الوحدة الثالثة: الهندسة المستوية

Plane Geometry

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

٣ – ١ : المضلعات المتشابهة

جزء ١ : التشابه

جزء ٢ : مقياس الرسم

جزء ٣: المستطيل الذهبي

٣ – ٢ : تشابه المثلثات

جزء ١ : القياس غير المباشر

جزء ٢ : نظريات تشابه المثلثات

جزء ٣: تطبيقات حياتية

٣ – ٣: التشابه في المثلثات قائمة الزاوية

جزء ١ : نظريات تشابه المثلثات قائمة الزاوية

جزء ٢ : تطبيقات حياتية

٣ – ٤ : التناسبات والمثلثات المتشابهة

جزء ١ : نظريات التناسبات والمثلثات المتشابهة

جزء ٢ : تطبيقات حياتية

٣ – ٥ : العلاقة بين محيطي شكلين متشابهين والعلاقة بين مساحتيهما

جزء ١ : إيجاد العلاقة بين نسبة التشابه والمحيط والمساحة

جزء ٢ : تطبيقات حياتية

مقدمة الوحدة

الوحدة الثالثة

الهندسة المستوية
Plane Geometry

مشروع الوحدة: هندسة الكسريات CTALS

١ مقدمة المشروع: خلال السنوات العشرين الأخيرة، تزايدت كثيرًا أهمية هندسة الكسريات fractal geometry كطريقة لوصف بعض ظواهر الحياة اليومية. استخدمت بعض الكسريات لوصف التكوينات الطبيعية مثل سلاسل الجبال والغيوم. في العام ١٩٠٤، وضع السويدي فون كوش (Von Kosh) منحنى استخدم لنمذجة السواحل.
كثير من الأشكال تحتوي على أنماط تتكرر بمقاييس مختلفة مثل زهرة القرنبيط، حيث تهتم هندسة الكسريات بهذه الأشكال. ويعتبر عالم الرياضيات فون كوش من أهم الباحثين في هذ المجال.

٢ الهدف: دراسة الأشكال ذاتية التماثل التي تتغير.

٣ اللوازم: أوراق رسم بياني ؛ حاسبة علمية أو حاسوب.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ ابحث عن الخصائص الثلاث المهمة للكسريات.

ب ابحث عن العالم الرياضي فون كوش واعرض لبعض أعماله في مجال الكسريات وخاصة «رقعة كوش» Koch snow flake

جـ طول القطعة المقابلة وحدة واحدة وتشكل المرحلة صفر من «منحنى كوش».
نفذ المراحل من ١ إلى ٤. في كل مرحلة، قسّم القطعة إلى ٣ قطع متطابقة واستبدل قطعة الوسط بقطعتين لهما القياس نفسه.

د ارسم مثلثًا متطابق الأضلاع. عيّن نقطة المنتصف لكل ضلع. صل بين النقاط الثلاث. كرّر ذلك عدة مرات.

٥ التقرير: ضعْ تقريرًا تبيّن فيه كيف نفذت المشروع وتجيب عن الأسئلة.

دروس الوحدة

المضلعات المتشابهة	تشابه المثلثات	التشابه في المثلثات قائمة الزاوية	التناسبات والمثلثات المتشابهة	العلاقة بين محيطي شكلين متشابهين والعلاقة بين مساحتيهما
٣-١	٣-٢	٣-٣	٣-٤	٣-٥

١١٠

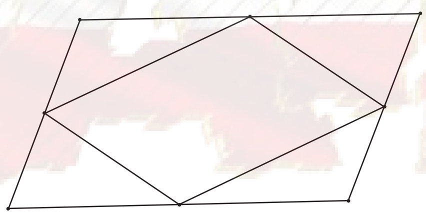
مشروع للتفكير

منذ أكثر من ٢٥ سنة بدأت هندسة الكسريات تتقدم في مجالات متعددة لتأخذ طريقها في وصف تحولات من الحياة الواقعية.

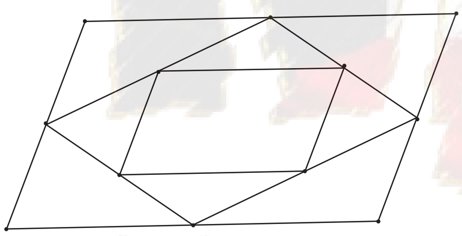
في الحقيقة لا يطلب إلى الطالب المتابعة في إيجاد الجزئيات المستخدمة في تكوين الكسريات، ولكن الغاية الأساسية هي أن يتمكن من رؤية الأشكال الغريبة والمعقدة التي يمكن أن تنتج عن شكل بسيط أثناء خضوعه لقواعد نستخدمها في التجزئة لتشكيل مراحل جديدة من الكسريات.

مثال: إذا أخذت متوازي أضلاع وبدأت بتطبيق المراحل التالية:

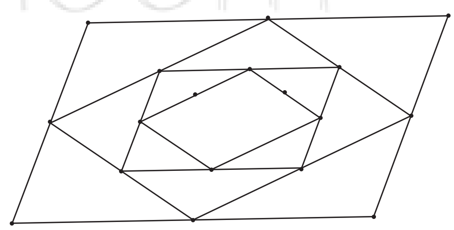
مرحلة (صفر)



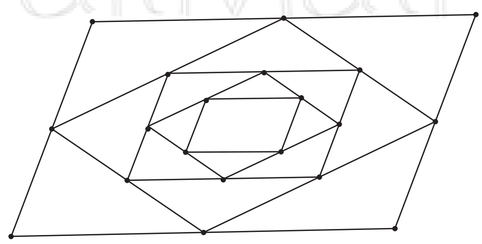
مرحلة (١)



مرحلة (٢)



مرحلة (٣)



مرحلة (٤)

في كل مرحلة من المراحل نصل منصفات أضلاع الشكل الذي حصلنا عليه من المرحلة التي سبقت.

اسأل: هل ترى نهاية لهذه المراحل؟

تتضمن هندسة الكسريات في بعض الأحيان تعقيدات هندسية بكل ما للكلمة من معنى. ولكن يمكن التغلب

على ذلك بواسطة المراحل المعتمدة على الأنماط وبالانطلاق من أشكال هندسية مثل: قطع مستقيمة، مثلثات، رباعيات، . . .
والمهم أن الطالب سوف يستكشف من خلال العمل مع زملائه وبإرشادات معلميه ظواهر في الطبيعة لها علاقة بالكسريات.


الوحدة الثالثة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)
• تعلمت نظرية فيثاغورث وتطبيقاتها في المثلثات قائمة الزاوية.
• تعرفت على منصف الزاوية والمنصف العمودي للقطعة المستقيمة والقطعة المتوسطة في المثلث والعمود المرسوم من الرأس إلى الضلع المقابل في المثلث.
• تعلمت الحلول للمعادلات من الدرجة الأولى في متغيرين.
• تعلمت الحلول للمعادلات من الدرجة الثانية في متغير.
• تعرفت حلول المتباينات.
• تعرفت النسبة والتناسب.

ماذا سوف تتعلم؟
• التشابه: مفهوم التشابه بين الأشكال الهندسية المستوية وإيجاد مقاييس رسم معين باستخدام التشابه وإيجاد النسبة الذهبية.
• حالات تشابه المثلثات والتطبيق في مواقف حياتية.
• تطبيق التشابه على المثلث قائم الزاوية والخصائص الناتجة من العمود المرسوم من رأس القائمة إلى الوتر المقابل.
• نظرية طاليس.
• خصائص منصف الزاوية الداخلي في المثلث.
• إدراك العلاقة بين محيطي شكلين متشابهين والعلاقة بين مساحتيهما.

أضف إلى معلوماتك
كان المصريون القدماء، على ما يبدو، على علم بوجود النسبة الذهبية وقد استخدموها في بناء بعض الأهرامات مثل الهرم الكبير في الجيزة (هرم خوفو).
في هرم خوفو، طول كل ارتفاع جانبي يساوي ١,٦١٨ مضروبًا في نصف طول ضلع القاعدة.

المصطلحات الأساسية
التشابه - مستطيل ذهبي - نظرية طاليس - عمود في المثلث - مساحة - مقياس رسم - نسبة ذهبية - منصف زاوية - محيط.

١١١

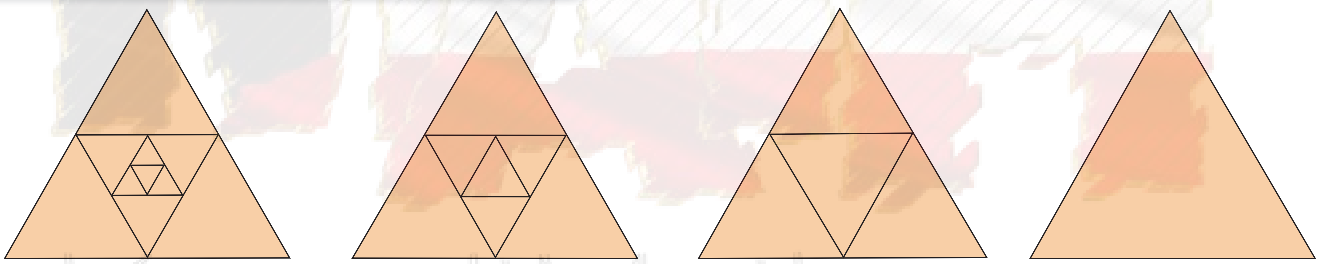
مشروع الوحدة

إرشادات توجيهية للطلاب:

١. **اللوازم:** مسطرة، حبل طويل.

٢. **أسئلة حول مراحل التحويل إلى جزئيات:**
(أ) انظر إلى المرحلة (١). كيف جرى التحول من المرحلة صفر إلى بقية المراحل.
(ب) ركز على النمط الذي يحدث بين كل مرحلة وأخرى.
(جـ) انظر إلى كلّ قطعة مستقيمة، ما الذي يحدث لها؟

إجابة الفقرة (د) من المشروع (كتاب الطالب ص: ١٠٨)



سلّم التقييم:

٤.	ينفذ الطالب مراحل التجزئة كلها بشكل كامل ويتابع النمط في كل مرحلة. يكتب تقريرًا مفصلًا وواضحًا عن الخطوات التي نفذها.
٣.	ينفذ الطالب معظم مراحل التجزئة ويتابع النمط مع أخطاء طفيفة. يكتب تقريرًا مفصلًا عن الخطوات التي نفذها.
٢.	ينفذ الطالب بعض مراحل التجزئة ويتابع النمط مع أخطاء كثيرة. يكتب تقريرًا مبهمًا وغير واضح عن الخطوات التي نفذها.
١.	معظم عناصر المشروع ناقصة وغير واضحة.

٣-١ : المضلعات المتشابهة

١ الأهداف

- يحدد مفهوم التشابه بين الأشكال الهندسية والمضلعات.
- يتعرف شروط التناسب.
- يوجد نسبة التناسب.
- يستخدم مقياس الرسم في التكبير والتصغير.
- يتعرف المستطيل الذهبي والنسبة الذهبية ويستخدمها في حل مسائل حياتية.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

تشابه – أضلاع متناظرة – زوايا متناظرة – مقياس رسم – نسبة التشابه – مستطيل ذهبي – نسبة ذهبية.

٣ الأدوات والوسائل

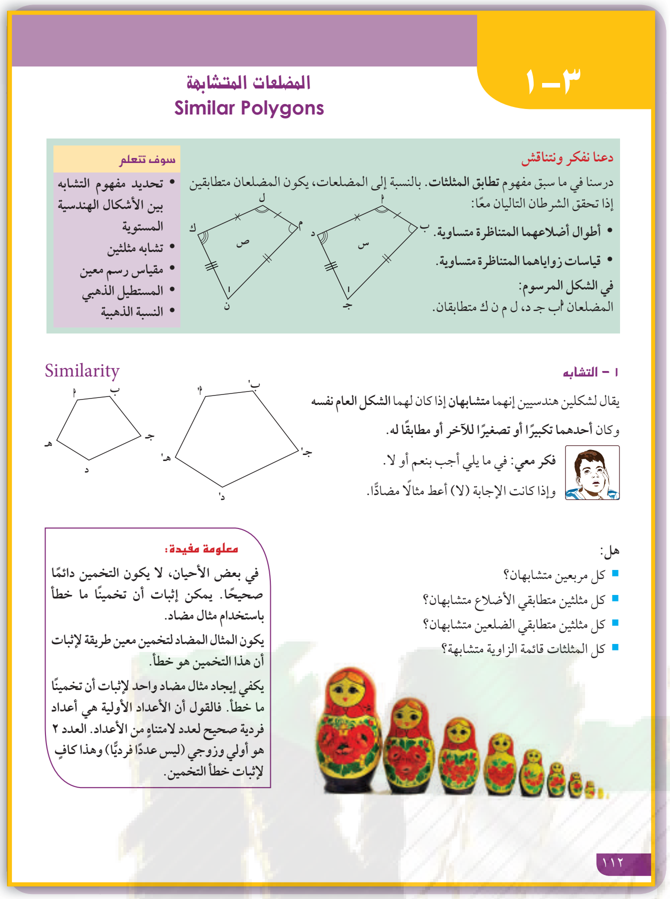
ورق رسم بياني – مسطرة مدرجة – منقلة – جهاز إسقاط – ملصقات – حاسوب.

٤ التمهيد

اسأل الطلاب عن نظريات تطابق المثلثات والنتائج التي يحصلون عليها عند تطبيق هذه النظريات. اعرض أمامهم مثلثات قائمة الزاوية واطلب إليهم إيجاد حلول لها باستخدام نظرية فيثاغورث. اسأل الطلاب ما إذا كانت أزواج الكسور التالية متكافئة:

$\frac{٣}{٨}$ وَ $\frac{١٢}{٣٢}$ ؛ $\frac{٨}{٤}$ وَ $\frac{٢}{٤}$ ؛ $\frac{٣٥}{٥٦}$ وَ $\frac{٢٠}{٣٢}$

اعرض أمامهم بعض المعادلات التربيعية واطلب منهم إذا أمكن إيجاد الحلول باستخدام المميز.


١-٣
المضلعات المتشابهة
Similar Polygons

دعنا نفكر ونتناقش

درسنا في ما سبق مفهوم تطابق المثلثات. بالنسبة إلى المضلعات، يكون المضلعان متطابقين إذا تحقق الشرطان التاليان معًا:

- أطوال أضلاعهما المتناظرة متساوية.
- قياسات زواياهما المتناظرة متساوية.

في الشكل المرسوم:
المضلعان أ ب جـ د، ل م ن ك متطابقان.

سوف تتعلم
- تحديد مفهوم التشابه بين الأشكال الهندسية المستوية
- تشابه مثلثين
- مقياس رسم معين
- المستطيل الذهبي
- النسبة الذهبية

١ - التشابه Similarity

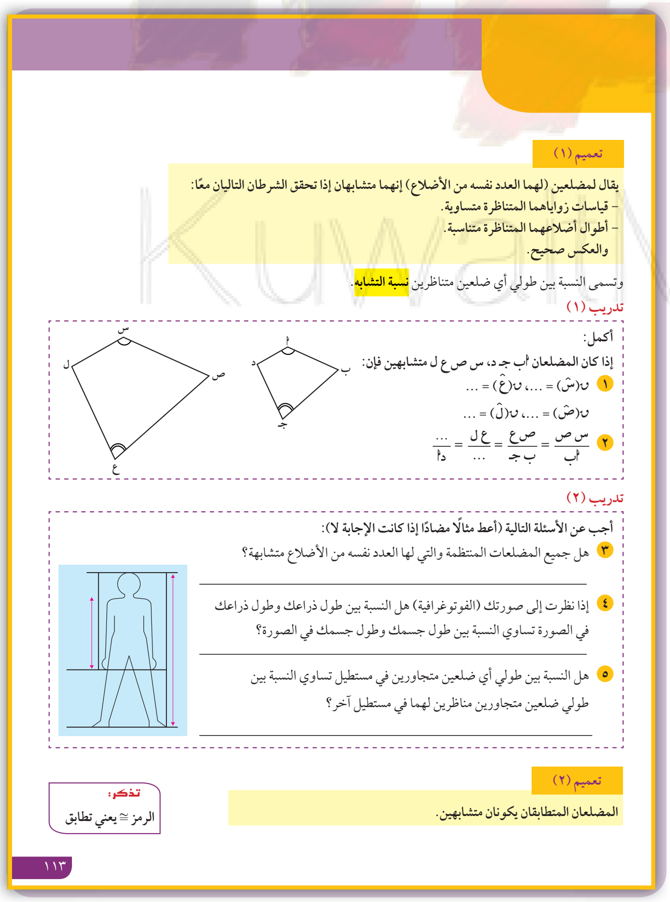
يقال لشكلين هندسيين إنهما متشابهان إذا كان لهما الشكل العام نفسه وكان أحدهما تكبيرًا أو تصغيرًا للآخر أو مطابقًا له.

فكر معي: في ما يلي أجب بنعم أو لا.
وإذا كانت الإجابة (لا) أعطِ مثالًا مضادًّا.

هل:
- كل مربعين متشابهان؟
- كل مثلثين متطابقي الأضلاع متشابهان؟
- كل مثلثين متطابقي الضلعين متشابهان؟
- كل المثلثات قائمة الزاوية متشابهة؟

معلومة مفيدة:
في بعض الأحيان، لا يكون التخمين دائمًا صحيحًا. يمكن إثبات أن تخمينًا ما خطأ باستخدام مثال مضاد.
يكون المثال المضاد لتخمين معين طريقة لإثبات أن هذا التخمين هو خطأ.
يكفي إيجاد مثال مضاد واحد لإثبات أن تخمينًا ما خطأ. فالقول أن الأعداد الأولية هي أعداد فردية صحيح لعدد لامتناهٍ من الأعداد. العدد ٢ هو أولي وزوجي (ليس عددًا فرديًا) وهذا كافٍ لإثبات خطأ التخمين.

١١٢


تعميم (١)

يقال لمضلعين (لهما العدد نفسه من الأضلاع) إنهما متشابهان إذا تحقق الشرطان التاليان معًا:
– قياسات زواياهما المتناظرة متساوية.
– أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.
والعكس صحيح.

وتسمى النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين **نسبة التشابه**.

تدريب (١)

أكمل:
إذا كان المضلعان أ ب جـ د، س ص ع ل متشابهين فإن:
١ ق(سَ) = ...، ق(عَ) = ...
ق(صَ) = ...، ق(لَ) = ...
٢ $\frac{س ص}{أ ب} = \frac{ص ع}{ب جـ} = \frac{ع ل}{...} = \frac{...}{د أ}$

تدريب (٢)

أجب عن الأسئلة التالية (أعطِ مثالًا مضادًّا إذا كانت الإجابة لا):
٣ هل جميع المضلعات المنتظمة والتي لها العدد نفسه من الأضلاع متشابهة؟
٤ إذا نظرت إلى صورتك (الفوتوغرافية) هل النسبة بين طول ذراعك وطول ذراعك في الصورة تساوي النسبة بين طول جسمك وطول جسمك في الصورة؟
٥ هل النسبة بين طولي أي ضلعين متجاورين في مستطيل تساوي النسبة بين طولي ضلعين متجاورين مناظرين لهما في مستطيل آخر؟

تعميم (٢)

المضلعان المتطابقان يكونان متشابهين.

تذكر:
الرمز ≅ يعني تطابق

١١٣

٥ التدريس

سوف يتعلم الطلاب في هذا الدرس تشابه المضلعات وكيفية إيجاد الزوايا المتناظرة والأضلاع المتناظرة، ثم كتابة نسبة التشابه.

ناقش معهم فقرات التدريب (١)، (٢) وفقرات التعميم (١)، (٢). استمع إلى إجاباتهم.

شجع الطلاب على التعامل بإيجابية مع المثال (٣) حيث إنه تطبيق حياتي مباشر لمقياس الرسم وقد يكون مقدمة مهمة لمن يريد الدخول في المستقبل في مجال الهندسة المعمارية.

ركز على الربط بين مقياس الرسم والنسبة الذهبية لأهمية ذلك في إبراز الأبعاد الفنية في الرسوم والبناء.

يعبّر **المثال (٥)** بوضوح عن أهمية النسبة الذهبية التي اعتمدها كبار الرسامين في لوحاتهم الخالدة.

اطلب إلى الطلاب أن يرسموا على ورقة مربعات مستطيلًا ؟ب جـ د حيث إحداثيات رؤوسه هي:

؟(−٢، −٢)، ب(٦، −٢)، جـ(٦، ٤)، د(−٢، ٤).

ثم دعهم يرسمون صورته هـ ل ز حـ، حيث هـ(−١، −١) وعامل مقياس الرسم $\frac{١}{٢}$.

أوجد إحداثيات ل، ز، حـ.

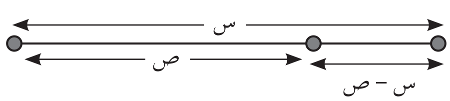
أضف إلى معلوماتك

معلومات عن النسبة الذهبية والمستطيل الذهبي.

يعبّر عن النسبة الذهبية بالحرف اليوناني φ (phi في) تكريمًا للنحات اليوناني فيدياس (٤٩٠–٤٣٠ ق.م) الذي هندس البار تانون في أثينا النسبة الذهبية φ هي الجذر الموجب للمعادلة $\text{س}^{٢} - \text{س} - ١ = ٠$

$$\varphi = \frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}.$$

التقسيم الذهبي



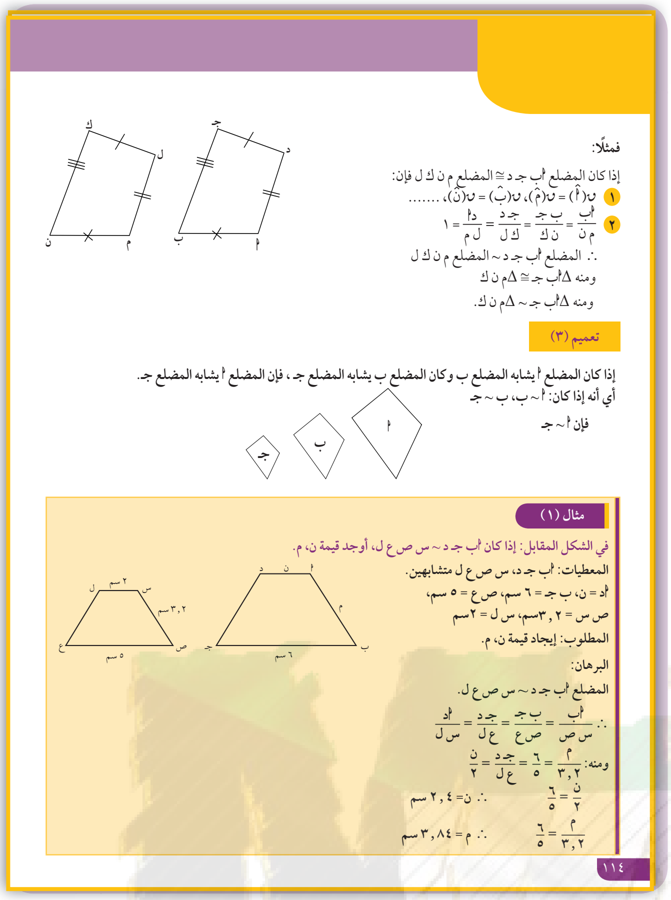
(١)

$$\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{ص}}{\text{س} - \text{ص}}$$

$$\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^{٢} = \left(\frac{\text{ص}}{\text{س} - \text{ص}}\right)^{٢} = \frac{\text{ص}^{٢}}{(\text{س} - \text{ص})^{٢}} = \frac{\text{س}(\text{س} - \text{ص})}{(\text{س} - \text{ص})^{٢}}$$

$$= \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{س} - \text{ص}}$$

من (١): $\text{ص}^{٢} = \text{س}(\text{س} - \text{ص})$



فمثلًا:

إذا كان المضلع ؟ب جـ د ≅ المضلع م ن ك ل فإن:

١ ق(؟̂) = ق(م̂)، ق(ب̂) = ق(ن̂)، ....

٢ $\frac{\text{؟ب}}{\text{م ن}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ن ك}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{ك ل}} = \frac{\text{د؟}}{\text{ل م}} = ١$

∴ المضلع ؟ب جـ د ~ المضلع م ن ك ل

ومنه Δ؟ب جـ ≅ Δم ن ك

ومنه Δ؟ب جـ ~ Δم ن ك.

تعميم (٣)

إذا كان المضلع ؟ يشابه المضلع ب وكان المضلع ب يشابه المضلع جـ، فإن المضلع ؟ يشابه المضلع جـ.

أي أنه إذا كان: ؟ ~ ب، ب ~ جـ

فإن ؟ ~ جـ

مثال (١)

في الشكل المقابل: إذا كان ؟ب جـ د ~ س ص ع ل، أوجد قيمة ن، م.

