الوحدة التاسعة: الهندسة التحليلية

Analytic Geometry

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

٩ – ١ : المستوى الإحداثي

جزء ١ : المسافة بين نقطتين.

جزء ٢ : نقطة المنتصف.

٩ – ٢ : تقسيم قطعة مستقيمة

جزء ١ : التقسيم من الداخل.

جزء ٢ : التقسيم من الخارج.

٩ – ٣ (أ): ميل الخط المستقيم

جزء ١ : معدل التغير.

جزء ٢ : إيجاد الميل.

جزء ٣ : العلاقة بين ميل المستقيم وظل الزاوية.

٩ – ٣ (ب): معادلة الخط المستقيم

جزء ١ : كتابة معادلة الخط المستقيم.

جزء ٢ : الصورة العامة لمعادلة المستقيم.

٩ – ٤ : البعد بين نقطة ومستقيم

جزء ١ : إيجاد البعد بين نقطة ومستقيم.

٩ – ٥ : معادلة الدائرة

جزء ١ : معادلة الدائرة.

جزء ٢ : الصورة القياسية لمعادلة الدائرة.

جزء ٣ : الصورة العامة لمعادلة الدائرة.

جزء ٤ : معادلة المماس على الدائرة.

جزء ٥ : العلاقة بين دائرتين في المستوي.

مقدمة الوحدة

بعد أن أوجد رينيه ديكارت (Rene Descartes) تلك العلاقة الشهيرة بين الهندسة والهندسة التحليليّة، بدأت هذه العلاقة بالتطور حتى أصبح بإمكاننا حل مسائل كان من الصعب إيجاد حلول لها باستخدام الطرائق التقليدية. كما وبدأت التطبيقات الحياتية مع الهندسة التحليليّة تأخذ طريقها بشكل سريع بعد التوسع في استخدام الحاسوب والأجهزة الخلوية.

تستخدم البرامج على الحاسوب بشكل أساسي الإحداثيات الهندسية لتوجد أشكالًا مختلفة من الصور والتصاميم، حيث ترى صورًا ثلاثية الأبعاد على شاشة التلفاز.

وقد استخدمت أيضًا في مجال الترفيه والتسلية، الإحداثيات الهندسية لإنتاج رسوم متحركة وألعاب فيديو متعددة ومتنوعة للكبار والصغار.

ومن المهم أن للإحداثيات الهندسية الأثر الكبير في نمذجة تصاميم الذرات والنجوم والحيوانات والمنشآت الكبيرة. وقد اعتمدت كل الرسوم والصور الموجودة في هذا الكتاب بالدرجة الأولى على الإحداثيات الهندسية.

على سبيل المثال: يسكن خالد على بعد ٦ كم غربًا و٣ كم شمالًا بالنسبة إلى مدرسته.

أما صالح فيسكن على بعد ٥ كم جنوبًا بالنسبة إلى مدرسته.

كم كيلومتر يوجد بين مسكن خالد ومسكن صالح؟

يمكن نمذجة هذه المسألة باستخدام المستوى الإحداثي على أن تكون نقطة الأصل بناء المدرسة.

الوحدة التاسعة

الهندسة التحليليّة
Analytic Geometry

مشروع الوحدة: اختيار وظيفة

١ مقدمة المشروع: هل لديك عمل ما؟ إذا لم يكن لديك عمل، فما الوظيفة التي تفضلها؟ ما المصاريف المتوقعة؟ ما المبلغ الذي ستتقاضاه؟ كيف يمكنك المقارنة بين وظيفتين أو بين دخلين؟ إن معادلات المستقيم تساعدك على الإجابة عن هذه الأسئلة كلها.

خلال عملكم على هذا المشروع، سوف ترسمون الخطوط المستقيمة وتكتبون المعادلات التي تنمذج مختلف الأعمال أو الوظائف وسوف تستخدمون هذه النماذج لتوقع الدخل.

٢ الهدف: محادثة شخص ما حول أول عمل قام به. اختيار العمل أو الوظيفة المفضلة مع تبرير الاختيار.

