الوحدة الثامنة: حساب المثلثات [٢]

Trigonometry [2]

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

٨ – ١ : دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية (الدائرية)

جزء ١ : دائرة الوحدة.

جزء ٢ : إشارات الدوال المثلثية.

جزء ٣: زاوية الإسناد.

٨ – ٢ : العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

جزء ١ : العلاقات بين الدوال المثلثية للزاوية θ مع: $-\theta$ ، $\pi - \theta$ ، $\pi + \theta$ ، $\frac{\pi}{٢} - \theta$ ، $\frac{\pi}{٢} + \theta$ ، $٢ك\pi + \theta$.

جزء ٢ : حل معادلات مثلثية.

جزء ٣: تبسيط تعبيرات جبرية تحتوي على دوال مثلثية.

٨ – ٣: العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)

جزء ١ : متطابقات فيثاغورث.

جزء ٢ : علاقات مثلثية.

جزء ٣: تبسيط عبارات تتضمن دوال مثلثية.

جزء ٤ : برهنة صحة بعض المتطابقات المثلثية.

مقدمة الوحدة

سوف يكمل الطالب في الوحدة الثامنة تطوير مفاهيمه وتنمية مهاراته في حساب المثلثات حيث تعرف على حساب المثلثات في الوحدة الثانية على أنها نسبًا مثلثية في المثلث قائم الزاوية. ولكن في هذه الوحدة سوف يكون أمام الطالب حساب مثلثات كدالة لمتغير على دائرة الوحدة. لذا كان لا بد للطالب أن يستخدم مكتسباته عن الدائرة وعلاقة نصف قطرها مع المماس عند نقطة التماس، وأيضًا عن نظرية فيثاغورث والمثلثات المتشابهة والأضلاع المتناسبة فيها.

من المفيد أن نشير هنا إلى أهمية النسب المثلثية والدوال المثلثية في التطبيقات الحياتية، حيث ساهمت في إيجاد حلول لمشاكل تواجه الإنسان وخاصة في القياسات غير المباشرة والعلوم العسكرية...

أخبرهم أن التعامل مع الدوال المثلثية سوف يستمر في السنوات القادمة في مجالات علمية متعددة ولن يقتصر الأمر على الرياضيات فقط.

الوحدة الثامنة

حساب المثلثات (٢)
Trigonometry (2)

مشروع الوحدة: موجة المستقبل

١ مقدمة المشروع: يحتوي مد وجزر المحيط على كمّ هائل من الطاقة. استخدمَتْ هذه الطاقة خلال القرون الغابرة لإدارة الطواحين. أما في العقود الأخيرة فقد اكتشفت الشركات كيفية تسخير هذه الطاقة لتوليد الكهرباء. تتغير قوة المد والجزر بدرجة عالية ولكن بطريقة متوقّعة ومتكررة مما سهل الاستفادة منها.

يجب إجراء دراسة دقيقة لحركة المد والجزر لتحديد مكان وضع المحرّكات، بغية (الهدف) الاستفادة القصوى من الطاقة المولدة. يبنى السّد عادة حيث يوجد أكبر فرق بين المد والجزر. تتولد الطاقة من دخول الماء وخروجه من خلال السد. يتمُّ استخدام مصادر أخرى للطاقة لدعم تلك المتولّدة من حركة المد والجزر عندما تخف هذه الحركة.

٢ الأهداف: دراسة حول الطاقة المتولدة من حركة المد والجزر، وإمكانية الاستفادة منها في توليد الطاقة الكهربائية.

٣ اللوازم: أوراق مليمترية، آلة حاسبة بيانية.

٤ أسئلة حول التطبيق:

١ يسجل يوميًا في مواقع معيّنة من العالم ارتفاع المياه فوق مستوى معين، يُسمى متوسط المياه المنخفضة Low Water Mean. يُبيِّن الجدولان المرفقان المعلومات المسجلة في موقعين. قدّر فترة ومدى الدالة التي تنمذج دورة المد والجزر في كل موقع.

الموقع الأول	
الوقت	ارتفاع المياه
١١:٣٠ ق.ظ	١٨ سم
٥:٤٢ ب.ظ	١٤٦ سم
١١:٥٥ ب.ظ	١٨ سم
٦:٠٧ ق.ظ	١٤٦ سم

الموقع الثاني	
الوقت	ارتفاع أو انخفاض المياه
٤:٤٦ ب.ظ	-٧٣ سم
١٠:٥٩ ب.ظ	١٠١ سم
٥:١١ ق.ظ	-٧٣ سم
١١:٢٤ ق.ظ	١٠١ سم

ب يتأثر المد والجزر بمواقع الشمس والقمر، يحدث أصغر أو أكبر مد وجزر عندما يكون القمر هلالًا أو بدرًا. ابحث عن ترابط موقع القمر وقوة المد والجزر، وارسم تمثيلًا بيانيًا يُبيِّن تحولات المد والجزر بدلالة الوقت خلال شهر قمري معين.

ج كيف يمكن تفسير عدم ثبات الطاقة المتولدة من حركة المد والجزر؟

د أوجد بعض المناطق على الكرة الأرضية حيث يمكن إقامة سدود للاستفادة من حركة المدّ والجزر.

هـ التقرير: مرتكزًا على الأبحاث التي قمت بها، أُكتب مقالًا صغيرًا تبين فيه مزايا وعيوب هذه الطاقة. هل تعتقد أنه يمكن تشكيل مصدر عمليّ للطاقة الكهربائية في المستقبل؟

دروس الوحدة

دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية (الدائرية)	العلاقات بين الدوال المثلثية (١)	العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)
١-٨	٢-٨	٣-٨

٨٦

مشروع الوحدة

يقدم هذ المشروع أمام الطلاب معطيات علمية مهمة. فهو يؤكد على كيفية استخدام ظاهرة طبيعية لها علاقة بحركة القمر ودورانه حول الأرض، إذ يحول حركة المد والجزر في البحار إلى طاقة يستخدمها الإنسان في مواقف مختلفة.

فبدلًا من أن نقف في ليلة قمرية يكتمل البدر فيها نتأمل حركة المد والجزر، يحفزنا هذا المشروع على أن نأخذ ورقة وقلمًا ونسجل الأوقات وارتفاع المياه لنكتب بعدها دالة جيبية، ثم نعيد التجربة عندما يكون القمر على شكل الهلال...

الوحدة الثامنة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت كيفية استخدام النسب المثلثية.
- تعلمت كيفية استخدام نظرية فيثاغورث.

ماذا سوف تتعلم؟

- سوف تتعرف دائرة الوحدة.
- سوف توجد إحداثيات النقطة على دائرة الوحدة لتستخدمها في إيجاد قيم الدوال المثلثية.
- سوف توجد العلاقة بين الدوال المثلثية لزاوية حادة لحل المعادلات المثلثية.
- سوف تقوم بتبسيط عبارات جبرية تحتوي على دوال مثلثية.
- سوف توجد العلاقة بين:
  - جا'θ، جتا'θ لأي زاوية θ.
  - ظا'θ وقا'θ لأي زاوية θ.
  - ظتا'θ وقتا'θ لأي زاويةθ.
- سوف تبسط عبارات تتضمن دوالّ مثلثية وتبرهن صحة متطابقات مثلثية.

المصطلحات الأساسية

دائرة الوحدة – دوال مثلثية – إشارات الدوال المثلثية – إشارات مقلوب دالة مثلثية – الربع الأول – الربع الثاني – الربع الثالث – الربع الرابع – زاوية الإسناد – متطابقات.

أضف إلى معلوماتك

أُطلق اسم جيب (sin) على دالة الجيب (sin function) نتيجة عدم وضوح حصل في القرون الوسطى. جاءت هذه التّسمية من كلمة سنسكريتية (Sanskrit) وهي «جيڤا» (Jiva) وتعني الوتر. وقد استخدمت أولًا في الهند مع «أريابتا» (Araybheta) سنة ٥١٠ م. وكانت تعني نصف وتر ولكن تم اختصارها، ونقلت إلى اللغة العربية تحت اسم «جيبا» (jiba) وهي مشابهة لكلمة «جيب» (jaib) وتعني الصدر (أو التجويف). أما في الوقت الحاضر فكلمة جيب في اللغة العربية هي مرادفة لكلمة (sin).

وجد المترجمون عند نقل الناتج الفكري العربي إلى اللاتينية أنّ كلمة جيب (sinus) تعني أيضًا الصدر (أو التجويف) ومن كلمة (sinus) حصلنا على كلمة (sin) جيب، أمّا كلمة ظل (tangent) فهي تعود إلى «توماس فينك» (Thomas Finck) عام ١٥٨٣، التي يمكن فهمها بالنظر إلى الرسم:

القطعة المستقيمة $\overline{\text{دجـ}}$ هي مماسة للدائرة في النقطة جـ. لنأخذ م ب = م جـ = ١ فيكون ظاهـ = $\frac{\text{دجـ}}{\text{م جـ}}$ = $\frac{\text{دجـ}}{١}$ = دجـ، كما وعرفت tangent قديمًا بعبارة «umbra versa» وتعني الظل المدار. تستخدم دائرة الوحدة في حل تمارين تتعلق بالدوال المثلثية.

٨٧

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

(أ) الموقع الأول:

من ٣٠: ١١ ق.ظ إلى ٥٥: ١١ ب.ظ ← الفترة ١٢ ساعة ٢٥ دقيقة

من ٤٢: ٥ ب.ظ إلى ٠٧: ٦ ق.ظ ← الفترة ١٢ ساعة ٢٥ دقيقة

المدى = $\frac{١٤٦ - ١٨}{٢}$ = $\frac{١٢٨}{٢}$ = ٦٤ سم

الفترة هي المدة الفاصلة بين ارتفاع معين وإعادة تكراره

الموقع الثاني:

من ٤٦: ٤ ب.ظ إلى ١١: ٥ ق.ظ ← الفترة ١٢ ساعة ٢٥ دقيقة

من ٥٩: ١٠ب. ظ إلى ٢٤: ١١ ق.ظ ← الفترة ١٢ ساعة ٢٥ دقيقة

المدى = $\frac{١٠١ - (-٧٣)}{٢}$ = $\frac{١٧٤}{٢}$ = ٨٧ سم

(ب) تحقق من عمل الطلاب.

(جـ) تحقق من عمل الطلاب.

(د) تحقق من عمل الطلاب.

التقرير

قدّم تقريرًا مفصلًا عن عملك. ناقش مع زملائك النقاط الأساسية في المشروع. أعد النظر ببعض النتائج إذا كان ذلك ضروريًّا.

سلّم التقييم	
٤.	الحسابات صحيحة. البحث شامل. التفسيرات جيدة. التقرير مفصل وواضح.
٣.	الحسابات بمعظمها صحيحة. البحث مقبول. التفسيرات مقبولة. التقرير مفصل ومعظمه واضح.
٢.	الحسابات بعضها صحيح. البحث يتضمن غموض. التفسيرات غير منطقية في بعض الأحيان. التقرير ينقصه الإيضاح.
١.	معظم عناصر المشروع ناقصة وغير مقبولة.

٨ـ١ : دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية (الدائرية)

١ الأهداف

- يتعرف دائرة الوحدة.
- يتعرف النقطة المثلثية.
- يتعرف الدوال المثلثية (الدائرية).
- يحدّد إشارات الدوال المثلثية.
- يوجد زاوية الإسناد ويستخدمها.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

دائرة الوحدة – النقطة المثلثية – زاوية الإسناد – الدالة المثلثية.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة مدرجة – فرجار – منقلة – آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اسأل الطلاب تعريف:

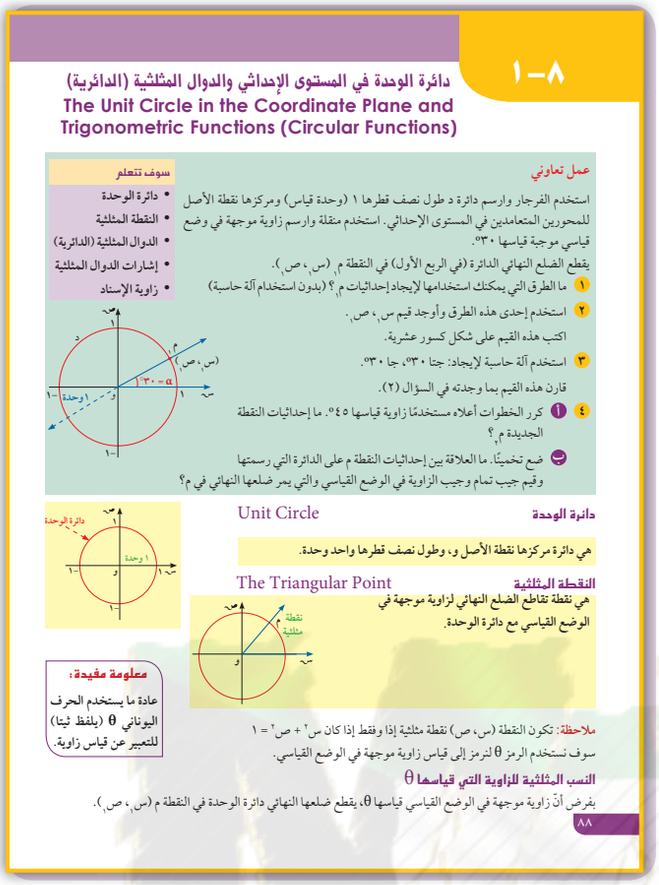
- النسب المثلثية في المثلث قائم الزاوية:

  جا، جتا، ظا، طتا، . . .
- الزاوية الموجهة الموجبة في الوضع القياسي.
- الزاوية الموجهة السالبة في الوضع القياسي.
- المثلث الثلاثيني ستيني.

٥ التدريس

في فقرة «عمل تعاوني»، اشرح للطلاب أن المقصود بوحدة القياس هي الوحدة المشتركة المستخدمة على المحورين وأن طول نصف قطر دائرة الوحدة يجب أن يساوي هذه الوحدة.

ركز مع الطلاب على فكرة أن كل نقطة في المستوى الإحداثي تكون معرفة دائمًا بزوج مرتب (س، ص)، حيث س الإحداثي السيني، ص الإحداثي الصادي وبالتالي كل نقطة على دائرة الوحدة سوف تعرف أيضًا بزوج مرتب (س، ص) حيث س^{٢} + ص^{٢} = ١ وهي النقطة المثلثية.



٨ـ١

دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية (الدائرية)

The Unit Circle in the Coordinate Plane and Trigonometric Functions (Circular Functions)

سوف تتعلم
- دائرة الوحدة
- النقطة المثلثية
- الدوال المثلثية (الدائرية)
- إشارات الدوال المثلثية
- زاوية الإسناد

عمل تعاوني

استخدم الفرجار وارسم دائرة د طول نصف قطرها ١ (وحدة قياس) ومركزها نقطة الأصل للمحورين المتعامدين في المستوى الإحداثي. استخدم منقلة وارسم زاوية موجهة في وضع قياسي موجبة قياسها ٣٠°.

يقطع الضلع النهائي الدائرة (في الربع الأول) في النقطة م (س، ص).

١ ما الطرق التي يمكنك استخدامها لإيجاد إحداثيات م؟ (بدون استخدام آلة حاسبة)

٢ استخدم إحدى هذه الطرق وأوجد قيم س، ص.

اكتب هذه القيم على شكل كسور عشرية.

٣ استخدم آلة حاسبة لإيجاد: جتا ٣٠°، جا ٣٠°.

قارن هذه القيم بما وجدته في السؤال (٢).

٤ ١ كرر الخطوات أعلاه مستخدمًا زاوية قياسها ٤٥°. ما إحداثيات النقطة الجديدة م؟

ب ضع تخمينًا. ما العلاقة بين إحداثيات النقطة م على الدائرة التي رسمتها وقيم جيب تمام وجيب الزاوية في الوضع القياسي والتي يمر ضلعها النهائي في م؟

دائرة الوحدة — Unit Circle

هي دائرة مركزها نقطة الأصل و، وطول نصف قطرها واحد وحدة.

النقطة المثلثية — The Triangular Point

هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة.

معلومة مفيدة: عادة ما يستخدم الحرف اليوناني θ (يلفظ ثيتا) للتعبير عن قياس زاوية.

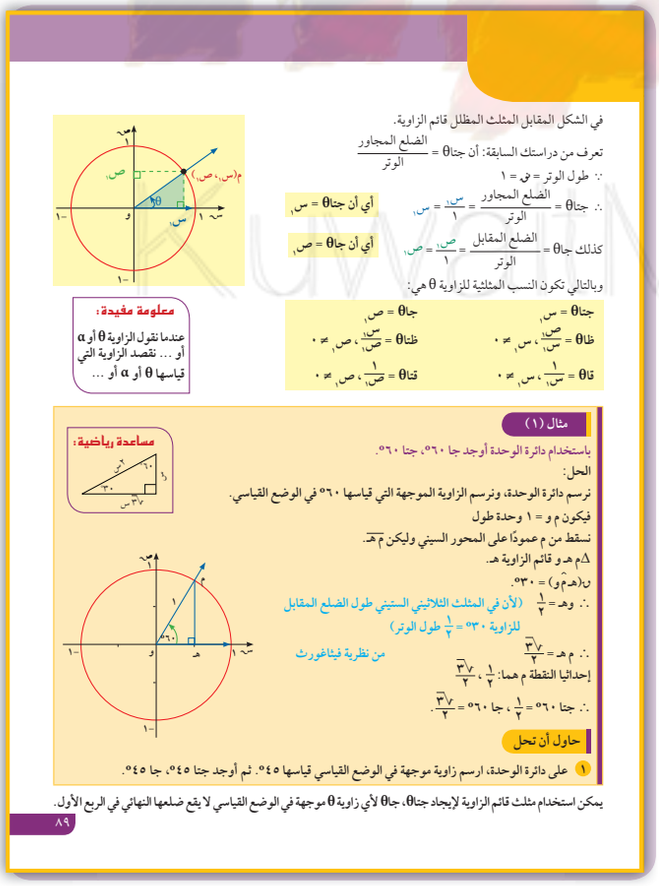
ملاحظة: تكون النقطة (س، ص) نقطة مثلثية إذا وفقط إذا كان س^{٢} + ص^{٢} = ١

سوف نستخدم الرمز θ لنرمز إلى قياس زاوية موجهة في الوضع القياسي.

النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ

بفرض أن زاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها θ، يقطع ضلعها النهائي دائرة الوحدة في النقطة م (س، ص).

٨٨



في الشكل المقابل المثلث المظلل قائم الزاوية.

تعرف من دراستك السابقة: أن جتا θ = الضلع المجاور / الوتر

∵ طول الوتر = نق = ١

∴ جتا θ = الضلع المجاور / الوتر = س$_{١}$ / ١ = س$_{١}$ — أي أن جتا θ = س$_{١}$

كذلك جا θ = الضلع المقابل / الوتر = ص$_{١}$ / ١ = ص$_{١}$ — أي أن جا θ = ص$_{١}$

وبالتالي تكون النسب المثلثية للزاوية θ هي:

جتا θ = س$_{١}$ ، جا θ = ص$_{١}$

ظا θ = ص$_{١}$ / س$_{١}$ ، س$_{١}$ ≠ ٠ ، ظتا θ = س$_{١}$ / ص$_{١}$ ، ص$_{١}$ ≠ ٠

قا θ = ١ / س$_{١}$ ، س$_{١}$ ≠ ٠ ، قتا θ = ١ / ص$_{١}$ ، ص$_{١}$ ≠ ٠

معلومة مفيدة: عندما نقول الزاوية θ أو α أو ... نقصد الزاوية التي قياسها θ أو α أو ...

مثال (١)

باستخدام دائرة الوحدة أوجد جا ٦٠°، جتا ٦٠°.

الحل:

نرسم دائرة الوحدة، ونرسم الزاوية الموجهة التي قياسها ٦٠° في الوضع القياسي.

فيكون م و = ١ وحدة طول

نسقط من م عمودًا على المحور السيني وليكن م هـ.

Δ م هـ و قائم الزاوية هـ.

ق(هـ م و) = ٣٠°.

∴ و هـ = ١/٢ (لأن في المثلث الثلاثيني الستيني طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° = ١/٢ طول الوتر)

∴ م هـ = √٣/٢ — من نظرية فيثاغورث

إحداثيا النقطة م هما: ١/٢ ، √٣/٢

∴ جتا ٦٠° = ١/٢ ، جا ٦٠° = √٣/٢

مساعدة رياضية:

حاول أن تحل

١ على دائرة الوحدة، ارسم زاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها ٤٥°. ثم أوجد جتا ٤٥°، جا ٤٥°.

يمكن استخدام مثلث قائم الزاوية لإيجاد جتا θ، جا θ لأي زاوية θ موجهة في الوضع القياسي لا يقع ضلعها النهائي في الربع الأول.

٨٩

وكلما تغيرت النقطة على دائرة الوحدة سوف تحدد زاوية مركزية مع محور السينات، قياسها يساوي قياس القوس المحصور بين محور السينات ونصف القطر الواصل من مركز الدائرة إلى هذه النقطة.

اطلب إليهم رسم المستقيم العمودي من أي نقطة على الدائرة على محور السينات والمستقيم العمودي من هذه النقطة على محور الصادات. اسألهم تعريف الوتر في المثلث قائم الزاوية الذي حصلوا عليه وإيجاد طول الوتر.

دعهم يعرفون بصوت مرتفع النقطة المثلثية على دائرة الوحدة. شجعهم على الربط بين النسب المثلثية في المثلث قائم الزاوية ليتعرفوا على النتائج الجديدة على دائرة الوحدة.

ركز معهم على فهم الاتجاه الموجب والسالب للزاوية على دائرة واحدة. أخبرهم أن هذه الحالات لم نستخدمها في النسب المثلثية على المثلث قائم الزاوية وأنهم الآن سوف يحسبون نسبًا مثلثية لزوايا سالبة وأيضًا لزوايا قياسها أكبر من ٩٠°.

مثال توضيحي

أقم حوارًا مع الطلاب وأنت تتعامل مع المثال التوضيحي، حيث المطلوب إيجاد جا(−١٢٠°) وجتا(−١٢٠°)، لأن الطلاب سيتفاجأون مع زاوية قياسها −١٢٠°.

شدّد على فكرة ربط النسب المثلثية على دائرة الوحدة مع الإحداثي السيني والإحداثي الصادي على المحاور مقارنة بنقطة الأصل للمحورين المتعامدين. سوف يتأكد الطلاب من إشارة جا، جتا بحسب موقع النقطة المثلثية على دائرة الوحدة.

اشرح لهم جيدًا مفهوم زاوية الإسناد. أخبرهم أنه بالإمكان إيجاد قياس هذه الزاوية باستخدام المنقلة. ثم أعط أمثلة لتبين لهم أهمية هذه الزاوية، عند حساب النسب المثلثية لزاوية قياسها أكبر من ٩٠°.

مثال توضيحي

باستخدام دائرة الوحدة أوجد جتا(−١٢٠°)، جا(−١٢٠°).

الحل:

الخطوة ١

ارسم زاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها −١٢٠° ويقطع ضلعها النهائي دائرة الوحدة في النقطة م.

الخطوة ٢

ارسم مثلثًا قائم الزاوية بحيث ينطبق الوتر على الضلع النهائي للزاوية ثم ضع أحد ضلعيه على محور السينات (بحيث يكون الضلع الآخر موازيًا لمحور الصادات) وليكن المثلث لوم.

الخطوة ٣

لاحظ أن ق(م$\hat{و}$ل) = ٦٠° لماذا؟

أوجد طول كل ضلع في المثلث.

طول الوتر وم = ١ طول الوتر يساوي طول نصف قطر الدائرة

طول الضلع الأصغر ول = $\frac{١}{٢}$ طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° يساوي نصف طول الوتر

طول الضلع الأكبر لم = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ باستخدام نظرية فيثاغورث

بما أن النقطة تقع في الربع الثالث، فكلا الإحداثيين سالبان.

ينطبق الضلع الأصغر على محور السينات ∴ جتا(−١٢٠°) = −$\frac{١}{٢}$ ، جا(−١٢٠°) = −$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$.

الإحداثي السيني = جتا(−١٢٠°)

الإحداثي الصادي = جا(−١٢٠°)

المثلث ثلاثيني ستيني

حاول أن تحل

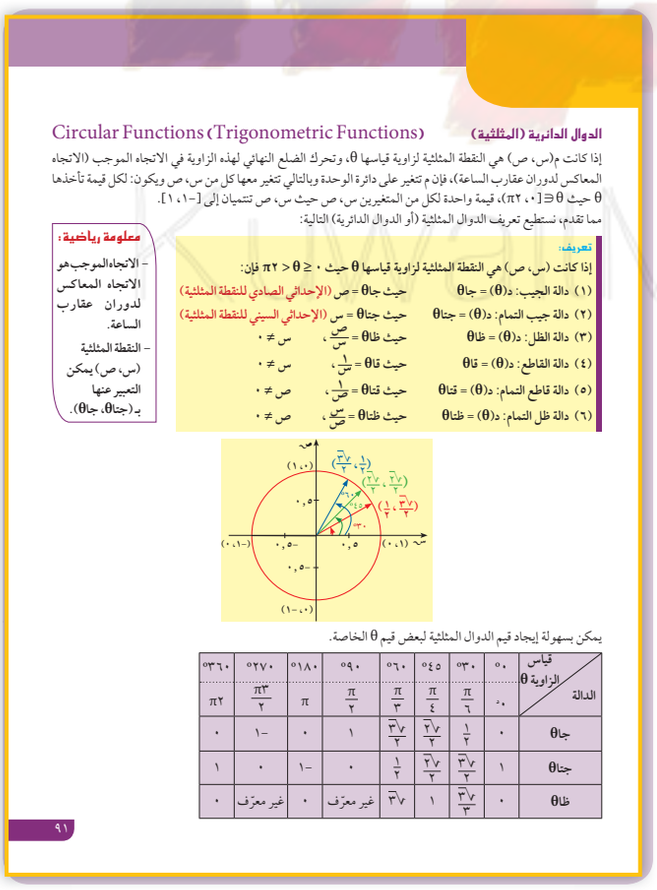
٢ مستخدمًا طريقة المثال التوضيحي، أوجد جتا $\frac{٣\pi}{٤}$ ، جا $\frac{٣\pi}{٤}$.

تدريب

استخدم آلة حاسبة وأكمل الجدول التالي مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين:

قياس الزاوية θ / النسبة	٢٠°	٤٠°	٨٠°	١٣٠°	١٦٠°	٢٢٠°	٢٥٠°	٣١٠°
جا θ (sinθ)								
جتا θ (cosθ)								
ظا θ (tanθ)								

٩٠



الدوال الدائرية (المثلثية) Circular Functions (Trigonometric Functions)

إذا كانت م(س، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية قياسها θ، وتحرك الضلع النهائي لهذه الزاوية في الاتجاه الموجب (الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة)، فإن م تتغير على دائرة الوحدة وبالتالي تتغير معها كل من س، ص ويكون: لكل قيمة تأخذها θ حيث θ ∈ [٠، ٢π)، قيمة واحدة لكل من المتغيرين س، ص حيث س، ص تنتميان إلى [−١، ١].

مما تقدم، نستطيع تعريف الدوال المثلثية (أو الدوال الدائرية) التالية:

تعريف:

إذا كانت (س، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية قياسها θ حيث ٠ ≤ θ < ٢π فإن:

(١) دالة الجيب: د(θ) = جا θ حيث جا θ = ص (الإحداثي الصادي للنقطة المثلثية)

(٢) دالة جيب التمام: د(θ) = جتا θ حيث جتا θ = س (الإحداثي السيني للنقطة المثلثية)

(٣) دالة الظل: د(θ) = ظا θ حيث ظا θ = $\frac{ص}{س}$ ، س ≠ ٠

(٤) دالة القاطع: د(θ) = قا θ حيث قا θ = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠

(٥) دالة قاطع التمام: د(θ) = قتا θ حيث قتا θ = $\frac{١}{ص}$ ، ص ≠ ٠

(٦) دالة ظل التمام: د(θ) = ظتا θ حيث ظتا θ = $\frac{س}{ص}$ ، ص ≠ ٠

معلومة رياضية:

- الاتجاه الموجب هو الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة.
- النقطة المثلثية (س، ص) يمكن التعبير عنها بـ (جتا θ، جا θ).

يمكن بسهولة إيجاد قيم الدوال المثلثية لبعض قيم θ الخاصة.

قياس الزاوية θ / الدالة	٠°	٣٠°	٤٥°	٦٠°	٩٠°	١٨٠°	٢٧٠°	٣٦٠°
	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{٣\pi}{٢}$	٢π
جا θ	٠	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	١	٠	−١	٠
جتا θ	١	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	٠	−١	٠	١
ظا θ	٠	$\frac{\sqrt{٣}}{٣}$	١	$\sqrt{٣}$	غير معرّف	٠	غير معرّف	٠

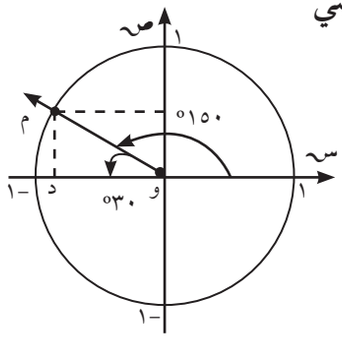
٩١

٦ الربط

زاوية مركزية على دائرة الوحدة قياسها ١٥٠°. باستخدام زاوية الإسناد أوجد: جا١٥٠°، جتا١٥٠°، ظا١٥٠°.

قياس زاوية الإسناد ٣٠°.

المثلث القائم وم د ثلاثيني ستيني



دم = $\frac{١}{٢}$ ، ود = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

فيكون جا١٥٠° = $\frac{١}{٢}$

جتا ١٥٠° = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

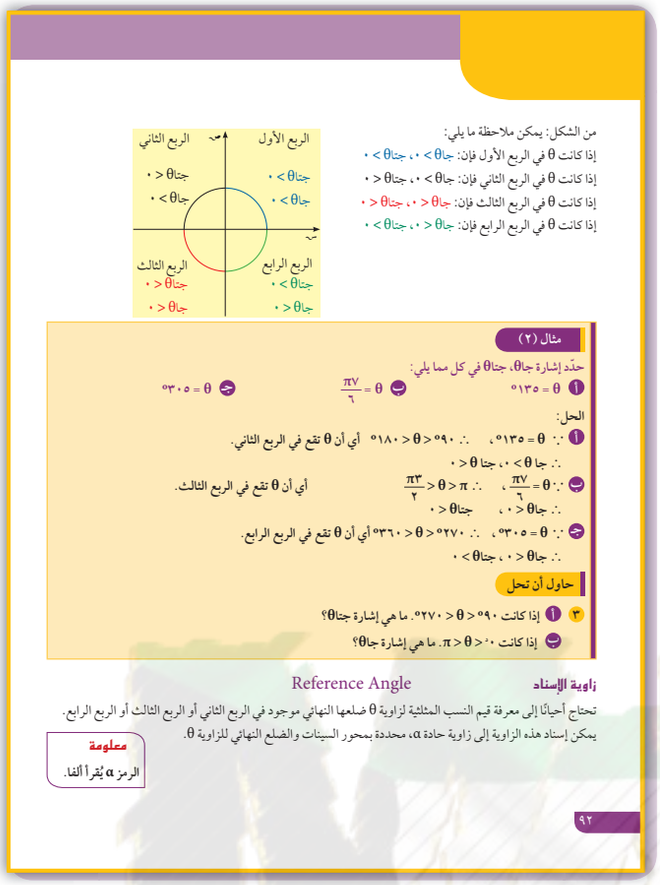
ظا ١٥٠° = $\frac{\frac{١}{٢}}{-\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = -\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تحديد جيب الزاوية وجيب تمام الزاوية على المحاور. أكّد لهم أن المحور الأفقي هو محور جيب تمام الزاوية وأن المحور العمودي هو محور جيب الزاوية.

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يجيبون عن فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من فهمهم العلاقة بين النسب المثلثية ودائرة الوحدة والمحاور المرافقة.



من الشكل: يمكن ملاحظة ما يلي:

إذا كانت θ في الربع الأول فإن: جاθ > ٠، جتاθ > ٠

إذا كانت θ في الربع الثاني فإن: جاθ > ٠، جتاθ < ٠

إذا كانت θ في الربع الثالث فإن: جاθ < ٠، جتاθ < ٠

إذا كانت θ في الربع الرابع فإن: جاθ < ٠، جتاθ > ٠

الربع الأول: جاθ > ٠، جتاθ > ٠

الربع الثاني: جاθ > ٠، جتاθ < ٠

الربع الثالث: جاθ < ٠، جتاθ < ٠

الربع الرابع: جاθ < ٠، جتاθ > ٠

مثال (٢)

حدّد إشارة جاθ، جتاθ في كل مما يلي:

أ θ = ١٣٥° ب θ = $\frac{٧\pi}{٦}$ ج θ = ٣٠٥°

الحل:

أ ∵ θ = ١٣٥° ، ∴ ٩٠° < θ < ١٨٠° أي أن θ تقع في الربع الثاني.

∴ جا θ > ٠ ، جتا θ < ٠

ب ∵ θ = $\frac{٧\pi}{٦}$ ، ∴ $\pi < \theta < \frac{٣\pi}{٢}$ أي أن θ تقع في الربع الثالث.

∴ جاθ < ٠ ، جتاθ < ٠

ج ∵ θ = ٣٠٥° ، ∴ ٢٧٠° < θ < ٣٦٠° أي أن θ تقع في الربع الرابع.

