨) (٩)



في التمارين (١٠–١٢) أوجد قيمة كل متغيّر.

(١٠) (١١) (١٢)



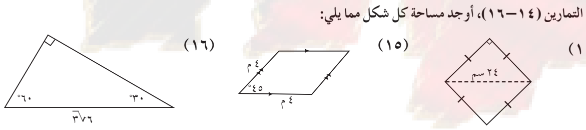
(١٣) تستخدم إحدى المزارع حزامًا كهربائيًّا متحركًا لنقل حزم القش من الأرض إلى قمة المخزن. يبلغ ارتفاع قمة المخزن ٧ أمتار ويشكل الحزام المتحرك مع الأرض زاوية قياسها ٦٠°.

(أ) ما طول الحزام من الأرض حتى قمة المخزن؟

(ب) يتحرك الحزام بسرعة ٣٠ م في الدقيقة. ما الزمن اللازم لنقل حزمة قش من الأرض حتى قمة المخزن؟

في التمارين (١٤–١٦)، أوجد مساحة كل شكل مما يلي:

(١٤) (١٥) (١٦)



(١٧) في المثلث س ع د القائم في س̂. جا د = $\frac{٨}{١٧}$.

أوجد جتا د ثم ظا د.

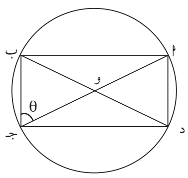
(١٨) احسب من دون استخدام الآلة الحاسبة: جا٤٥° × جتا٤٥° + جتا٤٥° × جا٤٥°

(١٩) احسب من دون استخدام الآلة الحاسبة: جا٦٠° × جتا٣٠° + جا٣٠° × جتا٦٠°

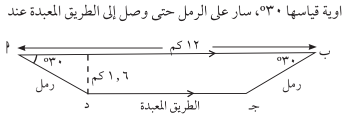
(٢٠) يبيّن الشكل المقابل مستطيلًا أ ب جـ د محاطًا بدائرة مركزها و

وطول نصف قطرها نق .

أثبت أن مساحة المستطيل تساوي ٤ نق^{٢} جاθ جتاθ .



(٢١) يلعب عبد العزيز كرة القدم في أحد النوادي. للحفاظ على لياقته البدنية يمارس يوميًّا رياضة الهرولة. انطلق عبد العزيز من النقطة أ على الشاطئ بزاوية قياسها ٣٠°، سار على الرمل حتى وصل إلى الطريق المعبدة عند النقطة د. أكمل الهرولة على الطريق المعبّدة حتى وصل إلى النقطة جـ. انعطف عن الطريق بزاوية قياسها ٣٠° حتى وصل إلى النقطة ب. (انظر الشكل المقابل). تبلغ سرعة هرولة عبد العزيز على الرمل ٤,٨ كم/ ساعة وعلى الطريق المعبدة ١٢,٨ كم/ ساعة.



(أ) أوجد المسافة التي قطعها عبد العزيز على الطريق المعبدة.

(ب) ما الزمن الذي استغرقه عبد العزيز في الهرولة؟

٢ـ٥: حل المثلث قائم الزاوية

١ الأهداف

- يوجد قياس زوايا مثلث قائم إذا علمت أطوال أضلاعه.
- يوجد أطوال أضلاع مثلث قائم.
- يحل مسائل حياتية مستخدمًا المثلث قائم الزاوية.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

حل المثلث.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة مدرجة – منقلة – فرجار – آلة حاسبة – ورق رسم بياني.

٤ التمهيد

اطلب إلى الطلاب استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد ما يلي:

(أ) جا(٢٥°)، جتا(٢٥°)، ظا(٢٥°).

(ب) جا(٤٥°)، جتا(٤٥°)، ظا(٤٥°).

اسأل...

هل المثلثات التالية هي قائمة الزاوية أو لا؟

(أ) Δ أب د، حيث: أب = ٧ سم،

أد = ٢٤ سم ، ب د = ٢٥ سم.

(ب) Δ رع د، حيث: رع = ٩ سم،

رد = ١٢ سم، ع د = ١٥ سم.

(جـ) Δ ب جـ د، حيث: ب جـ = ٦ سم،

ب د = ١٠ سم، جـ د = ١٢ سم.

٥ التدريس

ساعد التلاميذ في حل مسائل عن مثلثات قائمة الزاوية مع معطيات مختلفة. أخبرهم أن ذلك هو خطوة أولى لإيجاد حلول لمثلثات مختلفة الأضلاع.

ركّز على استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد النسب المثلثية للزوايا، وإيجاد قياس الزوايا الحادة إذا علمت نسبها المثلثية.

أعط مثالًا متقدمًا لمثلث مختلف الأضلاع تستخدم فيه أحد الأعمدة والمثلث قائم الزاوية، لإيجاد قياس زواياه كما في المثال التالي:

٢ – ٥

حل المثلث قائم الزاوية

Solving Right Triangle

عمل تعاوني

استخدم برنامج رسم هندسي على الحاسوب.

ارسم شعاعين أس ، أص يشكلان زاوية حادة س أ ص.

من نقطة د على أس ارسم شعاعًا متعامدًا مع أس يقطع أص في جـ.

بتحريك النقطة د تتحرك تبعًا لها النقطة جـ، يكبر المثلث أد جـ أو يصغر. وبتحريك النقطة ص يكبر أو يصغر قياس الزاوية أ.

١ – أوجد قياس الزاوية أ .

٢ – أوجد أطوال أضلاع المثلث أدجـ.

احسب النسبة $\frac{\text{دجـ}}{\text{أجـ}}$ $\left(\frac{\text{الضلع المقابل للزاوية أ}}{\text{الوتر}}\right)$

حرّك أص بحيث يتغيّر قياس الزاوية أ .

ما الذي تلاحظه حول النسبة $\frac{\text{دجـ}}{\text{أجـ}}$ عندما يتغيّر قياس الزاوية أ .

من أي قيمة تقترب هذه النسبة عندما يقترب قياس أ من ٠°؟ ومن ٩٠°؟

٣ – اصنع جدولًا يبيّن قيم الزاوية أ والنسبة $\left(\frac{\text{الضلع المقابل للزاوية أ}}{\text{الوتر}}\right)$ يتضمن القياسات ١٠°، ٢٠°، ٣٠°، ... ٨٠° للزاوية أ.

سوف تتعلم

- إيجاد قياسات زوايا مثلث قائم.
- إيجاد أطوال أضلاع مثلث قائم.

٣ – حل المثلث قائم الزاوية Solving Right Triangle

نعلم أن للمثلث ستة عناصر هي أضلاعه الثلاثة وزواياه الثلاث. حلّ المثلث يعني إيجاد أطوال أضلاعه الثلاثة وقياسات زواياه الثلاث. سيقتصر عملنا في هذا البند على المثلث قائم الزاوية.

في الشكل المقابل المثلث أب جـ قائم الزاوية في ب.

الأضلاع: أب ، أجـ ، ب جـ

الزوايا: أ ، ب ، جـ

غالبًا ما تعطى ثلاثة عناصر في المثلث أحدها على الأقل طول أحد الأضلاع ويتعين علينا إيجاد الباقي.

مثال (١)

حلّ المثلث أب جـ القائم في ب إذا علم أن: أب = ٤ سم، ب جـ = ٣ سم

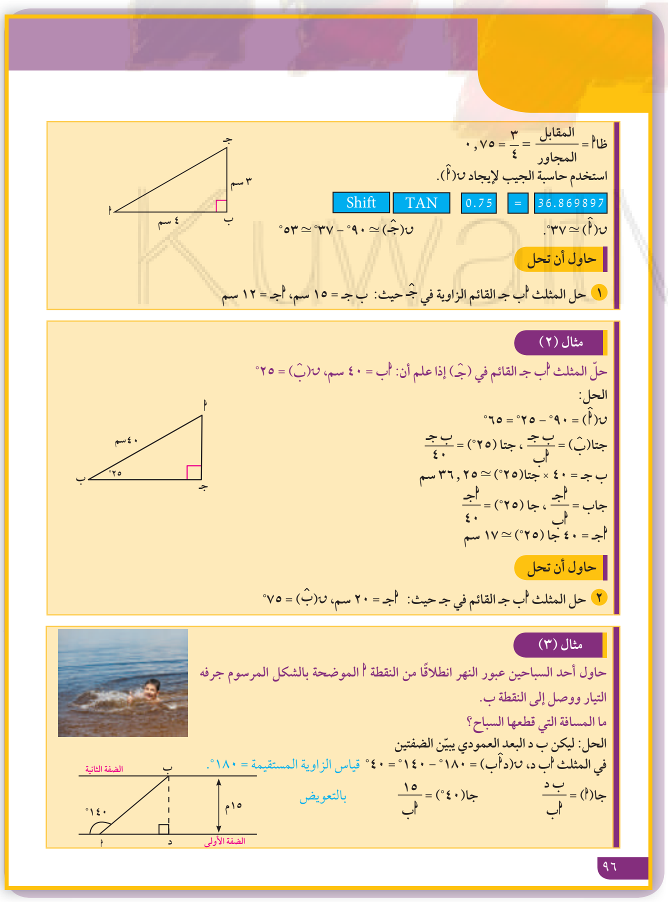
الحل:

بتطبيق نظرية فيثاغورث

(أجـ)^2 = (أب)^2 + (ب جـ)^2

أجـ = ٥ سم

٩٥



ظا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٣}{٤}$ = ٠,٧٥

استخدم حاسبة الجيب لإيجاد ق(أ).

Shift TAN 0.75 = 36.869897

ق(أ) ≃ ٣٧°. ق(جـ) ≃ ٩٠° – ٣٧° ≃ ٥٣°

حاول أن تحل

١ حل المثلث أب جـ القائم الزاوية في جـ حيث: ب جـ = ١٥ سم، أجـ = ١٢ سم

مثال (٢)

حلّ المثلث أب جـ القائم في (جـ) إذا علم أن: أب = ٤٠ سم، ق(ب) = ٢٥°

الحل:

ق(أ) = ٩٠° – ٢٥° = ٦٥°

جتا(ب) = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أب}}$ ، جتا (٢٥°) = $\frac{\text{ب جـ}}{٤٠}$

ب جـ = ٤٠ × جتا(٢٥°) ≃ ٣٦,٢٥ سم

جاب = $\frac{\text{أجـ}}{\text{أب}}$ ، جا (٢٥°) = $\frac{\text{أجـ}}{٤٠}$

أجـ = ٤٠ جا (٢٥°) ≃ ١٧ سم

حاول أن تحل

٢ حل المثلث أب جـ القائم في جـ حيث: أجـ = ٢٠ سم، ق(ب) = ٧٥°

مثال (٣)

حاول أحد السباحين عبور النهر انطلاقًا من النقطة أ الموضحة بالشكل المرسوم جرفه التيار ووصل إلى النقطة ب.

ما المسافة التي قطعها السباح؟

الحل: ليكن ب د البعد العمودي يبيّن الضفتين

في المثلث أب د، ق(دأب) = ١٨٠° – ١٤٠° = ٤٠° قياس الزاوية المستقيمة = ١٨٠°.