المعطيات: ؟ب جـ د، س ص ع ل متشابهين.

؟د = ن، ب جـ = ٦ سم، ص ع = ٥ سم،

ص س = ٣,٢ سم، س ل = ٢ سم

المطلوب: إيجاد قيمة ن، م.

البرهان:

المضلع ؟ب جـ د ~ س ص ع ل.

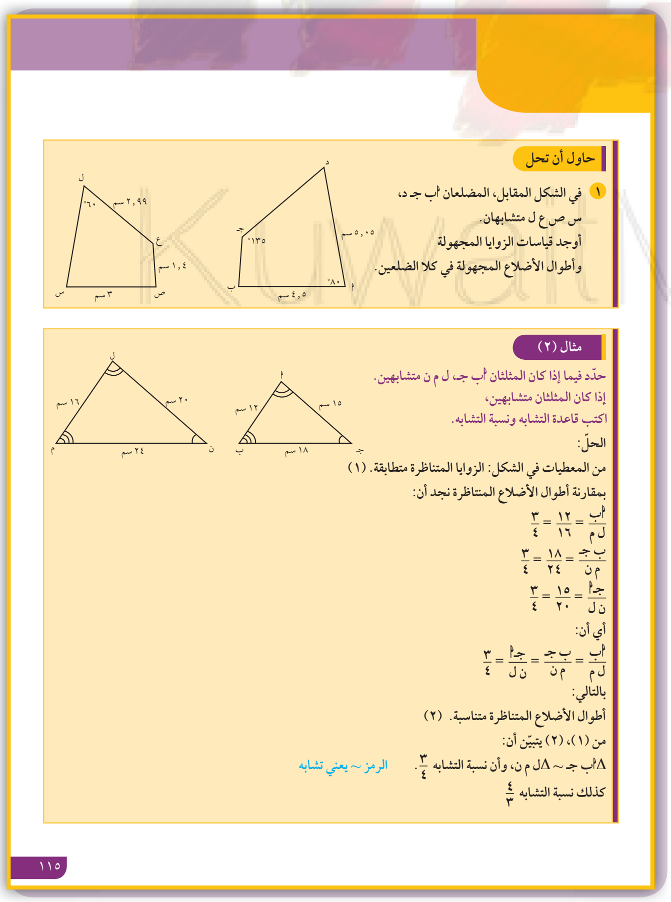
∴ $\frac{\text{؟ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{؟د}}{\text{س ل}}$

ومنه: $\frac{\text{م}}{٣,٢} = \frac{٦}{٥} = \frac{\text{جـ د}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{ن}}{٢}$

$\frac{\text{ن}}{٢} = \frac{٦}{٥}$ ∴ ن = ٢,٤ سم

$\frac{\text{م}}{٣,٢} = \frac{٦}{٥}$ ∴ م = ٣,٨٤ سم

١١٤



حاول أن تحل

١ في الشكل المقابل، المضلعان ؟ب جـ د، س ص ع ل متشابهان. أوجد قياسات الزوايا المجهولة وأطوال الأضلاع المجهولة في كلا الضلعين.

مثال (٢)

حدّد فيما إذا كان المثلثان ؟ب جـ، ل م ن متشابهين.

إذا كان المثلثان متشابهين،

اكتب قاعدة التشابه ونسبة التشابه.

الحلّ:

من المعطيات في الشكل: الزوايا المتناظرة متطابقة. (١)

بمقارنة أطوال الأضلاع المتناظرة نجد أن:

$\frac{\text{؟ب}}{\text{ل م}} = \frac{١٢}{١٦} = \frac{٣}{٤}$

$\frac{\text{ب جـ}}{\text{م ن}} = \frac{١٨}{٢٤} = \frac{٣}{٤}$

$\frac{\text{جـ؟}}{\text{ن ل}} = \frac{١٥}{٢٠} = \frac{٣}{٤}$

أي أن:

$\frac{\text{؟ب}}{\text{ل م}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{م ن}} = \frac{\text{جـ؟}}{\text{ن ل}} = \frac{٣}{٤}$

بالتالي:

أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة. (٢)

من (١)، (٢) يتبيّن أن:

Δ؟ب جـ ~ Δل م ن، وأن نسبة التشابه $\frac{٣}{٤}$.

الرمز ~ يعني تشابه

كذلك نسبة التشابه $\frac{٤}{٣}$

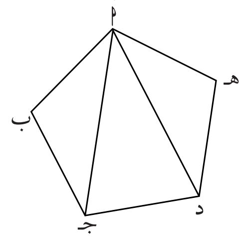
١١٥

$\frac{س}{ص} + ١ = \frac{س}{س - ص} + ١ = \frac{ص + س - ص}{س - ص} = \frac{س}{س - ص}$

$\therefore \left(\frac{س}{ص}\right)^٢ = \frac{س}{ص} + ١$ أي $\left(\frac{س}{ص}\right)^٢ - \frac{س}{ص} - ١ = ٠$

وهي المعادلة من الدرجة الثانية التي جذرها الموجب φ

$\therefore \varphi = \frac{س}{ص}$



يسمى المضلع الخماسي المنتظم بالخماسي الذهبي، لأن $\frac{أد}{أهـ} = \varphi$.

كذلك المثلثان متطابقا الضلعين أ جـ د، أ د هـ هما أيضًا ذهبيان لأن:

النسبة بين أضلاعهما = النسبة الذهبية = $\frac{أد}{أجـ} = \varphi$ ، $\frac{أد}{أهـ} = \varphi$.

تقترب قيمة المتتالية $١ + \frac{١}{١}$ ، ٢ ، $١ + \frac{١}{١ + \frac{١}{١}}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ،

$١ + \frac{١}{١ + \frac{١}{١ + \frac{١}{١}}}$ ، $\frac{٥}{٣}$ ، $١ + \frac{١}{١ + \frac{١}{١ + \frac{١}{١ + \frac{١}{١}}}}$ ، $\frac{٨}{٥}$ ، ... ، $\frac{١٣}{٨}$

من النسبة الذهبية.

٦ الربط

إذا أردت وضع خريطة لدولة الكويت بمقياس رسم $\frac{١}{٥٠\,٠٠٠}$ (كل ٥٠ ٠٠٠ متر على الأرض تعادل ١ سم على الخريطة). ما المسافة على الخريطة بين العاصمة الكويت والأحمدي علمًا أنها تساوي ٦٠ كم على الأرض؟

٧ أخطاء متوقعة وطرق معالجتها

قد يجد الطلاب صعوبة في الربط بين الأضلاع المتناسبة والزوايا متساوية القياس في الأشكال المتشابهة.

وضّح لهم أنه في الأشكال المتشابهة، الزوايا متساوية القياس هي مقابلة للأضلاع المتناسبة.

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يحاولون الإجابة عن فقرات «حاول أن تحل».

ناقش معهم النتائج وقدم لهم إرشادات تساعد على تصويب أعمالهم عند الضرورة.


حاول أن تحل

٢ المثلثان أب جـ، دهـ و فيهما:

$ق(\hat{أ}) = ق(\hat{د})$ ، $ق(\hat{ب}) = ق(\hat{هـ})$ ، $ق(\hat{جـ}) = ق(\hat{و})$

أب = ١٢ سم، ب جـ = ١٤ سم، أجـ = ١٦ سم، دهـ = ١٨ سم، هـ و = ٢١ سم، د و = ٢٤ سم.

هل يمكنك استنتاج أن المثلثين متشابهان؟ وضّح إجابتك.

ملاحظة مهمة: إن نسبة التشابه تقارن بين قياسين بالوحدات نفسها، فمثلًا أطوال أضلاع المثلثين في المثال (٢) هي بالسنتيمتر.

يستخدم التناسب في تطبيقات حياتية، ومن أهمها **مقياس الرسم** الذي يستخدم في عمل الخرائط والرسوم الهندسية بمقاييس مصغرة للأشكال الحقيقية، وذلك بنسبة ثابتة بين الأبعاد في الرسم والأبعاد في الحقيقة.

مقياس الرسم = $\frac{\text{الطول في الرسم}}{\text{الطول الحقيقي}}$

وإذا كانت نسبة التشابه تقارن بين أبعاد لها الوحدة نفسها، فإن مقياس الرسم يمكن أن يكون بوحدات مختلفة، فمثلًا يمكن أن يكون ١ سم لكل ١٠٠ م أو ١ سم لكل كيلومتر وهكذا.

مثال (٣)

ما الأبعاد الحقيقية لغرفة النوم المبينة في الرسم الهندسي لإحدى الشقق السكنية؟

الحلّ:

استخدم المسطرة لقياس الأبعاد في الشكل المرسوم، وبفرض أن:

طول غرفة النوم في الرسم = ٢,٥ سم، عرض الغرفة في الرسم = ١,٥ سم.

لإيجاد الطول الحقيقي لغرفة النوم: $\frac{\text{الطول في الرسم}}{\text{الطول الحقيقي}} = \frac{١}{٢٠٠}$

$\frac{٢,٥}{س} = \frac{١}{٢٠٠}$

س = ٢,٥ × ٢٠٠ باستخدام الضرب التقاطعي

س = ٥٠٠ سم، س = ٥ م. طول غرفة النوم ٥ أمتار.

ولإيجاد عرض الغرفة الحقيقي:

$\frac{١,٥}{ص} = \frac{١}{٢٠٠}$

ص = ١,٥ × ٢٠٠ = ٣٠٠ سم = ٣ م. عرض الغرفة ٣ أمتار.

حاول أن تحل

٣ احسب الأبعاد الحقيقية لكل من غرفة الجلوس والشقة كلها بحسب القياسات المبينة في الشكل السابق.

١١٦


المستطيل الذهبي Golden Rectangle

هو مستطيل يمكن تقسيمه إلى جزئين، أحدهما مربع والآخر مستطيل.

والمستطيل الناتج يكون مستطيلًا ذهبيًّا آخر ويكون مشابهًا للمستطيل الأصلي.

يبيّن الشكل المقابل نمطًا من المستطيلات الذهبية.

النسبة الذهبية Golden Ratio

في كل مستطيل ذهبي، نسبة طول الضلع الأكبر إلى طول الضلع الأصغر تسمى النسبة الذهبية وتساوي $\frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$: ١ أي حوالى ١,٦١٨:١.

مثال (٤)

استخدم المستطيل الذهبي المقابل والتناسب لإيجاد النسبة الذهبية.

الحل:

$\because$ المستطيل أ هو مستطيل ذهبي وتم تقسيمه إلى مربع ومستطيل ب.

$\therefore$ المستطيل ب مستطيل ذهبي

$\therefore$ المستطيل أ $\sim$ المستطيل ب.

$\therefore \frac{\text{طول المستطيل أ}}{\text{عرض المستطيل أ}} = \frac{\text{طول المستطيل ب}}{\text{عرض المستطيل ب}}$ = النسبة الذهبية

ليكن س = طول المستطيل أ.

س − ١ = عرض المستطيل ب.

نحصل على $\frac{س}{١} = \frac{١}{س - ١}$

$\therefore س^٢ - س = ١$ باستخدام الضرب التقاطعي

$س^٢ - س - ١ = ٠$

نستخدم القانون لحل المعادلة التربيعية.

المميز = $ب^٢ - ٤أجـ = ٥$

$\therefore س = \frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$ أو $س = \frac{١ - \sqrt{٥}}{٢}$ مرفوضة

$س \simeq ١,٦١٨$ باستخدام الآلة الحاسبة

أي أن النسبة الذهبية هي $\frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$: ١

أو حوالى ١,٦١٨ : ١

معلومة رياضية: في أي مستطيل، البعد الأقصر يسمى العرض والبعد الأطول يسمى الطول.

هل تعلم: العدد الذهبي يساوي ١,٦١٨

١١٧

حاول أن تحل

٤ قطعة نقدية ورقية مستطيلة الشكل أبعادها ١٠,٥ سم، ٦,٥ سم.
هل نسبة طولها إلى عرضها تساوي النسبة الذهبية؟

التحدي: إذا كان العدد الذهبي س هو الجذر الموجب للمعادلة التربيعية $\text{س}^2 = \text{س} + 1$
فأثبت أن: $\text{س} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$

استخدم الرسامون كثيرًا المستطيل الذهبي في أعمالهم.

لوحة موناليزا

مثال (٥)

يخطط أحد الفنانين لرسم لوحة مستطيلة الشكل طولها ٦٠ سم. كم يجب أن يكون عرض اللوحة ليكون المستطيل ذهبيًّا؟ (علمًا بأن النسبة الذهبية ≃ ١,٦١٨ : ١)

الحلّ:

حتى تكون اللوحة على شكل مستطيل ذهبي يجب أن يكون:

$\frac{\text{طول اللوحة}}{\text{عرض اللوحة}} = \frac{1{,}618}{1}$

ليكن هـ عرض اللوحة.

$\frac{60}{\text{هـ}} \simeq \frac{1{,}618}{1}$ كتابة التناسب

$1{,}618\,\text{هـ} \simeq 60$ الضرب التقاطعي

$\text{هـ} \simeq \frac{60}{1{,}618}$

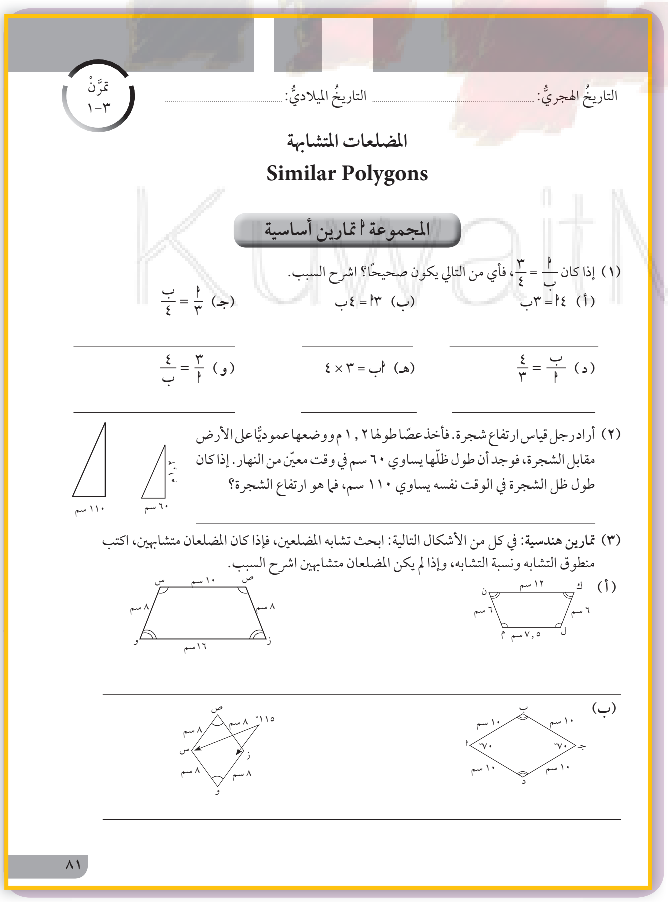
$\text{هـ} \simeq 37$

يجب أن يكون عرض اللوحة حوالى ٣٧ سم.

حاول أن تحل

٥ إذا كان عرض أحد المستطيلات الذهبية ٦٠ سم، فكم يجب أن يكون طوله؟

١١٨



التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ ١-٣

المضلعات المتشابهة

Similar Polygons

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{3}{4}$، فأي من التالي يكون صحيحًا؟ اشرح السبب.

(أ) ٤أ = ٣ب (ب) ٣أ = ٤ب (ج) $\frac{\text{أ}}{3} = \frac{\text{ب}}{4}$

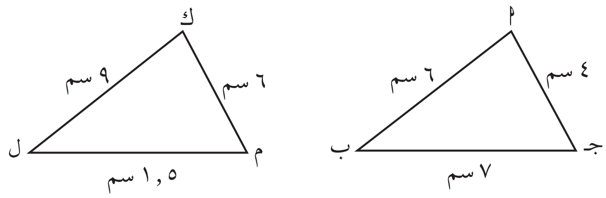
(د) $\frac{\text{ب}}{\text{أ}} = \frac{4}{3}$ (هـ) أب = ٣ × ٤ (و) $\frac{3}{\text{أ}} = \frac{4}{\text{ب}}$

(٢) أراد رجل قياس ارتفاع شجرة. فأخذ عصًا طولها ١,٢ م ووضعها عموديًّا على الأرض مقابل الشجرة، فوجد أن طول ظلّها يساوي ٦٠ سم في وقت معيّن من النهار. إذا كان طول ظل الشجرة في الوقت نفسه يساوي ١١٠ سم، فما هو ارتفاع الشجرة؟

(٣) تمارين هندسية: في كل من الأشكال التالية: ابحث تشابه المضلعين، فإذا كان المضلعان متشابهين، اكتب منطوق التشابه ونسبة التشابه، وإذا لم يكن المضلعان متشابهين اشرح السبب.

(أ) (ب)

٨١



اختبار سريع

١ حدد في ما إذا كان المثلثان أب جـ، ك ل م متشابهين. إذا كان المثلثان متشابهين اكتب قاعدة التشابه ونسبة التشابه.

نعم، $\frac{\text{أجـ}}{\text{كم}} = \frac{\text{أب}}{\text{كل}} = \frac{\text{جـب}}{\text{مل}} = \frac{2}{3}$ أو $\frac{3}{2}$

٩ إجابات وحلول

«تدريب»

١ (١) ق(سَ) = ق(أ)، ق(عَ) = ق(جَ).

ق(صَ) = ق(بَ)، ق(لَ) = ق(دَ).

٢ (٣) نعم.

(٤) تتنوع الإجابات.

(٥) كلا، إلا إذا كان المستطيلان متشابهين.

«حاول أن تحل»

١ ق(بَ) = ٨٥°، ق(دَ) = ٦٠°، ق(صَ) = ٨٥°

ق(سَ) = ٨٠°، ق(عَ) = ١٣٥°.

ب جـ = ٢,١ سم، جـ د = ٤,٤٨٥ سم،

س ل = ٣,٣٦ سم

٢ نعم، قياسات الزوايا المتناظرة متساوية وقياسات الأضلاع المتناظرة متناسبة. نسبة التشابه $\frac{2}{3}$ أو $\frac{3}{2}$.

٣ غرفة الجلوس: ٣ م × ٦ م. الشقة: ٦ م × ٨ م

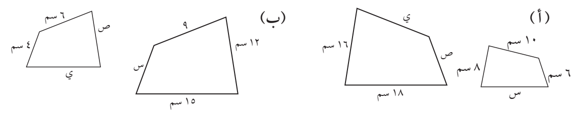
٤ كلا، نسبة الطول إلى العرض تساوي ١,٦١٥ ≠ ١,٦١٨.

٥ حوالى ٩٧ سم.

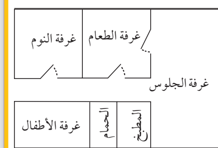
(جـ)

(٤) احسب س، ص، ي في الحالات التالية علمًا بأن المضلعان متشابهان:

(أ) (ب)



(٥) أوجد الأبعاد الحقيقية لكل من الغرف التالية، مستخدمًا الشكل أدناه، علمًا بأن كل سنتيمتر واحد على الرسم يمثل ٤ ,٢ م. (استخدم المسطرة)



(أ) غرفة النوم

(ب) غرفة الطعام

(جـ) غرفة الجلوس

(د) المطبخ

(هـ) الحمام

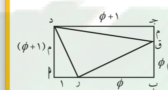
(و) غرفة الأطفال

(٦) قاست لولوة أبعاد لوحة فنية معلقة في صالة الاستقبال في منزلها فتبيّن لها أن النسبة بين طول اللوحة وعرضها تساوي النسبة الذهبية.

إذا كان عرض اللوحة يساوي ٧٠ سم، فأوجد طول هذه اللوحة :

(٧) أب جـ د مستطيل أبعاده ١ + ϕ ، م (١ + ϕ) بالسم. حيث ϕ هي النسبة الذهبية وتحقق المعادلة: $\phi = \frac{\phi+1}{\phi}$ ،
م عدد صحيح نسبي بين الصفر والواحد.

(أ) أوجد مساحة المثلثات ق جـ د، ق ب ر، د أ ر.



(ب) أثبت أن المساحات الثلاث متساوية.

(٨) عام ٢٠٠٤ في مهرجان بورتسموث في إنكلترا، أطلق فريق كويتي طائرة ورقية على شكل علم الكويت. بلغ طول الطائرة ٤٢ مترًا وعرضها ٢٥ مترًا. هل المستطيل الذي تكونه الطائرة هو مستطيل ذهبي؟

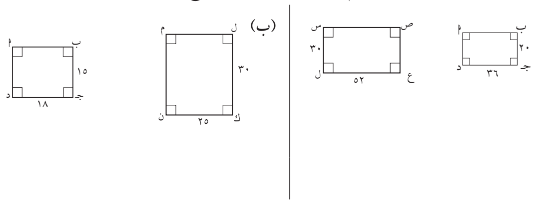
٨٢

المجموعة ب تمارين تعزيزية

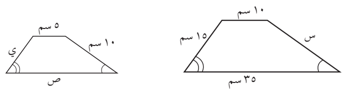
١) من الأبراج الشهيرة في العالم برج بيزا في إيطاليا، وهو برج مائل يبلغ طوله حوالى ٥٤ مترًا، ويبلغ ارتفاع صورته ٨ سم على بطاقة تذكارية. أوجد نسبة التشابه بين الطول في الصورة والطول الحقيقي.

٢) **تمارين هندسية**: في كل من الأشكال التالية: ابحث تشابه المضلعين، فإذا كان المضلعان متشابهين، اكتب منطوق التشابه ونسبة التشابه، وإذا لم يكن المضلعان متشابهين اشرح السبب.

(أ) (ب)



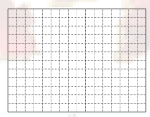
٣) أُحسب س، ص، ي في الحالات التالية علمًا بأن المضلعين متشابهان:



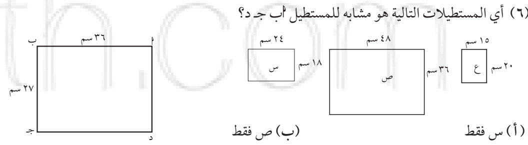
٤) أراد محلّ تصوير تكبير بطاقة على شكل مستطيل ٤ سم × ٨ سم بحيث يكون أقصى طول لها ٣٦ سم. ما أكبر عرض للبطاقة المكبرة؟

٨٣

(٥) أبعاد ملعب كرة السلة هي ٢٦٠٠ سم، ١٥٠٠ سم.
اختر مقياس رسم، وارسم شكلًا يمثل ملعب كرة السلة بمقياس الرسم الذي اخترته.



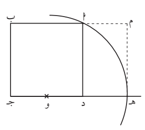
(٦) أي المستطيلات التالية هو مشابه للمستطيل أب جـ د؟



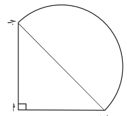
(أ) س فقط (ب) ص فقط

(جـ) س، ص فقط (د) س، ص، ع

(٧) أب جـ د مربع طول ضلعه ١ سم. و منتصف $\overline{دجـ}$. الدائرة التي مركزها و المارة بالنقطة أ تقطع $\overleftarrow{جـد}$ في هـ. أكمل المستطيل ب جـ هـ م.
أثبت أن ب جـ هـ م مستطيل ذهبي.



(٨) أب جـ مثلث قائم الزاوية في أ متطابق الضلعين. هل نسبة مساحة نصف الدائرة إلى مساحة المثلث تساوي النسبة الذهبية؟ وضح ذلك.



٨٤

٣-٢: تشابه المثلثات

٢-٣

تشابه المثلثات

Similar Triangles

دعنا نفكر ونتناقش

في المثلث أ ب جـ: هـ، د، و منتصفات $\overline{أب}$، $\overline{أجـ}$، $\overline{ب جـ}$ على الترتيب.

١ هل قياسات زوايا المثلثين أهـ د، أ ب جـ متساوية؟

٢ هل أطوال أضلاع المثلثين أهـ د، أ ب جـ متناسبة؟

إذا كانت إجابتك نعم، فما قيمة هذه النسبة.

٣ برهن أن المثلثات أدهـ، دجـو، هـوب، هـود متطابقة.

٤ هل برأيك، المثلث أهـ د هو تصغير للمثلث أ ب جـ؟ وهل هما متشابهان؟

سوف تتعلم

• حالات تشابه المثلثات

سبق أن تعلمت عدة طرائق تبيّن بها تطابق مثلثين.

في أي مثلثين متشابهين تكون قياسات الزوايا المتناظرة متساوية، والنسب بين طولي كل ضلعين متناظرين متساوية؟

النظريات التالية تبين أن توفر أحد الشرطين يكفي لإثبات أن المثلثين متشابهان حيث إن الشرط الآخر سيكون محققًا أيضًا.