٣ اللوازم: أوراق رسم مليمترية وآلة حاسبة.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أوجد قيمة الأجر في الساعة لوظيفتين تفضلهما. ارسم تمثيلًا بيانيًا بالخطوط تبيّن فيه مدخول كل وظيفة. يكون عدد الساعات بين ٠ و١٠ على المحور الأفقي وقيمة المدخول على المحور الرأسي. على افتراض أنك عملت ٨ ساعات، اشرح كيف يفسر التمثيل البياني فرق المدخول بين الوظيفتين.

على افتراض أنك تنال ٤٠٠ فلس في الساعة لقاء عملك في أحد أفران الحلويات ويحسم من أجرك ١٠٠ فلس ضريبة أسبوعية، إذا كنت تعمل س ساعة خلال ٥ أيام في الأسبوع وتدفع يوميًا ٢٥٠ فلسًا ثمن وجبة:

أ اكتب معادلة تبيّن فيها ربحك في أسبوع واحد بعد احتساب الضريبة والمصاريف.

ب في هذه الحالة ماذا يمثّل الميل (معامل س)؟ وماذا يمثل التقاطع مع محور الصادات؟

جـ كم ساعة عمل يلزمك كي يساوي ربحك الصافي ١٤ دينارًا و ٦٥٠ فلسًا بعد احتساب الضريبة والمصاريف؟

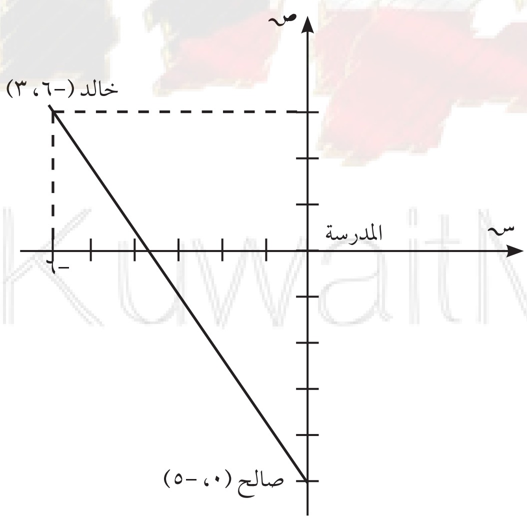
د حاور رجلًا مسنًّا حول وظيفته. اسأله عن إيجابيات هذه الوظيفة وسلبياتها من حيث الراتب والمصاريف. اكتب معادلة تبيّن فيها دخله الأسبوعي بعد احتساب المصاريف.

٥ التقرير: ضع تقريرًا مفصلًا حول مقارنة دخل كل وظيفة وكيفية رسم التمثيلات البيانية والاستفادة منها للإجابة عن الأسئلة.

دروس الوحدة

المستوى الإحداثي	تقسيم قطعة مستقيمة	ميل الخط المستقيم	معادلة الخط المستقيم	البعد بين نقطة ومستقيم	معادلة الدائرة
٩-١	٩-٢	٩-٣ (أ)	٩-٣(ب)	٩-٤	٩-٥

١١٨



المسافة $= \sqrt{(-٦ - ٠)^{٢} + (٣ - (-٥))^{٢}}$

$= \sqrt{٣٦ + ٦٤}$

$= \sqrt{١٠٠} = ١٠$

أي يوجد ١٠ كم بين مسكن خالد ومسكن صالح.

ملاحظة:

يمكن استخدام نظرية فيثاغورث.

مشروع الوحدة

ماذا سأفعل بعد التخرج؟ كيف سيكون مستقبلي؟

هل كان اختياري للتخصص سليمًا؟

هل ستتحقق طموحاتي؟

أسئلة كثيرة ومتنوعة تدور في رأس كل طالب:

وظيفة؟ رجل أعمال؟ مهنة حرة؟ تاجر؟ مزارع؟

يساعدك العمل في هذا المشروع على تحديد جزء من خياراتك المستقبلية.

سوف تستخدم رسومًا بيانية لتقارن بين الوظائف وتختار منها الأفضل.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

(أ) ص = ٤ , ٠ س − ١ , ٣٥.

(ب) يمثل الميل أجر الساعة لقاء العمل. يمثل التقاطع مع محور الصادات القيمة الثابتة للمصاريف الأسبوعية إضافة إلى الضريبة.

(جـ) نحل المعادلة: ١٤ , ٦٥ = ٤ , ٠ س − ١ , ٣٥

فنحصل على س = ٤٠. لتحصل على ١٤ دينارًا ٦٥٠ فلسًا يتوجب عليك أن تعمل ٤٠ ساعة أسبوعيًّا.