جا(أ) = $\frac{\text{ب د}}{\text{أب}}$ جا(٤٠°) = $\frac{١٥}{\text{أب}}$ بالتعويض

الضفة الثانية

الضفة الأولى

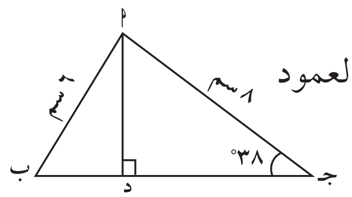
١٥م

١٤٠°

٩٦

مثال

حل المثلث ﺃب جـ باستخدام العمود المرسوم من ﺃ على $\overline{\text{ب جـ}}$.



٦ الربط

في المثال (٣) اعتبرت ضفتا النهر مستقيمين متوازيين

∴ البعد بين الضفتين ثابت، مما سمح برسم المثلث ﺃب د قائم الزاوية د.

الزاوية ﺃ مستقيمة ∴ ق(دﺃب) = ١٨٠° − ١٤٠° = ٤٠°

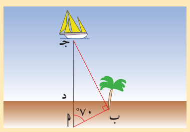
٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ بعض الطلاب باستخدام الآلة الحاسبة عند التحويل. نبّه إلى استخدام مفتاح التحويل بشكل صحيح.

٨ التقييم

راقب الطلاب وهم يحاولون التعامل مع فقرات «حاول أن تحل»، وتأكد من أنهم يستخدمون النسب المثلثية والآلة الحاسبة في شكل صحيح.

حاول أن تحل



مثال (٤)

حبل طوله ١٠ أمتار مثبت في مسمارين عند النقطتين ﺃ، ب. حبل آخر طوله ١١ مترًا مثبت في نفس النقطتين، شُدّ من وسطه (النقطة جـ) إلى أعلى.

ﺃ أوجد ق(دﺃجـ) ب أوجد طول $\overline{\text{دجـ}}$

الحل:

ﺃد = $\frac{\text{ﺃب}}{٢}$ = ٥ أمتار.

ﺃد = $\frac{١١}{٢}$ = ٥,٥ أمتار.

جتاﺃ = $\frac{\text{ﺃد}}{\text{ﺃجـ}}$ = $\frac{٥}{٥,٥}$ ≃ ٠,٩١

∴ ق(ﺃ) ≃ جتا$^{-1}$ (٠,٩١)

ق(دﺃجـ) ≃ ٢٤° ٢٩′ ٤١″. باستخدام الحاسبة

ب باستخدام نظرية فيثاغورث (جـ د)^2 + (ﺃد)^2 = (جـﺃ)^2

أي (جـ د)^2 = (جـﺃ)^2 − (ﺃد)^2

(جـ د)^2 = ٥,٥^2 − ٥^2 = ٥,٢٥

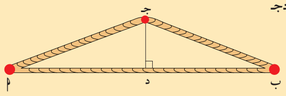
∴ جـ د = $\sqrt{٥,٢٥}$ ≃ ٢,٣

طول القطعة $\overline{\text{جـ د}}$ يساوي حوالي ٢,٣ متر.

حاول أن تحل

٤ في المثال السابق أوجد (ﺃ) إذا كان طول الحبل من ﺃ إلى ب والمار بالنقطة جـ يساوي ١٢ مترًا.

٩٧



تمرَّنْ ٢-٥

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

حل المثلث قائم الزاوية

Solving Right Triangle

المجموعة ﺃ تمارين أساسية

حل المثلث ﺃب جـ القائم في جـ. قرّب الأطوال إلى أقرب جزء من عشرة.

(١) ق(ب) = ٤٧° ١٢′، ب جـ = ١٨ سم ____________

(٢) يستند سلم ﺃب طوله ٨,٥ أمتار بطرفه (ﺃ) على حائط عمودي وبطرفه (ب) على أرض أفقيّة، إذا كان الطرف (ب) يبعد مترًا واحدًا عن الحائط، فأوجِدْ:

(أ) بعد الطرف ﺃ عن الأرض. ____________

(ب) قياس زاوية ميل السلّم على الأرض. ____________

(جـ) قياس زاوية ميل السلم على الحائط. ____________

في كل مثلث، أوجد قيمة س.

(٣) (٤)

(٥) أوجد قياس كل من الزاويتين الحادتين في المثلث ع ت ب. ____________

(٦) (أ) ارسم مثلثًا ﺃجـ ك قائم في ﺃ حيث: ﺃجـ = ٨ سم، ﺃك = ٦ سم.

(ب) أوجد قياس كل من الزاويتين جـ، ك.

____

(٧) في كل حالة مما يلي، خطط مثلثًا ﺃف جـ قائم في ف.

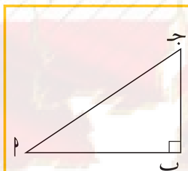
(أ) أوجد جـ ف إذا كان: ﺃجـ = ٤ سم، جتا جـ = ٠,٧

____

٦٦

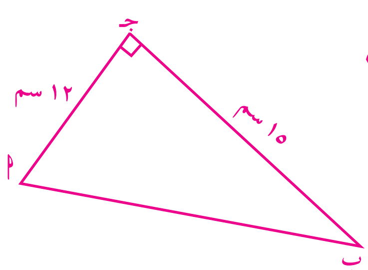
اختبار سريع

حل المثلث ﺃب جـ القائم في ب، حيث ﺃجـ = ٨ سم، ق(جـ) = ٥٤°.



ﺃب ≃ ٦,٤٧ سم، ب جـ ≃ ٤,٧ سم، ق(ﺃ) = ٣٦°.

٩ إجابات وحلول



١ (ﺃب)^2 = ٢٢٥ + ١٤٤

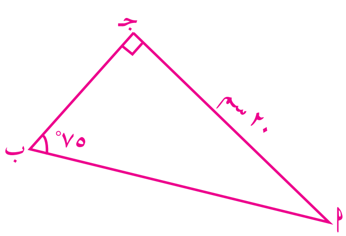
(ﺃب)^2 = ٣٦٩

ﺃب ≃ ١٩,٢ سم

ظا(ب) = $\frac{١٢}{١٥}$

ق(ب) ≃ ٣٨° ٣٩′ ٣٥″.

ق(ﺃ) ≃ ٥١° ٢٠′ ٢٥″.



٢ ق(ﺃ) = ١٥°

جا(٧٥°) = $\frac{٢٠}{\text{ﺃب}}$،

ﺃب ≃ ٢٠,٧ سم.

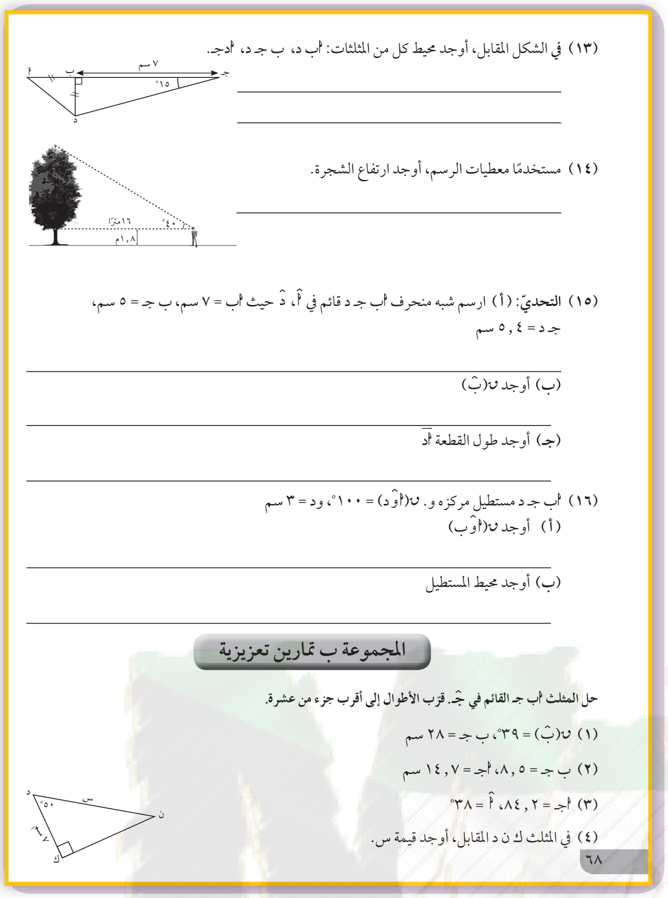
ظا(٧٥°) = $\frac{٢٠}{\text{جـ ب}}$ ، جـ ب ≃ ٥,٣٦ سم.

(توجد طرق أخرى للحل)

٣ (أ) ب جـ ≃ ٤١٢ مترًا.

(ب) جـ د ≃ ٣٣٨,٦ مترًا.

٤ ق(أ̂) = ٣٢ ٢٦″ ٣٣′ ٣٣°.


(١٣) في الشكل المقابل، أوجد محيط كل من المثلثات: أب د، ب جـ د، أدجـ.

(١٤) مستخدمًا معطيات الرسم، أوجد ارتفاع الشجرة.

(١٥) **التحديّ**: (أ) ارسم شبه منحرف أب جـ د قائم في أ̂، د̂ حيث أب = ٧ سم، ب جـ = ٥ سم، جـ د = ٥,٤ سم

(ب) أوجد ق(ب̂)

(جـ) أوجد طول القطعة أد

(١٦) أب جـ د مستطيل مركزه و. ق(أو̂د) = ١٠٠°، ود = ٣ سم

(أ) أوجد ق(أو̂ب)

(ب) أوجد محيط المستطيل

المجموعة ب تمارين تعزيزية

حل المثلث أب جـ القائم في جـ̂. قرّب الأطوال إلى أقرب جزء من عشرة.

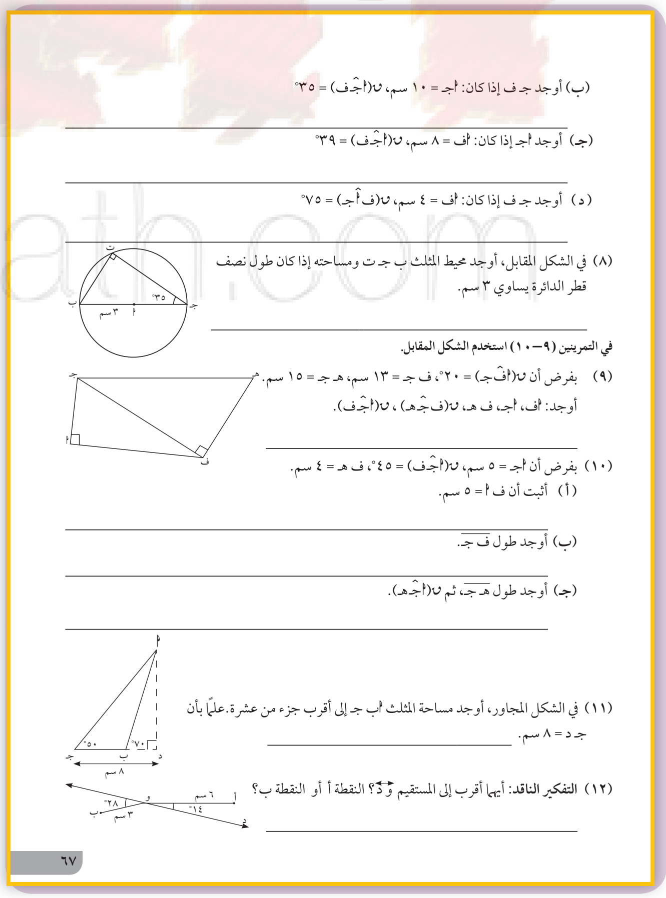
(١) ق(ب̂) = ٣٩°، ب جـ = ٢٨ سم

(٢) ب جـ = ٥,٨، أجـ = ١٤,٧ سم

(٣) أجـ = ٨٤,٢، أ̂ = ٣٨°

(٤) في المثلث ك ن د المقابل، أوجد قيمة س.