∴ جاθ < ٠ ، جتاθ > ٠

حاول أن تحل

٣ أ إذا كانت ٩٠° < θ < ٢٧٠°. ما هي إشارة جتاθ؟

ب إذا كانت ٠° < θ < π. ما هي إشارة جاθ؟

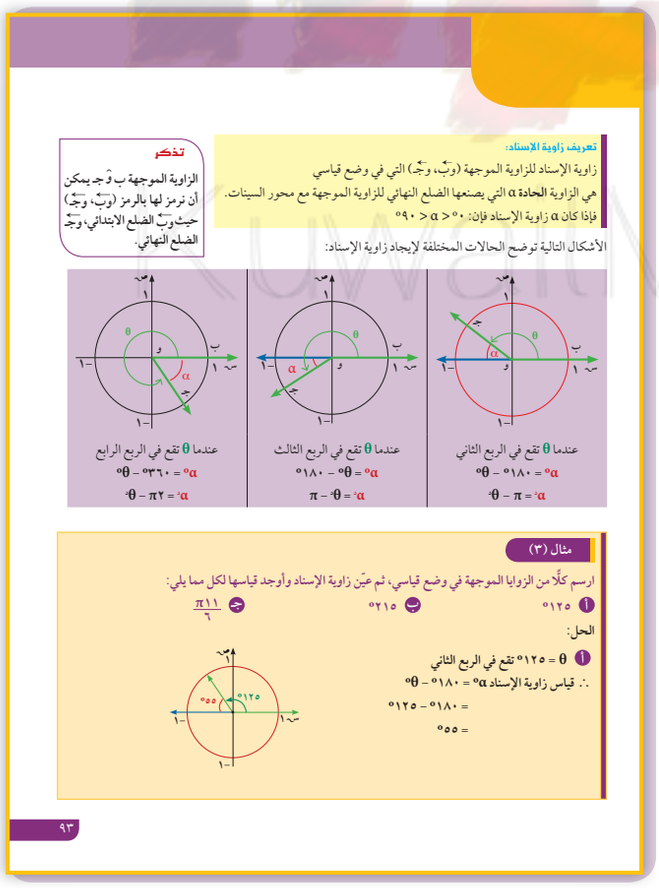
زاوية الإسناد Reference Angle

تحتاج أحيانًا إلى معرفة قيم النسب المثلثية لزاوية θ ضلعها النهائي موجود في الربع الثاني أو الربع الثالث أو الربع الرابع. يمكن إسناد هذه الزاوية إلى زاوية حادة α، محددة بمحور السينات والضلع النهائي للزاوية θ.

معلومة

الرمز α يُقرأ ألفا.

٩٢



تعريف زاوية الإسناد:

زاوية الإسناد للزاوية الموجهة (وَب، وَجـ) التي في وضع قياسي هي الزاوية الحادة α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات.

فإذا كان α زاوية الإسناد فإن: ٠° < α < ٩٠°

تذكر

الزاوية الموجهة ب وَ جـ يمكن أن نرمز لها بالرمز (وَب، وَجـ) حيث وَب الضلع الابتدائي، وَجـ الضلع النهائي.

الأشكال التالية توضح الحالات المختلفة لإيجاد زاوية الإسناد:

عندما θ تقع في الربع الثاني: α° = ١٨٠° − θ° ، α° = π − θ°

عندما θ تقع في الربع الثالث: α° = θ° − ١٨٠° ، α° = θ° − π

عندما θ تقع في الربع الرابع: α° = ٣٦٠° − θ° ، α° = ٢π − θ°

مثال (٣)

ارسم كلًّا من الزوايا الموجهة في وضع قياسي، ثم عيّن زاوية الإسناد وأوجد قياسها لكل مما يلي:

أ ١٢٥° ب ٢١٥° ج $\frac{١١\pi}{٦}$

الحل:

أ θ = ١٢٥° تقع في الربع الثاني

∴ قياس زاوية الإسناد α° = ١٨٠° − θ°

= ١٨٠° − ١٢٥°

= ٥٥°

٩٣

اختبار سريع

١ أوجد جا $\frac{٢\pi}{٣}$ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جتا $\frac{٤\pi}{٣}$ $-\frac{١}{٢}$

٢ إذا كانت $٩٠° < \theta < ١٨٠°$، ما هي إشارة كل من جا θ، جتا θ؟ جا θ > ٠ ، جتا θ < ٠

٣ أوجد قياس زاوية الاسناد لكل من الزوايا التالية:

$\theta = ١٢٠°$ ٦٠°

$\theta = ٢٣٠°$ ٥٠°

$\theta = -١٥٠°$ ٣٠°

٩ إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

١ باستخدام العمود المرسوم من م١ على محور السينات والعمود المرسوم من م١ على محور الصادات.

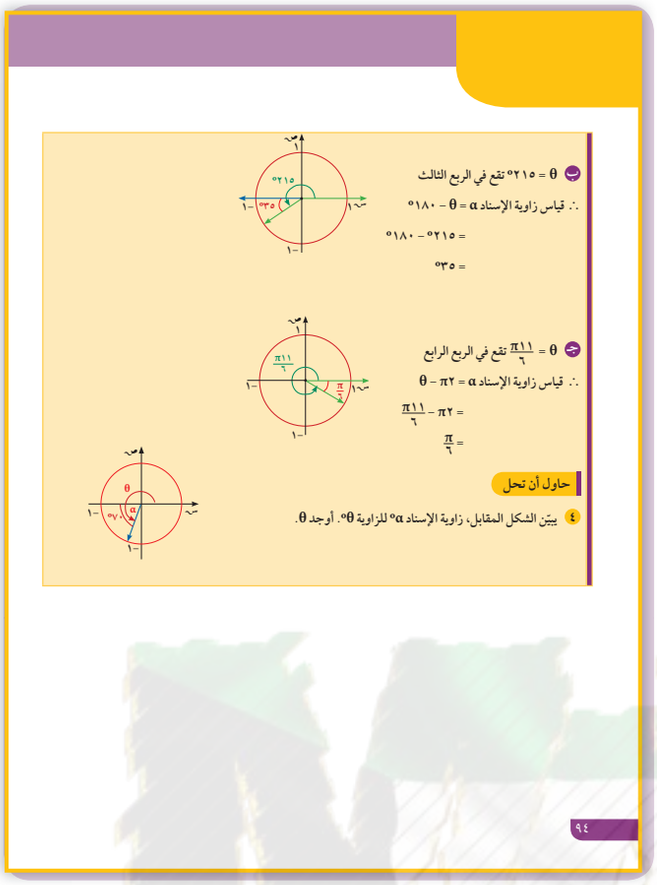
٢ بما أن الزاوية المركزية قياسها ٣٠° يكون لدينا مثلث قائم ثلاثيني ستيني. لذا ص١ = $\frac{١}{٢}$ = ٠,٥ ؛

س١ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ≃ ٠,٨٦٦ .

٣ جا ٣٠° = ٠,٥ ؛ جتا ٣٠° ≃ ٠,٨٦٦ بالمقارنة نجد أن: ص١ = جا ٣٠° = ٠,٥ ؛

س١ = جتا ٣٠° ≃ ٠,٨٦٦ .

٤ (أ) ، (ب) ، تحقق من عمل الطلاب.



ب θ = ٢١٥° تقع في الربع الثالث

∴ قياس زاوية الإسناد α = ١٨٠° − θ

= ١٨٠° − ٢١٥°

= ٣٥°

جـ θ = $\frac{١١\pi}{٦}$ تقع في الربع الرابع

∴ قياس زاوية الإسناد α = ٢π − θ

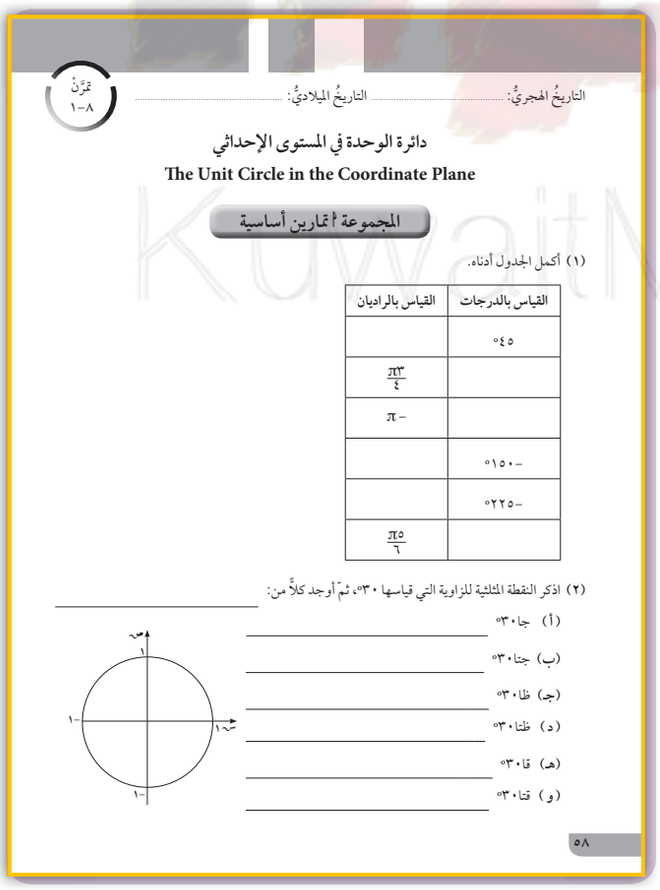
= ٢π − $\frac{١١\pi}{٦}$

= $\frac{\pi}{٦}$

حاول أن تحل

٤ يبيّن الشكل المقابل، زاوية الإسناد α° للزاوية θ°. أوجد θ.

٩٤



التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

تمرَّنْ ٨-١

دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي

The Unit Circle in the Coordinate Plane

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) أكمل الجدول أدناه.

القياس بالدرجات	القياس بالراديان
٤٥°	
	$\frac{٣\pi}{٤}$
	−π
−١٥٠°	
−٢٢٥°	
	$\frac{٥\pi}{٦}$

(٢) اذكر النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها ٣٠°، ثمّ أوجد كلاً من: _____

(أ) جا٣٠° _____

(ب) جتا٣٠° _____

(جـ) ظا٣٠° _____

(د) ظتا٣٠° _____

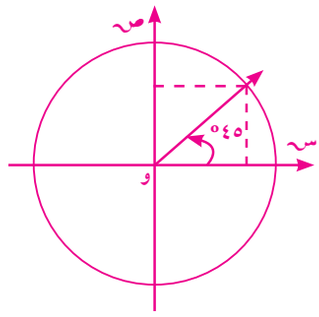
(هـ) قا٣٠° _____

(و) قتا٣٠° _____

٥٨

«حاول أن تحل»

١



جا ٤٥° = جتا ٤٥°

= $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ≃ ٠,٧٠٧

٢

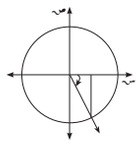
$\frac{\pi}{٤} - \pi = \frac{٣\pi}{٤}$

جتا $\frac{٣\pi}{٤}$ = − $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

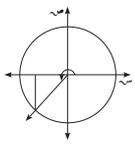
جا $\frac{٣\pi}{٤}$ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

في التمرينين (٣–٤)، باستخدام دائرة الوحدة أوجد جيب تمام الزاوية وجيب الزاوية لكل من:

(٣) −٦٠°



(٤) ٢٢٥°



في التمارين (٥–٧)، بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد جيب تمام، جيب، ظل الزاوية على الترتيب لكلّ من الزوايا التالية:

(٥) $\frac{\pi}{٤}$

(٦) ٦٠°

(٧) ٠°

في التمارين (٨–١١)، في أيّ ربع أو على أيّ محور يقع الضلع النهائي لكلّ من الزوايا التالية:

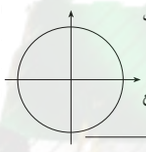
(٨) ١٥٠°

(٩) −π

(١٠) −٦٠°

(١١) $\frac{٧\pi}{٦}$

(١٢) (أ) أكمل الفراغ في الرسم أدناه.



الربع الأول
جتاθ > ٠
جاθ > ٠

الربع الثاني
جتاθ _____
جاθ _____

الربع الثالث
جتاθ _____
جاθ _____

الربع الرابع
جتاθ _____
جاθ _____

٥٩

(ب) افترض أن جتاθ سالبة جاθ موجبة. يقع الضلع النهائي للزاوية θ في:

(أ) الربع الأول (ب) الربع الثاني (جـ) الربع الثالث (د) الربع الرابع

(١٣) **الكتابة في الرياضيات:** فسِّر كيفية إيجاد جيب، جيب تمام الزوايا التالية: ٠°، ٩٠°، ١٨٠°، ٢٧٠°، ٣٦٠° بدون استخدام الآلة الحاسبة.

في التمارين (١٤–١٧)، ارسم كلًّا من الزوايا الموجهة التالية في وضع قياسي، ثم عيّن زاوية الإسناد وأوجد قياسها.

(١٤) ٢١٠° _____

(١٥) $\frac{٢\pi}{٣}$ _____

(١٦) ١٧٠° _____

(١٧) $\frac{٧\pi}{٣}$ _____

في التمرينين (١٨–١٩)، اختر الإجابة الصحيحة:

(١٨) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها تختلف عن الزوايا الأخرى هي:

(أ) ١٩٠° (ب) ١٧٠°

(جـ) ٣٥٠° (د) ١١٠°

(١٩) الزاوية التي في الوضع القياسي وضلعها النهائي يمر بالنقطة م$\left(\frac{-\sqrt{٢}}{٢}, \frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)$ التي تقع على دائرة الوحدة هي:

(أ) ٤٥° (ب) ٢٢٥°

(جـ) ١٣٥° (د) ٣٣٠°

٦٠

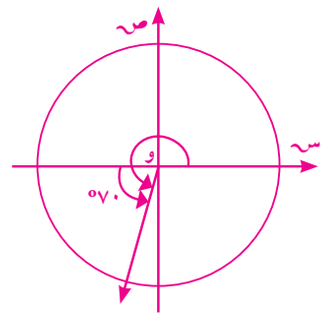
٣ (أ) ∵ θ تقع في الربع الثاني أو الثالث

جتاθ < ٠

(ب) ∵ θ تقع في الربع الأول أو الثاني

جاθ > ٠

٤



°θ = °١٨٠ + °٧٠

°θ = °٢٥٠

«تدريب»

قياس الزاوية θ / النسبة	°٢٠	°٤٠	°٨٠	°١٣٠	°١٦٠	°٢٢٠	°٢٥٠	°٣١٠
جاθ	٠,٣٤	٠,٦٤	٠,٩٨	٠,٧٧	٠,٣٤	-٠,٦٤	-٠,٩٤	-٠,٧٧
جتاθ	٠,٩٤	٠,٧٧	٠,١٧	-٠,٦٤	-٠,٩٤	-٠,٧٧	-٠,٣٤	٠,٦٤
ظاθ	٠,٣٦	٠,٨٤	٥,٦٧	-١,١٩	-٠,٣٦	٠,٨٤	٢,٧٥	-١,١٩

المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

في التمارين (١-٤)، إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

(١) جتا(-°٣٠٠) = $\frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

(٢) جا(°١٢٠) = $\frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

(٣) ظا(-°١٥٠) = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (أ) (ب)

(٤) قا(°٣١٥) = $\sqrt{٢}$ (أ) (ب)

في التمارين (٥-٩)، اختر الإجابة الصحيحة:

(٥) الزاوية التي يقع ضلعها النهائي في الربع الرابع في ما يلي هي:

(أ) -°٣٢٠ (ب) -°٢٧٠

(جـ) $\frac{٥\pi}{٣}$ (د) $\frac{١٣\pi}{٩}$

(٦) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها يختلف عن الزوايا الأخرى هي:

(أ) $\frac{٧\pi}{٤}$ (ب) °١٣٥

(جـ) $\frac{٣\pi}{٤}$ (د) °٢١٥

(٧) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها $\frac{\pi}{٣}$ هي:

(أ) $\frac{١١\pi}{٦}$ (ب) °٢٥٥

(جـ) $\frac{٧\pi}{٨}$ (د) $\frac{٥\pi}{٣}$

(٨) زاوية في الوضع القياسي قياسها يساوي -°٢٢٥. فإن النقطة المثلثية التي يمكن أن تقع على الضلع النهائي لهذه الزاوية هي:

(أ) $\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}, \frac{-\sqrt{٢}}{٢}\right)$ (ب) $\left(\frac{-\sqrt{٢}}{٢}, \frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)$

(جـ) $\left(\frac{-\sqrt{٢}}{٢}, \frac{-\sqrt{٢}}{٢}\right)$ (د) (-١، ١)

(٩) [جا(-°١٣٥)]^{٢} + [جتا(-°١٣٥)]^{٢} =

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$

(جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) صفر

٦١

٨-٢: العلاقات بين الدوال المثلثية [١]

١ الأهداف

- يوجد العلاقة بين الدوال المثلثية للزاوية θ والدوال المثلثية لكل من الزوايا (−θ)، (π − θ)، (π + θ)، (π/٢ − θ)، (π/٢ + θ)، (٢كπ + θ).
- يحلّ معادلات مثلثية.
- يبسط تعبيرات جبريّة تحتوي على دوال مثلثية.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

نسب مثلثية أساسية – دالة مثلثية – العلاقات بين الدوال المثلثية – معادلات مثلثية – تبسيط تعبيرات مثلثية.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة مدرجة – فرجار – منقلة – آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اسأل الطلاب:

- ما هي دائرة الوحدة؟ وما طول نصف قطرها؟
- كيف تعرف جا، جتا لزاوية على محور السينات ومحور الصادات؟
- كيف يوجد انعكاس نقطة في محور ما؟
- كيف تجد انعكاس نقطة في نقطة ما؟
- كيف تعرف أن مثلثين قائمي الزاوية هما متطابقان؟

٨-٢

العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

Relations Between Trigonometric Functions (1)

عمل تعاوني

١ ❶ على دائرة الوحدة، عيّن زاوية موجهة موجبة θ في الوضع القياسي ضلعها النهائي في الربع الأول.

ب أوجد θ.

ج استخدم آلة حاسبة لإيجاد: جاθ، جتاθ، جا(−θ)، جتا(−θ).

٢ كرر الخطوات في ❶ مع زاوية موجهة موجبة س ضلعها النهائي في الربع الثاني.

٣ ضع تخمينًا حول العلاقة بين قيم الدوال المثلثية لزاويتين كل منهما المعكوس الجمعي للأخرى.