نظرية (١)

يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاويتان في أحد المثلثين مع زاويتين في المثلث الآخر.

Δأ ب جـ ~ Δل م ن

مثال (١)

في الشكل المقابل أ ب جـ، ع ل د مثلثان، فإذا كان:

ق(ب) = ٥٠°، ق(أ) = ٨٥°

ق(ل) = ٤٥°، ق(د) = ٥٠°

أثبت تشابه المثلثين أ ب جـ، ع د ل.

المعطيات:

ق(ب) = ٥٠°، ق(أ) = ٨٥°

ق(ل) = ٤٥°، ق(د) = ٥٠°

١١٩

المطلوب:

إثبات تشابه المثلثين أ ب جـ، ع د ل.

البرهان: في المثلثين أ ب جـ، ع د ل:

ق(ب) = ق(د) = ٥٠° (معطى) (١)

ق(جـ) = ١٨٠° − (٥٠° + ٨٥°)

= ١٨٠° − ١٣٥° = ٤٥° مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

∴ ق(جـ) = ق(ل) (٢)

من (١)، (٢)، نستنتج أن المثلثين أ ب جـ، ع د ل متشابهان أي أن Δأ ب جـ ~ Δع د ل.

من الاستخدامات:

يستخدم منفذو الحفر على المفروشات الخشبية التشابه بين المثلثات لوضع تصاميم لأعمالهم قبل تنفيذها.

حاول أن تحل

١ المثلث أ ب جـ قائم الزاوية أ، ق(ب) = ٥٥°.

المثلث م ل ح قائم الزاوية م، ق(ل) = ٣٥°.

أثبت تشابه المثلثين أ ب جـ، م ح ل.

مثال (٢)

أثبت أن المثلثين في الشكل المقابل متشابهان. اكتب عبارة التشابه.

الحل

المعطيات:

Δأ ب جـ، Δد هـ جـ فيهما:

ق(أ) = ٧٠°، ق(هـ) = ٧٠°

أجـب، هـ جـ د متقابلتان بالرأس

المطلوب:

إثبات تشابه المثلثين أ ب جـ، هـ د جـ، وكتابة عبارة التشابه.

البرهان: المثلثان أ ب جـ، هـ د جـ فيهما:

ق(أجـب) = ق(هـ جـ د) زاويتان متقابلتان بالرأس

ق(جـ أ ب) = ق(جـ هـ د) معطى

∴ Δأ ب جـ ~ Δ هـ د جـ (المثلثان متشابهان) نظرية (١)

حاول أن تحل

٢ في الشكل المقابل، أثبت تشابه المثلثين أ ب جـ، د هـ و.

١٢٠

١ الأهداف

- يتعرف المثلثات المتشابهة.
- يتعرف حالات تشابه مثلثين:

تطابق بين زاويتين في أحد المثلثين وزاويتين في المثلث الآخر.

تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة في المثلثين.

تطابق بين زاوية في مثلث وزاوية في المثلث الآخر وتناسب طولي الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين.

- يربط بين الأضلاع المتناسبة والزوايا متساوية القياس.
- يستخدم القياس غير المباشر لحل مسائل حياتية.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

القياس غير المباشر – مثلثات متطابقة – مثلثات متشابهة.

٣ الأدوات والوسائل

ورق رسم بياني – مسطرة مدرجة – منقلة – آلة حاسبة علمية – جهاز إسقاط – حاسوب.

٤ التمهيد

اسأل الطلاب:

(أ) كيف تتشابه المضلعات؟

(ب) ما الأضلاع المتناسبة، وما نسبة التشابه؟ وأين نجدها؟

(جـ) كيف نربط بين الأضلاع المتناسبة والزوايا متساوية القياس في المضلعات المتشابهة؟

(د) ما حالات تطابق المثلثات مختلفة الأضلاع؟

٥ التدريس

- تشابه المثلثات مهم بحيث يجب التركيز على كل نظرية يستطيع استخدامها الطالب لإيجاد تشابه مثلثين، ومن ثم استنتاج الأضلاع المتناسبة والزوايا متساوية القياس

والانتقال إلى التطبيقات الحياتية باستخدام القياس غير المباشر وهو الأهم في المثلثات المتشابهة.

- **المثال (٤):** يساعد كثيرًا على فهم القياس غير المباشر في مواقف حياتية مشابهة في هذا المثال، ركز مع الطلاب على الربط بين العلوم الفيزيائية والرياضيات.
- **المثال (٥):** يبيّن كيف يتم تطبيق التشابه على دعم حلبة المنحدر في لعبة التزحلق.

٦ الربط

يوضح المثال (٤) العلاقة بين قياس زاوية السقوط وقياس زاوية الانعكاس في المرآة المستوية وتشابه المثلثات. المثالان (٧) و(١١) يربطان بين الواقع والتشابه بين المثلثات.

٧ أخطاء متوقعة وطرق معالجتها

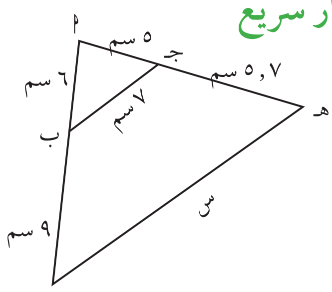
قد يخطئ الطلاب في كتابة الأضلاع المتناسبة للمثلثين المتشابهين.

ذكر الطلاب بأن الأضلاع المتناسبة يجب أن تحصر الزوايا متساوية القياس في المثلثين المتشابهين.

٨ التقييم

راقب الطلاب وهم يحلون فقرات «حاول أن تحل»، ساعدهم على تخطي بعض الصعوبات التي تواجههم وخاصة في المواقف الحياتية كما في «حاول أن تحل (٤)».

اختبار سريع



١ أثبت تشابه المثلثين أب جـ، أد هـ. $\frac{أب}{أد} = \frac{أجـ}{أهـ} = \frac{٢}{٣}$

٢ أكتب عبارة التشابه. Δأب جـ ~ Δأد هـ .

أ̂ زاوية مشتركة.

٣ أوجد قيمة س. ١٧, ٥ سم

مثال (٣)

أثبت أن المثلثين أب د ، أجـ ب متشابهان. اكتب عبارة التشابه.

المعطيات:

في الشكل:

ق(جـب̂ د) = ٧٠°، ق(أد̂ب) = ١١٠°، ق(ب أ̂ د) = ٣٠°.

المطلوب:

إثبات تشابه المثلثين أب د، أجـ ب.

البرهان:

المثلثان أب د، أجـ ب فيهما:

ق(ب أ̂ د) = ق(ب أ̂ جـ) = ٣٠° زاوية مشتركة

ق(أب̂ د) = ١٨٠° − (١١٠° + ٣٠°) = ٤٠° مجموع زوايا المثلث أب د = ١٨٠°

ق(أب̂ جـ) = ٤٠° + ٧٠° = ١١٠°

∴ ق(أب̂ جـ) = ق(أد̂ب)

المثلثان متشابهان (تطابق زاويتين)

Δأب د ~ Δأجـ ب.

حاول أن تحل

٣ في الشكل المقابل، أثبت تشابه المثلثين أب جـ، أهـ د، واكتب عبارة التشابه.

القياس غير المباشر Indirect Measurement

في بعض الحالات، يصعب قياس مسافة أو ارتفاع معين مباشرة. في هذه الحالة، يمكنك استخدام تشابه المثلثات لإيجاد هذا القياس بطريقة غير مباشرة.

إحدى الطرائق تستخدم خاصية انعكاس الضوء في المرآة المستوية.

فكما تعرف في الفيزياء، إن **قياس زاوية السقوط يساوي قياس زاوية الانعكاس.**

تذكر:

قياس زاوية السقوط = قياس زاوية الانعكاس

زاوية السقوط
زاوية الانعكاس
الشعاع الساقط
الشعاع المنعكس
المرآة

١٢١

مثال (٤)

أراد سعيد أن يعرف ارتفاع المياه. وضع مرآة على مسافة ١٥ مترًا من موقع اندفاع المياه، ثم تحرك إلى الخلف حتى استطاع أن يرى أعلى نقطة بلغتها المياه في وسط المرآة. عند هذه النقطة كان سعيد قد تحرك بعيدًا عن المرآة بمسافة ٢, ٥ متر، وكانت عيناه على ارتفاع ١, ٥ متر فوق الأرض. إذا كانت قدماه والمرآة وموقع اندفاع المياه على استقامة واحدة، فأوجد ارتفاع المياه.

جـ
س متر
ل
١, ٥ متر
ك
٢, ٥ متر
م
١٥ مترًا
ب

المعطيات:

م ب = ١٥ مترًا ، م ك = ٢, ٥ متر ، ك ل = ١, ٥ متر

قدما سعيد، المرآة، موقع اندفاع المياه على استقامة واحدة.

المطلوب: معرفة ارتفاع المياه.

البرهان:

المثلثان م ب جـ ، م ك ل فيهما:

ق(ب م̂ جـ) = ق(ك م̂ ل) زاوية الانعكاس = زاوية السقوط

ق(ب̂) = ق(ك̂) = ٩٠°

المثلثان م ب جـ ، م ك ل متشابهان (تطابق زاويتين)

∴ $\frac{ب جـ}{ك ل} = \frac{م ب}{م ك}$ تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة

$\frac{س}{١,٥} = \frac{١٥}{٢,٥}$

٢, ٥س = ١, ٥ × ١٥

س = $\frac{١,٥ \times ١٥}{٢,٥}$ = ٩

يبلغ ارتفاع المياه ٩ أمتار.

حاول أن تحل

٤ أ لإيجاد ارتفاع برج، وضع سالم مرآة مستوية على الأرض على بعد ١٢ مترًا من قاعدة البرج. وعندما كان سالم على بعد ١, ٢ متر من المرآة استطاع أن يرى قمة البرج. إذا كان ارتفاع عين سالم عن الأرض ١, ٨ متر في هذه النقطة، فكم يكون ارتفاع البرج؟ (علمًا بأن قاعدة البرج وقدمي سالم والمرآة على استقامة واحدة).

١٢٢

٩ إجابات وحلول

ملاحظة: على المعلم اتباع طريقة الحل الموجودة في كتاب الطالب.

«حاول أن تحل»

١ ق(أ̂) = ق(م̂) = ٩٠°

ق(ب̂) = ق(ح̂) = ٥٥°.

٢ ق(ب̂) = ق(هـ̂) = ٩٠°.

ق(و̂) = ق(ج̂) التوازي والتبادل.

٣ ق(أ̂) = ق(أ̂) زاوية مشتركة.

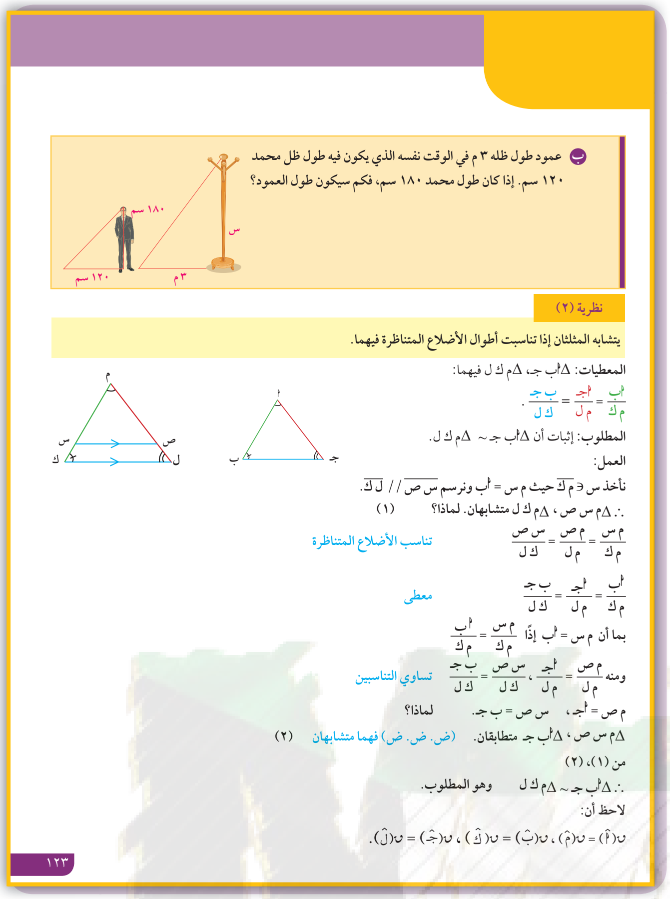
ق(ب̂) = ق(هـ̂) = ٩٠°.

$\frac{\text{أد}}{\text{أج}} = \frac{\text{دهـ}}{\text{جب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أب}}$

٤ (أ) ١٨ مترًا على الهامش.

(ب) ٤,٥ أمتار.

ملاحظة: على المعلم الانتباه أن الظل الموجود ناتج من أشعة الشمس المتوازية.



ب عمود طول ظله ٣ م في الوقت نفسه الذي يكون فيه طول ظل محمد ١٢٠ سم. إذا كان طول محمد ١٨٠ سم، فكم سيكون طول العمود؟

نظرية (٢)

يتشابه المثلثان إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فيهما.

المعطيات: △أب جـ، △م ك ل فيهما:

$\frac{\text{أب}}{\text{م ك}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{م ل}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ك ل}}$.

المطلوب: إثبات أن △أب جـ ~ △م ك ل.

العمل:

نأخذ س ∋ م ك حيث م س = أب ونرسم س ص // ل ك.

∴ △م س ص ، △م ك ل متشابهان. لماذا؟ (١)

$\frac{\text{م س}}{\text{م ك}} = \frac{\text{م ص}}{\text{م ل}} = \frac{\text{س ص}}{\text{ك ل}}$ تناسب الأضلاع المتناظرة

$\frac{\text{أب}}{\text{م ك}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{م ل}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ك ل}}$ معطى

بما أن م س = أب إذًا $\frac{\text{م س}}{\text{م ك}} = \frac{\text{أب}}{\text{م ك}}$

ومنه $\frac{\text{م ص}}{\text{م ل}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{م ل}}$ ، $\frac{\text{س ص}}{\text{ك ل}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ك ل}}$ تساوي التناسبين

م ص = أجـ ، س ص = ب جـ. لماذا؟

△م س ص ، △أب جـ متطابقان. (ض. ض. ض) فهما متشابهان (٢)

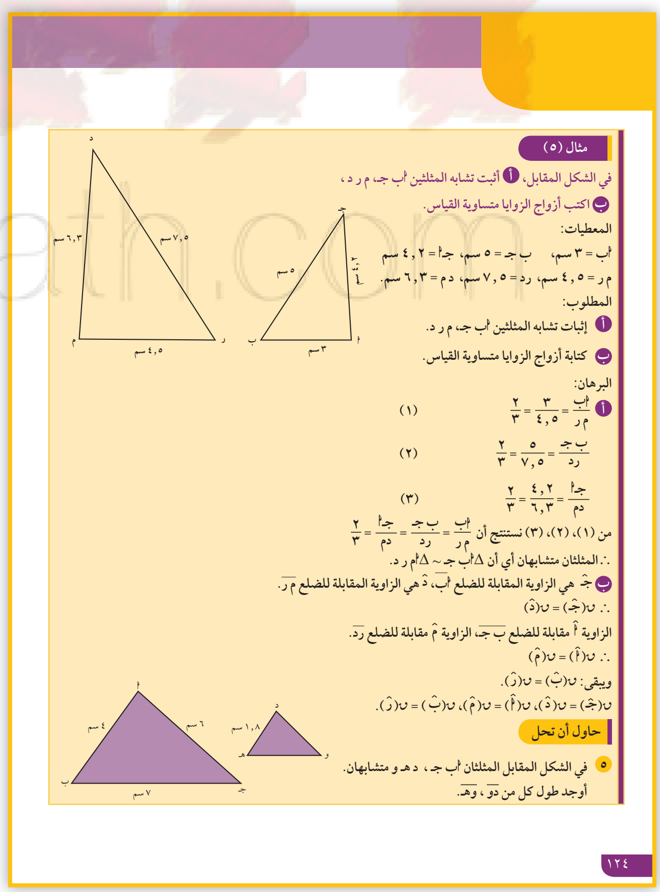
من (١)، (٢)

∴ △أب جـ ~ △م ك ل وهو المطلوب.

لاحظ أن:

ق(أ̂) = ق(م̂) ، ق(ب̂) = ق(ك̂) ، ق(ج̂) = ق(ل̂).

١٢٣



مثال (٥)

في الشكل المقابل، أ أثبت تشابه المثلثين أب جـ، م ر د ،
ب اكتب أزواج الزوايا متساوية القياس.

المعطيات:

أب = ٣ سم، ب جـ = ٥ سم، جـأ = ٤,٢ سم

م ر = ٤,٥ سم، رد = ٧,٥ سم، دم = ٦,٣ سم.

المطلوب:

أ إثبات تشابه المثلثين أب جـ، م ر د.

ب كتابة أزواج الزوايا متساوية القياس.

البرهان:

أ $\frac{\text{أب}}{\text{م ر}} = \frac{٣}{٤,٥} = \frac{٢}{٣}$ (١)

$\frac{\text{ب جـ}}{\text{رد}} = \frac{٥}{٧,٥} = \frac{٢}{٣}$ (٢)

$\frac{\text{جـأ}}{\text{دم}} = \frac{٤,٢}{٦,٣} = \frac{٢}{٣}$ (٣)

من (١)، (٢)، (٣) نستنتج أن $\frac{\text{أب}}{\text{م ر}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{رد}} = \frac{\text{جـأ}}{\text{دم}} = \frac{٢}{٣}$

∴ المثلثان متشابهان أي أن △أب جـ ~ △م ر د.

ب ج̂ هي الزاوية المقابلة للضلع أب، د̂ هي الزاوية المقابلة للضلع م ر.

∴ ق(ج̂) = ق(د̂)

الزاوية أ̂ مقابلة للضلع ب جـ، الزاوية م̂ مقابلة للضلع رد.

∴ ق(أ̂) = ق(م̂)

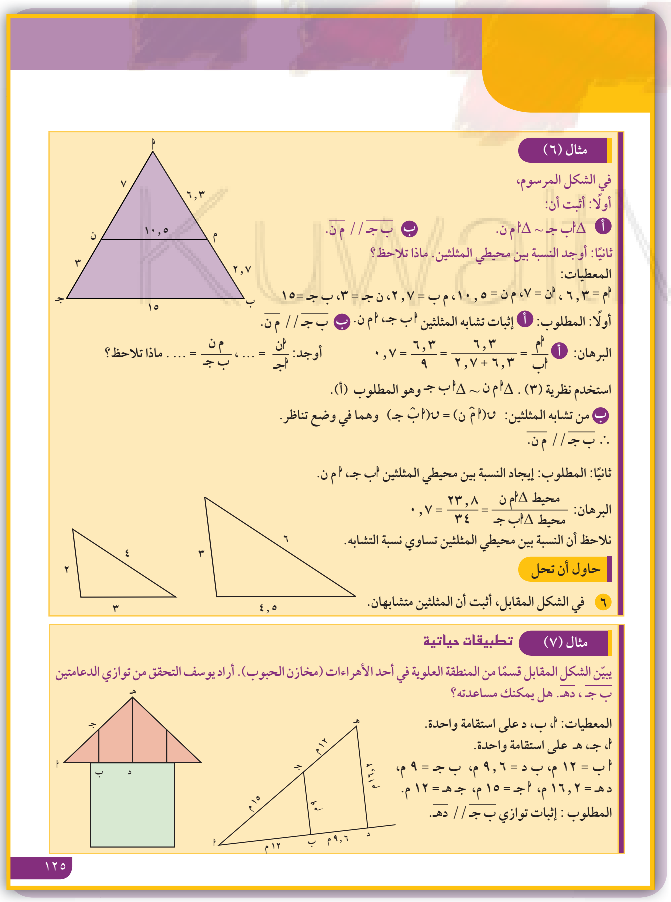
ويبقى: ق(ب̂) = ق(ر̂).

ق(ج̂) = ق(د̂)، ق(أ̂) = ق(م̂)، ق(ب̂) = ق(ر̂).

حاول أن تحل

٥ في الشكل المقابل المثلثان أب جـ ، د هـ و متشابهان.
أوجد طول كل من دو ، وهـ.

١٢٤



مثال (٦)

في الشكل المرسوم،

أولًا: أثبت أن:

أ △أب جـ ~ △أم ن. ب ب جـ // م ن.

ثانيًا: أوجد النسبة بين محيطي المثلثين. ماذا تلاحظ؟

المعطيات:

أم = ٦,٣ ، أن = ٧، م ن = ١٠,٥ ، م ب = ٢,٧، ن جـ = ٣، ب جـ = ١٥

أولًا: المطلوب: أ إثبات تشابه المثلثين أب جـ، أم ن. ب ب جـ // م ن.

البرهان: أ $\frac{\text{أم}}{\text{أب}} = \frac{٦,٣}{٦,٣ + ٢,٧} = \frac{٦,٣}{٩} = ٠,٧$ أوجد: $\frac{\text{أن}}{\text{أجـ}} = \dots$ ، $\frac{\text{م ن}}{\text{ب جـ}} = \dots$. ماذا تلاحظ؟

استخدم نظرية (٣) . △أم ن ~ △أب جـ وهو المطلوب (أ).

ب من تشابه المثلثين: ق(أم̂ ن) = ق(أب̂ جـ) وهما في وضع تناظر.

∴ ب جـ // م ن.

ثانيًا: المطلوب: إيجاد النسبة بين محيطي المثلثين أب جـ، أم ن.

البرهان: $\frac{\text{محيط △أم ن}}{\text{محيط △أب جـ}} = \frac{٢٣,٨}{٣٤} = ٠,٧$

نلاحظ أن النسبة بين محيطي المثلثين تساوي نسبة التشابه.

حاول أن تحل

٦ في الشكل المقابل، أثبت أن المثلثين متشابهان.

مثال (٧) تطبيقات حياتية

يبيّن الشكل المقابل قسمًا من المنطقة العلوية في أحد الأهراءات (مخازن الحبوب). أراد يوسف التحقق من توازي الدعامتين ب جـ ، دهـ. هل يمكنك مساعدته؟

المعطيات: أ، ب، د على استقامة واحدة.

أ، جـ، هـ على استقامة واحدة.

أب = ١٢ م، ب د = ٩,٦ م، ب جـ = ٩ م،

د هـ = ١٦,٢ م، أجـ = ١٥ م، جـ هـ = ١٢ م.

المطلوب : إثبات توازي ب جـ // دهـ.

١٢٥

٥ دو = ٢,٧ متر، وهـ = ٣,١٥ م

٦ $\frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢} = \frac{٤,٥}{٣} = \frac{٣}{٢}$.

٧ $(أب)^٢ + (ب\,جـ)^٢ = (١٢)^٢ + (٩)^٢ = ٢٢٥ = (أجـ)^٢$

ق(أ̂) ≃ ١٢″ ٥٢′ ٣٦°

٨ ق(ب أ̂ جـ) = ق(د أ̂ هـ)

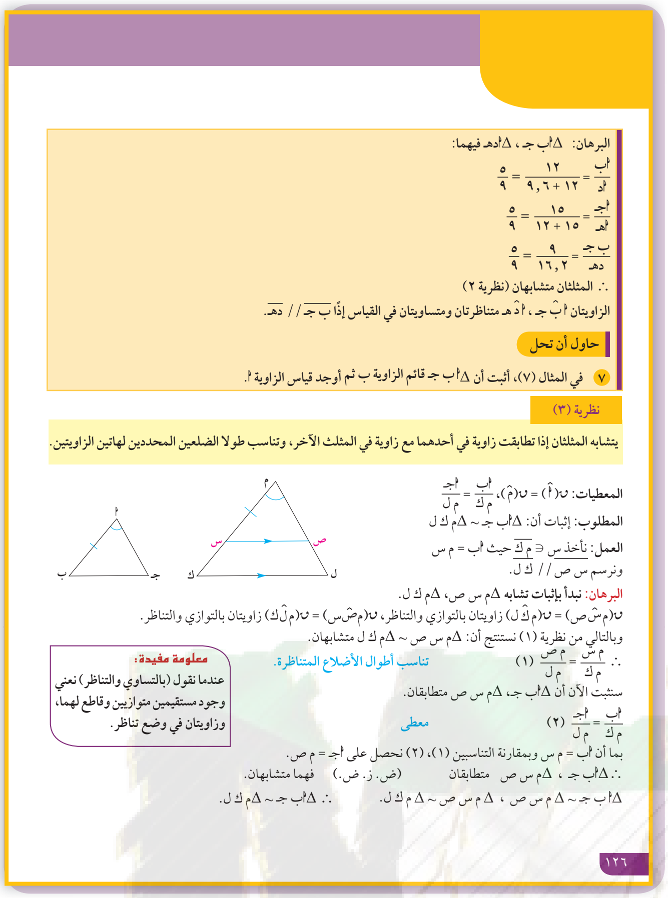
$\frac{٤}{٨} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$.