٦٨


(ب) أوجد جـ ف إذا كان: أجـ = ١٠ سم، ق(أجـ̂ف) = ٣٥°

(جـ) أوجد أجـ إذا كان: أف = ٨ سم، ق(أجـ̂ف) = ٣٩°

(د) أوجد جـ ف إذا كان: أف = ٤ سم، ق(ف أ̂جـ) = ٧٥°

(٨) في الشكل المقابل، أوجد محيط المثلث ب جـ ت ومساحته إذا كان طول نصف قطر الدائرة يساوي ٣ سم.

في التمرينين (٩–١٠) استخدم الشكل المقابل.

(٩) بفرض أن ق(أف̂جـ) = ٢٠°، ف جـ = ١٣ سم، هـ جـ = ١٥ سم.

أوجد: أف، أجـ، ف هـ، ق(ف جـ̂هـ) ، ق(أجـ̂ف).

(١٠) بفرض أن أجـ = ٥ سم، ق(أجـ̂ف) = ٤٥°، ف هـ = ٤ سم.

(أ) أثبت أن ف أ = ٥ سم.

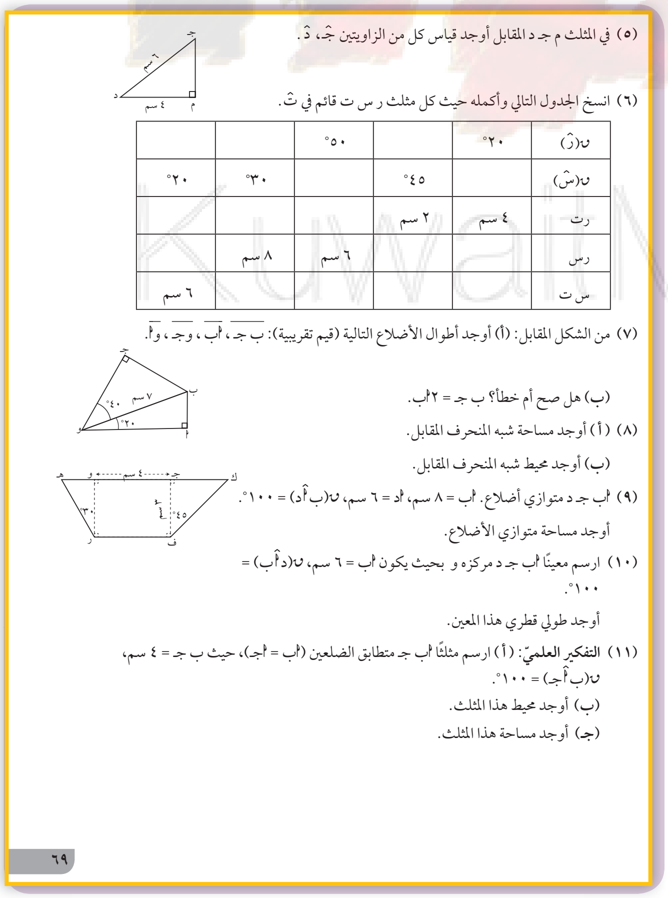
(ب) أوجد طول ف جـ.

(جـ) أوجد طول هـ جـ، ثم ق(أجـ̂هـ).

(١١) في الشكل المجاور، أوجد مساحة المثلث أب جـ إلى أقرب جزء من عشرة. علمًا بأن جـ د = ٨ سم.

(١٢) **التفكير الناقد**: أيهما أقرب إلى المستقيم و د؟ النقطة أ أو النقطة ب؟

٦٧


(٥) في المثلث م جـ د المقابل أوجد قياس كل من الزاويتين جـ̂، د̂.

(٦) انسخ الجدول التالي وأكمله حيث كل مثلث ر س ت قائم في ت̂.

ق(ر̂)	٢٠°		٥٠°		
ق(س̂)		٤٥°		٣٠°	٢٠°
رت	٤ سم	٢ سم			
رس			٦ سم	٨ سم	
س ت					٦ سم

(٧) من الشكل المقابل: (أ) أوجد أطوال الأضلاع التالية (قيم تقريبية): ب جـ ، أب ، وجـ ، وأ.

(ب) هل صح أم خطأ؟ ب جـ = ٢أب.

(٨) (أ) أوجد مساحة شبه المنحرف المقابل.

(ب) أوجد محيط شبه المنحرف المقابل.

(٩) أب جـ د متوازي أضلاع. أب = ٨ سم، أد = ٦ سم، ق(ب أ̂د) = ١٠٠°.

أوجد مساحة متوازي الأضلاع.

(١٠) ارسم معينًا أب جـ د مركزه و بحيث يكون أب = ٦ سم، ق(د أ̂ب) = ١٠٠°.

أوجد طولي قطري هذا المعين.

(١١) **التفكير العلميّ**: (أ) ارسم مثلثًا أب جـ متطابق الضلعين (أب = أجـ)، حيث ب جـ = ٤ سم، ق(ب أ̂جـ) = ١٠٠°.

(ب) أوجد محيط هذا المثلث.

(جـ) أوجد مساحة هذا المثلث.

٦٩

٢-٦: زوايا الارتفاع والانخفاض

١ الأهداف

- يتعرف زوايا الارتفاع.
- يتعرف زوايا الانخفاض.
- يوجد قياسات زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض.
- يحل مسائل حياتية مستخدمًا زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

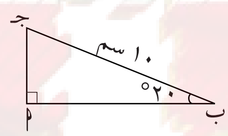
زاوية ارتفاع - زاوية انخفاض - مستوى أفقي.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة مدرجة - منقلة - مميال (إذا وجد) - آلة حاسبة - ورق رسم بياني - جهاز إسقاط - حاسوب.

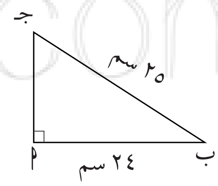
٤ التمهيد

(أ)



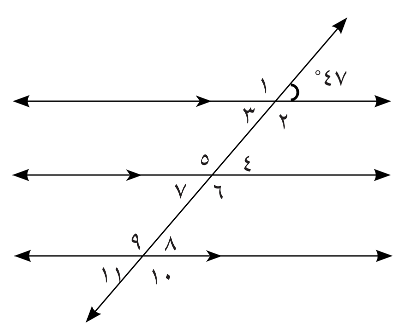
في المثلث أعلاه أوجد: ق(جـ)، أب، أجـ.

(ب)



في المثلث أعلاه أوجد: أجـ، ق(ب)، ق(جـ).

(جـ)



في الرسم أعلاه، ما قياس الزوايا:

١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١ ؟

٢ - ٦

زوايا الارتفاع والانخفاض

Angles of Elevation and Depression

سوف تتعلم

- زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض
- استخدام زوايا الارتفاع والانخفاض في حل مسائل حياتية

دعنا نفكر ونتناقش

١ - إذا رصد شخص (جـ) نقطة أ أعلى من مستوى نظره الأفقيّ جـب فإن الزاوية التي يحددها جـأ، جـب تسمى **زاوية ارتفاع أ** عن المستوى الأفقي لنظر الشخص جـ.

٢ - وإذا رصد الشخص جـ نقطة د أدنى من مستوى نظره الأفقي جـب فإن الزاوية التي يحددها جـد، جـب تسمّى **زاوية انخفاض د** عن المستوى الأفقي لنظر الشخص جـ.

ملاحظة:

إذا كان أ شخصًا موجودًا على سطح الأرض، وكان ب شخصًا موجودًا في منطاد مرتفع عن سطح الأرض، ونظر كلّ منهما إلى الآخر فإنّ:

$\hat{\theta}_1$ هي زاوية ارتفاع ب عن المستوى الأفقيّ لنظر (أ).

$\hat{\theta}_2$ هي زاوية انخفاض (أ) عن المستوى الأفقيّ لنظر (ب)

ونلاحظ في هذه الحالة أنّ:

زاوية الارتفاع ($\hat{\theta}_1$) = زاوية الانخفاض ($\hat{\theta}_2$).

٣ - يقف بدر عند قمة التل ويقف ناصر عند الكشاف ويقف أحمد عند الكوخ.

صف كلّ زاوية في الشكل عندما ينظر:

(أ) بدر إلى ناصر

(ب) ناصر إلى أحمد

(جـ) ناصر إلى بدر

مثال (١)

لقياس طول إحدى المسلات قام مرشد سياحيّ برصد قمة المسلة من خلال جهاز للرصد، فوجد أنّ قياس زاوية الارتفاع ٤٨°. إذا كان الجهاز يبعد عن قاعدة المسلة مسافة ١٨ م فاحسب ارتفاع المسلة.

الحل:

ظا(٤٨)° = $\frac{\text{س}}{١٨}$

س = ١٨ × ظا (٤٨)° ≃ ٢٠

ارتفاع المسلة: ٢٠ م تقريبًا

حاول أن تحل

١ من نقطة على سطح الأرض تبعد ١٠٠ متر عن قاعدة مئذنة، وجد أن قياس زاوية ارتفاع المئذنة ١٢° . أوجد ارتفاع المئذنة عن سطح الأرض.

٩٨

مثال (٢)

علم الأرصاد الجوية: لمعرفة ارتفاع طبقة من الغيوم عن سطح الأرض يستخدم علماء الفلك قياس زاوية الارتفاع في اللحظة التي يصل فيها البرق إلى الأرض. (يمكن نمذجة المسألة كما في الصورة).

أوجد قيمة تقريبية لارتفاع طبقة الغيوم عن سطح الأرض.

الحل:

ظا (٣٥°) = $\frac{\text{ع}}{٥٢٥}$

ع = ٥٢٥ × ظا (٣٥°)

ع ≃ ٣٦٧,٦ مترًا

مثال (٣)

تحلق مروحية فوق محمية طبيعية على ارتفاع ٢٥٠ مترًا وتواكبها على الأرض سيارة حرس المحمية. شاهد ربان المروحية قطيعًا من الفيلة بزاوية انخفاض قياسها ٤٨°. ما المسافة بين المروحية والقطيع في تلك اللحظة علمًا بأن السيارة مباشرة تحت المروحية؟

الحل:

لتكن أ موقع المروحية، ب موقع السيارة، جـ موقع القطيع.

جاجـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

جا٤٨° = $\frac{٢٥٠}{\text{أجـ}}$

أجـ = $\frac{٢٥٠}{\text{جا٤٨°}}$ ≃ ٢٢٥

أجـ ≃ ٣٣٦,٤ مترًا

يبعد قطيع الفيلة حوالى ٣٣٦ مترًا عن المروحية.