سوف تتعلم

- العلاقات بين الدوال المثلثية للزاوية θ والزوايا: −θ، π − θ، π + θ، π/٢ − θ، π/٢ + θ، ٢كπ + θ
- حل معادلات مثلثية
- تبسيط تعبيرات جبرية تحتوي على دوال مثلثية

تسمى جاθ، جتاθ، ظاθ النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ وتدعى النسب المثلثية الأساسية

علمًا بأن −١ ≤ جتاθ ≤ ١

−١ ≤ جاθ ≤ ١

ظاθ ∈ ح

النسب المثلثية للزاويتين θ، −θ.

النقطة المثلثية م′ هي انعكاس للنقطة المثلثية م في محور السينات حيث م(س، ص) $\xrightarrow{ع}$ م′(س، −ص)

ويكون جتا(−θ) = جتاθ

جا(−θ) = −جاθ

تذكر

ع تعني انعكاس في محور السينات.

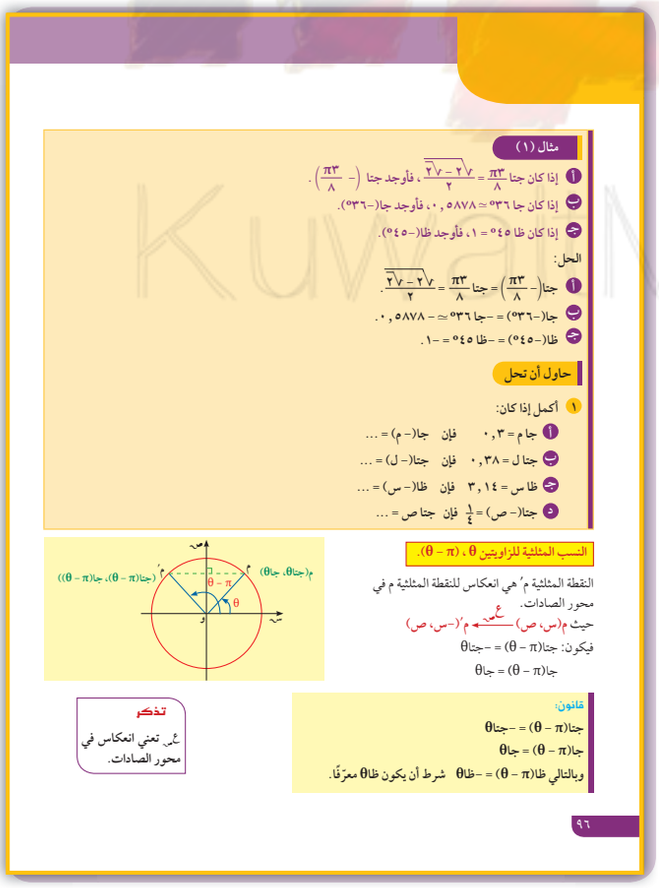
قانون:

جتا(−θ) = جتاθ

جا(−θ) = −جاθ

وبالتالي ظا(−θ) = −ظاθ بشرط أن يكون ظاθ معرّف.

٩٥



مثال (١)

❶ إذا كان جتا ٣π/٨ = √(٢ − √٢)/٢، فأوجد جتا (−٣π/٨).

ب إذا كان جا ٣٦° ≃ ٠,٥٨٧٨، فأوجد جا(−٣٦°).

ج إذا كان ظا ٤٥° = ١، فأوجد ظا(−٤٥°).

الحل:

❶ جتا(−٣π/٨) = جتا ٣π/٨ = √(٢ − √٢)/٢.

ب جا(−٣٦°) = −جا ٣٦° ≃ −٠,٥٨٧٨.

ج ظا(−٤٥°) = −ظا ٤٥° = −١.

حاول أن تحل

١ أكمل إذا كان:

❶ جا م = ٠,٣ فإن جا(−م) = ...

ب جتا ل = ٠,٣٨ فإن جتا(−ل) = ...

ج ظا س = ٣,١٤ فإن ظا(−س) = ...

د جتا(−ص) = ١/٤ فإن جتا ص = ...

النسب المثلثية للزاويتين θ، (π − θ).

النقطة المثلثية م′ هي انعكاس للنقطة المثلثية م في محور الصادات.

حيث م(س، ص) $\xrightarrow{ع}$ م′(−س، ص)

فيكون: جتا(π − θ) = −جتاθ

جا(π − θ) = جاθ

تذكر

ع تعني انعكاس في محور الصادات.

قانون:

جتا(π − θ) = −جتاθ

جا(π − θ) = جاθ

وبالتالي ظا(π − θ) = −ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

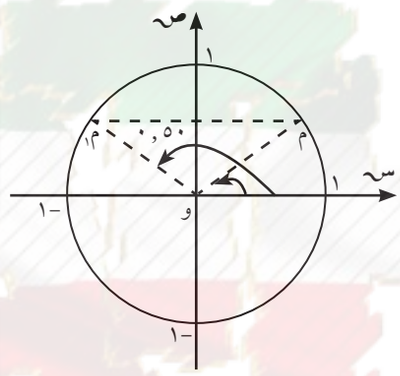
٩٦

٥ التدريس

بعد أن تعرف الطالب في الدرس السابق على النسب المثلثية الأساسية جاθ، جتاθ، ظاθ... سوف يوسّع الآن معارفه عن النسب المثلثية ليجد دوال مثلثية على دائرة الوحدة ويحدّد العلاقات بين جاθ، جتاθ، ظاθ... ودوال لزوايا مختلفة بدءًا من المعكوس الجمعي −θ للزاوية θ مرورًا بالزاوية المتممة والزاوية المكملة وصولًا إلى زوايا ناتج الفرق بينها $\frac{\pi}{٢}$ أو π...

وضح للطلاب مفهوم العلاقات من خلال دائرة الوحدة، وزاوية الاسناد حفّزهم على رسم كل حالة أمامهم وإيجاد كل علاقة بدلًا من حفظها غيبًا.

أخبرهم أن ذلك سوف يساعدهم كثيرًا على تبسيط التعبيرات التي تتضمن دوال مثلثية كما في المثال (٤).



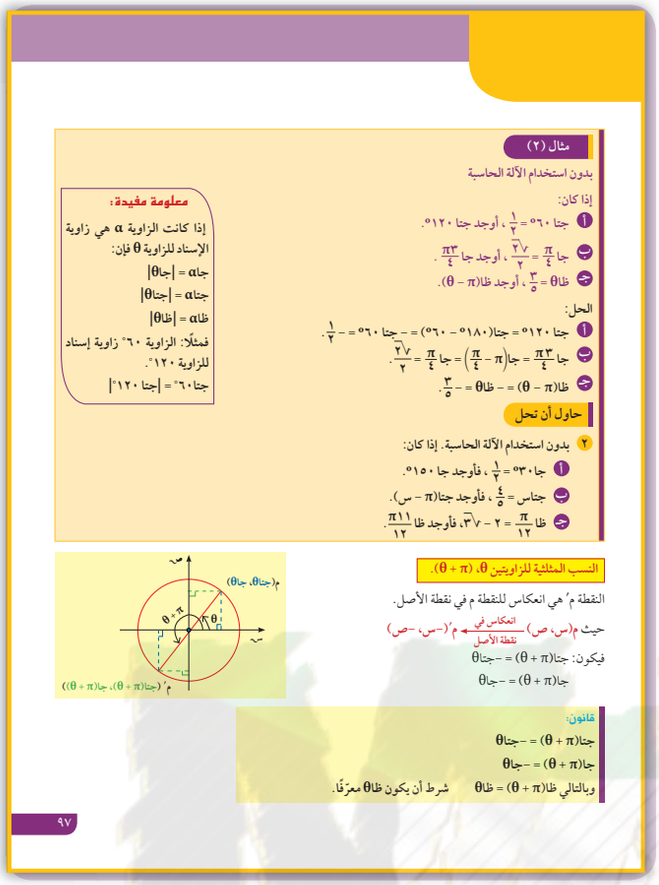
توسّع معهم في حل المعادلات. قبل البدء في حل المعادلات المثلثية اعرض أمامهم نشاطًا عن دائرة الوحدة ليفهموا فكرة وجود حلول كثيرة.

مثال ذلك:

أوجد على دائرة الوحدة حل المعادلة: جاθ = $\frac{١}{٢}$ = ٠,٥.

اطلب إليهم رسم دائرة الوحدة، ثم من النقطة ٠,٥ ارسم مستقيم عمودي على محور الصادات حيث يقطع الدائرة بنقطتين م، م١ وبالتالي يوجد زاويتان لهما جاθ = ٠,٥. إذا افترضنا دورات كاملة على الدائرة من م وإليها، ومن م١ وإليها يكون هناك حلول لا متناهية للزاوية θ حيث جاθ = ٠,٥. ويمكن أيضًا تقديم نشاط آخر حول جتا θ...

شدّد للطلاب على فكرة أنه في حلول معادلة تتضمن دوال مثلثية يجب أن يكون طرفا المعادلة من دالة واحدة، وبالتالي يمكن استخدام العلاقات بين الدوال المثلثية لتحقيق ذلك.



مثال (٢)

بدون استخدام الآلة الحاسبة

إذا كان:

١ جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$، أوجد جتا ١٢٠°.

ب جا $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$، أوجد جا $\frac{٣\pi}{٤}$.

ج ظاθ = $\frac{٣}{٥}$، أوجد ظا(π − θ).

الحل:

١ جتا ١٢٠° = جتا(١٨٠° − ٦٠°) = −جتا ٦٠° = −$\frac{١}{٢}$.

ب جا $\frac{٣\pi}{٤}$ = جا$\left(\pi - \frac{\pi}{٤}\right)$ = جا $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$.

ج ظا(π − θ) = −ظاθ = −$\frac{٣}{٥}$.

معلومة مفيدة:

إذا كانت الزاوية α هي زاوية الإسناد للزاوية θ فإن:

جاα = |جاθ|

جتاα = |جتاθ|

ظاα = |ظاθ|

فمثلًا: الزاوية ٦٠° زاوية إسناد للزاوية ١٢٠°.

جتا ٦٠° = |جتا ١٢٠°|

حاول أن تحل

٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة. إذا كان:

١ جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$، فأوجد جا ١٥٠°.

ب جتاس = $\frac{٤}{٥}$، فأوجد جتا(π − س).

ج ظا $\frac{\pi}{١٢}$ = ٢ − $\sqrt{٣}$، فأوجد ظا $\frac{١١\pi}{١٢}$.

النسب المثلثية للزاويتين θ، (π + θ).

النقطة م′ هي انعكاس للنقطة م في نقطة الأصل.

حيث م(س، ص) $\xrightarrow[\text{نقطة الأصل}]{\text{انعكاس في}}$ م′(−س، −ص)

فيكون: جتا(π + θ) = −جتاθ

جا(π + θ) = −جاθ

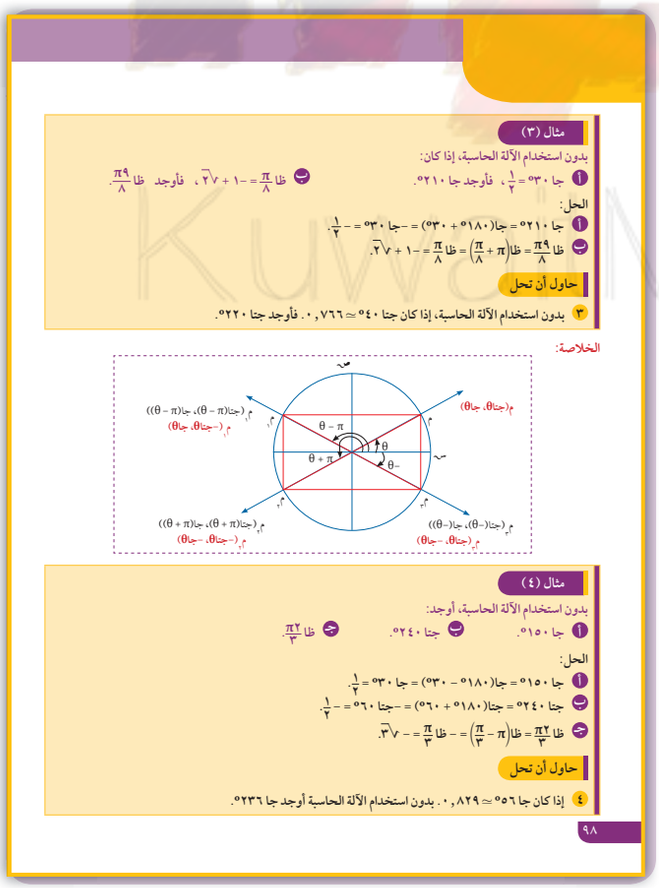
قانون:

جتا(π + θ) = −جتاθ

جا(π + θ) = −جاθ

وبالتالي ظا(π + θ) = ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

٩٧



مثال (٣)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان:

١ جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$، فأوجد جا ٢١٠°.

ب ظا $\frac{\pi}{٨}$ = −١ + $\sqrt{٢}$، فأوجد ظا $\frac{٩\pi}{٨}$.

الحل:

١ جا ٢١٠° = جا(١٨٠° + ٣٠°) = −جا ٣٠° = −$\frac{١}{٢}$.

ب ظا $\frac{٩\pi}{٨}$ = ظا$\left(\pi + \frac{\pi}{٨}\right)$ = ظا $\frac{\pi}{٨}$ = −١ + $\sqrt{٢}$.

حاول أن تحل

٣ بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جتا ٤٠° ≃ ٠,٧٦٦. فأوجد جتا ٢٢٠°.

الخلاصة:

مثال (٤)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، أوجد:

١ جا ١٥٠°. ب جتا ٢٤٠°. ج ظا $\frac{٢\pi}{٣}$.

الحل:

١ جا ١٥٠° = جا(١٨٠° − ٣٠°) = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$.

ب جتا ٢٤٠° = جتا(١٨٠° + ٦٠°) = −جتا ٦٠° = −$\frac{١}{٢}$.

ج ظا $\frac{٢\pi}{٣}$ = ظا$\left(\pi - \frac{\pi}{٣}\right)$ = −ظا $\frac{\pi}{٣}$ = −$\sqrt{٣}$.

حاول أن تحل

٤ إذا كان جا ٥٦° ≃ ٠,٨٢٩. بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد جا ٢٣٦°.

٩٨

٦ الربط

أوجد مجموعة حلول للمعادلة:

$$\text{جتا}\left(\theta ٢ - \frac{\pi}{٣}\right) = -\text{جا}\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right)$$

نكتب: $\text{جا}\left(-\theta - \frac{\pi}{٢}\right) = \text{جتا}\left(\theta ٢ - \frac{\pi}{٣}\right)$

$$\text{جا}\left(-\theta - \frac{\pi}{٢}\right) = \text{جا}\left(\theta ٢ + \frac{\pi}{٣} - \frac{\pi}{٢}\right)$$

$$\text{جا}\left(-\theta - \frac{\pi}{٢}\right) = \text{جا}\left(\theta ٢ + \frac{\pi}{٦}\right)$$

أولًا: $-\frac{\pi}{٢} - \theta = \frac{\pi}{٦} + \theta ٢ + ٢\text{ك}\pi$

$$-\theta ٣ = \frac{\pi ٢}{٣} + ٢\text{ك}\pi،\ \text{ك} \in \text{ص}$$

$$\theta = \frac{-\pi ٢}{٩} + \frac{٢}{٣}\text{ك}\pi،\ \text{ك} \in \text{ص}$$

ثانيًا: $-\frac{\pi}{٢} - \theta = \pi - \frac{\pi}{٦} - \theta ٢ + ٢\text{ك}\pi$

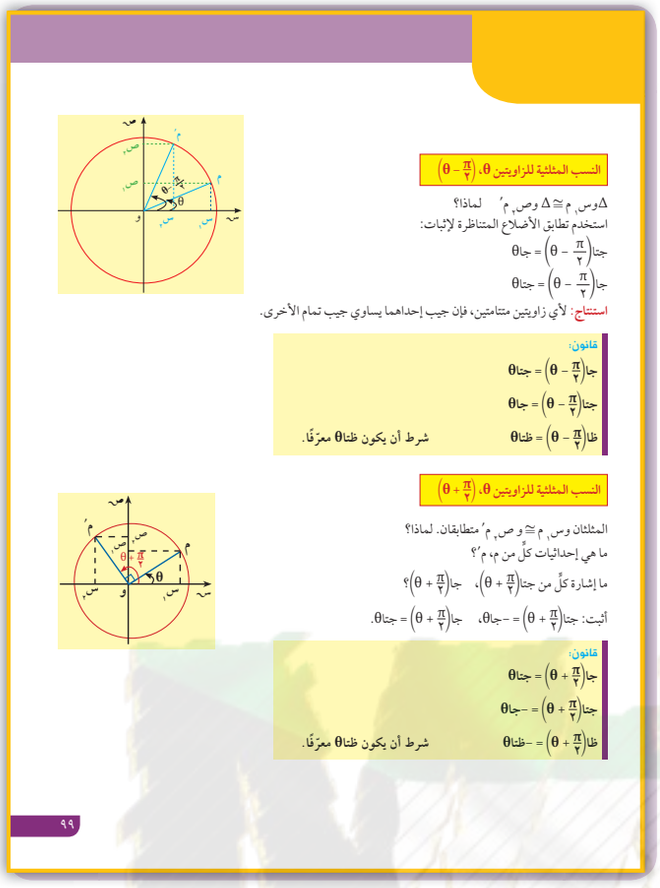
$$\theta = \frac{\pi ٤}{٣} + ٢\text{ك}\pi،\ \text{ك} \in \text{ص}$$

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

لا يستخدم الطلاب العلاقات بين الدوال المثلثية بشكل صحيح. اطلب إليهم في كل حالة رسم دائرة الوحدة وتحديد كل حالة، ثم إيجاد العلاقة.