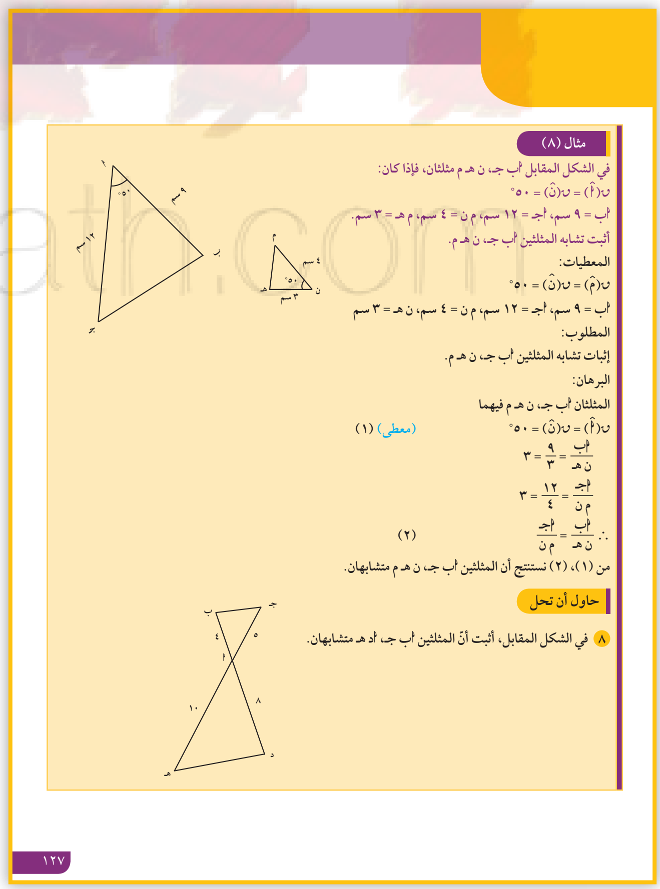
٩ ق(ب̂) = ق(د̂) = ٦٣° .

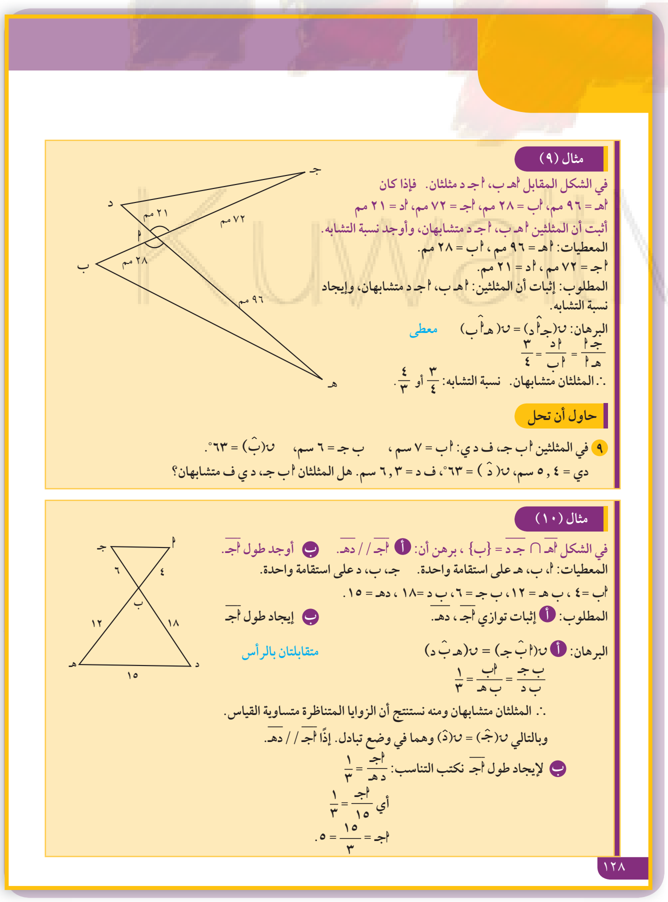
$\frac{أب}{ف\,د} = \frac{ب\,جـ}{د\,ي} = \frac{١٠}{٩}$

١٠ تحقق من عمل الطلاب.

١١ ٢,٢٥ م





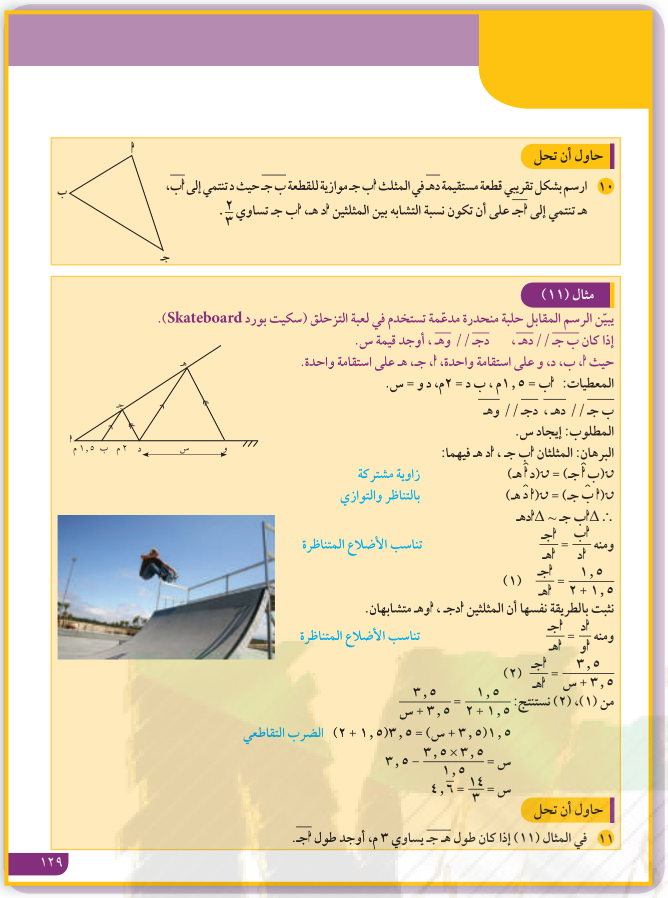


« تدريب (١) »

(أ) $\frac{٢}{٣}$ أو $\frac{٣}{٢}$ س = ٩ سم

(ب) $\frac{٧}{١٢}$ أو $\frac{١٢}{٧}$ س = $١٢,٨\overline{٣}$ سم

(جـ) $\frac{٣}{٤}$ أو $\frac{٤}{٣}$ س = ١٢ سم



حاول أن تحل

١٠ ارسم بشكل تقريبي قطعة مستقيمة $\overline{دهـ}$ في المثلث ﺃب جـ موازية للقطعة $\overline{ب جـ}$ حيث د تنتمي إلى $\overline{ﺃب}$، هـ تنتمي إلى $\overline{ﺃجـ}$ على أن تكون نسبة التشابه بين المثلثين ﺃد هـ، ﺃب جـ تساوي $\frac{٢}{٣}$.

مثال (١١)

يبيّن الرسم المقابل حلبة منحدرة مدعّمة تستخدم في لعبة التزحلق (سكيت بورد **Skateboard**).

إذا كان $\overline{ب جـ} // \overline{دهـ}$، $\overline{دجـ} // \overline{وهـ}$، أوجد قيمة س.

حيث ﺃ، ب، د، و على استقامة واحدة، ﺃ، جـ، هـ على استقامة واحدة.

المعطيات: ﺃب = ١,٥ م، ب د = ٢م، د و = س.

$\overline{ب جـ} // \overline{دهـ}$، $\overline{دجـ} // \overline{وهـ}$

المطلوب: إيجاد س.

البرهان: المثلثان ﺃب جـ، ﺃد هـ فيهما:

ق(ب ﺃ جـ) = ق(د ﺃ هـ) زاوية مشتركة

ق(ﺃ ب جـ) = ق(ﺃ د هـ) بالتناظر والتوازي

$\therefore \triangle$ﺃب جـ $\sim \triangle$ﺃدهـ

ومنه $\frac{ﺃب}{ﺃد} = \frac{ﺃجـ}{ﺃهـ}$ تناسب الأضلاع المتناظرة

$\frac{١,٥}{١,٥ + ٢} = \frac{ﺃجـ}{ﺃهـ}$ (١)

نثبت بالطريقة نفسها أن المثلثين ﺃدجـ، ﺃوهـ متشابهان.

ومنه $\frac{ﺃد}{ﺃو} = \frac{ﺃجـ}{ﺃهـ}$ تناسب الأضلاع المتناظرة

$\frac{٣,٥}{٣,٥ + س} = \frac{ﺃجـ}{ﺃهـ}$ (٢)

من (١)، (٢) نستنتج: $\frac{١,٥}{١,٥ + ٢} = \frac{٣,٥}{٣,٥ + س}$

١,٥(٣,٥ + س) = ٣,٥(١,٥ + ٢) الضرب التقاطعي

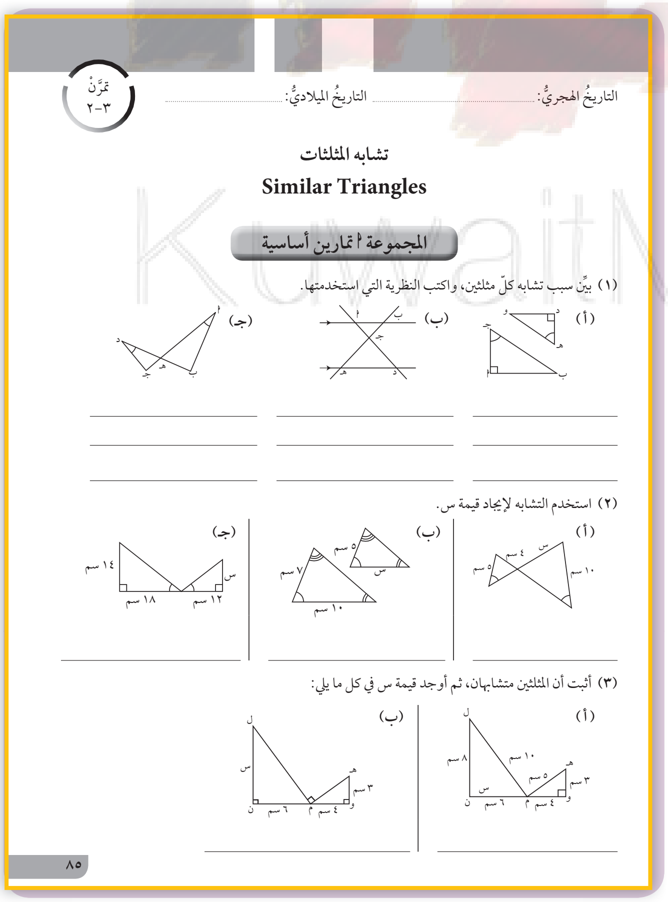
س = $\frac{٣,٥ \times ٣,٥}{١,٥}$ − ٣,٥

س = $\frac{١٤}{٣}$ = $٤,\overline{٦}$

حاول أن تحل

١١ في المثال (١١) إذا كان طول $\overline{هـ جـ}$ يساوي ٣ م، أوجد طول $\overline{ﺃجـ}$.

١٢٩



التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ ٣-٢

تشابه المثلثات

Similar Triangles

المجموعة ﺃ تمارين أساسية

(١) بيِّن سبب تشابه كلّ مثلثين، واكتب النظرية التي استخدمتها.

(أ) (ب) (جـ)

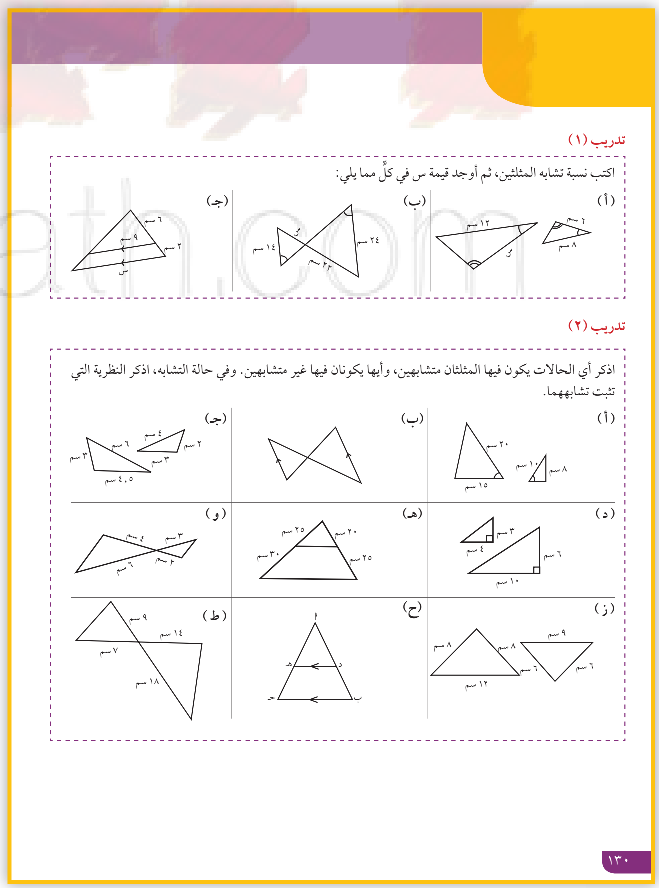
(٢) استخدم التشابه لإيجاد قيمة س.

(أ) (ب) (جـ)

(٣) أثبت أن المثلثين متشابهان، ثم أوجد قيمة س في كل ما يلي:

(أ) (ب)

٨٥



تدريب (١)

اكتب نسبة تشابه المثلثين، ثم أوجد قيمة س في كلٍّ مما يلي:

(أ) (ب) (جـ)

تدريب (٢)

اذكر أي الحالات يكون فيها المثلثان متشابهين، وأيها يكونان فيها غير متشابهين. وفي حالة التشابه، اذكر النظرية التي تثبت تشابههما.

(أ) (ب) (جـ) (د) (هـ) (و) (ز) (ح) (ط)

١٣٠

« تدريب (٢) »

(أ) لا يوجد تشابه.

(ب) يوجد تشابه لوجود زوايا متساوية القياس.

(جـ) يوجد تشابه، تناسب الأضلاع.

(د) لا يوجد تشابه، النسب غير متساوية.

(هـ) لا يوجد تشابه، النسب غير متساوية.

(و) يوجد تشابه. نسبتان متساويتان لأضلاع تحصر زاويتين متساويتي القياس.

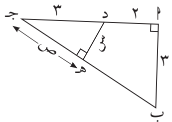
(ز) يوجد تشابه. تناسب الأضلاع.

(ح) يوجد تشابه. النسبة نظرية ١.

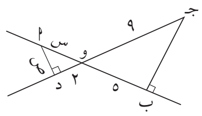
(ط) يوجد تشابه. نظرية ٣.

في التمارين (٤-٦)، أوجد قيم المجهولين س، ص مستخدمًا المثلثات المتشابهة.

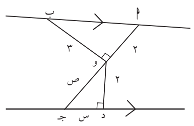
(٤)



(٥)

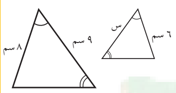


(٦)



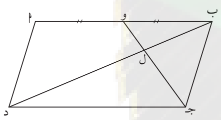
(٧) في الشكل أدناه قيمة س تساوي:

(أ) $5\frac{1}{3}$ سم
(ب) ٦ سم
(جـ) ٦,٧٥ سم
(د) ٧ سم



(٨) أب جـ د متوازي أضلاع. و منتصف $\overline{أب}$.

(أ) أثبت تشابه المثلثين ل و ب، ل جـ د.



٨٦

(ب) أوجد نسبة التشابه.

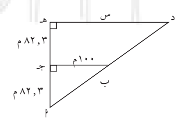
(٩) **التفكير الناقد:**

(أ) هل كل مثلثين متطابقي الضلعين متشابهان؟ فسِّر.

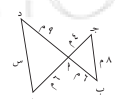
(ب) هل كل مثلثين قائمي الزاوية ومتطابقي الضلعين متشابهان؟ فسِّر.

(١٠) **قياس غير مباشر**: أثبت أن Δأب جـ يشابه Δأد هـ في كل مما يلي. ثم أوجد قيمة س:

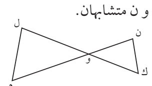
(أ)



(ب)



(١١) في الشكل المقابل، إذا كانت ل و × وك = و م × ون أثبت أن المثلثين ل و م، ك و ن متشابهان.

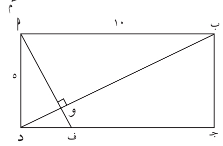


(١٢) أب جـ د مستطيل.

(أ) أوجد طول $\overline{ب د}$.

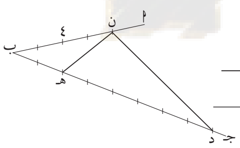
(ب) أثبت تشابه المثلثين أب د، وب أ.

(جـ) أوجد طول القطعة $\overline{أو}$.



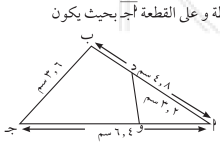
٨٧

(١٣) (أ) أثبت أن المثلثين ب ن هـ، ب د ن متشابهان.



(ب) أوجد زوجين من الزوايا متساوية القياس.

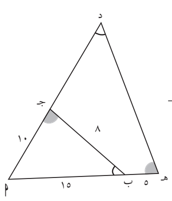
(١٤) أب جـ مثلث، أطوال أضلاعه: أب = ٨,٤ سم، ب جـ = ٦,٣ سم، أجـ = ٦,٤ سم.
ضع النقطة د على القطعة $\overline{أب}$ بحيث يكون أد = ٣,٢ سم، والنقطة و على القطعة $\overline{أجـ}$ بحيث يكون أو = ٤,٢ سم.



(أ) قارن بين النسبتين $\frac{أب}{أجـ}$، $\frac{أو}{أد}$.

(ب) استنتج تشابه المثلثين أب جـ، أو د.

(جـ) أوجد محيط المثلث أدو.



(١٥) (أ) استخدم معطيات الرسم لإيجاد مثلثين متشابهين.

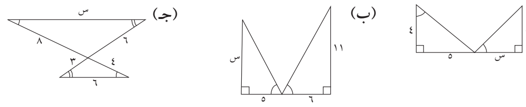
(ب) أوجد محيط المثلث أدهـ.

٨٨

المجموعة ب تمارين تعزيزية

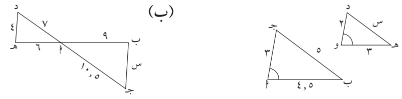
(١) استخدم التشابه لإيجاد قيمة س.

(أ) (ب) (ج)



(٢) أثبت أن المثلثين متشابهان، ثم أوجد قيمة س في كل مما يلي:

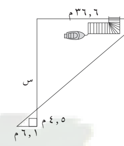
(أ) (ب)



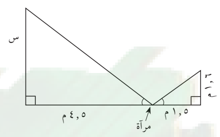
* (٣) ارسم مثلثًا أب جـ. استخدم المسطرة والفرجار لإنشاء المثلث م ك ل بحيث يكون: Δم ك ل ~ Δأب جـ نسبة التشابه ٣:١.

(٤) **قياس غير مباشر**: أوجد المسافة (س) في كل من الحالات التالية:

(أ)



(ب)



هل تعلم؟

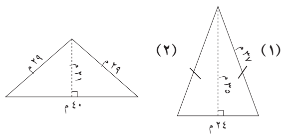
سيدة ألمانية تدعى هانالور من فرانكفورت أوقفت العمل في إقامة مبنى ليكون أطول ناطحة سحاب في أوروبا، لأن شقتها في هذه الحالة لن تدخلها أشعة الشمس. ولكي توقف البناء استندت إلى قانون ألماني ينص على أن كل مالك مسكن له الحق في أشعة الشمس. عرض على هذه السيدة ١,٦ مليون دولار لتسحب قضيتها من المحكمة ولكنها رفضت. كانت ناطحة السحاب هذه ستكلف حوالى ٤٠٠ مليون دولار وستقام في موقع على بعد ٦٠ م فقط من شقة السيدة وكان ارتفاعها سيبلغ ٢٦٥ م.

أجب عن الأسئلة (٥-٦) مستفيدًا من الفقرة السابقة:

(٥) اشرح كيف يمكن للسيدة الألمانية أن تستخدم القياس غير المباشر لتقدير طول ظل ناطحة السحاب عند لحظة معينة من النهار.

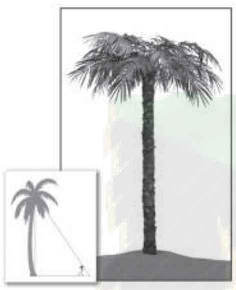
(٦) بفرض أن طول هذه السيدة ١,٧٥ م. عندما يكون طول ظلها مترًا واحدًا، كم سيكون طول ظل ناطحة السحاب؟

(٧) (أ) في كل من (١)، (٢) أوجد محيط المثلث ومساحته. (١) (٢)

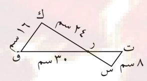


(ب) **فكّر**: هل يمكنك استنتاج أن المثلثين اللذين لهما المحيط نفسه والمساحة نفسها يكونان متشابهين؟ فسّر إجابتك.

(٨) بفرض أن شخصًا طوله ١٨٠ سم يقف بطريقة تنطبق فيها نقطة طرف ظله على نقطة طرف ظل الشجرة. إذا كان الشخص يبعد ١٢٠ سم عند ملتقى طرفي الظلين وعلى بعد ٧,٢ م من قاعدة الشجرة، فأوجد ارتفاع الشجرة.



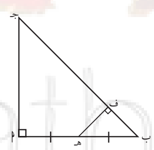
(٩) في الشكل المقابل، Δق ك ر يشابه Δت س ر، أوجد طول $\overline{\text{ر ت}}$.



(١٠) أب جـ مثلث قائم الزاوية في أ. هـ منتصف القطعة $\overline{\text{أب}}$. $\overline{\text{هـ ف}} \perp \overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$.

(أ) أثبت تشابه المثلثين أب جـ، ف ب هـ.

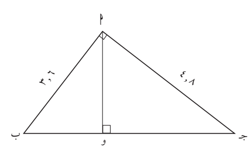
(ب) مستخدمًا نسبة التشابه، أثبت أن ب جـ × ب ف = $\frac{١}{٢}$ (أب)^{٢}.



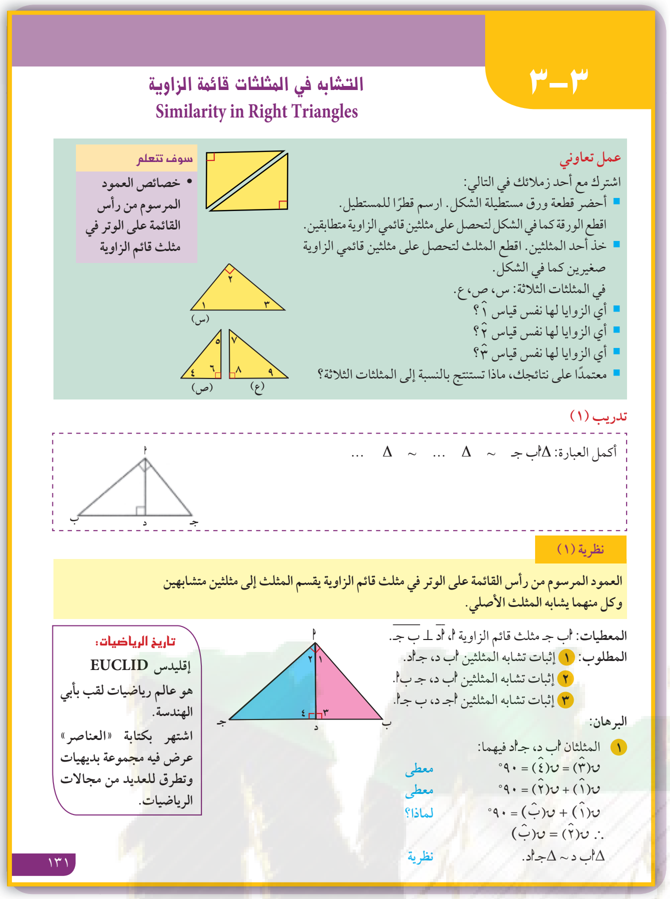
(١١) أب جـ مثلث قائم الزاوية في أ.