حاول أن تحل

٣ يقف مراقب فوق برج ارتفاعه ٦٠ مترًا. شاهد حريقًا بزاوية انخفاض قياسها ٤٠°. ما المسافة بين قاعدة برج المراقبة وموقع الحريق؟

٩٩

٥ التدريس

منذ القدم، استخدم العلماء القياسات غير المباشرة لإيجاد المسافات التي لا يمكن قياسها مباشرة، وقد استخدم المميال (clinometer) بشكل واسع في القياسات غير المباشرة، وبخاصة لتحديد زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض. وفي عصرنا الحاضر، بدأت الأجهزة الإلكترونية تأخذ دورها الكبير في إيجاد القياسات غير المباشرة.

ركّز مع الطلاب على الأمثلة، وهي جميعها تطبيقات حياتية ترتكز بالدرجة الأولى على إيجاد زاوية ارتفاع أو زاوية انخفاض بواسطة أجهزة إلكترونية.

في المثال (٢): إيجاد ارتفاع غيمة عن مستوى سطح الأرض أثناء حدوث البرق والرعد.

في المثال (٣): من المهم جدًّا لرجل الإطفاء تحديد مسافات تسمح له بالتحرك أثناء حدوث حريق ما في الأبنية أو في الغابات.

٦ الربط

كل أمثلة هذا الدرس من مثال (١) إلى مثال (٤) هي تطبيقات حياتية. إن معرفة ارتفاع مسلة أو ارتفاع بناء أو المسافة بين قاعدة النافذة وسطح البناية هي من الضروريات في الحياة اليومية.

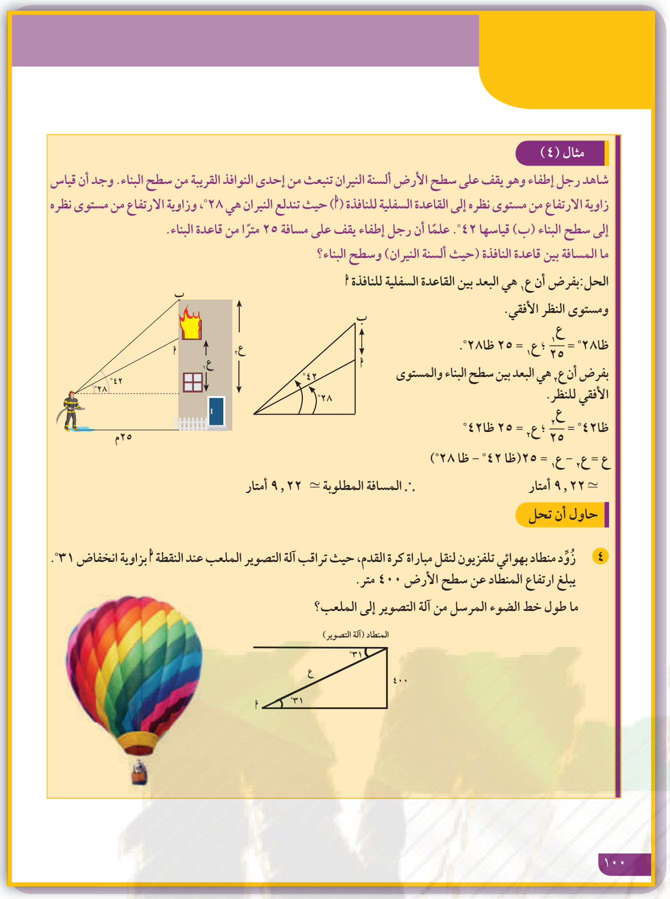
٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

في «حاول أن تحل» (٢)، قد يعتقد بعض الطلاب أن زاوية الانخفاض هي بين الخط العمودي النازل من المنطاد إلى أرض الملعب، وخط الضوء المرسل من آلة التصوير إلى الملعب.

ساعد الطلاب على فهم أن زاوية الانخفاض هي التي يصنعها الخط الأفقي مع خط الضوء المرسل إلى الملعب.

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يحاولون إيجاد الحلول لفقرات «حاول أن تحل»، وتأكد من حسن استخدامهم لزوايا الارتفاع والانخفاض.



مثال (٤)

شاهد رجل إطفاء وهو يقف على سطح الأرض ألسنة النيران تنبعث من إحدى النوافذ القريبة من سطح البناء. وجد أن قياس زاوية الارتفاع من مستوى نظره إلى القاعدة السفلية للنافذة (أ) حيث تندلع النيران هي ٢٨°، وزاوية الارتفاع من مستوى نظره إلى سطح البناء (ب) قياسها ٤٢°. علمًا أن رجل إطفاء يقف على مسافة ٢٥ مترًا من قاعدة البناء.

ما المسافة بين قاعدة النافذة (حيث ألسنة النيران) وسطح البناء؟

الحل: بفرض أن ع١ هي البعد بين القاعدة السفلية للنافذة أ ومستوى النظر الأفقي.

ظا٢٨° = ع١ / ٢٥ ؛ ع١ = ٢٥ ظا٢٨°.

بفرض أن ع٢ هي البعد بين سطح البناء والمستوى الأفقي للنظر.

ظا٤٢° = ع٢ / ٢٥ ؛ ع٢ = ٢٥ ظا٤٢°

ع = ع٢ − ع١ = ٢٥(ظا ٤٢° − ظا ٢٨°)

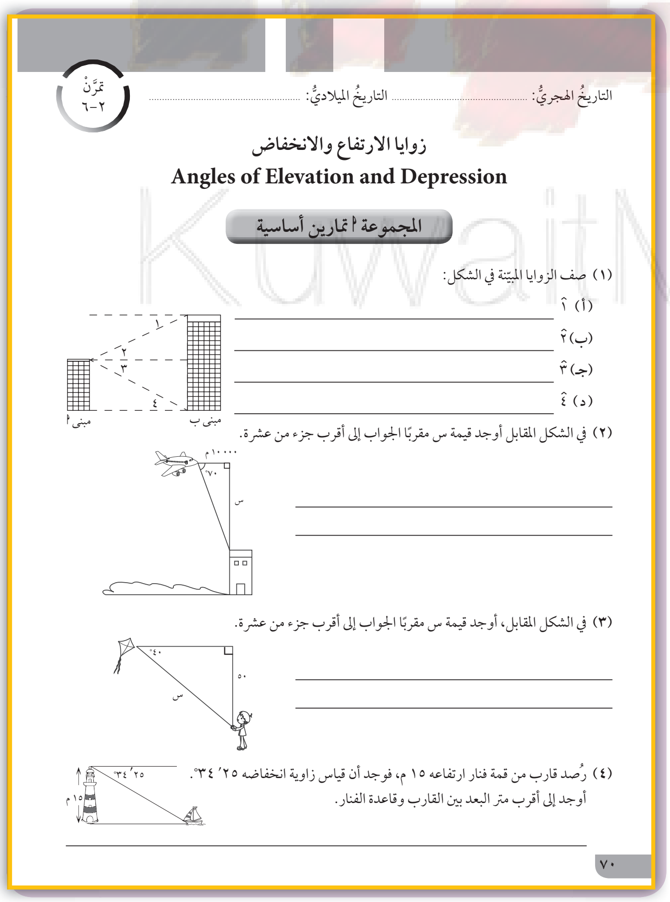
≃ ٩,٢٢ أمتار ∴ المسافة المطلوبة ≃ ٩,٢٢ أمتار

حاول أن تحل

٤ زُوِّد منطاد بهوائي تلفزيون لنقل مباراة كرة القدم، حيث تراقب آلة التصوير الملعب عند النقطة أ بزاوية انخفاض ٣١°. يبلغ ارتفاع المنطاد عن سطح الأرض ٤٠٠ متر.

ما طول خط الضوء المرسل من آلة التصوير إلى الملعب؟

١٠٠



التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: .... تمرَّنْ ٦-٢

زوايا الارتفاع والانخفاض

Angles of Elevation and Depression

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) صف الزوايا المبيّنة في الشكل:

(أ) $\hat{1}$

(ب) $\hat{2}$

(ج) $\hat{3}$

(د) $\hat{4}$

(٢) في الشكل المقابل أوجد قيمة س مقربًا الجواب إلى أقرب جزء من عشرة.

(٣) في الشكل المقابل، أوجد قيمة س مقربًا الجواب إلى أقرب جزء من عشرة.

(٤) رُصد قارب من قمة فنار ارتفاعه ١٥ م، فوجد أن قياس زاوية انخفاضه ٢٥′ ٣٤°. أوجد إلى أقرب متر البعد بين القارب وقاعدة الفنار.

٧٠

اختبار سريع

يبلغ ارتفاع برج إيفل ٣٢٤ مترًا. وقف رجل طوله ١,٧ متر ينظر إلى رأس البرج. وجد أن قياس زاوية الارتفاع من مستوى نظره إلى رأس البرج يساوي ٧٥°. أوجد المسافة بين الرجل وقاعدة البرج.

٨٦,٣٦ مترًا.

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ حوالى ٢١,٢٦ مترًا.

٣ حوالى ٧١,٥ مترًا.

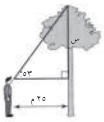
٤ حوالى ٧٧٧ مترًا.

---

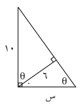
(٥) قاس بحّار زاوية انخفاض سفينة من أعلى نقطة في فنار ارتفاعه ٢٠٠ م، فوجد أنها ٣٩°. أوجد بعد السفينة عن قاعدة الفنار.

(٦) من قاعدة برج قيست زاوية ارتفاع قمة منزل فكانت ٣٠°، ومن قمة البرج قيست زاوية انخفاض قمة المنزل نفسه فوجد أنها ٤٥° أوجد إلى أقرب متر ارتفاع البرج علمًا بأن قاعدتي البرج والمنزل في مستوى واحد، وأن ارتفاع المنزل ٥٠ م.

المجموعة ب تمارين تعزيزية

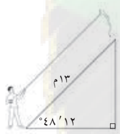


(١) في الشكل المقابل، أوجد قيمة س مقربًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.
ثم أوجد ارتفاع الشجرة إذا كان طول الرجل ١٧٠ سم.



(٢) في الشكل المقابل، أوجد قيمة س مقربًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.

(٣) رصد شخص واقف على سطح الأرض طائرًا يرتفع عن سطح الأرض مسافة ١٥ م، وكانت زاوية ارتفاع الطائر ٢٥°. إذا كانت عين الشخص على ارتفاع ١,٥ م عن سطح الأرض:
(أ) ارسم الشكل.
(ب) أوجد بعد الطائر عن عين الشخص مقربًا الإجابة إلى أقرب متر.



(٤) من نقطة على سطح الأرض وجد أن قياس زاوية ارتفاع طائرة ورقية ١٢ ′٤٨°. إذا كانت الطائرة مربوطة بخيط مشدود طوله ١٣ م، أوجد ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض إلى أقرب متر.

٧١

---

(٥) من نقطة على سطح الأرض تبعد ٣٠٠ م عن قاعدة برج عمودي وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج هي ١٣°، أوجد ارتفاع البرج عن سطح الأرض.

(٦) رصد شخص من نافذة منزله على ارتفاع ٣٠ م سيارة في الطريق، فوجد أن قياس زاوية انخفاضها ١٥ ′٣٧°. أوجد بعد السيارة عن هذا الشخص.