٨ التقييم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من فهمهم لهذا الدرس، لأن حفظ العلاقات لن ينفع كثيرًا.



النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$

Δوس$_١$ م$_١$ $\cong$ Δ وص$_١$ م$'_١$ لماذا؟

استخدم تطابق الأضلاع المتناظرة لإثبات:

$\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) = \text{جا}\theta$

$\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) = \text{جتا}\theta$

استنتاج: لأي زاويتين متتامتين، فإن جيب إحداهما يساوي جيب تمام الأخرى.

قانون:

$\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) = \text{جتا}\theta$

$\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) = \text{جا}\theta$

$\text{ظا}\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) = \text{ظتا}\theta$ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$

المثلثان وس$_١$ م$_١$ $\cong$ وص$_١$ م$'_١$ متطابقان. لماذا؟

ما هي إحداثيات كلٍّ من م$_١$، م$'_١$؟

ما إشارة كلٍّ من جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$، جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$؟

أثبت: جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right) = -\text{جا}\theta$، جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right) = \text{جتا}\theta$.

قانون:

$\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right) = \text{جتا}\theta$

$\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right) = -\text{جا}\theta$

$\text{ظا}\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right) = -\text{ظتا}\theta$ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

٩٩

الدوال المثلثية (الدائرية) على ح Trigonometric Functions on R

رأينا حتى الآن قيم الدوال الدائرية (المثلثية) على الفترة [٠، ٢π) أو على مجموعة جزئية من هذه الفترة مثل:

[٠، $\frac{\pi}{٢}$] أو ($\frac{\pi}{٢}$، π]، ... على أساس أن الضلع النهائي للزاوية الموجهة في وضعها القياسي يكمل دورة واحدة على مجال التعريف أي عندما $\theta \in$ [٠، ٢π).

ولكن ماذا يحدث إذا سمحنا للضلع النهائي للزاوية θ بالدوران أكثر من دورة؟

يتبين لنا أنه إذا كانت θ قياس زاوية موجهة في وضع قياسي حيث نقطتها المثلثية (س، ص) سوف ترافقها زوايا موجهة كلًّا منها في وضع قياسي أيضًا وقياساتها (θ + ٢ك π) حيث ك عدد صحيح ولها النقطة المثلثية (س، ص)

وتطلق عليها اسم «زوايا متكافئة»

وأصغر قياس غير سالب للزوايا المتكافئة يسمى القياس الأساسي.

فمثلًا: ٣٠°، ٣٠° + ١ × ٣٦٠°، ٣٠° + ٢ × ٣٦٠°، ٣٠° + ٣ × ٣٦٠°، ٣٠° − ٣٦٠°، ٣٠° − ٢ × ٣٦٠°

↓ ٣٠°، ↓ ٣٩٠°، ↓ ٧٥٠°، ↓ ١١١٠°، ↓ −٣٣٠°، ↓ −٦٩٠°

هي قياسات لزوايا متكافئة مع الزاوية التي قياسها الأساسي ٣٠°.

كما أن: $\frac{\pi}{٣}$، $\frac{٧\pi}{٣}$، $\frac{١٣\pi}{٣}$، $\frac{-٥\pi}{٣}$، $\frac{-١١\pi}{٣}$، هي قياسات لزوايا متكافئة مع الزاوية التي قياسها الأساسي $\frac{\pi}{٣}$.

وهكذا يمكن استنتاج ما يلي:

إذا كان ك عددًا صحيحًا فإن:

جا(θ + ٢ك π) = جاθ

جتا(θ + ٢ك π) = جتاθ

ظا(θ + ك π) = ظاθ حيث ظاθ معرّف

١٠٠

اختبار سريع

١ حل كلًّا من المعادلات التالية:

$$\text{جا}\left(٢\text{س} + \frac{\pi}{٦}\right) = \text{جا}\left(\text{س} + \frac{\pi}{٤}\right)$$

$$\text{س} = \frac{\pi}{١٢} + ٢\text{ك}\pi \text{ أو } \text{س} = \frac{٧\pi}{٣٦} + \frac{٢}{٣}\text{ك}\pi \quad \text{ك} \in \text{ص}$$

٢ $\text{جتا } ٣\text{س} = \text{جتا}\left(\text{س} + \frac{\pi}{٣}\right)$

$$\text{س} = \frac{\pi}{٦} + \text{ك}\pi \text{ أو } \text{س} = \frac{-\pi}{١٢} + \frac{\text{ك}\pi}{٢} \quad \text{ك} \in \text{ص}$$

٣ $\text{جتا } ٤\text{س} = \text{جا}\left(٢\text{س} + \frac{\pi}{٤}\right)$

$$\text{س} = \frac{\pi}{٢٤} - \frac{١}{٣}\text{ك}\pi \text{ أو } \text{س} = -\frac{\pi}{٨} - \text{ك}\pi \quad \text{ك} \in \text{ص}$$

٩ إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

١، ٢، ٣ تحقق من عمل الطلاب.

من العرض السابق يمكننا إعادة تعريف الدوال الدائرية باعتبار المجال هو ح فيكون:

تعريف:

إذا كانت (س، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها θ فإن:

١ جاθ = ص ∀ θ ∈ ح

٢ جتاθ = س ∀ θ ∈ ح

٣ ظاθ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$، س ≠ ٠ حيث θ ∈ ح

٤ قاθ = $\frac{١}{\text{س}}$، س ≠ ٠ حيث θ ∈ ح

٥ قتاθ = $\frac{١}{\text{ص}}$، ص ≠ ٠ حيث θ ∈ ح

٦ ظتاθ = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$، ص ≠ ٠ حيث θ ∈ ح

مثال (٥)

بسط التعبير التالي لأبسط صورة:

جا س + جا(٩٠° + س) + جا(١٨٠° + س) + جا(٩٠° − س).

الحل:

جا س + جا(٩٠° + س) + جا(١٨٠° + س) + جا(٩٠° − س)

= جا س + جتا س − جا س + جتا س

= ٢جتا س

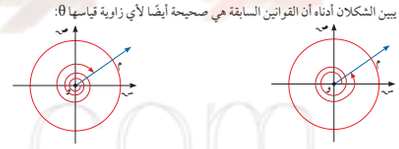
حاول أن تحل

٥ بسط كلًّا من التعبيرات التالية لأبسط صورة:

أ جتا(٩π + θ)

ب جتا$\left(-\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$

يبين الشكلان أدناه أن القوانين السابقة هي صحيحة أيضًا لأي زاوية قياسها θ:



تدريب (١)

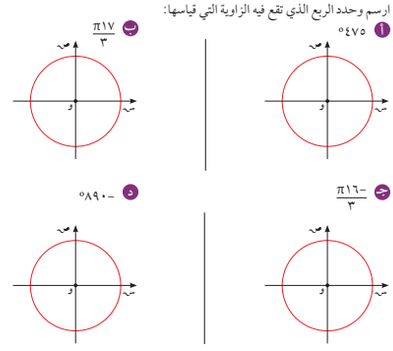
ارسم وحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية التي قياسها:

أ ٤٧٥°

ب $\frac{١٧\pi}{٣}$

جـ $\frac{-١٦\pi}{٣}$

د −٨٩٠°



تدريب (٢)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، أكمل:

جا٣٩٠° = جا(٣٠° + ٣٦٠°) = ... = ...

جتا٦٥° = ... = ... = ...

ظا$\left(\frac{-١١\pi}{٣}\right)$ = ظا(.....) = ... = ...

حل معادلات مثلثية Solving Trigonometric Equations

إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية −θ تقع في الربع الرابع.

تعلمت في هذا الدرس أن جتاθ = جتا(−θ).

ولكن إذا عرفت جيب التمام لإحدى الزوايا، فهل يمكنك الجزم إن كانت الزاوية تساوي θ أو −θ؟ عليك اعتماد الحلّين.

حل المعادلة: جتا س = جتاθ

هو س = θ + ٢ك π أو س = −θ + ٢ك π (ك ∈ ص)

لاحظ أن جيب تمام الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الرابع.

مثال (٦)

حل كلًّا من المعادلتين:

أ جتا س = $\frac{١}{٢}$

ب ٢جتا س − $\sqrt{٣}$ = ٠

الحل:

أ جتا س = $\frac{١}{٢}$

جتا س = جتا $\frac{\pi}{٣}$ (نعتمد عادة على أصغر قياس غير سالب)

∵ جتا س > ٠

∴ س تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

∴ س = $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π أو س = −$\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π (ك ∈ ص)

ب ٢جتا س − $\sqrt{٣}$ = ٠

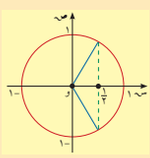
جتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جتا س = جتا $\frac{\pi}{٦}$

∵ جتا س > ٠

∴ س تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

∴ س = $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ك π أو س = −$\frac{\pi}{٦}$ + ٢ك π (ك ∈ ص)



حاول أن تحل

٦ حل المعادلة: $\sqrt{٢}$ جتا س = ١.

«حاول أن تحل»

١ (أ) جا(−م) = −٠,٣

(ب) جتا(−ل) = ٠,٣٨

(جـ) ظا(−س) = −٣,١٤

(د) جتاص = $\frac{١}{٤}$

٢ (أ) جا(١٥٠°) = جا(١٨٠° − ٣٠°)

= جا٣٠° = $\frac{١}{٢}$

(ب) جتا(π − س) = −جتاس = −$\frac{٤}{٥}$

(جـ) ظا$\left(\frac{١١\pi}{١٢}\right)$ = ظا$\left(\pi - \frac{\pi}{١٢}\right)$

= −ظا$\left(\frac{\pi}{١٢}\right)$ = −٢ + $\sqrt{٣}$

٣ جتا٢٢٠° = جتا(١٨٠° + ٤٠°) = −جتا٤٠°

≃ −٠,٧٦٦

٤ جا٢٣٦° = جا(١٨٠° + ٥٦°) = −جا٥٦°

≃ −٠,٨٢٩

إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية (π − θ) تقع في الربع الثاني.

تعلمت أيضًا أن جاθ = جا(π − θ).

وبالتالي، إذا كانت جا س = جاθ فإنّ: س = θ + ٢ك π أو س = (π − θ) + ٢ك π (ك ∈ ص)

حل المعادلة جا س = جاθ

هو س = θ + ٢ك π أو س = (π − θ) + ٢ك π ، (ك ∈ ص)

لاحظ أن جيب الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثاني.

مثال (٧)

حل كلًّا من المعادلتين:

(أ) جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) ٢جا س = $\sqrt{٢}$

الحل:

(أ) جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

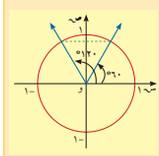
جا س = جا$\frac{\pi}{٣}$

∵ جاس > ٠

∴ س تقع في الربع الأول أو الربع الثاني.

س = $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π أو س = $\left(\pi - \frac{\pi}{٣}\right)$ + ٢ك π (ك ∈ ص)

س = $\frac{٢\pi}{٣}$ + ٢ك π



(ب) ٢جا س = $\sqrt{٢}$

جا س = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

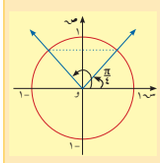
∴ جا س = جا$\frac{\pi}{٤}$

∵ جا س > ٠

∴ س تقع في الربع الأول أو الربع الثاني.

∴ س = $\frac{\pi}{٤}$ + ٢ك π أو س = $\left(\pi - \frac{\pi}{٤}\right)$ + ٢ك π (ك ∈ ص)

س = $\frac{٣\pi}{٤}$ + ٢ك π



حاول أن تحل

(٧) حل المعادلة: ٢جا س − ١ = ٠.

إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية (π + θ) تقع في الربع الثالث.

الزاويتان θ، π + θ لهما الظل نفسه.

ظاθ = ظا(π + θ)

حل المعادلة ظا س = ظاθ هو س = θ + ك π، (ك ∈ ص)

لاحظ أن ظل الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثالث.

مثال (٨)

حل المعادلة: ظا س = $\sqrt{٣}$.

الحل:

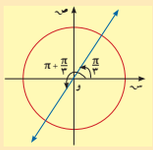
ظا س = $\sqrt{٣}$

ظا س = ظا$\frac{\pi}{٣}$ وحيث ظا س > ٠

∴ س تقع في الربع الأول أو الربع الثالث.

س = $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π أو س = $\left(\pi + \frac{\pi}{٣}\right)$ + ٢ك π (ك ∈ ص)

س = $\frac{٤\pi}{٣}$ + ٢ك π



حاول أن تحل

(٨) حل المعادلة: $\sqrt{٣}$ ظا س = ١.

مثال (٩)

حل كلًّا من المعادلتين:

(أ) جتا$\left(٣س + \frac{\pi}{٦}\right)$ = جتا$\left(س - \frac{\pi}{٣}\right)$

(ب) جا ٢س = جا$\left(س + \frac{\pi}{٤}\right)$

الحل:

(أ) جتا$\left(٣س + \frac{\pi}{٦}\right)$ = جتا$\left(س - \frac{\pi}{٣}\right)$

٣س + $\frac{\pi}{٦}$ = س − $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π أو ٣س + $\frac{\pi}{٦}$ = −$\left(س - \frac{\pi}{٣}\right)$ + ٢ك π (ك ∈ ص)

٢س = −$\frac{\pi}{٦}$ − $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π أو ٤س = −$\frac{\pi}{٦}$ + ٢ك π

٢س = −$\frac{\pi}{٢}$ + ٢ك π أو ٤س = $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ك π

س = −$\frac{\pi}{٤}$ + ك π أو س = $\frac{١}{٢}$ك π + $\frac{\pi}{٢٤}$

(ب) جا ٢س = جا$\left(س + \frac{\pi}{٤}\right)$

٢س = س + $\frac{\pi}{٤}$ + ٢ك π أو ٢س = π − $\left(س + \frac{\pi}{٤}\right)$ + ٢ك π (ك ∈ ص)

٢س − س = $\frac{\pi}{٤}$ + ٢ك π أو ٢س + س = π − $\frac{\pi}{٤}$ + ٢ك π

س = $\frac{\pi}{٤}$ + ٢ك π أو ٣س = $\frac{٣\pi}{٤}$ + ٢ك π

س = $\frac{\pi}{٤}$ + ٢ك π أو س = $\frac{٧}{٣}$ك π + $\frac{\pi}{٤}$

حاول أن تحل

(٩) حل كلًّا من المعادلتين:

(أ) جتا$\left(٣س - \frac{\pi}{٤}\right)$ = جتا$\left(س + \frac{\pi}{٣}\right)$ (ب) جتا$\left(٢س + \frac{\pi}{٥}\right)$ = جا س

٥ (أ) جتا(θ + ٨π + π) = −جتاθ

(ب) جتا$\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right)$ = −جاθ

٦ جتا س = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، جتا س = جتا $\frac{\pi}{٤}$

س = $\frac{\pi}{٤}$ + ٢ ك π

أو س = − $\frac{\pi}{٤}$ + ٢ ك π (ك ∈ ص)

٧ جاس = $\frac{١}{٢}$ ؛ جاس = جا$\frac{\pi}{٦}$

س = $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ك π أو

س = $\frac{٥\pi}{٦}$ + ٢ك π ، حيث (ك ∈ ص)

٨ ظاθ = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، ظاθ = ظا$\frac{\pi}{٦}$

θ = $\frac{\pi}{٦}$ + ك π، حيث (ك ∈ ص)

٩ (أ) ٣س − $\frac{\pi}{٤}$ = س + $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π

س = $\frac{٧\pi}{٢٤}$ + ك π، حيث (ك ∈ ص)

أو ٣س − $\frac{\pi}{٤}$ = −س − $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π

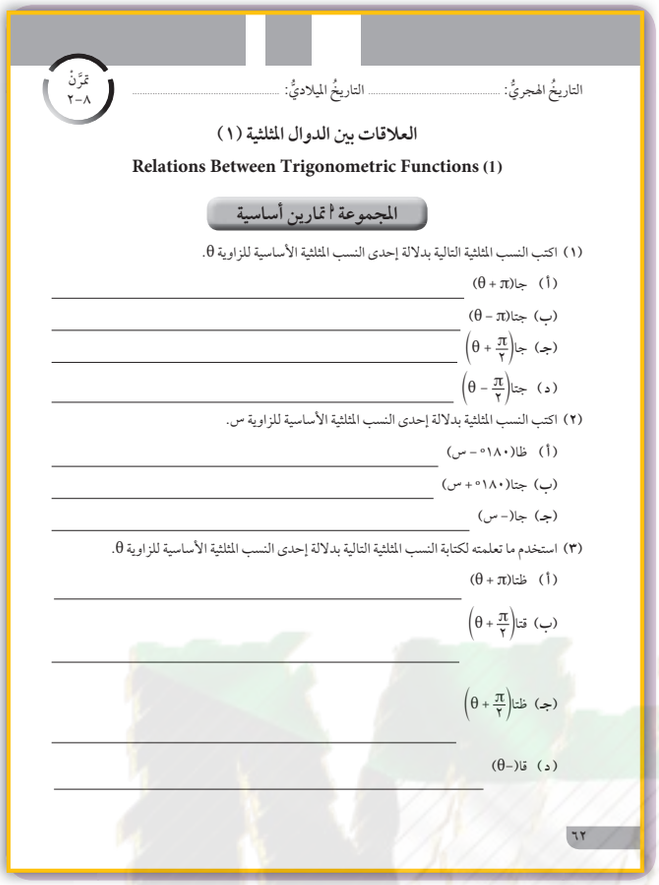
س = − $\frac{\pi}{٤٨}$ + $\frac{١}{٢}$ ك π، حيث (ك ∈ ص)

(ب) ٢س + $\frac{\pi}{٥}$ = س + ٢ك π ؛

س = − $\frac{\pi}{٥}$ + ٢ك π، حيث (ك ∈ ص)

أو ٢س + $\frac{\pi}{٥}$ = π − س + ٢ك π

س = $\frac{٤\pi}{١٥}$ + $\frac{٢}{٣}$ ك π، حيث (ك ∈ ص)



التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

تمرَّنْ ٨-٢

العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

Relations Between Trigonometric Functions (1)

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) اكتب النسب المثلثية التالية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ.