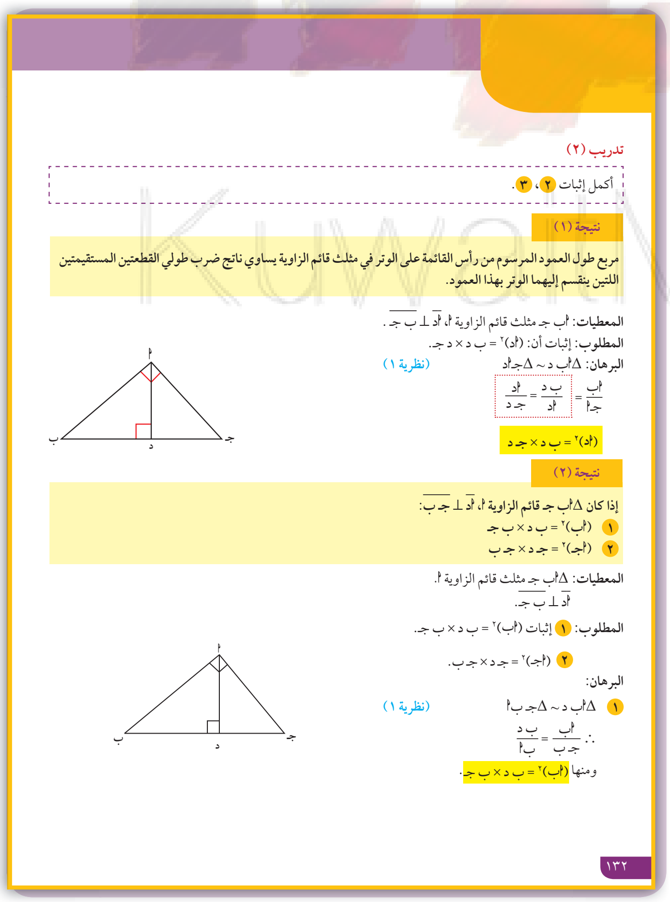
(أ) أوجد طول القطعة $\overline{\text{ب جـ}}$.

(ب) استخدم تشابه المثلثات لإيجاد طول $\overline{\text{أو}}$.



٣-٣: التشابه في المثلثات قائمة الزاوية


٣-٣
التشابه في المثلثات قائمة الزاوية
Similarity in Right Triangles
عمل تعاوني
اشترك مع أحد زملائك في التالي:
- أحضر قطعة ورق مستطيلة الشكل. ارسم قطرًا للمستطيل.
اقطع الورقة كما في الشكل لتحصل على مثلثين قائمي الزاوية متطابقين.
- خذ أحد المثلثين. اقطع المثلث لتحصل على مثلثين قائمي الزاوية صغيرين كما في الشكل.
في المثلثات الثلاثة: س، ص، ع.
- أي الزوايا لها نفس قياس ١؟
- أي الزوايا لها نفس قياس ٢؟
- أي الزوايا لها نفس قياس ٣؟
- معتمدًا على نتائجك، ماذا تستنتج بالنسبة إلى المثلثات الثلاثة؟
سوف تتعلم
• خصائص العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية
تدريب (١)
أكمل العبارة: Δأ ب جـ ~ Δ ... ~ Δ ...
نظرية (١)
العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكل منهما يشابه المثلث الأصلي.
المعطيات: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ، أد ⊥ ب جـ.
المطلوب: ١ إثبات تشابه المثلثين أ ب د، جـ أ د.
٢ إثبات تشابه المثلثين أ ب د، جـ ب أ.
٣ إثبات تشابه المثلثين أ جـ د، جـ ب أ.
البرهان:
١ المثلثان أ ب د، جـ أ د فيهما:
ق(٣) + ق(٤) = ٩٠° معطى
ق(١) + ق(٢) = ٩٠° معطى
ق(١) + ق(ب) = ٩٠° لماذا؟
∴ ق(٢) = ق(ب)
Δأ ب د ~ Δجـ أ د نظرية
تاريخ الرياضيات: إقليدس EUCLID هو عالم رياضيات لقب بأبي الهندسة. اشتهر بكتابه «العناصر» عرض فيه مجموعة بديهيات وتطرق للعديد من مجالات الرياضيات.
١٣١


تدريب (٢)
أكمل إثبات ٢، ٣.
نتيجة (١)
مربع طول العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يساوي ناتج ضرب طولي القطعتين المستقيمتين اللتين ينقسم إليهما الوتر بهذا العمود.
المعطيات: أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ، أد ⊥ ب جـ.
المطلوب: إثبات أن: (أد)² = ب د × د جـ
البرهان: Δأ ب د ~ Δجـ أ د (نظرية ١)
$\frac{أب}{جـأ} = \frac{ب د}{أد} = \frac{أد}{د جـ}$
(أد)² = ب د × د جـ
نتيجة (٢)
إذا كان Δأ ب جـ قائم الزاوية في أ، أد ⊥ ب جـ:
١ (أب)² = ب د × ب جـ
٢ (أجـ)² = جـ د × جـ ب
المعطيات: Δأ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ. أد ⊥ ب جـ.
المطلوب: ١ إثبات (أب)² = ب د × ب جـ.
٢ (أجـ)² = جـ د × جـ ب.
البرهان:
١ Δأ ب د ~ Δجـ ب أ (نظرية ١)
∴ $\frac{أب}{جـ ب} = \frac{ب د}{ب أ}$
ومنها (أب)² = ب د × ب جـ.
١٣٢

١ الأهداف

- يتعرف تشابه المثلثات قائمة الزاوية.
- يتعرف خاصية العمود المرسوم من رأس القائمة إلى الوتر في مثلث قائم الزاوية.
- يتعرف العلاقة بين طول العمود وطولي القطعتين المستقيمتين اللتين ينقسم إليهما الوتر بهذا العمود.
- يتعرف العلاقات بين أطوال أضلاع المثلث قائم الزاوية وطول العمود وطولي القطعتين اللتين ينقسم إليهما الوتر في هذا العمود.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

مثلث ثلاثيني ستيني – مثلث متطابق الضلعين.

٣ الأدوات والوسائل

ورق رسم بياني – أدوات هندسية مألوفة – جهاز إسقاط – ملصقات – حاسوب.

٤ التمهيد

اسأل الطلاب:

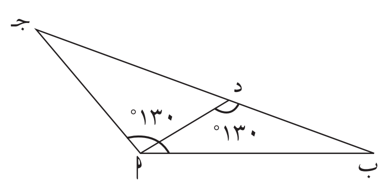
(أ) ما النظريات الثلاث لتشابه مثلثين؟

(ب) ما العمود المرسوم من الرأس إلى الضلع المقابل في المثلث؟

(جـ) إذا وجدوا مثلثين قائمي الزاوية ومتطابقي الضلعين، فهل هما متشابهان؟

(د) هل جميع المثلثات من نوع قائم الزاوية ثلاثيني ستيني هي في حالة تشابه؟

(هـ) أثبت أن المثلثين أ ب جـ، د ب أ متشابهان. اكتب الزوايا متساوية القياس ونسب الأضلاع المتناسبة.



٥ التدريس

ناقش مع الطلاب النظرية (١) والنتائج (١) وَ(٢) من حيث أهميتها في المثلث قائم الزاوية.

ركز معهم على فكرة أن هذه العلاقات لا تصح إلا في المثلث قائم الزاوية، وأن هناك عمودًا واحدًا مرسومًا من رأس القائمة إلى الوتر يعطي هذه العلاقات من تشابه المثلثات.

اطلب إليهم الاستفادة من العلاقات في النتيجة (٢) لإيجاد نظرية فيثاغورث.

ركز على التطبيقات الحياتية في المثال (٢) والمثال (٣).

ناقش معهم الحلول في تدريب (١) وتابع باهتمام كيفية استخدامهم للنتيجة (١) والنتيجة (٢) لإنجاز هذا التدريب.

٦ الربط

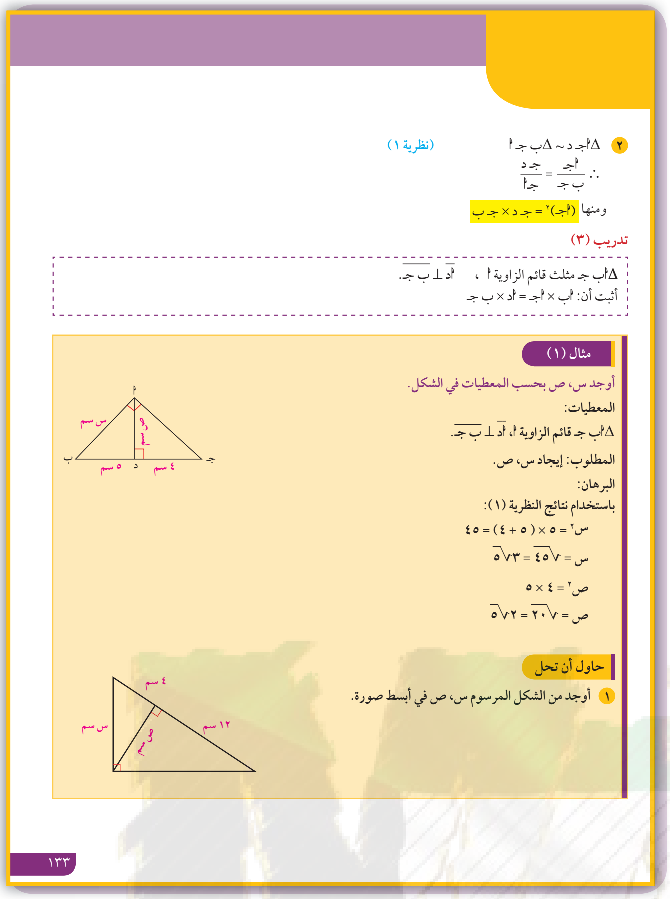
المثال (٢) والمثال (٣) يؤكدان كيفية استخدام تشابه المثلثات قائمة الزاوية في حل مسائل حياتية. يمكن الاستفادة من المعلومات الواردة في المثال (٣) لإغناء الثقافة العلمية عند الطلاب.

٧ أخطاء متوقعة وطرق معالجتها

قد يخطئ الطلاب في كتابة الأضلاع المتناسبة. ساعدهم أوّلًا على كتابة الزوايا المتساوية القياس في المثلثين، ثم استنتاج تناسب الأضلاع.

٨ التقييم

تابع مع الطلاب العمل في فقرات «حاول أن تحل»، لتتأكد من فهمهم لتشابه مثلثات قائمة الزاوية باستخدام العمود المرسوم من القائمة إلى الوتر.



٢ ∆أجـ د ~ ∆ب جـ أ (نظرية ١)

∴ أجـ / ب جـ = جـ د / جـ أ

ومنها $(\text{أجـ})^2$ = جـ د × جـ ب

تدريب (٣)

∆أب جـ مثلث قائم الزاوية أ ، أد ⊥ ب جـ.

أثبت أن: أب × أجـ = أد × ب جـ

مثال (١)

أوجد س، ص بحسب المعطيات في الشكل.

المعطيات:

∆أب جـ قائم الزاوية أ، أد ⊥ ب جـ.

المطلوب: إيجاد س، ص.

البرهان:

باستخدام نتائج النظرية (١):

$\text{س}^2 = ٥ \times (٥ + ٤) = ٤٥$

$\text{س} = \sqrt{٤٥} = ٣\sqrt{٥}$

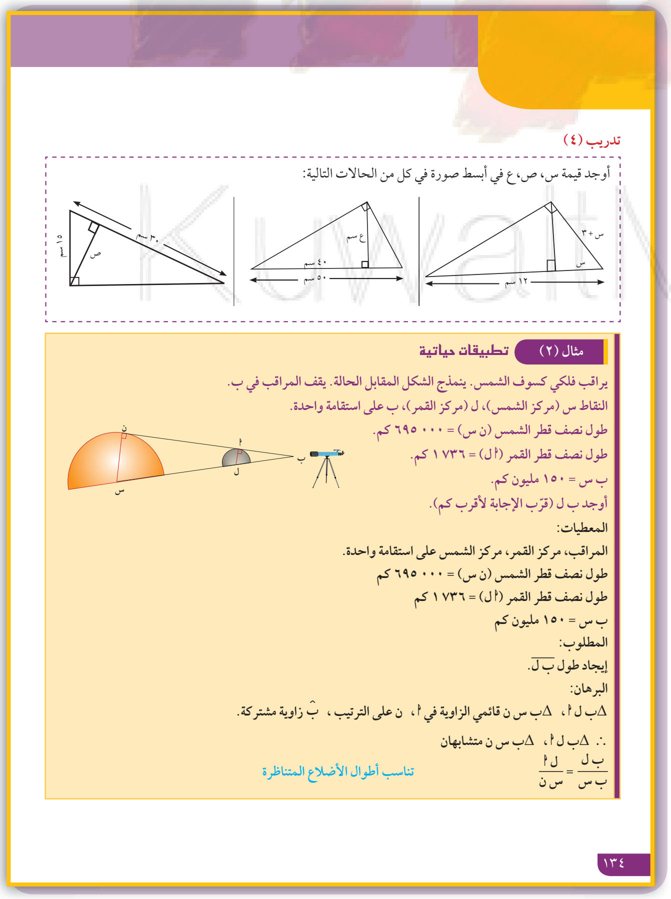
$\text{ص}^2 = ٤ \times ٥$

$\text{ص} = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$

حاول أن تحل

١ أوجد من الشكل المرسوم س، ص في أبسط صورة.

١٣٣



تدريب (٤)

أوجد قيمة س، ص، ع في أبسط صورة في كل من الحالات التالية:

مثال (٢) تطبيقات حياتية

يراقب فلكي كسوف الشمس. ينمذج الشكل المقابل الحالة. يقف المراقب في ب.

النقاط س (مركز الشمس)، ل (مركز القمر)، ب على استقامة واحدة.

طول نصف قطر الشمس (ن س) = ٦٩٥ ٠٠٠ كم.

طول نصف قطر القمر (أ ل) = ١ ٧٣٦ كم.

ب س = ١٥٠ مليون كم.

أوجد ب ل (قرّب الإجابة لأقرب كم).

المعطيات:

المراقب، مركز القمر، مركز الشمس على استقامة واحدة.

طول نصف قطر الشمس (ن س) = ٦٩٥ ٠٠٠ كم

طول نصف قطر القمر (أ ل) = ١ ٧٣٦ كم

ب س = ١٥٠ مليون كم

المطلوب:

إيجاد طول ب ل.

البرهان:

∆ب ل أ، ∆ب س ن قائمي الزاوية في أ، ن على الترتيب ، $\hat{\text{ب}}$ زاوية مشتركة.

∴ ∆ب ل أ، ∆ب س ن متشابهان

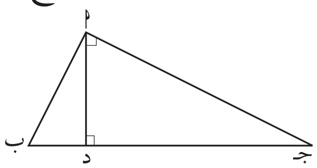
ب ل / ب س = ل أ / س ن تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة

١٣٤

اختبار سريع

في الشكل أدناه أد = ٥ سم، جـ د = ٧ سم.

أوجد بقية أطوال أضلاع المثلث أب جـ.



أجـ ≃ ٨,٦ سم، د ب ≃ ٣,٥٧ سم، أب ≃ ٦,١٤ سم


$\frac{\text{ب ل}}{١٥٠\ ٠٠٠\ ٠٠٠} = \frac{١\ ٧٣٦}{٦٩٥\ ٠٠٠}$

ب ل = ٣٧٤ ٦٧٦,٢٥٩

تبلغ المسافة بين النقطة ب التي يقف عندها المراقب ومركز القمر حوالى ٦٧٦ ٣٧٤ كم.

حاول أن تحل

٢ في الشكل المقابل، أوجد طول كل من القطعتين وأ، وب إذا كان طول أب = ٨ سم.

مثال (٣) تطبيقات حياتية

في إحدى الحدائق العامة، التي تقيمها الدولة على الشاطئ للترويح عن المواطنين، كان طول الممر المرصوف داخل الحديقة حتى المقصف يساوي ٣٠٠ م، وطول الممر حتى كشك المجلات ٤٠٠ م، وكان الممران يتقابلان في زاوية قائمة كما في الشكل أمام موقف السيارات. سار جاسم من موقف السيارات على مسار مستقيم عمودي على الشاطئ حتى وصل إلى الشاطئ. كم مترًا على جاسم أن يسير من مكانه على الشاطئ الذي وصل إليه ليشتري شطائر من المقصف؟

المعطيات:

أجـ = ٣٠٠ م، أب = ٤٠٠ م، ق(ب أ̂ جـ) = ٩٠°، $\overline{\text{أب}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$.

المطلوب:

إيجاد دجـ.

البرهان:

Δأب جـ قائم الزاوية أ.

بتطبيق نظرية فيثاغورث

(ب جـ)^{٢} = (٣٠٠)^{٢} + (٤٠٠)^{٢}

(ب جـ)^{٢} = ٢٥٠ ٠٠٠

ب جـ = ٥٠٠ م

بتطبيق نتائج التشابه

(أجـ)^{٢} = جـ د × جـ ب

(٣٠٠)^{٢} = جـ د × ٥٠٠

جـ د = $\frac{٣٠٠ \times ٣٠٠}{٥٠٠}$ = ١٨٠

أي أن جاسم سيسير من مكانه ١٨٠ م ليصل إلى المقصف.

حاول أن تحل

٣ (أ) احسب أد المسافة من موقف السيارات إلى الشاطئ بطريقتين مختلفتين.

(ب) هل يمكنك حل المثال (٣) بطريقة أخرى؟

١٣٥

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ ص^{٢} = ٤ × ١٢ = ٤٨؛ ص ≃ ٦,٩٢٨ سم

س^{٢} = ٤ × ١٦ = ٦٤؛ س = ٨ سم

٢ $\frac{٢}{٣} = \frac{\text{وأ}}{\text{وب}}$ ومنه: وأ = ٣,٢ سم

وب = ٤,٨ سم

٣ (أ) طريقة أولى:

(أد)^{٢} = (٣٠٠)^{٢} − (١٨٠)^{٢} = ٥٧ ٦٠٠

أد = ٢٤٠ م

طريقة ثانية:

دب = ٥٠٠ − ١٨٠ = ٣٢٠

(أد)^{٢} = ٣٢٠ × ١٨٠ = ٥٧ ٦٠٠

أد = ٢٤٠ م.

(توجد طرق أخرى للحل).

(ب) مساحة Δأب جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × أد = $\frac{١}{٢}$ أجـ × أب

ومنها أجـ = ٢٤٠ م.

في Δأجـ د من نظرية فيثاغورث: جـ د = ١٨٠ م.

«تدريب (١)»

Δأب جـ ~ Δأب د ~ Δ أجـ د

«تدريب (٢)»

٢ المثلثان أب د، جـ ب أ فيهما:

ب̂ مشتركة.

ق(د̂) = ق(أ̂) = ٩٠°.

Δأب د ~ Δجـ ب أ

٣ المثلثان أجـ د، ب جـ أ فيهما:

جـ̂ مشتركة.

ق(د̂) = ق(أ̂) = ٩٠°

Δأجـ د ~ Δب جـ أ.

«تدريب (٣)»

طريقة ١: من تشابه المثلثين أب جـ، دب أ: أب = $\frac{\text{أجـ} \times \text{د ب}}{\text{أد}}$

أب × أجـ = $\frac{(\text{أجـ})^{٢} \times \text{د ب}}{\text{أد}} = \frac{\text{جـ د} \times \text{جـ ب} \times \text{د ب}}{\text{أد}}$

= $\frac{(\text{أد})^{٢} \times \text{جـ ب}}{\text{أد}}$

= أد × جـ ب

طريقة ٢: مساحة المثلث أب جـ = $\frac{\text{أد} \times \text{جـ ب}}{٢} = \frac{\text{أب} \times \text{أجـ}}{٢}$

∴ أب × أجـ = أد × جـ ب ، مسافة بين كل قيمة

«تدريب (٤)»

س = ٣ سم، ع = ٢٠ سم

ص = $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$ ≃ ١٣ سم

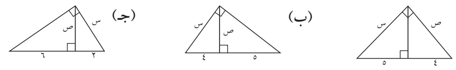
التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ ٣-٣

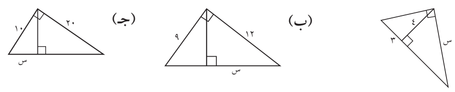
التشابه في المثلثات قائمة الزاوية
Similarity in Right Triangles

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) أوجد قيمة كل من س، ص في كل مما يلي:



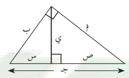
(٢) أوجد قيمة س في كل مما يلي:



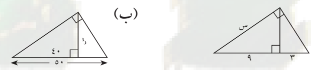
(٣) أكمل التناسبات التالية مستعينًا بالشكل:

(أ) $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{ي}}{\quad}$ (ب) $\frac{\text{ص}}{\text{ي}} = \frac{\text{أ}}{\quad}$

(جـ) $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}} = \frac{\quad}{\text{أ}}$ (د) $\frac{\text{ي}}{\text{أ}} = \frac{\quad}{\text{جـ}}$



(٤) احسب س لأبسط صورة بحسب المعطيات في كل شكل:

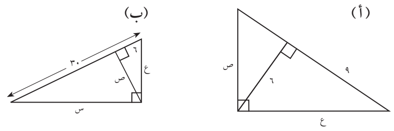


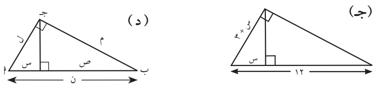
(٥) (أ) إذا كان العمود «ع» المرسوم من رأس القائمة إلى الوتر في مثلث قائم الزاوية يقسم الوتر إلى قطعتين طوليهما ٢ سم، ٨ سم. أوجد ع.

(ب) استخدم قيمة ع التي أوجدتها، والطولين في رسم المثلث القائم الزاوية بدقة.

(٦) إذا كان العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في المثلث قائم الزاوية يقسم الوتر إلى قطعتين النسبة بين طوليهما ١:٢، وإذا كان طول العمود يساوي $٤\sqrt{٢}$، فأوجد طول الوتر، ثم أوجد طولي الضلعين الآخرين للمثلث.

(٧) أوجد قيم س، ص، ع في أبسط صورة في كل من الحالات التالية:

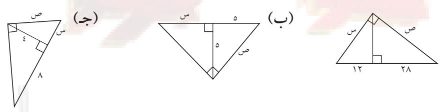




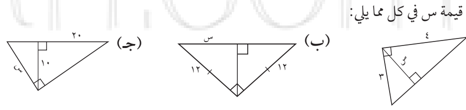
(٨) أب جـ مثلث ثلاثيني ستيني. إذا كان طول أقصر ضلع فيه يساوي ١٠ سم، فأوجد طول العمود المرسوم من رأس القائمة إلى الوتر.

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) أوجد قيمة كل من س، ص في كل مما يلي:

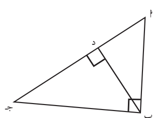


(٢) أوجد قيمة س في كل مما يلي:

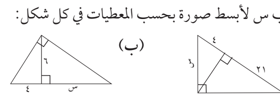


(٣) انظر إلى الشكل وأكمل:

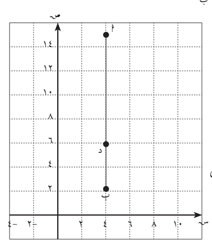
Δ ~ Δ ~ Δأب جـ.



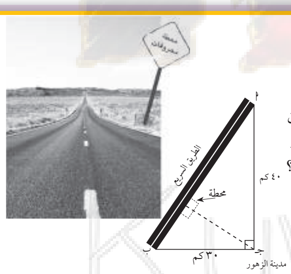
(٤) احسب س لأبسط صورة بحسب المعطيات في كل شكل:



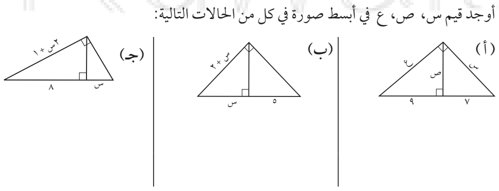
(٥) **هندسة إحداثية:** إذا كان $\overline{\text{جـ د}}$ هو العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في المثلث قائم الزاوية أب جـ، وكانت إحداثيات النقاط: ب، د، أ هي على الترتيب: (٤، ٢)، (٤، ٦)، (٤، ١٥)، فأوجد كل الإحداثيات الممكنة للنقطة جـ.



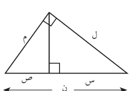
(٦) **هندسة مدنية:** الخريطة التي في الشكل، تبيّن محطة خدمة للمحروقات يراد إقامتها على الطريق السريع (المار بالمدينتين أ، ب) عند تقاطعه مع طريق جانبي يؤدي إلى مدينة الزهور. كم ينبغي أن تبعد المحطة عن المدينة ب إذا أردنا أن يكون الطريق من مدينة الزهور عموديًّا على الطريق السريع بفرض أن: $\overline{\text{أجـ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$؟



(٧) أوجد قيم س، ص، ع في أبسط صورة في كل من الحالات التالية:



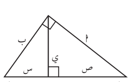
(٨) أثبت نظرية فيثاغورث من النظرية (١).