(٧) من نقطة على سطح الأرض قيست زاوية ارتفاع طائرة، فوجد أنها ١٢ ′٥٤°، إذا كان بعد النقطة عن موقع الطائرة ٣١٠ م، فما ارتفاع الطائرة إلى أقرب متر؟

(٨) إذا كانت زاوية ارتفاع الشمس ٥٥°، وكان طول ظل منزل عندئذ ٧ م، أوجد ارتفاع المنزل إلى أقرب متر، ثم أوجد طول ظل المنزل عندما تكون زاوية ارتفاع الشمس ٣٤°.

٧٢

٢-٧: القطاع الدائري والقطعة الدائرية

١ الأهداف

- يتعرف القطاع الدائري.
- يوجد مساحة القطاع الدائري بمعرفة طول القوس وطول نصف القطر.
- يوجد مساحة القطاع الدائري بمعرفة قياس الزاوية المركزية (بالراديان) وطول نصف القطر.
- يتعرف القطعة الدائرية.
- يوجد مساحة مثلث بمعرفة طولي ضلعين وقياس الزاوية بينهما.
- يوجد مساحة القطعة الدائرية.

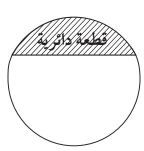
٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

قطاع دائري - مساحة القطاع الدائري - قطعة دائرية - مساحة المثلث - مساحة القطعة الدائرية.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة مدرجة - منقلة - فرجار - آلة حاسبة - جهاز إسقاط - حاسوب.

٤ التمهيد



ارسم على اللوح عددًا من الزوايا، واطلب إلى الطلاب قياس كل زاوية بواسطة المنقلة، ثم اسألهم تحويل هذه القياسات من القياس الستيني إلى القياس الدائري.

ارسم شكلًا ووضح عليه: الدائرة، قطاع دائري، قطعة دائرية، ثم أشر إلى قطاع أصغر وقطاع أكبر، وكذلك الحال بالنسبة إلى القطعة وحدود كل منها والمنطقة التي تمثلها. أظهرهما كأجزاء منفصلة ثم بصورة متكاملة في دائرة.

اسأل الطلاب عن مساحة المثلث.

$$\text{مساحة} = \frac{\text{قاعدة} \times \text{ارتفاع}}{٢}.$$

اسأل الطلاب عن مساحة الدائرة إذا كان طول نصف قطرها نق.

مساحة الدائرة = π نق^٢.

٢-٧

القطاع الدائري والقطعة الدائرية

Circular Sector and Circular Segment

سوف تتعلم

- القطاع الدائري
- إيجاد مساحة القطاع الدائري
- القطعة الدائرية
- إيجاد مساحة القطعة الدائرية

تعريف:

القطاع الدائري هو جزء من سطح الدائرة محدود بنصفي قطرين وقوس.

تمثل قطعة الشطيرة قطاعًا دائريًا

في الشكل المرسوم:

نصفا القطرين م‌أ، م‌ب يقسمان الدائرة إلى قطاعين دائريين.

القطاع الأصغر م‌أجـ‌ب زاويته المركزية هـ^د، والقطاع الأكبر م‌أن‌ب زاويته المركزية ٢π − هـ^د.

معلومة رياضية:

قياس القوس = قياس الزاوية المركزية التي تحصر القوس بين ضلعيها.

١- مساحة القطاع الدائري: Area of Circular Sector

لإيجاد مساحة القطاع الدائري نستخدم التناسب: (البرهان غير مطلوب)

نسبة طول القوس إلى طول الدائرة (محيط الدائرة) هي نسبة مساحة القطاع الدائري إلى مساحة الدائرة.

$$\frac{\text{طول القوس}}{\text{طول الدائرة}} = \frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\text{مساحة الدائرة}}$$

$$\frac{ل}{٢\pi \text{نق}} = \frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\pi \text{نق}^٢}$$

$$\text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{ل}{٢\pi \text{نق}} \times \pi \text{نق}^٢$$

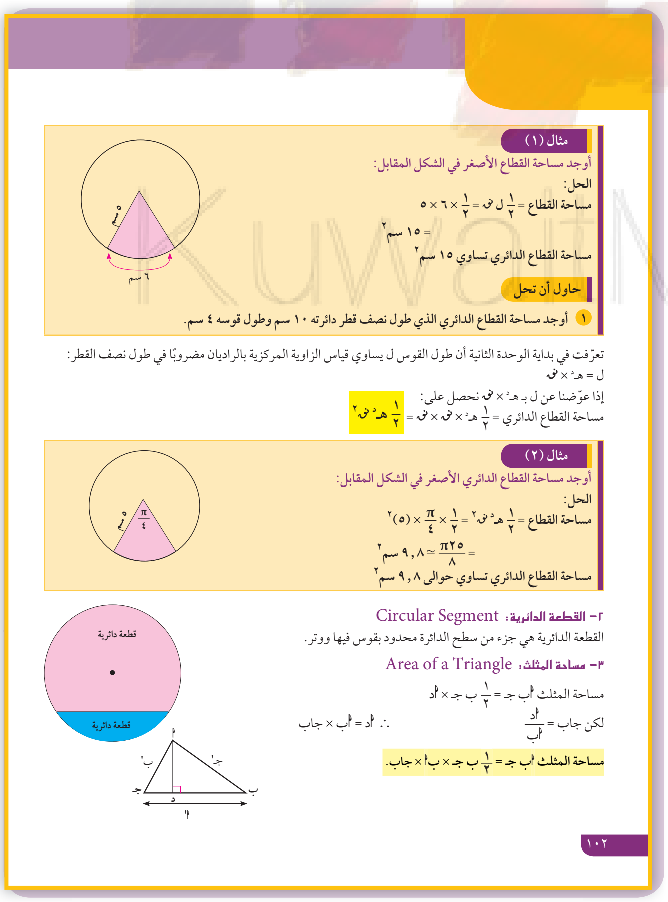
$$\text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{١}{٢} ل \text{ نق}$$

تذكر:

مساحة الدائرة = π نق^٢

طول القوس ل = هـ^د × نق

١٠١



مثال (١)

أوجد مساحة القطاع الأصغر في الشكل المقابل:

الحل:

مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٥

= ١٥ سم^٢

مساحة القطاع الدائري تساوي ١٥ سم^٢

حاول أن تحل

١ أوجد مساحة القطاع الدائري الذي طول نصف قطر دائرته ١٠ سم وطول قوسه ٤ سم.

تعرّفت في بداية الوحدة الثانية أن طول القوس ل يساوي قياس الزاوية المركزية بالراديان مضروبًا في طول نصف القطر:

ل = هـ^د × نق

إذا عوّضنا عن ل بـ هـ^د × نق نحصل على:

مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ هـ^د × نق × نق = $\frac{١}{٢}$ هـ^د نق^٢

مثال (٢)

أوجد مساحة القطاع الدائري الأصغر في الشكل المقابل:

الحل:

مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ هـ^د نق^٢ = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{\pi}{٤}$ × (٥)^٢

= $\frac{٢٥\pi}{٨}$ ≃ ٩,٨ سم^٢

مساحة القطاع الدائري تساوي حوالى ٩,٨ سم^٢

٢- القطعة الدائرية: Circular Segment

القطعة الدائرية هي جزء من سطح الدائرة محدود بقوس فيها ووتر.

٣- مساحة المثلث: Area of a Triangle

مساحة المثلث أ‌ب‌جـ = $\frac{١}{٢}$ ب‌جـ × أ‌د

لكن جا‌ب = $\frac{\text{أد}}{\text{أب}}$ ∴ أ‌د = أ‌ب × جا‌ب

مساحة المثلث أ‌ب‌جـ = $\frac{١}{٢}$ ب‌جـ × ب‌أ × جا‌ب.

١٠٢

٥ التدريس

لإيجاد مساحة القطاع الدائري، يمكن البدء بنسبته إلى مساحة الدائرة باعتبارها قطاعًا قياس زاويته المركزية π٢، ويمكن استنتاج مساحة القطاع على الصورة:

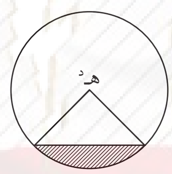
مساحة القطاع = مساحة الدائرة × $\frac{\text{هـ}^{\text{د}}}{\pi ٢}$، حيث: هـ^د قياس الزاوية المركزية للقطاع، وَπ٢ قياس الزاوية المركزية للدائرة بالراديان. مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ هـ^د نق^٢.

إذا علم طول القوس ل، فنعوض عن ل = هـ^د نق من القانون (١) نفسه. وإذا علم قياس زاويته المركزية فنعوض بقيمة الزاوية بالقياس الدائري.

القطعة الدائرية

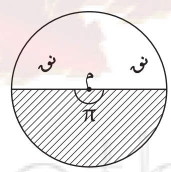
ارسم صورًا لقطع دائرية في مختلف الأوضاع.

ابدأ بمسألة أو نشاط يمكّن الطلاب من استنتاج مساحة القطعة الدائرية بعد تذكيرهم بمساحة القطاع ومساحة المثلث. يمكن توضيح ذلك بقطعة من ورق الكرتون تقسم إلى أجزاء حيث يتضح فيها أن:

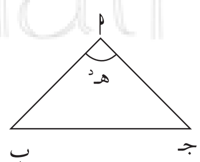


مساحة القطعة تساوي:

مساحة القطاع − مساحة المثلث.



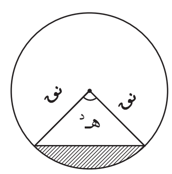
ابحث مع الطلاب مساحة نصف الدائرة باعتبارها: قطاع زاويته المركزية = π أو قطعة دائرية وترها قطر في الدائرة.



اشرح للطلاب كيفية الحصول على قانون مساحة المثلث بدلالة ضلعيه والزاوية المحصورة بينهما:

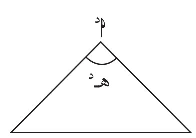
$\frac{١}{٢}$ × أجـ × أب × جاهـ^د

واستنتج من ذلك أن:



مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ (هـ^د − جاهـ^د)

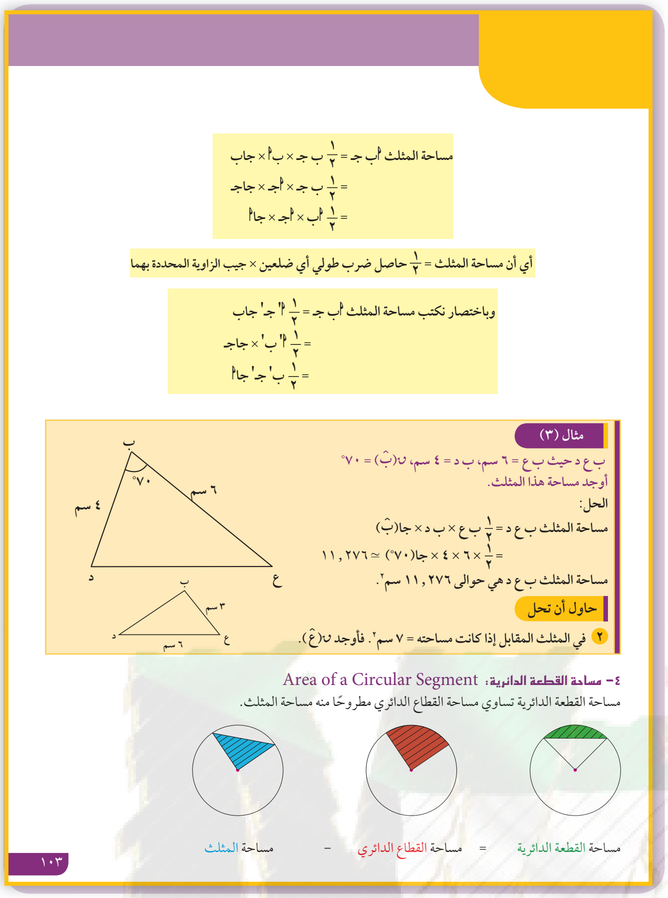
سؤال تمهيدي للطالب



إذا كانت مساحة المثلث $\frac{١}{٢}$ × حاصل ضرب طولي ضلعين متجاورين، فماذا تتوقع أن يكون قياس الزاوية المحددة لهذين الضلعين؟

حقّق ذلك من القانون العام التالي:

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × أجـ × أب × جاهـ^د.