(أ) جا(π + θ) _____

(ب) جتا(π − θ) _____

(جـ) جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ _____

(د) جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ _____

(٢) اكتب النسب المثلثية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية س.

(أ) ظا(١٨٠° − س) _____

(ب) جتا(١٨٠° + س) _____

(جـ) جا(− س) _____

(٣) استخدم ما تعلمته لكتابة النسب المثلثية التالية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ.

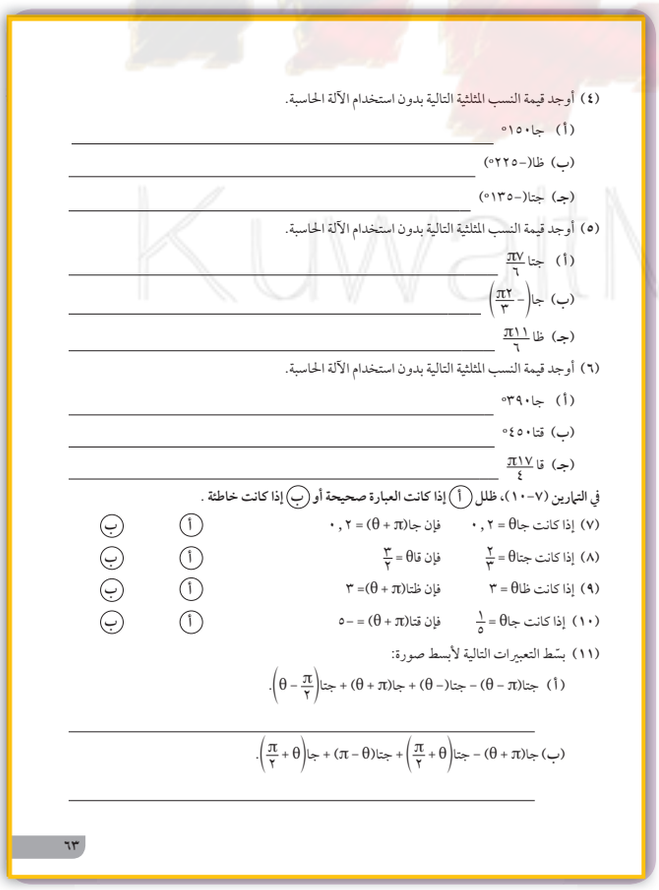
(أ) ظتا(π + θ) _____

(ب) قتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ _____

(جـ) ظتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ _____

(د) قا(−θ) _____

٦٢



(٤) أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة.

(أ) جا١٥٠° _____

(ب) ظا(−٢٢٥°) _____

(جـ) جتا(−١٣٥°) _____

(٥) أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة.

(أ) جتا $\frac{٧\pi}{٦}$ _____

(ب) جا$\left(-\frac{٢\pi}{٣}\right)$ _____

(جـ) ظا $\frac{١١\pi}{٦}$ _____

(٦) أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة.

(أ) جا٣٩٠° _____

(ب) قتا٤٥٠° _____

(جـ) قا $\frac{١٧\pi}{٤}$ _____

في التمارين (٧-١٠)، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة .

(٧) إذا كانت جاθ = ٠,٢ فإن جا(π + θ) = ٠,٢ (أ) (ب)

(٨) إذا كانت جتاθ = $\frac{٢}{٣}$ فإن قاθ = $\frac{٣}{٢}$ (أ) (ب)

(٩) إذا كانت ظاθ = ٣ فإن ظتا(π + θ) = ٣ (أ) (ب)

(١٠) إذا كانت جاθ = $\frac{١}{٥}$ فإن قتا(π + θ) = −٥ (أ) (ب)

(١١) بسّط التعبيرات التالية لأبسط صورة:

(أ) جتا(π − θ) − جتا(− θ) + جا(π + θ) + جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$.

_____

(ب) جا(π + θ) − جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ + جتا(π − θ) + جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$.

_____

٦٣

«تدريب (١)»

(أ) الربع الثاني

(ب) الربع الرابع

(جـ) الربع الثاني

(د) الربع الثالث

«تدريب (٢)»

جا (٣٩٠°) = جا(٣٠° + ٣٦٠°) = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

جتا (٧٦٥°) = جتا(٤٥° + ٢ × ٣٦٠°) = جتا ٤٥° = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

ظا $\left(-\frac{١١\pi}{٣}\right)$ = ظا$\left(\frac{\pi}{٣} - \frac{١٢\pi}{٣}\right)$ = ظا $\frac{\pi}{٣}$ = $\sqrt{٣}$

(١٢) حلّ المعادلات التالية:

(أ) جتا س = + $\frac{١}{٢}$ _____

(ب) ظتا س = $\sqrt{٣}$ _____

(جـ) ٢ جا س = + $\sqrt{٢}$ _____

(د) جا(٤س) = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ _____

المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

(١) ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة.

ظا ٢٢٥° − ٣ جا ١٢٣٠° + ٢ جتا(−٩٦٠°) = − $\frac{٣}{٢}$ (أ) (ب)

قتا $\frac{١٩\pi}{٦}$ − ٢ قا $\frac{١٣\pi}{٦}$ + جا$\left(-\frac{٨\pi}{٣}\right)$ − جتا$\left(\frac{١٧\pi}{٦}\right)$ = ٢ (أ) (ب)

ظتا $\frac{١٩\pi}{٤}$ − ٣ ظا$\left(-\frac{١١\pi}{٦}\right)$ + جتا$\left(\frac{٢٤\pi}{٣}\right)$ − ٢ جا$\left(\frac{٤٥\pi}{٦}\right)$ = ١ (أ) (ب)

قا(−٣١٥°) + ٢ قتا ٥٨٥° − ٢ جتا ٨٥٥° = $\sqrt{٢}$ (أ) (ب)

(٢) ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة.

إذا كان جا س = $\sqrt{٣}$ فإن مجموعة الحل = ∅ (أ) (ب)

إذا كان جتا س = $\frac{١}{٢}$ فإن س = $\frac{\pi}{٣}$ (أ) (ب)

إذا كانت س = $\frac{\pi}{٦}$ فإن جا س = $\frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

مجموعة حل قا س = ٠,٣ هي ∅ (أ) (ب)

ظا (١٥π) = صفر (أ) (ب)

في التمارين (٣-٥)، اختر الإجابة الصحيحة:

(٣) النسبة المثلثية في ما يلي التي قيمتها $\frac{١}{٢}$ هي:

(أ) جا(−٣٣٠°) (ب) جتا(−٢٤٠°) (جـ) ظتا(−١٥٠٠°) (د) ظا ٧٦٥°

(٤) النسبة المثلثية في ما يلي التي قيمتها − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$:

(أ) جتا $\frac{٣١\pi}{٦}$ (ب) جا$\left(-\frac{٣٥\pi}{٣}\right)$ (جـ) ظا $\frac{١٧\pi}{٦}$ (د) قا $\frac{١٣\pi}{٣}$

(٥) إن قيمة المقدار قا(٢π − θ) − قتا$\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right)$ + جتا$\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right)$ + جا θ هي:

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

٦٤

٨-٣: العلاقات بين الدوال المثلثية [٢]

١ الأهداف

- يوجد متطابقات فيثاغورث.
- يوجد علاقات مثلثية أساسية.
- يبسط عبارات تتضمن دوال مثلثية.
- يبرهن صحة متطابقات مثلثية أساسية.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

متطابقات فيثاغورث – علاقات مثلثية أساسية – متطابقات مثلثية.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة مدرجة – فرجار – منقلة – آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

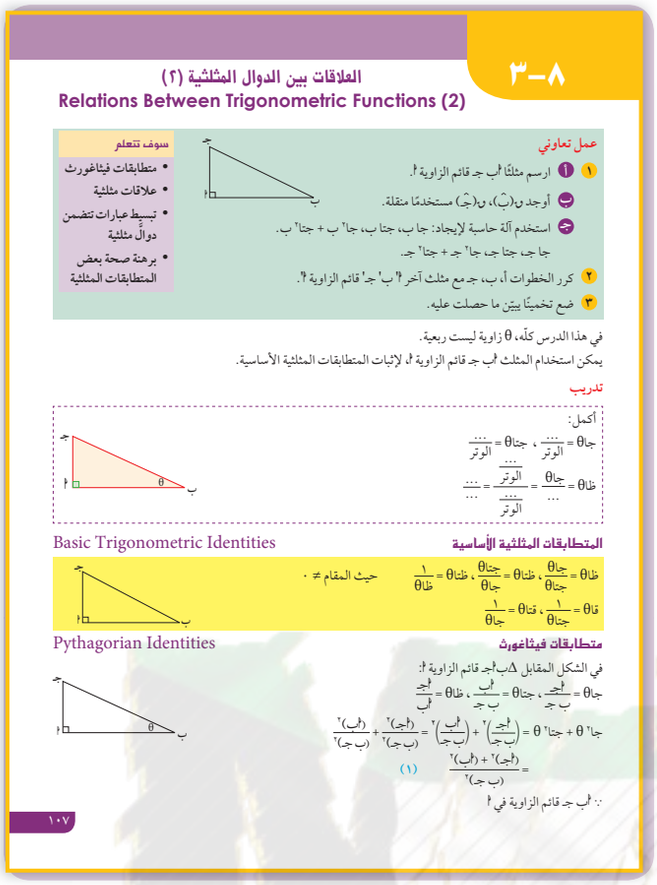
اسأل الطلاب تعريف:

- ما هي نظرية فيثاغورث؟ وأين تستخدم؟
- ما مجموعة حلول المعادلة: س^{٢} + ٨١ = ٢٢٥؟
- ما قيم ظتاθ، قاθ، قتاθ بدلالة ظاθ، جتاθ، جاθ على الترتيب؟
- ما مجموعة حلول المعادلة: ٤س^{٢} – ٧س + ٣ = ٠؟
- ما مجموعة حلول المعادلة: ٤جا^{٢}س – ١ = ٠؟

٥ التدريس

يوفّر هذا الدرس علاقات أساسية بين الدوال المثلثية، حيث يمكن للطلاب باستخدامها إيجاد كافة الدوال المثلثية إذا عرفت قيمة واحدة منها فقط. لذا يجب أولًا أن يفهم الطلاب متطابقة فيثاغورث وكيفية استخدامها مع التركيز على أن التربيع يطال العدد الحقيقي وليس الزاوية على دائرة الوحدة، أي أن هناك فرقًا كبيرًا بين جا^{٢}θ وجاθ^{٢} وهنا تكمن أهمية هذه المتطابقة، وهي تصلح لأي قيمة من θ ∈ [٠، ٢π).

أعط أمثلة متعددة لترسيخ هذه المتطابقة.



٨-٣

العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)

Relations Between Trigonometric Functions (2)

عمل تعاوني

سوف تتعلم
- متطابقات فيثاغورث
- علاقات مثلثية
- تبسيط عبارات تتضمن دوال مثلثية
- برهنة صحة بعض المتطابقات المثلثية

١ ارسم مثلثًا أب جـ قائم الزاوية أ.
أوجد ق(ب)، ق(جـ) مستخدمًا منقلة.
استخدم آلة حاسبة لإيجاد: جا ب، جتا ب، جا^{٢} ب + جتا^{٢} ب.
جا جـ، جتا جـ، جا^{٢} جـ + جتا^{٢} جـ.
٢ كرر الخطوات أ، ب، جـ مع مثلث آخر أ$'$ ب$'$ جـ$'$ قائم الزاوية أ$'$.
٣ ضع تخمينًا يبيّن ما حصلت عليه.

في هذا الدرس كلّه، θ زاوية ليست ربعية.
يمكن استخدام المثلث أب جـ قائم الزاوية أ، لإثبات المتطابقات المثلثية الأساسية.

تدريب

أكمل:
جاθ = ... / الوتر ، جتاθ = ... / الوتر
ظاθ = جاθ / جتاθ = ... / الوتر / ..... / الوتر = ... / .....

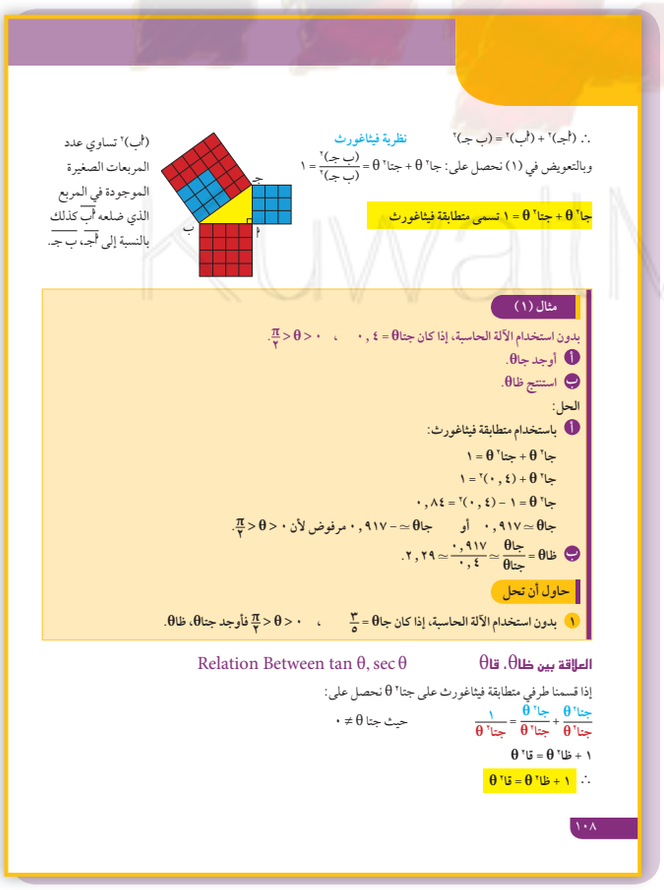
المتطابقات المثلثية الأساسية — Basic Trigonometric Identities

ظاθ = جاθ / جتاθ ، ظتاθ = جتاθ / جاθ ، ظتاθ = ١ / ظاθ حيث المقام ≠ ٠
قاθ = ١ / جتاθ ، قتاθ = ١ / جاθ

متطابقات فيثاغورث — Pythagorian Identities

في الشكل المقابل Δأب جـ قائم الزاوية أ:
جاθ = أجـ / ب جـ ، جتاθ = أب / ب جـ ، ظاθ = أجـ / أب
جا^{٢} θ + جتا^{٢} θ = (أجـ / ب جـ)^{٢} + (أب / ب جـ)^{٢} = (أجـ)^{٢} / (ب جـ)^{٢} + (أب)^{٢} / (ب جـ)^{٢}
= ((أجـ)^{٢} + (أب)^{٢}) / (ب جـ)^{٢} (١)
∵ أب جـ قائم الزاوية في أ

١٠٧



∴ (أجـ)^{٢} + (أب)^{٢} = (ب جـ)^{٢} نظرية فيثاغورث
وبالتعويض في (١) نحصل على: جا^{٢} θ + جتا^{٢} θ = (ب جـ)^{٢} / (ب جـ)^{٢} = ١

جا^{٢} θ + جتا^{٢} θ = ١ تسمى متطابقة فيثاغورث

(أب)^{٢} تساوي عدد المربعات الصغيرة الموجودة في المربع الذي ضلعه أب كذلك بالنسبة إلى أجـ، ب جـ.

مثال (١)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جتاθ = ٠,٤ ، ٠ < θ < π/٢
١ أوجد جاθ.
٢ استنتج ظاθ.

الحل:
١ باستخدام متطابقة فيثاغورث:
جا^{٢} θ + جتا^{٢} θ = ١
جا^{٢} θ + (٠,٤)^{٢} = ١
جا^{٢} θ = ١ – (٠,٤)^{٢} = ٠,٨٤
جاθ ≃ ٠,٩١٧ أو جاθ ≃ – ٠,٩١٧ مرفوض لأن ٠ < θ < π/٢.
٢ ظاθ = جاθ / جتاθ ≃ ٠,٩١٧ / ٠,٤ ≃ ٢,٢٩.

حاول أن تحل

١ بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جاθ = ٣/٥ ، ٠ < θ < π/٢ فأوجد جتاθ، ظاθ.

العلاقة بين ظاθ، قاθ — Relation Between tan θ, sec θ

إذا قسمنا طرفي متطابقة فيثاغورث على جتا^{٢} θ نحصل على:
جا^{٢} θ / جتا^{٢} θ + جتا^{٢} θ / جتا^{٢} θ = ١ / جتا^{٢} θ حيث جتا θ ≠ ٠
١ + ظا^{٢} θ = قا^{٢} θ
∴ ١ + ظا^{٢} θ = قا^{٢} θ

١٠٨

وبالانتقال إلى بقية المتطابقات يصبح من السهل التعامل معها. دعهم يجدون بأنفسهم المتطابقات التي تربط بين ظاθ، قاθ، ظتاθ، قتاθ. لا تدعهم يعتمدون على الحفظ بل على فهم كيفية إيجاد كل متطابقة.