(٩) أكمل التناسبات التالية مستعينًا بالشكل:

(أ) $\frac{\text{أ}}{\text{ص}} = \frac{\text{جـ}}{\quad}$ (ب) $\frac{\text{ي}}{\text{س}} = \frac{\quad}{\text{ي}}$

(جـ) $\frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\quad}{\text{ب}}$ (د) $\frac{\text{ي}}{\text{أ}} = \frac{\quad}{\text{ب}}$



٣-٤: التناسبات والمثلثات المتشابهة

١ الأهداف

- يتعرف خاصية المستقيم الموازي لأحد أضلاع المثلث.
- يتعرف نظرية طاليس.
- يستخدم نظرية طاليس لحل مسائل.
- يتعرف خاصية منصف الزاوية الداخلية في المثلث.
- يستخدم خاصية منصف الزاوية لإيجاد أطوال أضلاع المثلث ولحل مسائل حياتية.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

المستقيم الموازي - نظرية طاليس - منصف الزاوية.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة مدرجة - ورق رسم بياني - مثلث قائم - منقلة - ملصقات - جهاز إسقاط - حاسوب.

٤ التمهيد

اسأل الطلاب:

(أ) ما هو منصف الزاوية؟

(ب) كيف تثبت تشابه مثلثين؟

(جـ) إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين، فما العلاقة بين الزوايا المتناظرة؟ وما العلاقة بين الزوايا المتبادلة داخليًّا؟

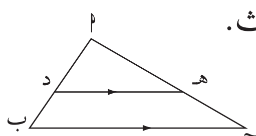
(د) استخدم الضرب التقاطعي لتجد قيمة س في التناسب:

$$\frac{\text{س}}{\text{٧}} = \frac{\text{١٢}}{\text{٣٥}}$$

٥ التدريس

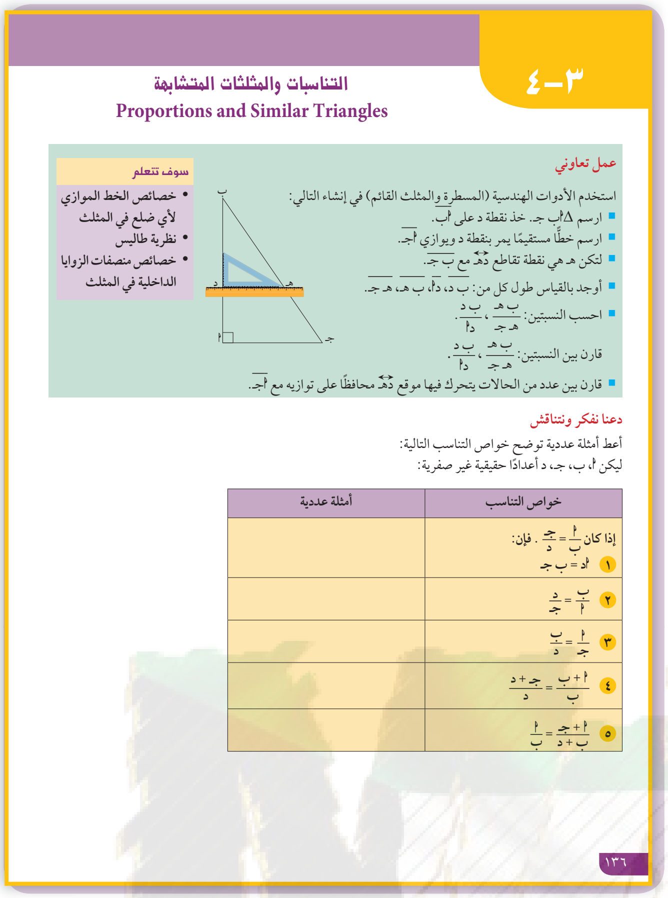
يربط هذا الدرس بين التناسبات والمثلثات المتشابهة والمستقيمات المتوازية، لذا يجب التركيز على النظريات الثلاث الموجودة في الدرس.

من المهم جدًّا أن يفهم الطلاب كتابة التناسب في المثلثين المتشابهين وأن يعرفوا الفرق في تناسب الأجزاء الذي يصنعها المستقيم الموازي لأحد الأضلاع في المثلث.



أي في المثلث المقابل:

إذا أخذنا ءدهـ مشابهًا للمثلث ءب جـ



٣-٤

التناسبات والمثلثات المتشابهة

Proportions and Similar Triangles

عمل تعاوني

استخدم الأدوات الهندسية (المسطرة والمثلث القائم) في إنشاء التالي:

- ارسم △ءب جـ. خذ نقطة د على ءب.
- ارسم خطًّا مستقيمًا يمر بنقطة د ويوازي ءجـ.
- لتكن هـ هي نقطة تقاطع دهـ مع ب جـ.
- أوجد بالقياس طول كل من: ب د، دء، ب هـ، هـ جـ.
- احسب النسبتين: $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}}$، $\frac{\text{ب د}}{\text{دء}}$.

قارن بين النسبتين: $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}}$، $\frac{\text{ب د}}{\text{دء}}$.

- قارن بين عدد من الحالات يتحرك فيها موقع دهـ محافظًا على توازيه مع ءجـ.

سوف تتعلم

- خصائص الخط الموازي لأي ضلع في المثلث
- نظرية طاليس
- خصائص منصفات الزوايا الداخلية في المثلث

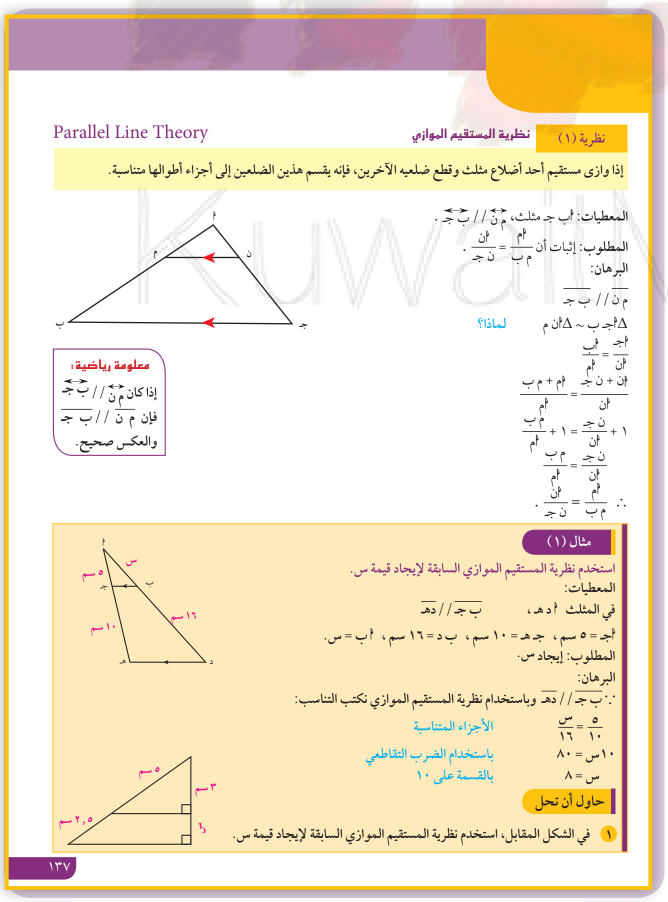
دعنا نفكر ونتناقش

أعط أمثلة عددية توضح خواص التناسب التالية:

ليكن ء، ب، جـ، د أعدادًا حقيقية غير صفرية:

خواص التناسب	أمثلة عددية
إذا كان $\frac{\text{ء}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$. فإن: ١ ءد = ب جـ	
٢ $\frac{\text{ب}}{\text{ء}} = \frac{\text{د}}{\text{جـ}}$	
٣ $\frac{\text{ء}}{\text{جـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}}$	
٤ $\frac{\text{ء} + \text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ} + \text{د}}{\text{د}}$	
٥ $\frac{\text{ء} + \text{جـ}}{\text{ب} + \text{د}} = \frac{\text{ء}}{\text{ب}}$	

١٣٦



نظرية (١) نظرية المستقيم الموازي Parallel Line Theory

إذا وازى مستقيم أحد أضلاع مثلث وقطع ضلعيه الآخرين، فإنه يقسم هذين الضلعين إلى أجزاء أطوالها متناسبة.

المعطيات: ءب جـ مثلث، م ن // ب جـ .

المطلوب: إثبات أن $\frac{\text{ءم}}{\text{م ب}} = \frac{\text{ءن}}{\text{ن جـ}}$.

البرهان:

م ن // ب جـ

△ءجـ ب ~ △ءن م لماذا؟

$\frac{\text{ءجـ}}{\text{ءن}} = \frac{\text{ءب}}{\text{ءم}}$

$\frac{\text{ءن} + \text{ن جـ}}{\text{ءن}} = \frac{\text{ءم} + \text{م ب}}{\text{ءم}}$

$1 + \frac{\text{ن جـ}}{\text{ءن}} = 1 + \frac{\text{م ب}}{\text{ءم}}$

$\frac{\text{ن جـ}}{\text{ءن}} = \frac{\text{م ب}}{\text{ءم}}$

$\therefore \frac{\text{ءم}}{\text{م ب}} = \frac{\text{ءن}}{\text{ن جـ}}$.

معلومة رياضية: إذا كان م ن // ب جـ فإن م ن // ب جـ والعكس صحيح.

مثال (١)

استخدم نظرية المستقيم الموازي السابقة لإيجاد قيمة س.

المعطيات:

في المثلث ء د هـ ، ب جـ // دهـ

ءجـ = ٥ سم، جـ هـ = ١٠ سم، ب د = ١٦ سم، ءب = س.

المطلوب: إيجاد س.

البرهان:

∵ ب جـ // دهـ وباستخدام نظرية المستقيم الموازي نكتب التناسب:

$\frac{\text{٥}}{\text{١٠}} = \frac{\text{س}}{\text{١٦}}$ الأجزاء المتناسبة

١٠س = ٨٠ باستخدام الضرب التقاطعي

س = ٨ بالقسمة على ١٠

حاول أن تحل

١ في الشكل المقابل، استخدم نظرية المستقيم الموازي السابقة لإيجاد قيمة س.

١٣٧

نستطيع كتابة:

$$\frac{أد}{أب} = \frac{أهـ}{أجـ} = \frac{هـ د}{جـ ب}$$

ولكن إذا أخذنا: $\frac{أد}{د ب} = \frac{أهـ}{هـ جـ}$

فهذا التناسب لا يساوي $\frac{د هـ}{ب جـ}$

دعهم يستفيدون جيدًا من المثال (٣) «تجنب الخطأ»، فهو يعطي تفسيرًا جيدًا لأخطاء قد يرتكبها الطلاب.

٦ الربط

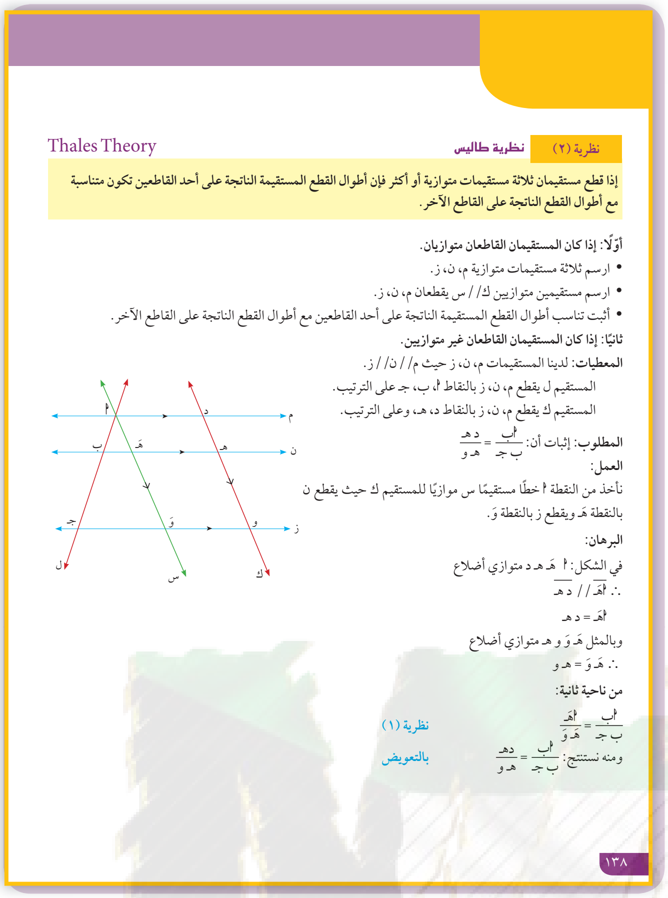
لا يوجد.

٧ أخطاء متوقعة وطرق معالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام القطع المتناسبة في نظرية طاليس. اشرح لهم من خلال أمثلة متعددة الفرق بين استخدام المثلثات المتشابهة ونظرية طاليس.

٨ التقييم

راقب الطلاب وهم يجيبون عن أسئلة «حاول أن تحل»، تأكد من فهمهم لاستخدام التناسب.



نظرية (٢) نظرية طاليس Thales Theory

إذا قطع مستقيمان ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر فإن أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.

أولًا: إذا كان المستقيمان القاطعان متوازيين.
- ارسم ثلاثة مستقيمات متوازية م، ن، ز.
- ارسم مستقيمين متوازيين ك // س يقطعان م، ن، ز.
- أثبت تناسب أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.

ثانيًا: إذا كان المستقيمان القاطعان غير متوازيين.

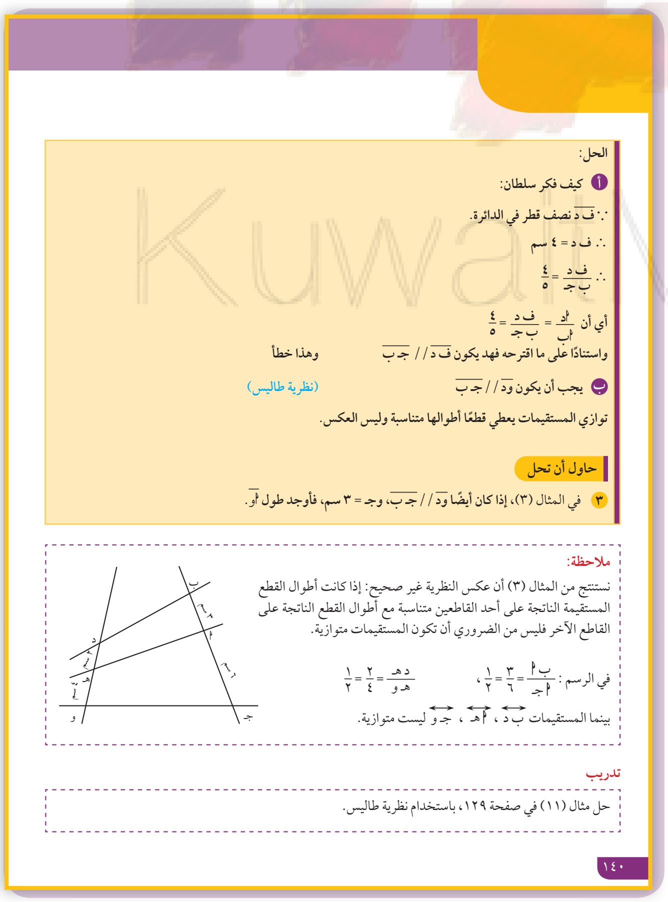
المعطيات: لدينا المستقيمات م، ن، ز حيث م // ن // ز.
المستقيم ل يقطع م، ن، ز بالنقاط أ، ب، جـ على الترتيب.
المستقيم ك يقطع م، ن، ز بالنقاط د، هـ، و على الترتيب.

المطلوب: إثبات أن: $\frac{أب}{ب جـ} = \frac{د هـ}{هـ و}$

العمل:
نأخذ من النقطة أ خطًا مستقيمًا س موازيًا للمستقيم ك حيث يقطع ن بالنقطة هَ ويقطع ز بالنقطة وَ.

البرهان:
في الشكل: أ هَ هـ د متوازي أضلاع
∴ أهَ // د هـ
أهَ = د هـ
وبالمثل هَ وَ و هـ متوازي أضلاع
∴ هَ وَ = هـ و
من ناحية ثانية:
$\frac{أب}{ب جـ} = \frac{أهَ}{هَ وَ}$ نظرية (١)
ومنه نستنتج: $\frac{أب}{ب جـ} = \frac{د هـ}{هـ و}$ بالتعويض

١٣٨



الحل:
أ كيف فكر سلطان:
∵ ف د نصف قطر في الدائرة.
∴ ف د = ٤ سم
∴ $\frac{ف د}{ب جـ} = \frac{٤}{٥}$
أي أن $\frac{أد}{أب} = \frac{ف د}{ب جـ} = \frac{٤}{٥}$
واستنادًا على ما اقترحه فهو يكون ف د // جـ ب وهذا خطأ
ب يجب أن يكون وَد // ب جـ (نظرية طاليس)
توازي المستقيمات يعطي قطعًا أطوالها متناسبة وليس العكس.

حاول أن تحل
٣ في المثال (٣)، إذا كان أيضًا وَد // جـ ب، وجـ = ٣ سم، فأوجد طول أو.

ملاحظة:
نستنتج من المثال (٣) أن عكس النظرية غير صحيح: إذا كانت أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر فليس من الضروري أن تكون المستقيمات متوازية.
في الرسم: $\frac{ب أ}{أ جـ} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$، $\frac{د هـ}{هـ و} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$
بينما المستقيمات ب د، أ هـ، جـ و ليست متوازية.

تدريب
حل مثال (١١) في صفحة ١٢٩، باستخدام نظرية طاليس.

١٤٠

مثال (٢)
من الشكل المقابل أوجد قيمة س.
المعطيات: لدينا مستقيمان غير متوازيين يقطعان ثلاثة مستقيمات متوازية.
أطوال القطع الناتجة هي س، ٢س + ١٠، ١٢، ٣٠ بالترتيب.
المطلوب: إيجاد قيمة س.
البرهان:
بما أن المستقيمين يقطعان ثلاثة مستقيمات متوازية وباستخدام نظرية طاليس
$\frac{س}{٢س + ١٠} = \frac{١٢}{٣٠}$
٣٠ س = ١٢(٢س + ١٠) الضرب التقاطعي
٣٠ س = ٢٤ س + ١٢٠
٦ س = ١٢٠
س = ٢٠ سم

حاول أن تحل
٢ أوجد في الشكل المقابل س، ص في أبسط صورة.

مثال (٣) تجنب الخطأ
في الشكل المقابل: د مركز الدائرة، طول نصف قطر الدائرة = ٤ سم.
أب = ١٠ سم، أد = ٨ سم، ب جـ = ٥ سم، و، ف نقطتان على الدائرة.
قال فهد: النقاط أ، د، ب على استقامة واحدة كذلك النقاط أ، و، جـ وبالترتيب نفسه.
∴ $\frac{أد}{أب} = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$، $\frac{ود}{جـ ب} = \frac{٤}{٥}$
∴ ود // جـ ب
أجابهُ سلطان: في هذه الحالة، ف د، جـ ب متوازيتان أيضًا.
أ اشرح علام ارتكز سلطان في إجابته.
ب أين الخطأ في الحل الذي أعطاه فهد؟

١٣٩

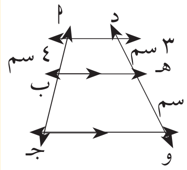
اختبار سريع

١ في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

دهـ = ٣ سم، هـ و = ٥ سم،

أب = ٤ سم. أوجد ب جـ.

$\frac{٢٠}{٣}$ سم

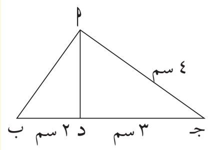


٢ في المثلث أب جـ، $\overline{\text{أد}}$ منصف

الزاوية و.

أوجد أب.

$\frac{٨}{٣}$ سم



٩ إجابات وحلول

« تدريب »

$\frac{\text{أب}}{\text{ب د}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{جـ هـ}}$ (١) $\frac{\text{أجـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{أد}}{\text{دو}}$ (٢)

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{ب د}} = \frac{\text{أد}}{\text{دو}}$ ، $\frac{١,٥}{٢} = \frac{٣,٥}{\text{س}}$ ، س = $٤,\overline{٦}$ م.

«حاول أن تحل»

١ $\frac{٣}{\text{س}} = \frac{٥}{٢,٥}$ ؛ س = ١,٥.

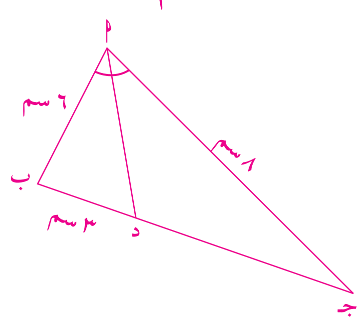
٢ $\frac{١٦,٥}{\text{ص}} = \frac{١٥}{٢٥}$ ؛ ص = ٢٧,٥.

$\frac{١٥}{٢٥} = \frac{\text{س}}{٣٠}$ ؛ س = ١٨.

٣ أو = ١٢ سم

٤ هـ د = ٠,٢٥ كم

٥



$\frac{٨}{٦} = \frac{\text{جـ د}}{\text{د ب}}$ ومنه نستنتج أن جـ د = ٤ سم

٦ أم ≃ ٢,٥ كم، ب م ≃ ٣ كم

مثال (٤) **تطبيقات حياتية**

تصميم أنماط لشراع المركب: يستخدم صانعو الأشرعة الحاسوب لتكوين نمط لكل شراع يصنعونه، ثم يرسمون مخططًا له بالطباشير على الأرضية التي يقصونه عليها. بعد أن يقطعوا إطارات الشراع، يحيكونها معًا لتكوين الشراع بأكمله. الخطوط المحاكاة تكون متوازية كما في الشكل حيث الأبعاد بالسنتيمتر. أوجد س، ص.

المعطيات: $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{دهـ}}$ // $\overline{\text{وز}}$، $\overline{\text{أجـ}}$ = ٣٠، دو = ٩٠، أب = ٤٥، ب هـ = ١٣٥

جـ د = س ، هـ ز = ص.

المطلوب:

إيجاد س، ص.

البرهان:

من توازي القطع المستقيمة واستنادًا إلى نظرية طاليس، نكتب التناسب:

$\frac{٣٠}{\text{س}} = \frac{٤٥}{١٣٥}$ باستخدام نظرية طاليس

س = ٩٠

$\frac{\text{ص}}{١٣٥} = \frac{٩٠}{٩٠}$

∴ ص = ١٣٥ سم.

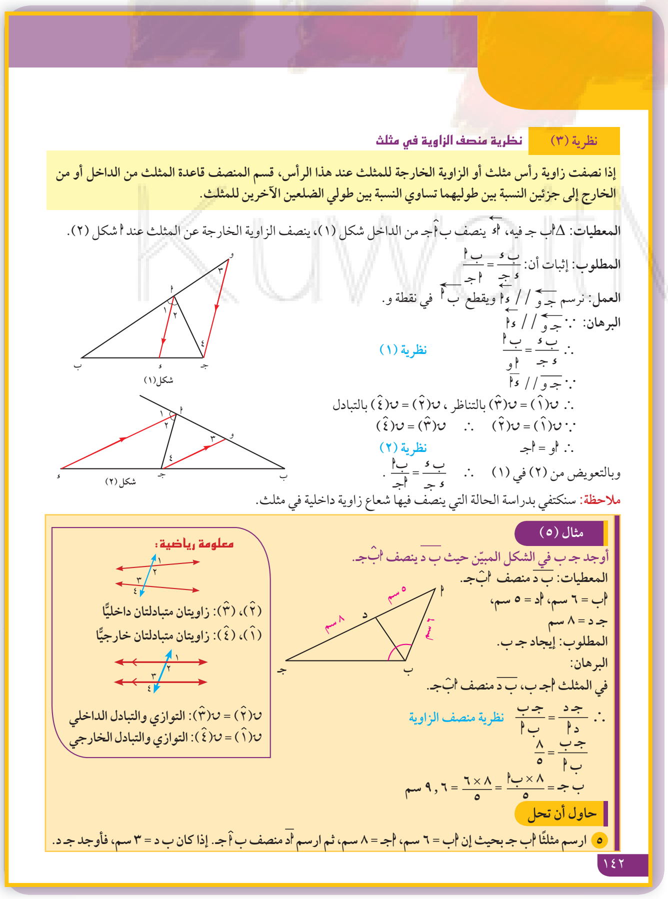
حاول أن تحل

٤ باستخدام نظام إشارة (طبوغرافيا)، وضع علمان عند النقطتين أ، ب كما في الشكل المقابل بحيث يكون $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{جـ د}}$.