مساحة المثلث أب جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × ب أ × جاب

= $\frac{١}{٢}$ ب جـ × أجـ × جاجـ

= $\frac{١}{٢}$ أب × أجـ × جاأ

أي أن مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولي أي ضلعين × جيب الزاوية المحددة بهما

وباختصار نكتب مساحة المثلث أب جـ = $\frac{١}{٢}$ أ' جـ' جاب

= $\frac{١}{٢}$ أ' ب' × جاجـ

= $\frac{١}{٢}$ ب' جـ' جاأ

مثال (٣)

ب ع د حيث ب ع = ٦ سم، ب د = ٤ سم، ق(ب̂) = ٧٠°

أوجد مساحة هذا المثلث.

الحل:

مساحة المثلث ب ع د = $\frac{١}{٢}$ ب ع × ب د × جا(ب̂)

= $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٤ × جا(٧٠°) ≃ ١١,٢٧٦

مساحة المثلث ب ع د هي حوالى ١١,٢٧٦ سم^٢.

حاول أن تحل

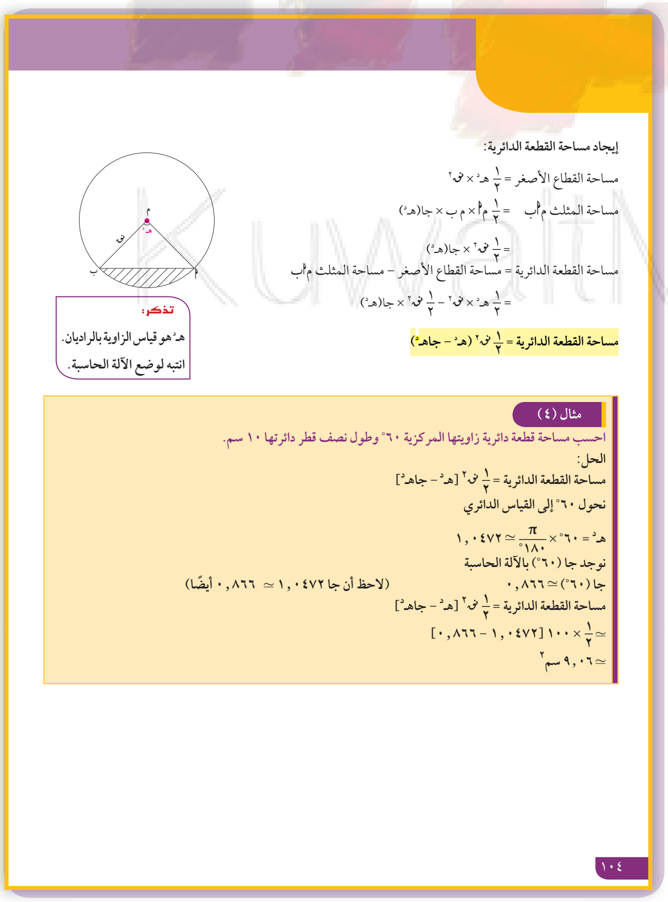
٢ في المثلث المقابل إذا كانت مساحته = ٧ سم^٢. فأوجد ق(ع̂).

٤- مساحة القطعة الدائرية: Area of a Circular Segment

مساحة القطعة الدائرية تساوي مساحة القطاع الدائري مطروحًا منه مساحة المثلث.

مساحة القطعة الدائرية = مساحة القطاع الدائري − مساحة المثلث

١٠٣



إيجاد مساحة القطعة الدائرية:

مساحة القطاع الأصغر = $\frac{١}{٢}$ هـ^د × نق^٢

مساحة المثلث م أب = $\frac{١}{٢}$ م أ × م ب × جا(هـ^د)

= $\frac{١}{٢}$ نق^٢ × جا(هـ^د)

مساحة القطعة الدائرية = مساحة القطاع الأصغر − مساحة المثلث م أب

= $\frac{١}{٢}$ هـ^د × نق^٢ − $\frac{١}{٢}$ نق^٢ × جا(هـ^د)

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ (هـ^د − جاهـ^د)

تذكر:

هـ^د هو قياس الزاوية بالراديان.

انتبه لوضع الآلة الحاسبة.

مثال (٤)

احسب مساحة قطعة دائرية زاويتها المركزية ٦٠° وطول نصف قطر دائرتها ١٠ سم.

الحل:

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ [هـ^د − جاهـ^د]

نحول ٦٠° إلى القياس الدائري

هـ^د = ٦٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ ≃ ١,٠٤٧٢

نوجد جا (٦٠°) بالآلة الحاسبة

جا (٦٠°) ≃ ٠,٨٦٦ (لاحظ أن جا ١,٠٤٧٢ ≃ ٠,٨٦٦ أيضًا)

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ [هـ^د − جاهـ^د]

≃ $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠ [١,٠٤٧٢ − ٠,٨٦٦]

≃ ٩,٠٦ سم^٢

١٠٤

في المثال (٦)

أشر إلى الطلاب بأنهم سوف يتعرفون إلى الطبق البتري هذا العام في دروس علم الأحياء.

٦ الربط

(أ) تريد زراعة أزهار في قسم من حديقة المنزل على شكل قطاع دائري مساحته ٢٠ م^{٢} تقريبًا. إذا كانت زاوية هذا القسم تساوي تقريبًا ٧٢°، فكم يكون طول نصف قطره؟

$$هـ^{د} = \frac{٧٢° \times \pi}{١٨٠°} = \frac{٢\pi}{٥}$$

$$\text{المساحة} = \frac{١}{٢} نق^{٢} هـ^{د} \Leftarrow ٢٠ = \frac{١}{٢} نق^{٢} \times \frac{٢\pi}{٥}$$

$نق = ٥,٦$ م

(ب) تقوم بعض البلديات في المدن بتزيين ميادين (مستديرات) الطرق بالأزهار. ولدينا ميدان طول نصف قطره ٦ أمتار.

اطلب إلى الطلاب أن يعملوا ضمن مجموعات لتقسيم الميدان إلى قطاعات دائرية ومثلثات في داخلها، وتلوينها وإيجاد مساحة كل منها. **(تتنوع الإجابات)**.

حاول أن تحل

٣ (أ) حوض زهور دائري طول نصف قطره ٦ م (انظر الشكل المقابل)، وفي هذا الحوض وتر طوله ٦ م. احسب مساحة القطعة الدائرية الصغرى.

(ب) أوجد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم وقياس زاويتها المركزية ٧٠°.

مثال (٥)

يبيّن الشكل المقابل مقطعًا في أنبوب أسطواني الشكل، ومياهًا متجمعة في القاع.
إذا كان أقصى عمق الماء هو ٢ سم وطول نصف قطر الأنبوب ٧ سم،
فأوجد مساحة الجزء المظلل باللون الوردي.

الحل: أد = ٥ سم

$هـ_{١} = جتا^{-١}\left(\frac{٥}{٧}\right) \simeq ٠,٧٧٥^{د} = هـ_{٢}$

$هـ = هـ_{١} + هـ_{٢} \simeq ١,٥٥^{د}$

مساحة القطاع الأصغر $= \frac{١}{٢} \times هـ^{د} \times نق^{٢}$

$= \frac{١}{٢} \times ١,٥٥ \times ٧^{٢} \simeq ٣٧,٩٧٥$ سم^{٢}

مساحة المثلث أ ب جـ $= \frac{١}{٢} \times$ أجـ $\times$ أب $\times$ جا$(١,٥٥^{د}) \simeq \frac{١}{٢} \times ٤٩ \times$ جا$(١,٥٥^{د}) \simeq ٢٤,٤٩٤٧$ سم^{٢}

مساحة الجزء المظلل $= ٣٧,٩٧٥ - ٢٤,٤٩٤٧ \simeq ١٣,٤٨$ سم^{٢}

١٠٥

مثال (٦)

الشكل المقابل يوضح مقطعًا أفقيًا لطبق بتري وضع فيه قالب معدني للأجبان له شكل مضلع ثماني وذلك للتحقق من خلوه من البكتيريا. إذا كانت زوايا المضلع متساوية القياس وطول نصف قطر الدائرة ١,٥ سم، فأوجد المساحة بين طبق بتري وقالب الأجبان.

الحل:

نفرض أن $هـ_{١}$ زاوية مركزية تقابل وترًا طول ١ سم،

$هـ_{٢}$ زاوية مركزية تقابل وترًا طوله $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

في Δ أم ب المتطابق الضلعين $\overline{مد} \perp \overline{أب}$

$\therefore$ جا $\frac{هـ_{١}}{٢} = \frac{٠,٥}{١,٥}$

$\therefore ق\left(\frac{هـ_{١}}{٢}\right) = جا^{-١} \frac{٠,٥}{١,٥}$

$ق(هـ_{١}) = ٢ \times جا^{-١} \frac{٠,٥}{١,٥} \simeq ٠,٦٧٩^{د}$

مساحة القطعة الدائرية المرتبطة بالوتر طوله ١ $= \frac{١}{٢} نق^{٢} (٠,٦٧٩ - جا ٠,٦٧٩) \simeq ٠,٠٥٧٥$ سم^{٢} (١)

وبالمثل في المثلث جـ م ب:

$ق(هـ_{٢}) = ٢ \times جا^{-١} \frac{\sqrt{٢}}{٤ \times ١,٥} \simeq ٠,٤٧٥٩^{د}$

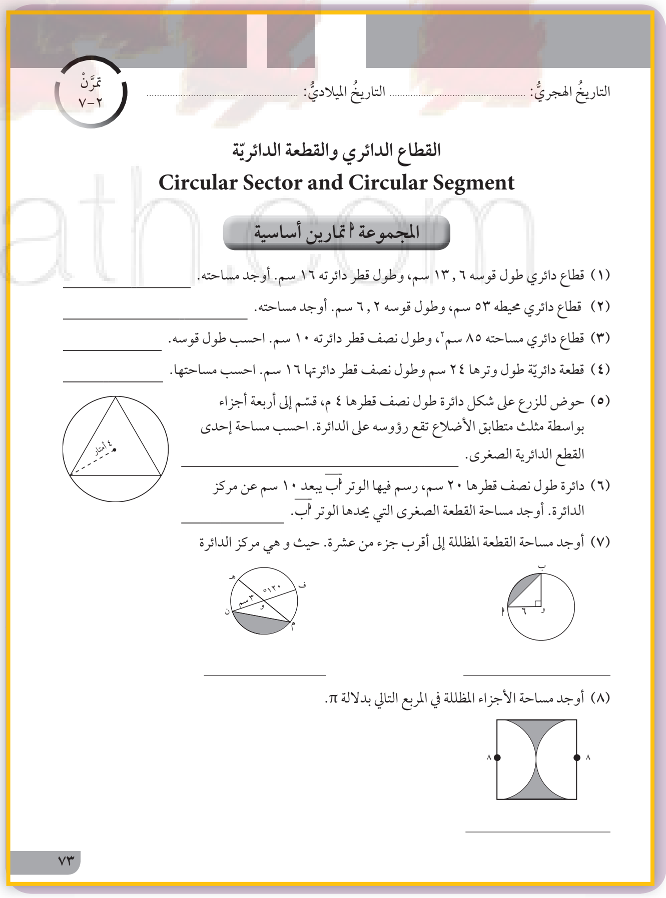
مساحة القطعة الدائرية المرتبطة بالوتر طوله $\frac{\sqrt{٢}}{٢} =$