(د) تتنوّع الإجابات.

التقرير

قدم تقريرًا مفصلًا بالنتائج والأبحاث التي توصلت إليها، بالنسبة إلى الوظيفة المفضلة لديك أو أي مجال عمل آخر لمستقبلك.

ناقش مع زملائك هذا التقرير، واستمع إلى ملاحظاتهم باهتمام، ثم أعد النظر ببعض النقاط إذا كان ذلك ضروريًّا.

الوحدة التاسعة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت كيف تضع النقاط على المستوى الإحداثي.
- تعلمت كيفية تطبيق نظرية فيثاغورث.
- تعلمت كيف توجد القيم المطلقة والجذور التربيعية.

ماذا سوف تتعلم؟

- سوف توجد المسافة بين نقطتين.
- سوف توجد طول قطعة مستقيمة.
- سوف تحدد إحداثيات نقطة المنتصف لقطعة مستقيمة.
- سوف تحدد إحداثيات نقطة تقسيم قطعة مستقيمة من الداخل ومن الخارج.
- سوف تقوم بحساب ميل خط مستقيم.
- سوف تقوم برسم خط مستقيم عندما تعرف نقطة منه وتعرف ميله.
- سوف تتعرف العلاقة بين ميل المستقيم وظل الزاوية.
- سوف تكتب معادلة المستقيمات المتوازية أو المتعامدة.
- سوف تتعرف صورة معادلة الخط المستقيم بمعلومية الميل ونقطة أو نقطتين.
- سوف تتعرف البعد بين نقطة ومستقيم.
- سوف تتعرف الدائرة ومعادلتها.
- سوف تتعرف الصورة العامة لمعادلة الدائرة وتوظيفها.
- سوف توجد مركز الدائرة وطول نصف قطرها.
- سوف تكتب معادلة المماس لدائرة.
- سوف تتعرف العلاقة بين دائرتين في المستوي.

أضف إلى معلوماتك

ديكارت والهندسة التحليليَّة

(١٥٩٦ – ١٦٥٠م)

رينيه ديكارت Descartes الرياضي والفيلسوف الفرنسي، هو الذي ربط بين العدد والنقطة وهذا ما أنتجَ لنا الهندسة التحليلية، حيث ابتكر النظام الإحداثي المكوَّن من محورين متعامدين متقاطعين (محور السينات ومحور الصادات)، والذي بواسطته يمكن التعبير عن كل نقطة في المستوى بعددين حقيقيين (س، ص). وباستخدام النظام الإحداثي، استطاع ديكارت أن يثبت صحة كل خواصّ الهندسة الإقليديَّة، معبرًا عن المستقيمات والمنحنيات بمعادلات جبرية باعتبارها مسارات لنقطة عامة تتحرك بشروط تحكم العلاقة بين(س، ص).

رينيه ديكارت

المصطلحات الأساسية

طول القطعة المستقيمة – المسافة بين نقطتين – البعد بين نقطة ومستقيم – نقطة المنتصف – ميل المستقيم – ظل الزاوية – ميلا مستقيمين متوازيين – ميلا مستقيمين متعامدين – معادلة الخط المستقيم – الدائرة – معادلة الدائرة – مركز الدائرة – نصف قطر الدائرة – مماس الدائرة.

١١٩

سلّم التقييم

٤.	الحسابات صحيحة بالكامل. الرسوم البيانية واضحة ومعبرة. التقرير مفصل ودقيق.
٣.	معظم الحسابات صحيحة. الرسوم البيانية واضحة ويمكن قراءتها. التقرير بحاجة إلى بعض التفاصيل.
٢.	بعض الحسابات صحيحة. الرسوم البيانية مقبولة مع بعض الأخطاء. التقرير إلى حد ما مقبول.
١.	معظم عناصر المشروع ناقصة وغير مقبولة.

٩ـ١ : المستوى الإحداثي

١ الأهداف

- يوجد المسافة بين نقطتين.
- يوجد منتصف قطعة مستقيمة.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

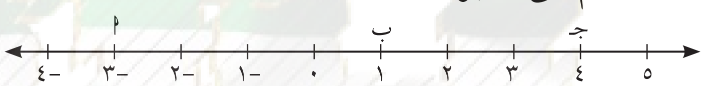
المسافة بين نقطتين – نقطة المنتصف.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة – ورق رسم بياني – آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

(١) ارسم على السبورة خط الأعداد.