إذا كان أب = ٠,٣ كم، ب د = ٠,١ كم، دجـ = ٠,٥ كم.

فأوجد المسافة بين القصر هـ والمَعْلَم الأثري د.

١٤١



نظرية (٣) **نظرية منصف الزاوية في مثلث**

إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس، قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزئين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين للمثلث.

المعطيات: Δأب جـ فيه، $\overleftarrow{\text{أء}}$ ينصف ب$\hat{\text{أ}}$جـ من الداخل شكل (١)، ينصف الزاوية الخارجة عن المثلث عند أ شكل (٢).

المطلوب: إثبات أن: $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}}$

العمل: نرسم $\overleftarrow{\text{جـ و}}$ // $\overleftarrow{\text{ءأ}}$ ويقطع $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ في نقطة و.

البرهان: ∵ $\overleftarrow{\text{جـ و}}$ // $\overleftarrow{\text{ءأ}}$

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ و}}$ نظرية (١)

∵ $\overline{\text{جـ و}}$ // $\overline{\text{ءأ}}$

∴ ق($\hat{١}$) = ق($\hat{٣}$) بالتناظر ، ق($\hat{٢}$) = ق($\hat{٤}$) بالتبادل

∵ ق($\hat{١}$) = ق($\hat{٢}$) ∴ ق($\hat{٣}$) = ق($\hat{٤}$)

∴ أو = أجـ نظرية (٢)

وبالتعويض من (٢) في (١) ∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}}$.

ملاحظة: سنكتفي بدراسة الحالة التي ينصف فيها شعاع زاوية داخلية في مثلث.

مثال (٥)

أوجد جـ ب في الشكل المبيّن حيث $\overline{\text{ب د}}$ ينصف أ$\hat{\text{ب}}$جـ.

المعطيات: $\overline{\text{ب د}}$ منصف أ$\hat{\text{ب}}$جـ.

أب = ٦ سم، أد = ٥ سم،

جـ د = ٨ سم

المطلوب: إيجاد جـ ب.

البرهان:

في المثلث أجـ ب، $\overline{\text{ب د}}$ منصف أ$\hat{\text{ب}}$جـ.

∴ $\frac{\text{جـ د}}{\text{د أ}} = \frac{\text{جـ ب}}{\text{ب أ}}$ نظرية منصف الزاوية

$\frac{\text{جـ ب}}{\text{ب أ}} = \frac{٨}{٥}$

ب جـ = $\frac{٨ \times \text{بأ}}{٥} = \frac{٨ \times ٦}{٥}$ = ٩,٦ سم

معلومة رياضية:

($\hat{٢}$)، ($\hat{٣}$): زاويتان متبادلتان داخليًّا

($\hat{١}$)، ($\hat{٤}$): زاويتان متبادلتان خارجيًّا

ق($\hat{٢}$) = ق($\hat{٣}$): التوازي والتبادل الداخلي

ق($\hat{١}$) = ق($\hat{٤}$): التوازي والتبادل الخارجي

حاول أن تحل

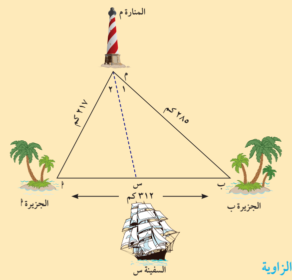
٥ ارسم مثلثًا أب جـ بحيث إن أب = ٦ سم، أجـ = ٨ سم، ثم ارسم $\overline{\text{أد}}$ منصف ب$\hat{\text{أ}}$جـ. إذا كان ب د = ٣ سم، فأوجد جـ د.

١٤٢

مثال (٦)

تبيّن لمراقب موجود في المنارة (م) أن قياسي الزاويتين (١)، (٢) المكونتين من كل من الجزيرتين (أ)، (ب) والمنارة(م) والسفينة (س) متساويان.

أوجد بعد السفينة عن كل من الجزيرتين إذا كانت السفينة والجزيرتين على استقامة واحدة.



الحل:

المعطيات:

تكوّن المنارة والجزيرتان مثلثًا م أ ب أبعاده: م أ = ٢١٧،

م ب = ٢٨٥ ، أ ب = ٣١٢

المستقيم المار بالمنارة والسفينة ينصف الزاوية أ م̂ ب.

السفينة والجزيرتان على استقامة واحدة.

المطلوب:

إيجاد س أ، س ب.

البرهان:

∵ $\overline{\text{م س}}$ منصف أ م̂ ب

∴ $\frac{\text{س أ}}{\text{س ب}} = \frac{\text{م أ}}{\text{م ب}}$ نظرية منصف الزاوية

$\frac{\text{س أ + س ب}}{\text{س ب}} = \frac{\text{م أ + م ب}}{\text{م ب}}$ من خواص التناسب

$\frac{\text{٣١٢}}{\text{س ب}} = \frac{\text{٢١٧ + ٢٨٥}}{\text{٢٨٥}}$

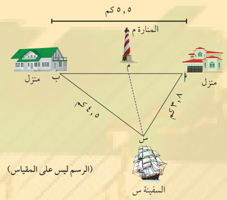
∴ س ب = $\frac{\text{٣١٢} \times \text{٢٨٥}}{\text{٢١٧ + ٢٨٥}}$ = ١٧٧

س أ = ٣١٢ − ١٧٧ = ١٣٥

تبعد السفينة عن الجزيرة أ حوالى ١٣٥ كم وتبعد عن الجزيرة ب حوالى ١٧٧ كم.

حاول أن تحل

٦ أوجد المسافة بين المنارة وكل من المنزلين إذا علمنا أن المنزلين والمنارة على استقامة واحدة، وأن المستقيم المار بالسفينة والمنارة ينصف الزاوية أ س̂ ب.



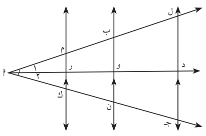
التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ ٣-٤

التناسبات والمثلثات المتشابهة
Proportions and Similar Triangles

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) أكمل بحسب الشكل المبيّن علمًا بأن: ق(1̂) = ق(2̂).



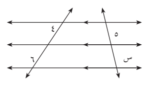
(أ) $\frac{\text{جـ ك}}{} = \frac{\text{م ل}}{\text{م أ}}$

(ب) $\frac{\text{ن جـ}}{\text{ب ل}} = \frac{\text{ك ن}}{}$

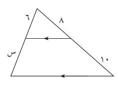
(جـ) $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ د}} = \frac{}{\text{د ل}}$

(٢) أوجد قيمة س.

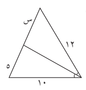
(أ)



(ب)



(جـ)



(٣) طولا ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية ٦٠ سم، ٨٠ سم. أوجد طولي القطعتين اللتين ينقسم إليهما الوتر بمنصف الزاوية القائمة.

(٤) **اختبر نفسك:** في أحد المثلثات، يقسم منصف إحدى زواياه الضلع المقابل لها إلى قطعتين طولهما ٦ سم، ٩ سم. أي من الأطوال التالية يمثل طولي الضلعين الآخرين لهذا المثلث بالسنتيمترات؟

(١) ٤، ٦   (٢) ٢٠، ٣٠   (٣) ١٢، ١٨   (٤) ٦، ١٥

(أ) (١) فقط   (ب) (٢) فقط

(جـ) (١)، (٢)، (٣)، (٤)   (د) (١)، (٢)، (٣) فقط

(٥) رسم كريم المثلث أ ب جـ فوجد أن منصف الزاوية جـ ينصف الضلع المقابل لهذه الزاوية.

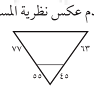
(أ) ارسم مثلثًا له مواصفات مثلث كريم نفسه.

(ب) ما نوع هذا المثلث؟ فسّر إجابتك.

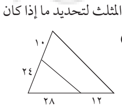
(٦) منصف إحدى زوايا مثلث يقسم الضلع المقابل إلى قطعتين طولهما ٥ سم، ٣ سم. إذا كان طول أحد ضلعي المثلث يساوي ٧,٥ سم. فأوجد كل الأطوال الممكنة للضلع الآخر.

(٧) استخدم عكس نظرية المستقيم الموازي لأحد أضلاع المثلث لتحديد ما إذا كان المستقيمان متوازيين.

(أ)



(ب)

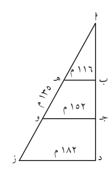


المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) في الشكل المقابل، أوجد:

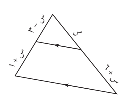
(أ) أ هـ

(ب) وز

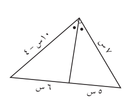


(٢) أوجد قيمة س.

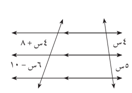
(أ)



(ب)



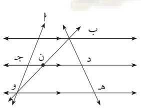
(جـ)



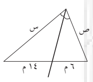
(٣) أثبت صحة النتيجة التالية: (مستخدمًا نظرية المستقيم الموازي لقاعدة المثلث).

إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // $\overleftrightarrow{\text{و هـ}}$ ، فإنّ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ و}} = \frac{\text{ب د}}{\text{د هـ}}$.

إرشاد: ارسم $\overleftrightarrow{\text{ب و}}$ يقطع $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ في نقطة ن.

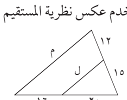


(٤) **مساح الأراضي:** قطعة أرض على شكل مثلث محيطها ٨٠ م.
إذا كان شريط المساح (الذي يقيس الأرض) ينصف إحدى زوايا المثلث كما في الشكل.
فأوجد طولي الضلعين: س، ص.

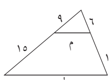


(٥) استخدم عكس نظرية المستقيم الموازي لأحد أضلاع المثلث لتحديد ما إذا كان المستقيمان ل، م متوازيين.

(أ)



(ب)

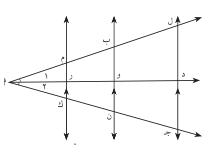


(٦) أكمل بحسب الشكل المبيّن علمًا بأن: ق(1̂) = ق(2̂).

(أ) $\frac{\text{أ م}}{\text{م ب}} = \frac{\text{أ ك}}{}$

(ب) $\frac{\text{ب و}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{و ن}}{}$

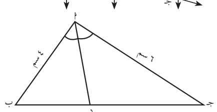
(جـ) $\frac{\text{أ ل}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ جـ}}{}$



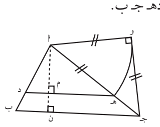
(٧) في المثلث أ ب جـ، $\overline{\text{أ د}}$ منصف Â.

إذا كان أ ب = ٤ سم، أ جـ = ٦ سم، ب جـ = ٨ سم.

فأوجد دجـ، دب.



*(٨) في الشكل المقابل أثبت أن مساحة المثلث أ د هـ تساوي مساحة شبه المنحرف د هـ جـ ب.



٣ـ٥ العلاقة بين محيطي شكلين متشابهين والعلاقة بين مساحتيهما
Relation Between Perimeters and Areas of Two Similar Figures

عمل تعاوني

اعمل مع زميل لك لبحث العلاقة بين محيطي شكلين متشابهين والعلاقة بين مساحتيهما.

خطوات العمل:

١ على ورقة المربعات حدّد مستطيلًا أبعاده ٣ وحدات، ٤ وحدات.
٢ حدد ثلاثة مستطيلات مشابهة للمستطيل الأصلي.
٣ استخدم الرسم في ملء الجدول (١).
٤ استعن بالمعلومات التي حصلت عليها في الجدول (١) لتكمل الجدول (٢).
٥ ماذا تعني النسب التي حصلت عليها مقارنة بنسبة التشابه؟
٦ قارن بين النتائج التي حصلت عليها والنتائج التي حصل عليها زملاؤك في الفصل.

سوف تتعلم
- العلاقة بين محيطات الأشكال المتشابهة ونسبة التشابه
- العلاقة بين مساحات الأشكال المتشابهة ونسبة التشابه

جدول (١)

المستطيل	العرض	الطول	المحيط	المساحة
الأصلي				
I				
II				
III				

جدول (٢)

المستطيل	النسبة بين العرضين	النسبة بين الطولين	النسبة بين المحيطين	النسبة بين المساحتين	نسبة التشابه
	١:٢	١:٢			٢
I: الأصلي					
II: الأصلي					
III: الأصلي					

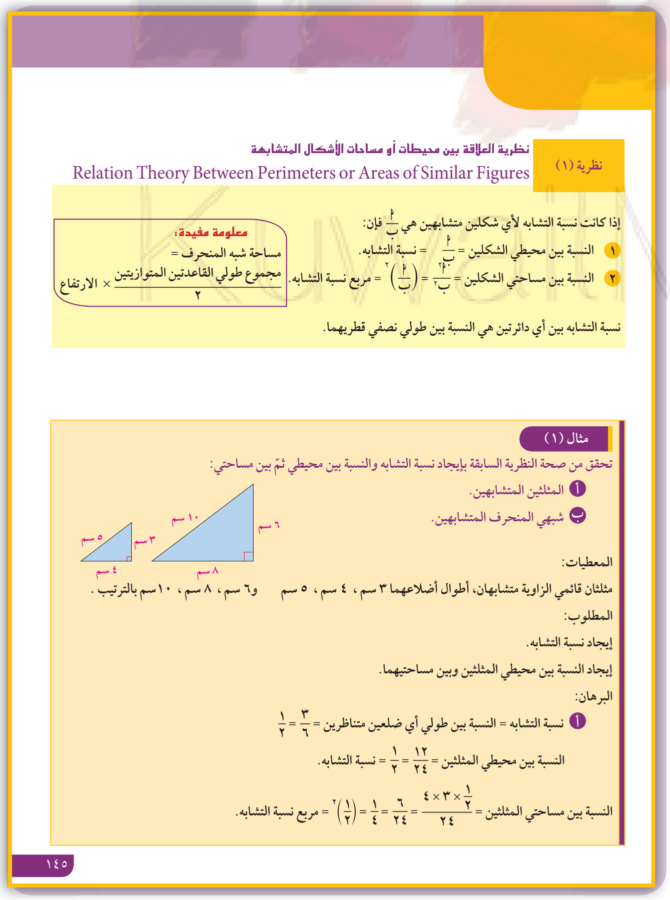
ورقة المربعات

من جدول (١) وجدول (٢) نستنتج صحة التعميم التالي:

تعميم

النسبة بين المحيطين = نسبة التشابه
النسبة بين المساحتين = مربع نسبة التشابه
نسبة التشابه بين محيطي دائرتين تساوي النسبة بين طولي نصفي قطري الدائرتين.

١٤٤



نظرية (١) نظرية العلاقة بين محيطات أو مساحات الأشكال المتشابهة
Relation Theory Between Perimeters or Areas of Similar Figures

إذا كانت نسبة التشابه لأي شكلين متشابهين هي $\frac{أ}{ب}$ فإن:

١ النسبة بين محيطي الشكلين = $\frac{أ}{ب}$ = نسبة التشابه.
٢ النسبة بين مساحتي الشكلين = $\frac{أ^٢}{ب^٢} = \left(\frac{أ}{ب}\right)^٢$ = مربع نسبة التشابه.

معلومة مفيدة:
مساحة شبه المنحرف = $\frac{\text{مجموع طولي القاعدتين المتوازيتين}}{٢} \times$ الارتفاع

نسبة التشابه بين أي دائرتين هي النسبة بين طولي نصفي قطريهما.

مثال (١)

تحقق من صحة النظرية السابقة بإيجاد نسبة التشابه والنسبة بين محيطي ثمّ بين مساحتي:
أ المثلثين المتشابهين.
ب شبهي المنحرف المتشابهين.

المعطيات:
مثلثان قائمي الزاوية متشابهان، أطوال أضلاعهما ٣ سم ، ٤ سم ، ٥ سم و٦ سم ، ٨ سم ، ١٠ سم بالترتيب .

المطلوب:
إيجاد نسبة التشابه.
إيجاد النسبة بين محيطي المثلثين وبين مساحتيهما.

البرهان:
أ نسبة التشابه = النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين = $\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

النسبة بين محيطي المثلثين = $\frac{١٢}{٢٤} = \frac{١}{٢}$ = نسبة التشابه.

النسبة بين مساحتي المثلثين = $\frac{\frac{١}{٢} \times ٣ \times ٤}{٢٤} = \frac{٦}{٢٤} = \frac{١}{٤} = \left(\frac{١}{٢}\right)^٢$ = مربع نسبة التشابه.

١٤٥

٣ـ٥: العلاقة بين محيطي شكلين متشابهين والعلاقة بين مساحتيهما

١ الأهداف

- يتعرف العلاقة بين محيطات الأشكال المتشابهة ونسبة التشابه.
- يتعرف العلاقة بين مساحات الأشكال المتشابهة ونسبة التشابه.
- يتعرف التشابه بين دائرتين.
- يتعرف نسبة التشابه بين دائرتين.
- يتعرف العلاقة بين مساحتي دائرتين ونسبة التشابه.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

نسبة التشابه بين محيطي شكلين متشابهين – نسبة التشابه بين مساحتي شكلين متشابهين.

٣ الأدوات والوسائل

ورقة مربعات – مسطرة – آلة حاسبة – مثلث – بركار – جهاز إسقاط – حاسوب.

٤ التمهيد

اسأل الطلاب:

(أ) كيف تتشابه المضلعات؟ وما نسبة التشابه؟
(ب) ما العلاقة بين الأضلاع المتناسبة وقياس الزاويا المتناظرة؟
(جـ) ما هي نظريات تشابه المثلثات؟
(د) كيف تجد محيط بعض الأشكال الهندسية؟
(هـ) ما هي قواعد مساحات بعض الأشكال الهندسية؟
(مثلث، مربع، مستطيل، شبه منحرف، متوازي أضلاع، معين، دائرة).

٥ التدريس

ارسم على ورقة مربعات شكلًا هندسيًّا واعرضه أمام الطلاب، ثم وزّع عليهم أوراق مربعات، واطلب إليهم أن

يرسموا شكلًا هندسيًّا مشابهًا، ثم يحددوا ما إذا كان أكبر أم أصغر من الشكل الذي عرضته أمامهم.

اطلب إليهم كتابة النسبة بين قياسات الشكل الذي رسموه والشكل الذي عرضته عليهم. ذكرهم بضرورة تبسيط هذه النسبة.

ركز من خلال أمثلة متعددة على القاعدتين الواردتين في نظرية (١). أعطِ أمثلة بديلة تطبيقية تساعدهم على التمييز بين نسبة تشابه المحيطات ونسبة تشابه المساحات للأشكال المتشابهة.

٦ الربط

من المعروف أن إنتاج الأرض الزراعية يتناسب مع مساحة قطعة الأرض المزروعة، على افتراض أن أبعاد قطعة أرض أصبحت ثلاثة أمثال أبعادها السابقة، فإن الإنتاج سيصبح ٩ أمثال الإنتاج السابق.

٧ أخطاء متوقعة وطرق معالجتها

قد يخلط الطلاب بين نسبة محيطي شكلين متشابهين وبين نسبة مساحتيهما، أكد لهم بأن النسبة بين المحيطين هي نسبة التشابه بينما النسبة بين مساحتيهما هي مربع نسبة التشابه.

٨ التقييم

راقب عمل الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل». تأكد من أنهم ميزوا بين نسبة تشابه محيطي شكلين ونسبة تشابه بين مساحتي شكلين متشابهين.

اختبار سريع

المضلعان أ ب جـ د ، ك ل م ن متشابهان.

أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٤ سم ، جـ د = ٧ سم ،

أ د = ٦ سم.

طول الضلع الأصغر في المضلع ك ل م ن يساوي ٧,٥ سم. أوجد بقية أطوال أضلاع ك ل م ن ونسبة التشابه بين محيطيهما وبين مساحتيهما.

ك ل = ٧,٥ سم ، ل م = ١٠ سم ، م ن = ١٧,٥ سم،

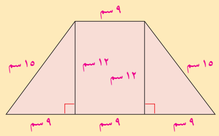
ك ل = ١٥ سم.

نسبة التشابه بين المحيطين: $\frac{٢}{٥}$ أو $\frac{٥}{٢}$

وبين مساحتيهما : $\frac{٤}{٢٥}$ أو $\frac{٢٥}{٤}$

ب المعطيات:

شبهي منحرف متطابقي الضلعين، أطوال أضلاعهما ٦ سم، ١٠ سم، ١٨ سم، ١٠ سم و ٩سم، ١٥سم، ٢٧سم، ١٥سم بالترتيب.



المطلوب: إيجاد نسبة التشابه.

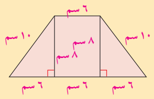
إيجاد النسبة بين محيطي شبهي المنحرف والنسبة بين مساحتيهما.

البرهان:

نسبة التشابه = $\frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$

النسبة بين محيطي شبهي المنحرف = $\frac{٦ + ١٨ + ٢٠}{٣٠ + ٢٧ + ٩}$

= $\frac{٤٤}{٦٦} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$ = نسبة التشابه.



النسبة بين مساحتي شبهي المنحرف = $\frac{٨ \times ١٢}{١٨ \times ١٢}$

= $\frac{٨}{١٨} = \frac{٤}{٩} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^٢$ = مربع نسبة التشابه.

حاول أن تحل

١ لدينا مثلثان متشابهان بنسبة $\frac{٢}{٣}$. إذا كان محيط المثلث الأكبر ٤٥ سم، فأوجد محيط المثلث الأصغر.

مثال (٢)

مضلعان متشابهان أحدهما أطوال أضلاعه٣ سم، ٥ سم، ٦ سم، ٨ سم، ١٠ سم والآخر محيطه ٤٨ سم، أوجد أطوال أضلاع المضلع الثاني.

المعطيات: مضلعان متشابهان

أطوال أضلاع الأول: ٣ سم، ٥ سم، ٦ سم، ٨ سم، ١٠ سم.

محيط المضلع الثاني = ٤٨ سم.

المطلوب: إيجاد أطوال أضلاع المضلع الثاني.

البرهان:

محيط المضلع الأول = ٣ + ٥ + ٦ + ٨ + ١٠ = ٣٢ سم.

النسبة بين محيطي المضلعين = $\frac{٣٢}{٤٨} = \frac{٢}{٣}$.

١٤٦

لتكن أ، ب، جـ، د، هـ على التوالي أطوال أضلاع المضلع الثاني المناظرة للأطوال ٣، ٥، ٦، ٨، ١٠ في المضلع الأول.

النسبة بين ضلعين متناظرين = النسبة بين محيطي المضلعين.

$\frac{٣}{أ} = \frac{٢}{٣}$ ∴ أ = ٤,٥ سم $\frac{٥}{ب} = \frac{٢}{٣}$ ∴ ب = $\frac{١٥}{٢}$ = ٧,٥ سم

$\frac{٦}{جـ} = \frac{٢}{٣}$ ∴ جـ = ٩ سم $\frac{٨}{د} = \frac{٢}{٣}$ ∴ د = ١٢ سم

$\frac{١٠}{هـ} = \frac{٢}{٣}$ ∴ هـ = ١٥ سم

حاول أن تحل

٢ مضلعان متشابهان أحدهما أطوال أضلاعه ٣ سم، ٥ سم، ٦ سم، ٨ سم، ١٠ سم والآخر ينقص محيطه ٨ سم عن محيط المضلع الأول. أوجد أطوال أضلاع المضلع الثاني.

مثال (٣)

ليكن لدينا دائرتان م، ن: الأولى طول نصف قطرها نق$_١$، والثانية طول نصف قطرها نق$_٢$.

أوجد النسبة بين محيطي الدائرتين والنسبة بين مساحتيهما.

المعطيات:

دائرتان طول نصف قطر الأولى نق$_١$ وطول نصف قطر الثانية نق$_٢$.

المطلوب:

إيجاد النسبة بين محيطي الدائرتين والنسبة بين مساحتيهما.

البرهان:

نسبة التشابه = $\frac{نق_١}{نق_٢}$

النسبة بين المحيطين = $\frac{٢\pi نق_١}{٢\pi نق_٢} = \frac{نق_١}{نق_٢}$

النسبة بين المساحتين = $\frac{\pi (نق_١)^٢}{\pi (نق_٢)^٢} = \frac{(نق_١)^٢}{(نق_٢)^٢} = \left(\frac{نق_١}{نق_٢}\right)^٢$

حاول أن تحل

٣ دائرتان م، ن، طول نصف قطر الأولى = ٥ سم وطول نصف قطر الثانية = ٨ سم. أوجد النسبة بين محيطي الدائرتين والنسبة بين مساحتيهما.