$\frac{١}{٢} نق^{٢} (٠,٤٧٥٩ - جا ٠,٤٧٥٩) \simeq ٠,٠١٩٩٨$ سم^{٢} (٢)

من (١)، (٢) المساحة بين طبق بتري والقالب المعدني

$\simeq ٤ \times (٠,٠٥٧٥ + ٠,٠١٩٩٨) \simeq ٠,٣٠٩٦$ سم^{٢}

١٠٦



التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرّنْ ٢-٧

القطاع الدائري والقطعة الدائريّة

Circular Sector and Circular Segment

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) قطاع دائري طول قوسه ١٣,٦ سم، وطول قطر دائرته ١٦ سم. أوجد مساحته.

(٢) قطاع دائري محيطه ٥٣ سم، وطول قوسه ٦,٢ سم. أوجد مساحته.

(٣) قطاع دائري مساحته ٨٥ سم^{٢}، وطول نصف قطر دائرته ١٠ سم. احسب طول قوسه.

(٤) قطعة دائريّة طول وترها ٢٤ سم وطول نصف قطر دائرتها ١٦ سم. احسب مساحتها.

(٥) حوض للزرع على شكل دائرة طول نصف قطرها ٤ م، قسّم إلى أربعة أجزاء بواسطة مثلث متطابق الأضلاع تقع رؤوسه على الدائرة. احسب مساحة إحدى القطع الدائرية الصغرى.

(٦) دائرة طول نصف قطرها ٢٠ سم، رسم فيها الوتر $\overline{أب}$ يبعد ١٠ سم عن مركز الدائرة. أوجد مساحة القطعة الصغرى التي يحدها الوتر $\overline{أب}$.

(٧) أوجد مساحة القطعة المظللة إلى أقرب جزء من عشرة. حيث و هي مركز الدائرة

(٨) أوجد مساحة الأجزاء المظللة في المربع التالي بدلالة π.

٧٣

⑦ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يستخدم الطلاب قياس زاوية القطاع الدائري هـْ بالدرجات (degrees). وضح لهم أنه يجب التحويل من الدرجات إلى الراديان (Radians).

قد يخلط الطلاب بين القطاع الدائري والقطعة الدائرية. وضح لهم الفرق بأمثلة عديدة.

ساعد الطلاب على فهم مساحة القطعة الدائرية باستخدام المتغيرات في مكانها المناسب. أرشدهم على فهم قيمة هذه المساحة على أنها الفرق الحاصل بين مساحة قطاع دائري ومساحة مثلث.

ذكرهم بأن الزاوية التي رأسها في مركز الدائرة وقياسها هـْ يجب أن تكون دائمًا بالقياس الدائري راديان.

أرشدهم إلى أن مساحة القطاع الدائري يمكن الحصول عليها إمّا بالقاعدة: المساحة = $\frac{1}{2}$ ل نق أو المساحة = $\frac{1}{2}$ نق^2 هـْ علمًا أن ل = هـْ نق.

وأن المثلث المتطابق الضلعين رأسه في مركز الدائرة وزاويته هي هـْ وله مساحة تساوي $\frac{1}{2}$ نق^2 جا هـْ علمًا أن نق هو نصف قطر الدائرة.

⑧ التقييم

اطلب إلى الطلاب حل فقرات «حاول أن تحل» في كتاب الطالب، وتأكد من أنهم يستخدمون المعطيات بشكل جيد لإيجاد المساحات المطلوبة.

ملاحظة:

تأكد أن وضع الآلة الحاسبة على التقدير الدائري في حال حساب مساحة القطعة الدائرية، مع ضرورة الانتباه ما إذا كان قياس الزاوية المركزية المعلومة بالقياس الستيني قد تحول إلى القياس الدائري.

اختبار سريع

❶ أوجد مساحة قطاع دائري طول قوسه ٨ سم وطول نصف قطر دائرته ١٢ سم. ٤٨ سم^2.

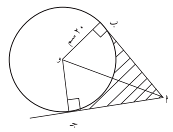
❷ أوجد مساحة Δ اب جـ حيث اب = ٨ سم، اجـ = ١١ سم، ق(أ) = ٤٨°. $\simeq$ ٣٢,٧ سم^2.

❸ أوجد مساحة قطعة دائرية قياس زاويتها المركزية $\frac{\pi}{5}$ وطول نصف قطر دائرتها ٦ سم. $\simeq$ ٠,٧٣ سم^2.

المجموعة ب تمارين تعزيزية

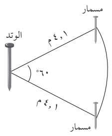
(١) قطاع دائري طول نصف قطر دائرته ٢٠ سم، وزاوية رأسه ١٠٠°. أوجد مساحته.

(٢) حوض زهور على شكل قطاع دائري محيطه ٤٨ سم، وطول نصف قطر دائرته ٧,٨ سم. أوجد مساحته.

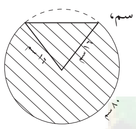


(٣) في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{اب}$ ، $\overleftrightarrow{اجـ}$ مماسان للدائرة، وب = ٢٠ سم، وا = ٤٠ سم.
أوجد مساحة الجزء المظلل.

(٤) قطاع دائري زاوية رأسه ٦٠°، وطول نصف قطر دائرته ١٠ سم.
أوجد محيطه.



(٥) وتد مثبّت في الأرض ربط به طرف حبل طوله ٤,١ أمتار، وثبّت في الطرف الآخر من الحبل مسمار كبير لشدّه، فرسم طرفه الذي فيه المسمار على الأرض قوسًا يقابل زاوية مركزية عند الوتد مقدارها ٦٠°. أوجد طول القوس المرسوم ومساحة القطاع الناتج.



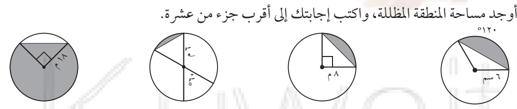
(٦) في الشكل المقابل، قطعة من الورق على شكل قطعة دائرية الشكل طول قوسها ٨٠ سم، وطول نصف قطر دائرتها ١٦ سم. احسب مساحتها.

(٧) أوجد مساحة القطعة الدائرية التي طول نصف قطر دائرتها ٢٠ سم، وطول قوسها ١٠ سم.

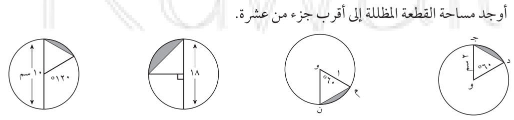
٧٤

(٨) اب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، حيث اب = ٣٠ سم، ب جـ = ٤٠ سم، رسمت دائرة مركزها ب وتمسّ $\overline{اجـ}$ في د، وتقطع $\overline{ب جـ}$ في هـ. احسب المساحة المحصورة بين $\overline{جـ هـ}$، $\overline{د جـ}$، والقوس الأصغر دهـ.

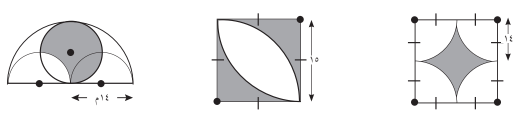
(٩) أوجد مساحة المنطقة المظللة، واكتب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.



(١٠) أوجد مساحة القطعة المظللة إلى أقرب جزء من عشرة.



(١١) أوجد مساحة الأجزاء المظللة في كل شكل بدلالة π.



٧٥

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ المساحة = $\frac{١}{٢}$ ل × ع

= $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ١٠

= ٢٠ سم^{٢}

٢ مساحة المثلث ب ع د = $\frac{١}{٢}$ ب ع × د ع × جا(ع)

٧ = $\frac{١}{٢}$ (٣) (٦) جا(ع)

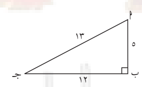
جا(ع) = $\frac{٧}{٩}$ ،

ق(ع̂) ≃ ٥١° تقريبًا.

٣ (أ) ≃ ٣,٢٦ أمتار مربعة

(ب) المساحة ≃ ١٤,١ سم^{٢}

اختبار الوحدة الثانية



في التمارين (١ — ٩) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) في الشكل المقابل جا(٩٠° – أ) تساوي:

(أ) $\frac{١٢}{١٣}$ (ب) $\frac{٥}{١٣}$ (جـ) $\frac{١٢}{٥}$ (د) $\frac{٥}{١٢}$

(٢) جا جـ قاجـ تساوي:

(أ) ظتاجـ (ب) ١ (جـ) جا^{٢} جـ (د) ظاجـ

(٣) قاجـ جتاجـ تساوي:

(أ) قتا^{٢} جـ (ب) ١ (جـ) $\frac{\text{جاجـ}}{\text{ظاجـ}}$ (د) جتا^{٢}جـ

(٤) جاجـ ظتاجـ تساوي:

(أ) جتاجـ (ب) $\frac{\text{جا}^{٢}\text{ جـ}}{\text{قاجـ}}$ (جـ) ظتا^{٢}جـ ظاجـ (د) ظاجـ

(٥) ظا ٤٥° تساوي:

(أ) بين ٠، ١ (ب) أكبر من ١ (جـ) ١ (د) ٠

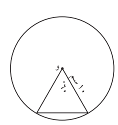
(٦) أب جـ مثلث قائم في ب̂ فإن أجـ تساوي:

(أ) أب جتاجـ (ب) أب ظاجـ (جـ) أب قتاجـ (د) أب جاجـ

(٧) في الشكل المقابل، مساحة القطاع الأصغر تساوي:

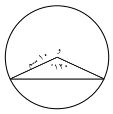
(أ) $\frac{٥٠\pi}{٣}$ سم^{٢} (ب) $\frac{١٠٠\pi}{٣}$ سم^{٢}

(جـ) $\frac{٥٠٠\pi}{٣}$ سم^{٢} (د) $\frac{١٠٠}{٣}$ سم^{٢}



٧٦

(٨) في الشكل المقابل مساحة القطعة الدائرية الصغرى (بوحدات المساحة) تساوي:



(أ) ٥٠ $\left(١٢٠ - \frac{\sqrt{٤١}}{٢}\right)$ (ب) ٥٠ $\left(\frac{١٢٠\pi}{١٨٠} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$

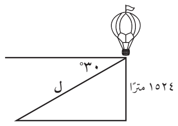
(جـ) ١٠٠ $\left(\frac{١٢٠\pi}{١٨٠} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$ (د) ١٠٠ $\left(١٢٠ - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$

(٩) قطاع دائري طول نصف قطر دائرته ٤٠ سم، ومساحته ٥٠٠ سم^{٢}، فإن طول قوس القطاع (بالسنتيمترات) يساوي:

(أ) ٥٠ (ب) ٢٥ (جـ) ١٠٠ (د) ٧٥

(١٠) يرتفع منطاد في الفضاء ويصنع اتجاه المنطاد مع خط أفقي على سطح الأرض زاوية قياسها ٣٠°.