ناقش معهم بإسهاب الأمثلة التي تتناول تبسيط المقادير المثلثية ليتعرفوا كيفية استخدام المتطابقات. أخبرهم أن ذلك يساعد كثيرًا على حل المعادلات المثلثية في خطوات لاحقة.

٦ الربط

بسّط المقادير التالية:

(أ) جا^{٢}٣٥° + جا^{٢}٥٥° =

جا^{٢}٣٥° + جا^{٢}(٩٠° − ٣٥°) =

جا^{٢}٣٥° + جتا^{٢}٣٥° = ١ (متطابقة فيثاغورث)

(ب) جتا^{٢}(٤٣°) + جتا^{٢}(٤٧°) =

جتا^{٢}٤٣° + جتا^{٢}(٩٠° − ٤٣°) =

جتا^{٢}٤٣° + جا^{٢}٤٣° = ١ (متطابقة فيثاغورث)

(جـ) في مثال ٣ يجب الأخذ بالاعتبار عند اختيار طريقة رسم المثلث القائم الزاوية للزاوية الواقعة في الربع الأول ستعتمد القياس الأساس للزاوية.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام المتطابقات الأساسية. شجّعهم على إعادة كتابة كل متطابقة وكيفية استنتاجها.

٨ التقييم

تابع بعناية عمل الطلاب مع فقرات «حاول أن تحل» لتكون فكرة واضحة عن مدى فهمهم هذا الدرس.

اختبار سريع

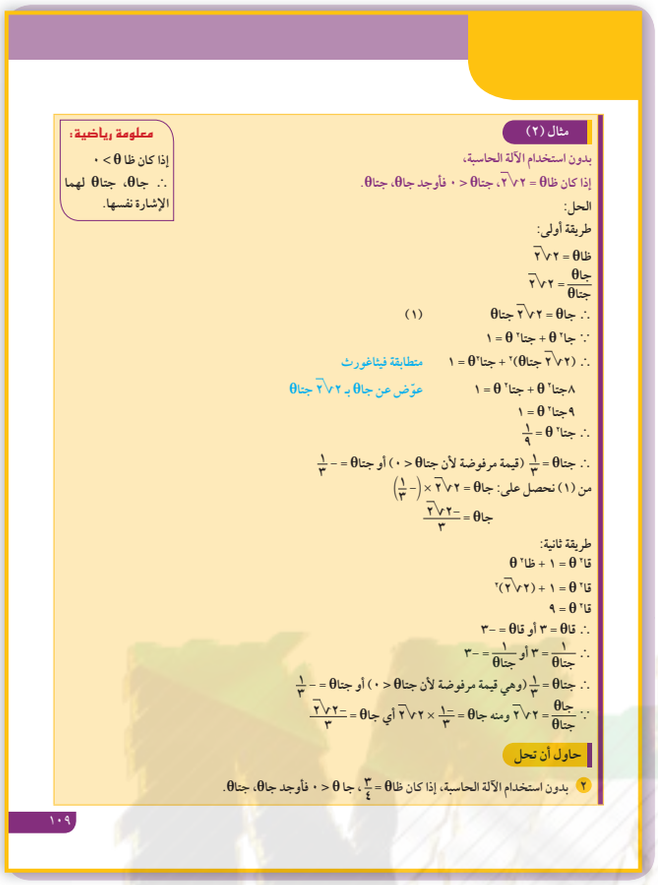
١ بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان ظاθ = ٤ $\sqrt{٥}$، جاθ < ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

جتا^{٢}θ = $\frac{١}{١ + ظا^{٢}θ}$ = $\frac{١}{١ + (٤\sqrt{٥})^{٢}}$ = $\frac{١}{٨١}$

جتا θ = − $\frac{١}{٩}$، جا θ = − $\frac{٤\sqrt{٥}}{٩}$.

٢ بسط المقدار: جا^{٢}٦٢° + جا^{٢}٢٨° =

جا^{٢}٦٢° + جا^{٢}(٩٠° − ٦٢°) = جا^{٢}٦٢° + جتا^{٢}٦٢° = ١



مثال (٢)

بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظاθ = $٢\sqrt{٢}$، جاθ < ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

الحل:

طريقة أولى:

ظاθ = $٢\sqrt{٢}$

$\frac{جاθ}{جتاθ}$ = $٢\sqrt{٢}$

∴ جاθ = $٢\sqrt{٢}$ جتاθ (١)

∵ جا^{٢}θ + جتا^{٢}θ = ١

∴ ($٢\sqrt{٢}$ جتاθ)^{٢} + جتا^{٢}θ = ١ متطابقة فيثاغورث

٨جتا^{٢}θ + جتا^{٢}θ = ١ عوّض عن جاθ بـ $٢\sqrt{٢}$ جتاθ

٩جتا^{٢}θ = ١

∴ جتا^{٢}θ = $\frac{١}{٩}$

∴ جتاθ = $\frac{١}{٣}$ (قيمة مرفوضة لأن جتاθ < ٠) أو جتاθ = − $\frac{١}{٣}$

من (١) نحصل على: جاθ = $٢\sqrt{٢}$ × (− $\frac{١}{٣}$)

جاθ = $\frac{-٢\sqrt{٢}}{٣}$

طريقة ثانية:

قا^{٢}θ = ١ + ظا^{٢}θ

قا^{٢}θ = ١ + ($٢\sqrt{٢}$)^{٢}

قا^{٢}θ = ٩

∴ قاθ = ٣ أو قاθ = −٣

∴ $\frac{١}{جتاθ}$ = ٣ أو $\frac{١}{جتاθ}$ = −٣

∴ جتاθ = $\frac{١}{٣}$ (وهي قيمة مرفوضة لأن جتاθ < ٠) أو جتاθ = − $\frac{١}{٣}$

∵ $\frac{جاθ}{جتاθ}$ = $٢\sqrt{٢}$ ومنه جاθ = $\frac{-١}{٣}$ × $٢\sqrt{٢}$ أي جاθ = $\frac{-٢\sqrt{٢}}{٣}$

معلومة رياضية:

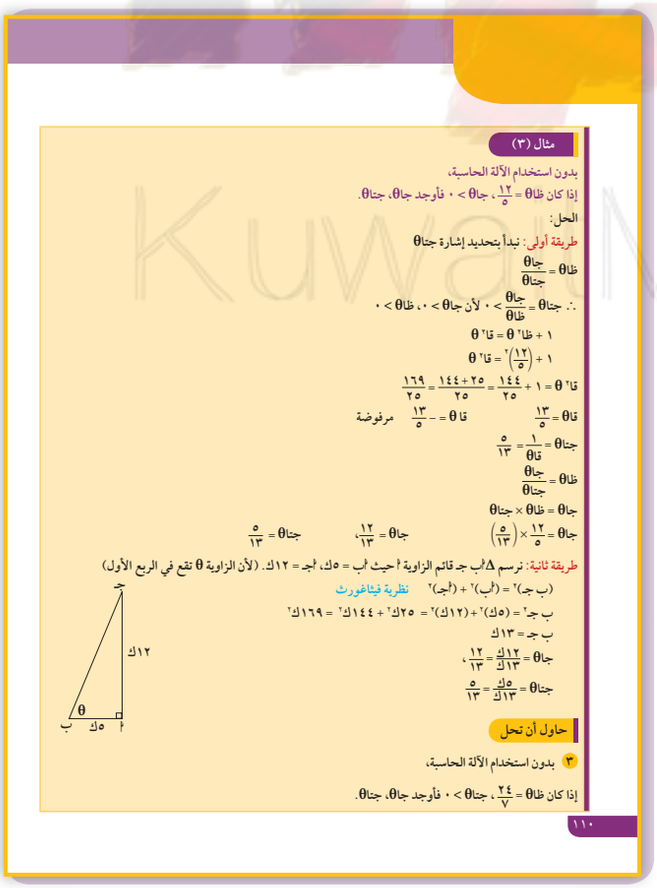
إذا كان ظاθ > ٠

∴ جاθ، جتاθ لهما الإشارة نفسها.

حاول أن تحل

٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان ظاθ = $\frac{٣}{٤}$، جاθ < ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

١٠٩



مثال (٣)

بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظاθ = $\frac{١٢}{٥}$، جاθ < ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

الحل:

طريقة أولى: نبدأ بتحديد إشارة جتاθ

ظاθ = $\frac{جاθ}{جتاθ}$

∴ جتاθ = $\frac{جاθ}{ظاθ}$ < ٠ لأن جاθ < ٠، ظاθ < ٠

١ + ظا^{٢}θ = قا^{٢}θ

١ + ($\frac{١٢}{٥}$)^{٢} = قا^{٢}θ

قا^{٢}θ = ١ + $\frac{١٤٤}{٢٥}$ = $\frac{١٤٤ + ٢٥}{٢٥}$ = $\frac{١٦٩}{٢٥}$

قاθ = $\frac{١٣}{٥}$ قاθ = − $\frac{١٣}{٥}$ مرفوضة

جتاθ = $\frac{١}{قاθ}$ = $\frac{٥}{١٣}$

ظاθ = $\frac{جاθ}{جتاθ}$

جاθ = ظاθ × جتاθ

جاθ = $\frac{١٢}{٥}$ × ($\frac{٥}{١٣}$) جاθ = $\frac{١٢}{١٣}$، جتاθ = $\frac{٥}{١٣}$

طريقة ثانية: نرسم Δأب جـ قائم الزاوية أ حيث أب = ٥ك، أجـ = ١٢ك. (لأن الزاوية θ تقع في الربع الأول)

(ب جـ)^{٢} = (أب)^{٢} + (أجـ)^{٢} نظرية فيثاغورث

ب جـ^{٢} = (٥ك)^{٢} + (١٢ك)^{٢} = ٢٥ك^{٢} + ١٤٤ك^{٢} = ١٦٩ك^{٢}

ب جـ = ١٣ك

جاθ = $\frac{١٢ك}{١٣ك}$ = $\frac{١٢}{١٣}$،

جتاθ = $\frac{٥ك}{١٣ك}$ = $\frac{٥}{١٣}$

حاول أن تحل

٣ بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظاθ = $\frac{٢٤}{٧}$، جاθ < ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

١١٠

٩ إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

تحقق من إجابات الطلاب.

«حاول أن تحل»

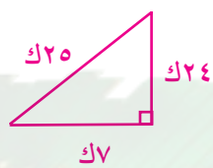
١ ∵ جا^{٢}θ + جتا^{٢}θ = ١ ومنها جتاθ = $\frac{٤}{٥}$ ،

ظاθ = $\frac{٣}{٤}$

٢ ١ + ظا^{٢}θ = قا^{٢}θ ومنها

قاθ = $\frac{-٥}{٤}$ ، جتاθ = $\frac{-٤}{٥}$

جاθ = $-\frac{٣}{٥}$

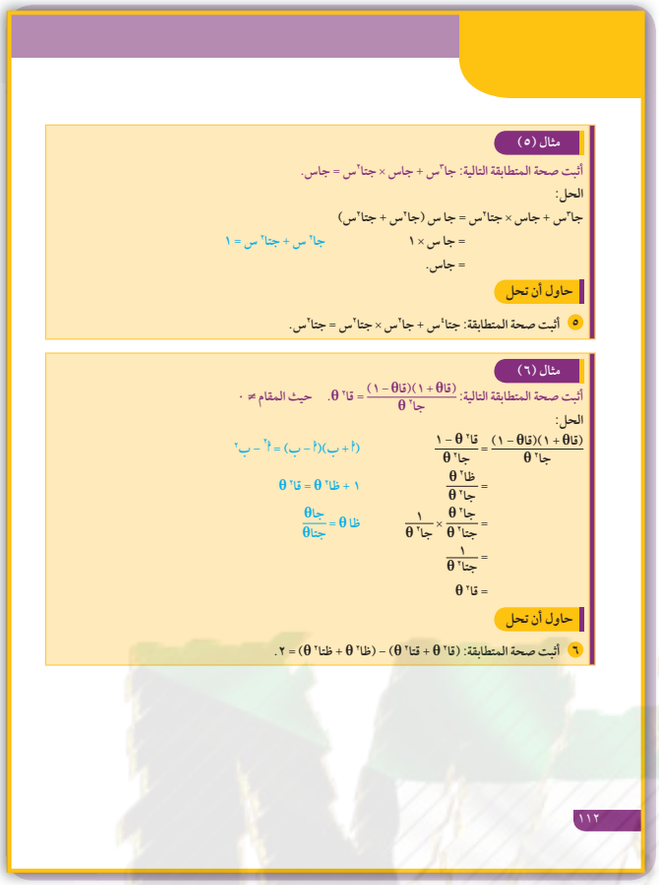


٣ جتاθ = $\frac{٧}{٢٥}$ ، جاθ = $\frac{٢٤}{٢٥}$

يمكن استخدام العلاقة ١ + ظا^{٢}θ = قا^{٢}θ

٤ جاθ = $\frac{٨}{\sqrt{٨٩}}$ = $\frac{٨\sqrt{٨٩}}{٨٩}$

٥ جتا^{٢}س (جتا^{٢}س + جا^{٢}س) = جتا^{٢}س



مثال (٥)

أثبت صحة المتطابقة التالية: جا^{٢}س + جاس × جتا^{٢}س = جاس.

الحل:

جا^{٢}س + جاس × جتا^{٢}س = جا س (جا^{٢}س + جتا^{٢}س)

= جا س × ١ جا^{٢} س + جتا^{٢} س = ١

= جاس.

حاول أن تحل

٥ أثبت صحة المتطابقة: جتا^{٤}س + جا^{٢}س × جتا^{٢}س = جتا^{٢}س.

مثال (٦)

أثبت صحة المتطابقة التالية: $\frac{(قاθ + ١)(قاθ - ١)}{جا^{٢}θ}$ = قا^{٢}θ. حيث المقام ≠ ٠

الحل:

$\frac{(قاθ + ١)(قاθ - ١)}{جا^{٢}θ}$ = $\frac{قا^{٢}θ - ١}{جا^{٢}θ}$ (أ + ب)(أ − ب) = أ^{٢} − ب^{٢}

= $\frac{ظا^{٢}θ}{جا^{٢}θ}$ ١ + ظا^{٢}θ = قا^{٢}θ

= $\frac{جا^{٢}θ}{جتا^{٢}θ} \times \frac{١}{جا^{٢}θ}$ ظاθ = $\frac{جاθ}{جتاθ}$

= $\frac{١}{جتا^{٢}θ}$

= قا^{٢}θ

حاول أن تحل

٦ أثبت صحة المتطابقة: (قا^{٢}θ + قتا^{٢}θ) − (ظا^{٢}θ + ظتا^{٢}θ) = ٢.

١١٢

العلاقة بين ظتاθ، قتاθ Relation Between cot θ, csc θ

١ + ظتا^{٢}θ = ١ + $\frac{جتا^{٢}θ}{جا^{٢}θ}$

١ + ظتا^{٢}θ = $\frac{جا^{٢}θ}{جا^{٢}θ}$ + $\frac{جتا^{٢}θ}{جا^{٢}θ}$

١ + ظتا^{٢}θ = $\frac{جا^{٢}θ + جتا^{٢}θ}{جا^{٢}θ}$ المقام المشترك

١ + ظتا^{٢}θ = $\frac{١}{جا^{٢}θ}$ = قتا^{٢}θ جا^{٢}θ + جتا^{٢}θ = ١

∴ ١ + ظتا^{٢}θ = قتا^{٢}θ

مثال (٤)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جاθ = $\frac{٣}{٧}$ ، جتاθ > ٠ فأوجد ظتاθ، ظاθ.

الحل:

١ + ظتا^{٢}θ = $\frac{١}{جا^{٢}θ}$

١ + ظتا^{٢}θ = $\frac{١}{\left(\frac{٣}{٧}\right)^{٢}}$ = $\frac{١}{\frac{٩}{٤٩}}$ = $\frac{٤٩}{٩}$

ظتا^{٢}θ = $\frac{٤٩}{٩}$ − ١ = $\frac{٤٠}{٩}$

ظتاθ = $\frac{\sqrt{٤٠}}{٣}$ أو ظتاθ = $-\frac{\sqrt{٤٠}}{٣}$

∵ جاθ، جتاθ لهما الإشارة نفسها (موجبة)

∴ ظتاθ > ٠ وبالتالي ظتاθ = $\frac{\sqrt{٤٠}}{٣}$

ظاθ = $\frac{١}{ظتاθ}$ = $\frac{١}{\frac{\sqrt{٤٠}}{٣}}$ = $\frac{٣}{\sqrt{٤٠}}$ ≃ ٠,٤٧٤.

ملاحظة: يمكن حل المثال ٤ باستخدام متطابقة فيثاغورث: جا^{٢}θ + جتا^{٢}θ = ١.

أو رسم مثلث قائم الزاوية واستخدام نظرية فيثاغورث. حاول ذلك.

حاول أن تحل

٤ بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظتاθ = $\frac{٥}{٨}$، جتاθ > ٠ فأوجد جاθ.