١٤٧

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ محيط المثلث الأصغر = $\frac{٢}{٣} \times ٤٥ = ٣٠$

٢ محيط المضلع الثاني $٣٢ - ٨ = ٢٤$

نسبة التشابه بين محيطي المضلعين = $\frac{٣٢}{٢٤} = \frac{٤}{٣}$.

وهي نسبة الأضلاع المتناظرة بين المضلعين. نأخذ أ، ب، جـ، د، هـ أطوال أضلاع المضلع الثاني.

$\frac{٣}{أ} = \frac{٤}{٣}$ ومنه أ = ٢,٢٥ سم

كذلك ب = ٣,٧٥ سم

جـ = ٤,٥ سم، د = ٦ سم

هـ = ٧,٥ سم

٣ النسبة بين المحيطين = $\frac{٥}{٨}$ أو $\frac{٨}{٥}$

النسبة بين المساحتين = $\frac{٢٥}{٦٤}$ أو $\frac{٦٤}{٢٥}$

٤ محيط المضلع الأكبر = $\frac{٤ \times ٢٤}{٣} = ٣٢$ سم

٥ كلا، النسبة بين المساحتين = $\frac{١٦}{٢٥}$

الفرق بين المساحتين = $\frac{٩س}{٢٥}$:(س − $\frac{١٦}{٢٥}$ س)

النسبة المئوية = ٣٦٪

النسبة بين محيطي دائرتين تساوي نسبة التشابه بين الدائرتين.
النسبة بين مساحتي دائرتين تساوي مربع نسبة التشابه بين الدائرتين.

مثال (٤)

لدينا شكلان رباعيان متشابهان بنسبة تشابه $\frac{٥}{٤}$. إذا كانت مساحة الشكل الرباعي الأكبر ٣٠ سم²، فما مساحة الشكل الرباعي الأصغر؟

المعطيات: رباعيان متشابهان.

نسبة التشابه = $\frac{٥}{٤}$ مساحة الشكل الرباعي الأكبر = ٣٠ سم²

المطلوب: إيجاد مساحة الشكل الرباعي الأصغر.

البرهان: النسبة بين المساحتين = مربع نسبة التشابه

$\frac{\text{مساحة الشكل الرباعي الأكبر}}{\text{مساحة الشكل الرباعي الأصغر}} = \left(\frac{٥}{٤}\right)^٢ = \frac{٢٥}{١٦}$

$\frac{٣٠}{\text{مساحة الشكل الرباعي الأصغر}} = \frac{٢٥}{١٦}$

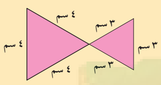
مساحة الشكل الرباعي الأصغر = $\frac{١٦ \times ٣٠}{٢٥} = ١٩,٢$ سم²

حاول أن تحل

٤ النسبة بين مساحتي مضلعين هي $\frac{١٦}{٩}$. ما محيط المضلع الأكبر إذا كان محيط المضلع الأصغر ٢٤ سم؟

مثال (٥) تطبيقات حياتية

رسم يوسف ربطة عنق على شكل عقدة فراشة. لاحظ أن قسمي الربطة غير متطابقين. أوجد النسبة المئوية لمساحة المنطقة التي عليه أن يقطعها من المثلث الأكبر ليصبح القسمان متطابقين؟



الحل:

طريقة أولى للحل:

المثلثان كل منهما متطابق الأضلاع.

∴ المثلثان متشابهان

نسبة التشابه = $\frac{٣}{٤}$

∴ النسبة بين مساحتي المثلثين = $\left(\frac{٣}{٤}\right)^٢ = \frac{٩}{١٦}$

١٤٨

إذا فرضنا أن مساحة Δ الأكبر = س

فإن مساحة Δ الأصغر = $\frac{٩س}{١٦}$

وعليه يكون الفرق بين المساحتين = س − $\frac{٩س}{١٦} = \frac{٧}{١٦}$ س

النسبة المئوية لمساحة المنطقة المطلوبة = $\frac{\frac{٧}{١٦}س}{س} \times ١٠٠٪ = ٤٣,٧٥٪$.

يجب أن يقطع ٤٣,٧٥٪ من مساحة المثلث الأكبر.

طريقة ثانية للحل:

مساحة المثلث الأصغر = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولي أي ضلعين × جيب الزاوية المحددة بهما

= $\frac{١}{٢} \times ٣ \times ٣ \times$ جا ٦٠° لماذا؟

= $\frac{٩\sqrt{٣}}{٤}$ وحدة مربعة

مساحة المثلث الأكبر = $\frac{١}{٢} \times ٤ \times ٤ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ وحدة مربعة

= $٤\sqrt{٣}$ وحدة مربعة

الفرق بين مساحتي المثلثين = $٤\sqrt{٣} - \frac{٩\sqrt{٣}}{٤}$ وحدة مربعة

= $\frac{٧\sqrt{٣}}{٤}$ وحدة مربعة

النسبة المئوية للفرق بين المساحتين = $\left(\frac{٧\sqrt{٣}}{٤} \div ٤\sqrt{٣}\right) \times ١٠٠٪$

= ٤٣,٧٥٪

حاول أن تحل

٥ هل تبقى النسبة المئوية دون تغيير إذا كان طول ضلع المثلث الأصغر ٤ سم، وطول ضلع المثلث الأكبر ٥ سم؟ فسّر إجابتك.

١٤٩

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ
٣-٥

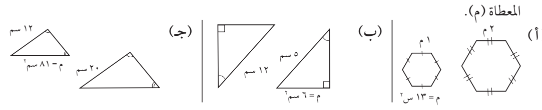
العلاقة بين محيطي شكلين متشابهين والعلاقة بين مساحتيهما

The Relation between Perimeters and Areas of Two Similar Figures

المجموعة أ تمارين أساسية

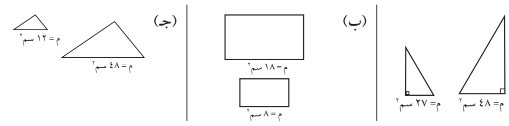
(١) في كل من أزواج الأشكال المبينة المتشابهة، أوجد مساحة الشكل الأكبر بدلالة مساحة الشكل الأصغر المعطاة (م).

(أ) (ب) (جـ)



(٢) في كل من أزواج الأشكال المتشابهة التالية، أوجد النسبة بين محيطيهما.

(أ) (ب) (جـ)



(٣) الحديقة (أ) مستطيلة الشكل بعداها ١٠ م، ١٢ م تحتاج إلى ٦٠ مترًا مكعبًا من الماء شهريًّا لريها. الحديقة (ب) مشابهة للحديقة (أ) عرضها ٣٠ م. إذا كان حجم الماء اللازم للري يتناسب مع مساحة الحديقة فما كمية الماء اللازمة شهريًّا لري الحديقة (ب)؟

(٤) إذا كانت مساحتا مثلثين متشابهين: ٥٠ سم^{٢}، ٩٨ سم^{٢}. فأوجد النسبة بين محيطيهما.

(٥) أوجد نسبة التشابه في كلّ من التالي:

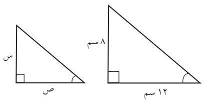
(أ) دائرتان مساحتاهما: ٢π سم^{٢} ، ٢٠٠ π سم^{٢}.

(ب) مضلعان ثمانيان متشابهان مساحتاهما: ٤ م^{٢}، ١٦ م^{٢}.

(جـ) مثلثان متشابهان مساحتاهما: ٨٠ سم^{٢}، ٢٠ سم^{٢}.

(د) شبها منحرف متشابهان مساحتاهما: ٤٩ سم^{٢}، ٩ سم^{٢}.

(٦) في الشكل المبيّن مساحة المثلث الأصغر تساوي ١٢ سم^{٢}.
أوجد س، ص علمًا بأن المثلثين متشابهان.

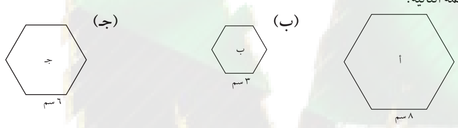


(٧) سوف يزداد عدد الطلاب في إحدى المدارس من ٢٠٠ طالب إلى ٣٩٥ طالبًا.
قررت إدارة المدرسة زيادة مساحة فناء المدرسة (على شكل مستطيل) من ٣٠ م × ٦٠ إلى ٦٠ م × ١٢٠.
وضح للإدارة ما إذا كانت مساحة الفناء الجديدة ستتسع لعدد الطلاب الإضافي أم لا.

(٨) (أ) أوجد مساحة سداسي منتظم طول ضلعه ٢ سم (أبق على الجذر التربيعي في الإجابة).

(ب) استخدم الإجابة (أ)، ونسبة مساحات المضلعات المتشابهة لإيجاد مساحات المضلعات السداسية المنتظمة التالية.

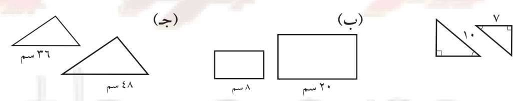
(أ) (ب) (جـ)



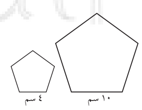
المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) في كل من أزواج الأشكال المتشابهة، أوجد النسبة بين محيطي الشكلين، وكذلك النسبة بين مساحتيهما.

(أ) (ب) (جـ)



(٢) في الشكل مضلعان خماسيان منتظمان (لاحظ أنهما متشابهان). إذا كانت مساحة المضلع الأصغر ٢٧,٥ سم^{٢} تقريبًا. فاحسب مساحة المضلع الأكبر.



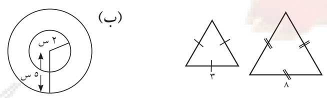
(٣) **خدمة البيئة:** في عطلة الصيف الماضي، قامت مجموعة من طلاب المدرسة الثانوية بزراعة قطعة أرض في منطقة مستصلحة للزراعة فأنتجت ١٢ طنًّا من الخضراوات، استخدموا أرباحها في أعمال خيرية.
وبسبب نجاحهم منحتهم هيئة استصلاح الأراضي في عطلة صيف العام التالي قطعة أرض مشابهة، أبعادها ٢,٥ من المرات من أبعاد القطعة الأولى.
كم طنًّا من المتوقع أن يجنيها هؤلاء الطلاب إذا جرت الزراعة في الظروف السابقة نفسها؟

(٤) إذا كانت النسبة بين مساحتي لوحين متشابهين من الزجاج هي ٣:٥ وكان سعر اللوح الأصغر ١٠ دنانير، فما سعر اللوح الأكبر؟

(٥) ارسم مربعًا مساحته ٩ سم^{٢}، ثم ارسم مربعًا مساحته أربعة أمثال مساحة المربع الأول.
أوجد نسبة محيطي المربعين.

(٦) أوجد النسبة بين المحيطين والنسبة بين المساحتين في كل من زوجي الأشكال المتشابهة التالية:

(أ) (ب)

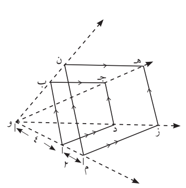


(٧) صالة ألعاب مستطيلة أبعادها ١٢ × ٩ من الأمتار. تمت تغطية أرضيتها بالخشب فكلفت ٨٥٠ دينارًا. ما كلفة تغطية أرضية صالة أكبر بنوع الخشب نفسه وبالأسعار نفسها أبعادها ١٦ × ١٢ من الأمتار إذا كانت كلفة تغطية أرض الصالة بالخشب تتناسب مع مساحة الصالة.

(٨) في الشكل أدناه أب جـ د، م ن هـ ز شبها منحرفين. أوجد النسبة بين:

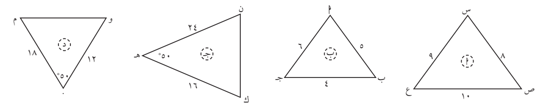
(أ) محيطي شبهي المنحرف

(ب) مساحتي شبهي المنحرف



اختبار الوحدة الثالثة

(١) أي زوج من المثلثات متشابه؟ ____________

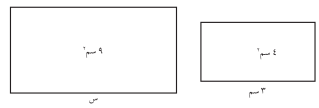


(أ) (أ)، (ب) **(ب)** (جـ)، (د) **(جـ)** (ب)، (د) **(د)** (أ)، (جـ)

(٢) إذا نصفت زاوية $\hat{\text{أ}}$ بالمنصف $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ في Δأب جـ، فأيّ من التناسبات التالية صحيح؟ ____________

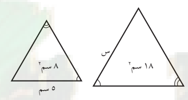
(أ) $\frac{\text{أب}}{\text{جـ د}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{ب د}}$ **(ب)** $\frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{جـ د}}$ **(جـ)** $\frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أد}}{\text{أجـ}}$ **(د)** $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{ب د}}{\text{جـ د}}$

(٣) اختر القيمة الصحيحة للمجهول س. علمًا بأن المستطيلين متشابهين.



(أ) ٤ سم **(ب)** ٥ سم **(جـ)** $\frac{٩}{٢}$ سم **(د)** $\frac{٩}{٤}$ سم

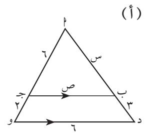
(٤) اختر القيمة الصحيحة للمجهول س:



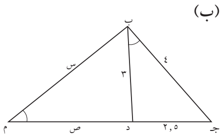
(أ) ٧ سم **(ب)** ٨ سم **(جـ)** $\frac{١٥}{٢}$ سم **(د)** $\frac{١٥}{٤}$ سم

(٥) أوجد س، ص.

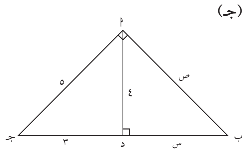
(أ)



(ب)



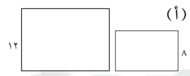
(جـ)



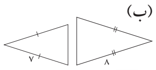
(٦) صف شيئًا يصعب قياس ارتفاعه بطريقة مباشرة. ثم صف طريقة لقياس هذا الارتفاع بطريقة تستخدم فيها تشابه المثلثات.

(٧) أوجد النسبة بين مساحتي الشكلين المتشابهين في كل مما يلي:

(أ)

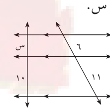


(ب)

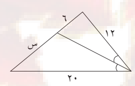


(٨) أوجد س.

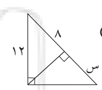
(أ)



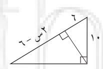
(ب)



(جـ)



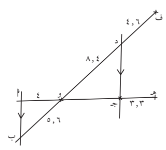
(د)



تمارين إثرائيّة

(١) في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{\text{أب}} \parallel \overleftrightarrow{\text{دجـ}}$

هل المستقيمان $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ف هـ}}$ متوازيان؟

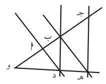


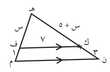
(٢) و، أ، ب، جـ على استقامة واحدة.

و، د، هـ على استقامة واحدة.

$\overleftrightarrow{\text{أد}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب د}} \parallel \overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$

أثبت أن: $(\text{وب})^2 = \text{وأ} \times \text{وجـ}$

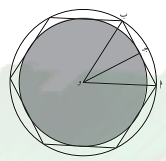




(٣) في الشكل المقابل، أوجد قيمة س. ثم وضح هل المثلث هـ ف ك قائم الزاوية.

(٤) هل يمكن إيجاد النسبة بين مساحتي الدائرتين،

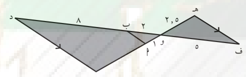
علماً أن المضلع السداسي هو مضلع منتظم؟



(٥) المعطيات: $\overleftrightarrow{\text{ف هـ}} \parallel \overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

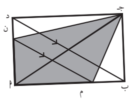
ب د = ٤ × ب و.

السؤال: هل جـ د = ٤ أب؟



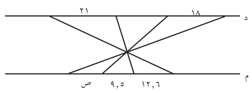
(٦) في المستطيل أب جـ د، $\overline{\text{ن م}} \parallel \overline{\text{ب د}}$.

قارن بين مساحتي المثلثين أجـ م، أجـ ن.



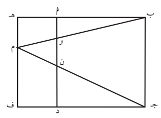
(٧) المستقيمان: د، م متوازيان.

أوجد قيمة ص.

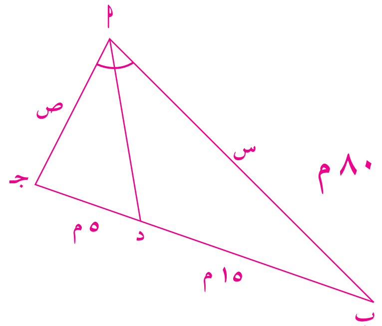


(٨) في الشكل، أب جـ د مربع، ب جـ ف هـ مستطيل.

أثبت أن مساحة المثلث م ن و لا تتغير عندما يتغير موقع م على $\overline{\text{ف هـ}}$.



المرشد لحل المسائل



إجابة «مسألة إضافية»

محيط المثلث = ٨٠ م

∵ س + ص + ١٥ + ٥ = ٨٠ م

∴ س + ص = ٦٠

∵ $\overline{\text{أد}}$ منصف $\hat{\text{أ}}$

∴ $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{١٥}{٥} = \frac{٣}{١}$ نظرية

$\Leftarrow \frac{\text{س}}{\text{س + ص}} = \frac{٣}{٣ + ١}$

∴ $\frac{\text{س}}{٦٠} = \frac{٣}{٤}$

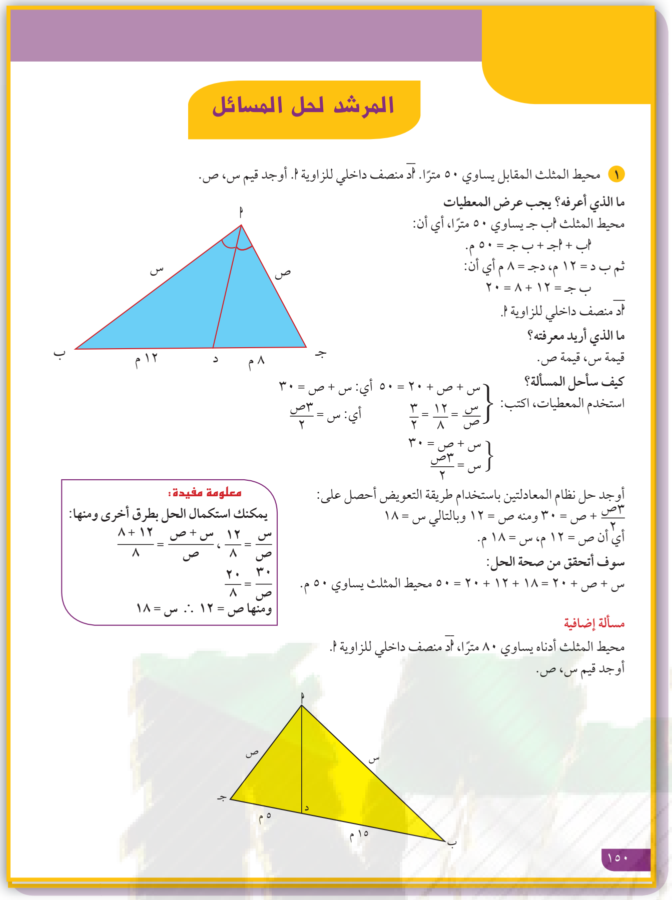
٤س = ٣ × ٦٠

ومنها س = ٤٥ م

∴ ص = ٦٠ − ٤٥

ص = ١٥ م

توجد طرق أخرى للحل.



المرشد لحل المسائل

١ محيط المثلث المقابل يساوي ٥٠ مترًا. $\overline{\text{أد}}$ منصف داخلي للزاوية أ. أوجد قيم س، ص.

ما الذي أعرفه؟ يجب عرض المعطيات

محيط المثلث أب جـ يساوي ٥٠ مترًا، أي أن:

أب + أجـ + ب جـ = ٥٠ م.

ثم ب د = ١٢ م، دجـ = ٨ م أي أن:

ب جـ = ١٢ + ٨ = ٢٠

$\overline{\text{أد}}$ منصف داخلي للزاوية أ.

ما الذي أريد معرفته؟

قيمة س، قيمة ص.

كيف سأحل المسألة؟

استخدم المعطيات، اكتب:

س + ص + ٢٠ = ٥٠ أي: س + ص = ٣٠

$\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$ أي: س = $\frac{\text{٣ص}}{٢}$

س + ص = ٣٠

س = $\frac{\text{٣ص}}{٢}$

أوجد حل نظام المعادلتين باستخدام طريقة التعويض أحصل على:

$\frac{\text{٣ص}}{٢}$ + ص = ٣٠ ومنه ص = ١٢ وبالتالي س = ١٨

أي أن ص = ١٢ م، س = ١٨ م.

سوف أتحقق من صحة الحل:

س + ص + ٢٠ = ١٨ + ١٢ + ٢٠ = ٥٠ محيط المثلث يساوي ٥٠ م.

معلومة مفيدة:

يمكنك استكمال الحل بطرق أخرى ومنها:

$\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{١٢}{٨}$ ، $\frac{\text{س + ص}}{\text{ص}} = \frac{١٢ + ٨}{٨}$

$\frac{٣٠}{\text{ص}} = \frac{٢٠}{٨}$

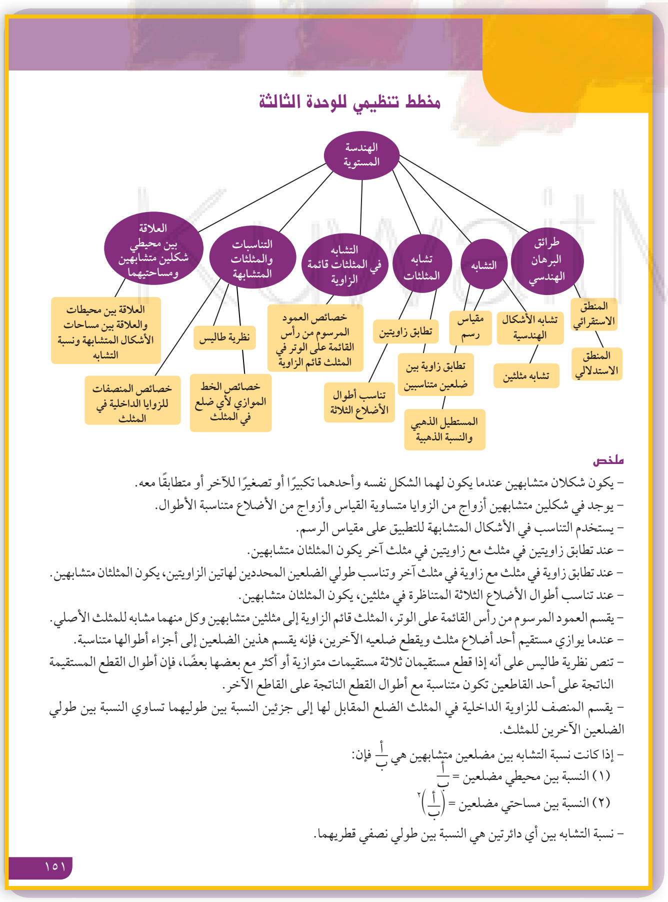
ومنها ص = ١٢ ∴ س = ١٨

مسألة إضافية

محيط المثلث أدناه يساوي ٨٠ مترًا، $\overline{\text{أد}}$ منصف داخلي للزاوية أ.

أوجد قيم س، ص.

١٥٠



مخطط تنظيمي للوحدة الثالثة

ملخص

- يكون شكلان متشابهين عندما يكون لهما الشكل نفسه وأحدهما تكبيرًا أو تصغيرًا للآخر أو متطابقًا معه.
- يوجد في شكلين متشابهين أزواج من الزوايا متساوية القياس وأزواج من الأضلاع متناسبة الأطوال.
- يستخدم التناسب في الأشكال المتشابهة للتطبيق على مقياس الرسم.
- عند تطابق زاويتين في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر يكون المثلثان متشابهين.
- عند تطابق زاوية في مثلث مع زاوية في مثلث آخر وتناسب طولي الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين، يكون المثلثان متشابهين.
- عند تناسب أطوال الأضلاع الثلاثة المتناظرة في مثلثين، يكون المثلثان متشابهين.
- يقسم العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر، المثلث قائم الزاوية إلى مثلثين متشابهين وكل منهما مشابه للمثلث الأصلي.
- عندما يوازي مستقيم أحد أضلاع مثلث ويقطع ضلعيه الآخرين، فإنه يقسم هذين الضلعين إلى أجزاء أطوالها متناسبة.
- تنص نظرية طاليس على أنه إذا قطع مستقيمان ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر مع بعضها بعضًا، فإن أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.
- يقسم المنصف للزاوية الداخلية في المثلث الضلع المقابل لها إلى جزئين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين للمثلث.
- إذا كانت نسبة التشابه بين مضلعين متشابهين هي $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ فإن:

(١) النسبة بين محيطي مضلعين = $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

(٢) النسبة بين مساحتي مضلعين = $\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{٢}$

- نسبة التشابه بين أي دائرتين هي النسبة بين طولي نصفي قطريهما.

١٥١