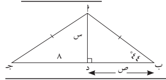
ما المسافة التي سوف يجتازها إذا وصل إلى ارتفاع ١٥٢٤ مترًا عن سطح الأرض.



(١١) أب جـ مثلث قائم في ب̂. فيه أب = ٦ سم، ب جـ = ٨ سم ، أوجد كلاً من:

(أ) أجـ. ________ (ب) جاجـ. ________ (جـ) قياس جـ̂ . ________

(١٢) في الشكل المقابل، احسب كلًّا من س، ص.



(١٣) حل المثلث أب جـ القائم في جـ̂:

(أ) أب = ٦٠ سم ، ق(ب̂) = ٧٠° ________

(ب) ب جـ = ١٧ سم، أ جـ = ١٥ سم. ________

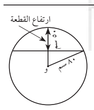
(١٤) بينما كان أحد مهندسي الزراعة يحلق على ارتفاع ١٥٠٠ م بطائرة عمودية لرش المبيدات شاهد موقعًا على سطح الأرض بزاوية انخفاض قياسها ٢٠°. احسب بعد الموقع عن الطائرة.

٧٧

(١٥) يقف رجل إنقاذ في برج مراقبة ارتفاعه ٨ م عن سطح البحر. شاهد شخصًا متعثرًا في العوم ويكاد يغرق. رصد موقعه فكانت زاوية انخفاض الشخص ١٨°. احسب المسافة التي سيقطعها رجل الإنقاذ ليصل إلى الشخص المتعثر بدءًا من قاعدة برج المراقبة.

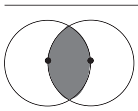
(١٦) قطاع دائري مساحته ١٢,٦٤ سم^{٢}، وقياس زاويته ٧٥°. أوجد طول قوس القطاع.

(١٧) لوح من الخشب دائري الشكل طول نصف قطره يساوي ٨٠ سم يراد تقسيمه إلى قطعتين، ارتفاع إحداهما ٥٠ سم. أوجد مساحة سطح القطعة الدائرية الكبرى.

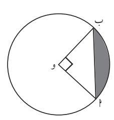


(١٨) سلم إطفاء طوله ٢٨ م. يستند بطرفه العلوي إلى قمة حائط عمودي وبطرفه السفلي إلى أرض أفقية بحيث يبعد طرفه السفلي عن الحائط العمودي بمقدار ١٠ م. احسب قياس زاوية ميل السلم على الأرض وارتفاع الحائط العمودي.

* (١٩) في الشكل المقابل، يقع مركز كل دائرة على الدائرة الثانية، وطول نصف قطر كل من الدائرتين يساوي ١٠ سم. أوجد محيط المنطقة المظللة.



(٢٠) في الشكل المقابل، أوجد محيط ومساحة المنطقة المظللة إذا كان طول نصف قطر الدائرة يساوي ٤ سم.

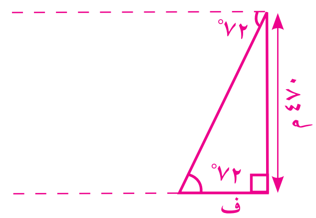


٧٨

المرشد لحل المسائل

إجابة «مسألة إضافية»

اطلب إلى الطلاب رسم مخطط للمسألة.



ظا٧٢° = $\frac{٤٧٠}{ف}$

ف = $\frac{٤٧٠}{ظا ٧٢°}$ ≃ ١٥٣

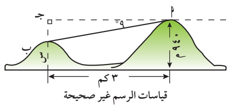
يبعد هذا المظلي عن قاعدة التل حوالى ١٥٣ مترًا.

المرشد لحل المسائل

خلال بحثه على أحد المواقع الإنترنت وجد سلطان المسألة التالية:

يبعد تلان عن بعضهما ٣ كم. يبلغ ارتفاع القمة «أ» ٩٤٠ مترًا وقياس زاوية الانخفاض من القمة «أ» إلى القمة «ب» ٩°. أوجد ارتفاع القمة «ب».

كيف فكر سلطان لإيجاد ارتفاع القمة ب.



قياسات الرسم غير صحيحة

بداية، سوف أرسم مخططًا للمسألة.

البعد بين التلين = ٣ كم.

قياس زاوية الانخفاض = ٩°.

ارتفاع القمة «أ» = ٩٤٠ مترًا.

عليّ إيجاد ارتفاع القمة «ب». ليكن س هذا الارتفاع.

لإيجاد قيمة س، سوف أستخدم النسب المثلثية في المثلث أ ب جـ. طول أحد ضلعي القائمة البعد بين القمتين وقياس إحدى زواياه الحادة ٩°. سوف أستخدم ظل هذه الزاوية أو مقلوبه إذا استطعت إيجاد طول أحد أضلاع الزاوية القائمة. إذا تمعنت في الرسم أجد أن:

أجـ = ٣ كم = ٣٠٠٠ متر.

∵ كانت الزاوية هي زاوية انخفاض، فارتفاع القمة: «ب» سوف يكون أصغر من ارتفاع القمة «أ».

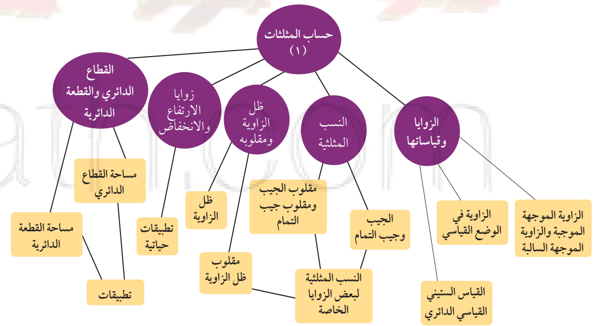
سأكتب معادلة	ظا٩° = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{٣٠٠٠}$
سأحل المعادلة	ب جـ = ٣٠٠٠ × ظا٩°
سأستخدم آلة حاسبة وأقربّ	ب جـ = ٤٧٥ متر تقريبًا
يبقى عليّ طرح هذه القيمة من ارتفاع القمة «أ»	س = ٩٤٠ − ٤٧٥ = ٤٦٥

لذا يكون ارتفاع القمة (ب) ٤٦٥ مترًا.

مسألة إضافية

في صف الطيران المظلي، وقف الطلاب على تل ارتفاعه ٤٧٠ مترًا يراقبون رفيقًا لهم يهبط بالمظلة. عندما وصل إلى الأرض كانت زاوية الانخفاض ٧٢°. ما بعد هذا المظلي عن قاعدة التل؟

مخطط تنظيمي للوحدة الثانية



ملخص

– تكون الزاوية الموجهة موجبة إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي عكس دوران عقارب الساعة.

– تكون الزاوية الموجهة سالبة إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي مع دوران عقارب الساعة.

– تكون الزاوية الموجهة في الوضع القياسي إذا كان ضلعها الابتدائي على الجزء الموجب من محور السينات ورأسها في نقطة الأصل لمحاور الإحداثيات.

– تقاس الزاوية بالدرجات أو بالراديان.

– الزاوية نصف القطرية هي زاوية مركزية في دائرة تحصر قوسًا طوله يساوي طول نصف قطر هذه الدائرة وقياسها يساوي ١ راديان.

– العلاقة: $\frac{هـ^د}{\pi} = \frac{س^\circ}{١٨٠^\circ}$ تربط بين القياس الستيني والقياس الدائري لزاوية.

– في المثلث قائم الزاوية جيب الزاوية هو نسبة الضلع المقابل إلى الوتر ويرمز إليه بـ جا أو sin.

– جيب التمام للزاوية هو نسبة الضلع المجاور إلى الوتر ويرمز إليه بـ جتا أو cos.

– قاطع الزاوية هو مقلوب جيب تمام الزاوية قاأ = $\frac{١}{\text{جتاأ}}$ حيث جتاأ ≠ ٠.

– قاطع تمام الزاوية هو مقلوب جيب الزاوية قتاأ = $\frac{١}{\text{جاأ}}$ حيث جاأ ≠ ٠.

– ظل الزاوية هو نسبة الضلع المقابل إلى الضلع المجاور ويرمز إليه ظا أو tan.

– ظل تمام الزاوية هو نسبة طول الضلع المجاور إلى طول الضلع المقابل ويرمز إليه ظتا أو cotan.

– جا ٤٥° = جتا ٤٥° = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ؛ ظا ٤٥° = ١

جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ظا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$ ظا ٦٠° = $\sqrt{٣}$

– زاوية الارتفاع: إذا كانت نقطة ما أعلى من مستوى النظر الأفقي.

– زاوية الانخفاض: إذا كانت نقطة ما أدنى من مستوى النظر الأفقي.

– القطاع الدائري هو جزء من الدائرة محدود بنصفي قطرين وقوس على الدائرة.

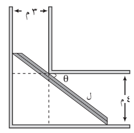
– مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ هـ^د نق^٢ حيث هـ^د قياس الزاوية المركزية للقطاع الدائري بالراديان، نق هو نصف قطر الدائرة.

– القطعة الدائرية هي جزء من الدائرة محدودة بوتر وقوس على الدائرة.

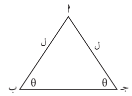
– مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ (هـ^د − جاهـ^د).

تمارين إثرائيّة

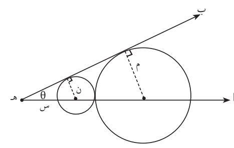
(١) يبيّن الشكل المقابل سلمًا بوضع أفقي يُراد نقله بين ممرّين.
عرض أحد الممرين ٣ أمتار وعرض الآخر ٤ أمتار.
أوجد طول السلم ل بمعلومية θ.



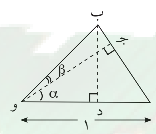
(٢) Δ أب جـ متطابق الضلعين.
أثبت أن مساحة هذا المثلث تساوي ل^{٢}جاθ جتاθ.



(٣) في الشكل المقابل أثبت أن:
$\text{جا}\theta = \frac{\text{م} - \text{ن}}{\text{م} + \text{ن}}$



(٤) في الشكل المقابل، أثبت أن:



(أ) مساحة Δوأجـ $= \frac{١}{٢}$ جاα جتاα.

(ب) مساحة Δوجـ ب $= \frac{١}{٢} \times$ (وب)$^{٢} \times$ جا$\beta \times$ جتاβ

(جـ) مساحة Δوأب $= \frac{١}{٢} \times$ وب $\times$ جا $(\alpha + \beta)$

(د) وب $= \frac{\text{جتا}\alpha}{\text{جتا}\beta}$

* (هـ) جا$(\alpha + \beta)$ = جاα جتاβ + جتاα جاβ.

(٥) إذا كان جتاα = ظاβ ، جتاβ= ظاα حيث α، β هما قياسا زاويتين حادتين، فأثبت أن جاα = جاβ.