١١١

مثال (٧) إثرائي

حلّ المعادلة: $\frac{جتا^{٢}θ}{جاθ}$ = ظتاθ، حيث θ ∈ (٠، ٢π). شرط أن تكون جاθ ≠ ٠

الحل:

$\frac{جتا^{٢}θ}{جاθ}$ = ظتاθ

$\frac{جتا^{٢}θ}{جاθ}$ = $\frac{جتاθ}{جاθ}$

∵ جاθ ≠ ٠

∴ جتا^{٢}θ = جتاθ

جتا^{٢}θ − جتاθ = ٠

جتاθ (جتا^{٢}θ − ١) = ٠

جتاθ (− جا^{٢}θ) = ٠ متطابقة فيثاغورث

جتاθ = ٠ أو جا^{٢}θ = ٠

جتاθ = ٠ أو جاθ = ٠ مرفوضة

قيم θ على الفترة (٠، ٢π) التي تحقق جتاθ = ٠ هي θ = $\frac{π}{٢}$ أو θ = $\frac{٣π}{٢}$.

حاول أن تحل

٧ حلّ المعادلة: ٢جا س جتا س − جتا س = ٠ حيث س ∈ [٠، ٢π)

١١٣

٦ $\frac{١}{\text{جتا}^٢\theta} + \frac{١}{\text{جا}^٢\theta} - \frac{\text{جا}^٢\theta}{\text{جتا}^٢\theta} - \frac{\text{جتا}^٢\theta}{\text{جا}^٢\theta} =$

$\frac{١ - \text{جا}^٢\theta}{\text{جتا}^٢\theta} + \frac{١ - \text{جتا}^٢\theta}{\text{جا}^٢\theta} = ١ + ١ = ٢$

٧ جتاس(٢جاس − ١) = ٠ ؛ جتاس = ٠ أو جاس = $\frac{١}{٢}$

جتاس = ٠ فإن س = $\frac{\pi}{٢} \in [٠، ٢\pi)$

أو س = $\frac{٣\pi}{٢} \in [٠، ٢\pi)$

جاس = $\frac{١}{٢}$ فإن س = $\frac{\pi}{٦} \in [٠، ٢\pi)$

أو س = $\pi - \frac{\pi}{٦} = \frac{٥\pi}{٦} \in [٠، ٢\pi)$

«تدريب»

جاθ = $\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}}$ ، جتاθ = $\frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}}$

ظاθ = $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$ ، جتاθ = $\frac{\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}}}{\frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}}} = \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المجاور}}$

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

تمرَّنْ ٨-٣

العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)

Relations Between Trigonometric Functions (2)

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) إذا كانت جاθ = $\frac{١}{٥}$ ، ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$.

فأوجد قيمة النسب المثلثية الأخرى للزاوية θ.

(٢) إذا كانت ظاθ = $\sqrt{٨}$ ، جتاθ < ٠

أوجد جاθ، جتاθ.

(٣) إذا كانت جتاθ = $\frac{١}{٣}$ ، جاθ < ٠

أوجد جاθ، ظتاθ.

في التمارين (٤-٧)، أوجد قيمة كلّ مما يلي:

(٤) (جاθ + جتاθ)^٢ − ٢جاθ جتاθ.

(٥) (ظا$^٢\theta$ + ١)جتا$^٢\theta$.

(٦) ١ + ظا^٢(−θ) − قا$^٢\theta$.

(٧) ٩قا$^٢\theta$ − ٥ظا$^٢\theta$ − $\frac{٤}{\text{جتا}^٢\theta}$

في التمارين (٨-١١)، أثبت صحة المتطابقات التالية:

(٨) ١ + ظتا^٢(−θ) = قتا$^٢\theta$.

(٩) قا$^٤\theta$ − قا$^٢\theta$ = ظا$^٤\theta$ + ظا$^٢\theta$.

(١٠) (١ − جتا$^٢\theta$)(١ + ظتا$^٢\theta$) = ١ .

(١١) ٣جا$^٢\theta$ + ٤جتا$^٢\theta$ = ٣ + جتا$^٢\theta$.

المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

في التمارين (١-٦)، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة.

(١) قتاθ × جتاθ − ظتاθ = ٠ (أ) (ب)

(٢) ظتا^٢(−θ) − قتا$^٢\theta$ = −١ (أ) (ب)

(٣) (قاθ + ظاθ)(قاθ − ظاθ) = ١ (أ) (ب)

(٤) جاθ قتاθ − جتا$^٢\theta$ − جا$^٢\theta$ = ٠ (أ) (ب)

(٥) $\frac{\text{جا}^٢\theta}{١ - \text{جتا}\theta}$ − جتاθ = −١ (أ) (ب)

(٦) ظاθ + ظتاθ − قاθ قتاθ = ٠ (أ) (ب)

في التمرينين (٧-٨)، اختر الإجابة الصحيحة:

(٧) إذا كانت جتاθ = −$\frac{٥}{٧}$ ، θ تقع في الربع الثالث. فإن جاθ =

(أ) $\frac{-٧}{٦\sqrt{٢}}$ (ب) $\frac{٦\sqrt{٢}}{٧}$

(جـ) $\frac{-٦\sqrt{٢}}{٧}$ (د) $\frac{٧}{٦\sqrt{٢}}$

(٨) إذا كانت قاθ = $\frac{٣}{٢}$ ، θ تقع في الربع الرابع. فإن ظاθ =

(أ) $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

(جـ) $\frac{-٢}{\sqrt{٥}}$ (د) $\frac{-\sqrt{٥}}{٢}$

في التمرينين (٩-١٠)، أثبت صحة المتطابقات التالية:

(٩) جاθ (ظتاθ + ظاθ) = قاθ

(١٠) $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جا}\theta - \text{جتا}\theta} = \frac{١}{١ - \text{ظتا}\theta}$

المرشد لحل المسائل

إجابة «تطبيق»

نعتمد الشكل المرسوم كجزء مكمل للعمل

ب د = ٥(١ − جتا٣٠°) + ١,٢

ب د ≃ ١,٨٧

أي يرتفع سلطان ١,٨٧ متر عن سطح الأرض تقريبًا.

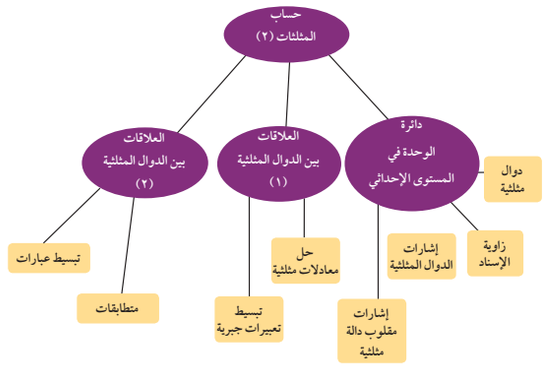
إجابة «مسألة إضافية»

١١,٧ = ٦(١ − جتا θ) + ١,٥

θ ≃ ٤٦°

أو θ ≃ ١٨٠° − ٤٦° = ١٣٤°

مخطط تنظيمي للوحدة الثامنة



المرشد لحل المسائل

في مدينة الملاهي، ركب سلطان الدوارة.

دارت الدوارة عكس اتجاه دوران عقارب الساعة وتوقفت لتقل راكبًا آخر.

تساءل محمد: ما ارتفاع سلطان عن الأرض؟

كيف فكر محمد؟

بداية، سوف ارسم مخططًا.

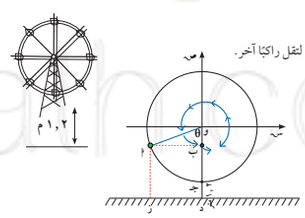
تمثل النقطة أ موقع سلطان عند توقف الدوارة.

جـ د = ١,٢ متر (الارتفاع عن الأرض)

زاوية الدوران = ٢π − θ

عليّ إيجاد طول القطعة $\overline{أز}$.

سأستخدم ما تعلمته في الوحدة عن النسب المثلثية.



أز = ب د

المثلث أب و قائم الزاوية ب

جتا(٢π − θ) = $\frac{وب}{وأ}$

جتا θ = $\frac{وب}{نق}$

∴ وب = نق × جتا θ

سأستخدم خواص القطع المستقيمة.

ب د = ب جـ + جـ د

ولكن ب جـ = وجـ − وب

∴ ب د = وجـ − وب + جـ د

ب د = نق − نق × جتا θ + جـ د

ب د = نق(١ − جتا θ) + ١,٢

استنتاج محمد: عليّ معرفة طول نصف قطر الدوارة وزاوية الدوران لإيجاد ارتفاع سلطان عن الأرض.

تطبيق

في المسألة أعلاه، أوجد ارتفاع سلطان عن الأرض إذا كان طول نصف قطر الدوارة ٥ أمتار وقياس الزاوية التي يصنعها مقعد سلطان مع المحور الرأسي للدوارة ٣٠°.

مسألة إضافية

ركب سالم دوارة طول نصف قطرها ٦ أمتار وترتفع قاعدتها ١,٥ متر عن الأرض. أوجد الزاوية التي يصنعها مقعد سالم مع المحور الرأسي للدوارة إذا كان سالم على ارتفاع ١١,٧ مترًا.

ملخص

- الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها واحد وحدة تسمى «دائرة الوحدة».
- نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة تسمى «النقطة المثلثية».
- زاوية الإسناد للزاوية الموجهة (وبَ، وجَ) التي في وضع قياسي هي الزاوية الحادة α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات. (٠° < α < ٩٠°).

قا θ = $\frac{١}{جتا θ}$ ؛ قتا θ = $\frac{١}{جا θ}$ ؛ ظا θ = $\frac{جا θ}{جتا θ}$ ؛ ظتا θ = $\frac{جتا θ}{جا θ}$ المقام ≠ ٠

- دالة الجيب: د(θ) = جا θ حيث جا θ = ص
- دالة جيب التمام: د(θ) = جتا θ حيث جتا θ = س
- دالة الظل: د(θ) = ظا θ حيث ظا θ = $\frac{ص}{س}$ ؛ س ≠ ٠
- دالة القاطع: د(θ) = قا θ حيث قا θ = $\frac{١}{س}$ ؛ س ≠ ٠
- دالة قاطع التمام: د(θ) = قتا θ حيث قتا θ = $\frac{١}{ص}$ ؛ ص ≠ ٠
- دالة ظل التمام: د(θ) = ظتا θ حيث ظتا θ = $\frac{س}{ص}$ ؛ ص ≠ ٠
- في الربع الأول جميع الدوال المثلثية موجبة.
- في الربع الثاني جا θ، قتا θ موجبتان وبقية الدوال سالبة.
- في الربع الثالث ظا θ، ظتا θ موجبتان وبقية الدوال سالبة.
- في الربع الرابع جتا θ، قا θ موجبتان وبقية الدوال سالبة.
- إشارة مقلوب دالة مثلثية هي إشارة الدالة المثلثية الأصلية نفسها.

- العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية:

جا(−θ) = −جاθ؛ جتا(−θ) = جتاθ؛ ظا(−θ) = −ظاθ

جا(π − θ) = جاθ؛ جتا(π − θ) = −جتاθ؛ ظا(π − θ) = −ظاθ

جا(π + θ) = −جاθ؛ جتا(π + θ) = −جتاθ ؛ ظا(π + θ) = ظاθ

جا$\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ = جتاθ؛ جتا$\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ = جاθ

جا$\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ = جتاθ؛ جتا$\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ = −جاθ

جا(٢ك π + θ) = جاθ؛ جتا(٢ك π + θ) = جتاθ حيث ك عدد صحيح

جا^{2}θ + جتا^{2}θ = ١ تسمى متطابقة فيثاغورث

قا^{2}θ = ١ + ظا^{2}θ = $\frac{١}{\text{جتا}^2\theta}$ حيث المقام ≠ ٠

قتا^{2}θ = ١ + ظتا^{2}θ = $\frac{١}{\text{جا}^2\theta}$ حيث المقام ≠ ٠

(٥) أثبت صحة ما يلي:

(أ) قا^{2}θ − ٢ظا^{2}θ + $\frac{١}{\text{جتا}^2(-\theta)}$ = ٢

(ب) جتاθ + $\frac{\text{جا}^2\theta}{١ + \text{جتا}\theta}$ = ١

(٦) أثبت صحة المتطابقات التالية:

(أ) جتا^{4}θ − جا^{4}θ = جتا^{2}θ − جا^{2}θ

(ب) جتاθ (ظاθ + ظتاθ) = قتاθ

(٧) أوجد مجموعة حل المعادلات المثلثية التالية:

(أ) جتا س = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

(ب) ٢جا س − $\sqrt{٣}$ = ٠

(جـ) ظا س = ١

مراجعة الوحدة الثامنة

(١) في أيّ ربع أو على أيّ محور يقع الضلع النهائي لـ θ في الحالات التالية:

(أ) جاθ = $\frac{١}{٣}$.

(ب) قاθ = −١.

(جـ) ظاθ = −٣.

(د) جتاθ = −$\frac{٧}{٨}$.

(٢) إذا كان ظاθ = ٤ فأوجد:

(أ) قا^{2}θ.

(ب) ظتاθ.

(جـ) ظتا$\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$.

(د) قتا^{2}θ.

(٣) إذا كان جا ٣٨° ≃ ٠,٦٢، بدون استخدام الآلة الحاسبة بطريقة مباشرة أوجد قيمة كل من:

(أ) جتا٣٨°.

(ب) جا(−٥٢°).

(جـ) ظا(١٤٢°) − جتا(٢١٨°) + ظتا(−٣٨°).

(٤) أوجد قيمة كل مما يلي:

(أ) قا(−٦٠°) + ظا(٦٠°) − ظتا(٢١٠°) + قتا(٣٠°).

(ب) جتا$\left(\frac{\pi٣}{٢}\right)$ + ٢جا(−π) + جتا(−٨π) + جا$\left(-\frac{\pi٧}{٢}\right)$.

تمارين إثرائية

(١) **تفكير ناقد:** افترض أن θ زاوية في الوضع القياسي،
حيث جتا θ = $\frac{-١}{٢}$ ، جا θ = −$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$.
هل من الممكن أن تكون θ = ٦٠° أو θ = −١٢٠°؟

(٢) أوجد قيمة كل مما يلي:

(أ) جا١٣٥° + جتا٢٢٥° − ٢ظا(−٢٢٥°) + ٣جا٣٣٠°.

(ب) ظتا٣٠° + ٢ظا١٢٠° − ٣ظا٢١٠° + ٣ظتا(−٣٣٠°).

(جـ) جتا$\frac{\pi١٧}{٣}$ + جا$\left(-\frac{\pi١٥}{٦}\right)$ + ٣جتا$\left(-\frac{\pi٢٥}{٣}\right)$.

(د) ظا$\frac{\pi٩}{٤}$ + ظتا$\frac{\pi١٧}{٤}$ + قا$\left(-\frac{\pi٥}{٤}\right)$ + قتا$\frac{\pi١٩}{٤}$.

(٣) أوجد قيمة:

(أ) جا١° + جا٢° + جا٣° + ... + جا٣٥٨° + جا٣٥٩°.

(ب) جتا١° + جتا٢° + جتا٣° + ... + جتا٣٥٨° + جتا٣٥٩°.

(٤) حلّ المعادلات التالية:

(أ) $\text{جتا}\left(٢\text{س} + \frac{\pi}{٤}\right) = \text{جتا}\left(\text{س} - \frac{٣\pi}{٤}\right)$

(ب) $\text{جا}\left(\frac{\pi}{٦} - \text{س}\right) = \text{جا}\left(٢\text{س} - \frac{٢\pi}{٣}\right)$

(جـ) $\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٨} + \text{س}\right) = ١$

(د) $\text{ظا}(٣\pi + ٢\text{س}) = \text{ظتا}(٢\text{س})$

(٥) أثبت صحة المتطابقة التالية:

$$\frac{١ - \text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} + \frac{\text{جتا}\theta}{١ - \text{جا}\theta} = ٢\,\text{قا}\theta$$

(٦) أوجد مجموعة حل المعادلة المثلثية التالية، ثمّ مثّلها على دائرة الوحدة، حيث $\theta \in [٠ ، ٢\pi)$.

$٢\text{جا}^٢\theta = ٤ - ٧\text{جا}\theta$.

في التمرينين (٧-٨)، أثبت صحة المتطابقات التالية:

(٧) $\frac{\text{جا}\theta + \text{جتا}\theta}{\text{جتا}\theta} - \frac{\text{جا}\theta + \text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta} = \text{قا}\theta\,\text{قتا}\theta$

(٨) $\frac{\text{جتا}^٢\theta - \text{جا}^٢\theta}{١ - \text{ظا}^٢\theta} = \text{جتا}^٢\theta$

في التمرينين (٩-١٠)، حل المعادلات المثلثية التالية:

(٩) $\text{ظتا}^٢\text{س} + \text{ظتا}\,\text{س} = ٠$

(١٠) $\text{قا}^٢\text{س} = ٣\text{قا}\,\text{س} - ٢$

في التمارين (١١-١٥)، حل المعادلات التالية حيث $\theta \in (٠ ، ٢\pi)$ حيث المقام $\neq ٠$:

*(١١) $\frac{\text{جا}^٢\theta}{\text{جتا}\theta} = \text{ظا}\theta$

*(١٢) $\frac{\text{جا}^٢\theta}{\text{جتا}\theta} \times \text{قا}\theta = \text{ظا}\theta$

*(١٣) $\frac{\text{قا}\theta}{\text{ظتا}\theta} = -\text{قتا}\theta$

*(١٤) $٢\text{جتا}^٢\theta + \text{جتا}\theta - ١ = ٠$ حيث $\text{جتا}\theta > ٠$

*(١٥) $\text{ظتا}^٢\theta = ١$