اسأل الطلاب:

إيجاد المسافات:

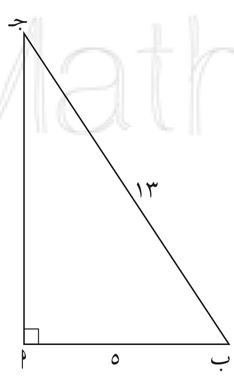
- من ﺃ إلى ب.
- من جـ إلى ﺃ.

اطلب إليهم إيجاد نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{ﺃب}}$.

(٢) في المثلث ﺃب جـ قائم الزاوية ﺃ، حيث:

ﺃب = ٥، ب جـ = ١٣

- أوجد ﺃجـ.



(٣) في المستوى الإحداثي، حيث و نقطة الأصل للمحورين نأخذ ﺃ(س، ٣).

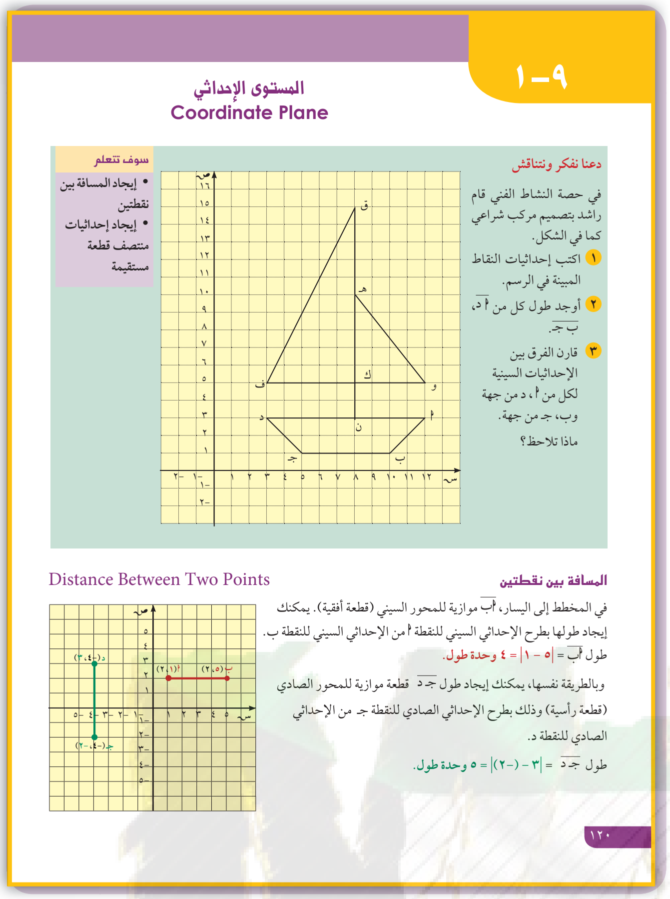
حدد موقع ﺃ إذا كان (وﺃ)^{٢} = ٢٥.

ناقش كل الحلول الممكنة.

٥ التدريس

من المهم جدًّا التركيز على المستوى الإحداثي، كي يتمكن الطالب من تحديد موقع نقطة من خلال الإحداثيات، فهذا سوف يساعد كثيرًا على التطبيق في مواقف حياتية تواجه الطالب في المستقبل.

ساعد الطلاب على التعامل بواقعية مع فقرة «دعنا نفكر ونتناقش». أخبرهم أن إنجاز تصاميم كثيرة مثل المراكب، والطائرات والسيارات... تبدأ أولًا بفكرة من هذا النوع.



٩ـ١

المستوى الإحداثي
Coordinate Plane

دعنا نفكر ونتناقش

في حصة النشاط الفني قام راشد بتصميم مركب شراعي كما في الشكل.

١ اكتب إحداثيات النقاط المبينة في الرسم.

٢ أوجد طول كل من $\overline{\text{ﺃ د}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$.

٣ قارن الفرق بين الإحداثيات السينية لكل من ﺃ، د من جهة وب، جـ من جهة. ماذا تلاحظ؟

سوف تتعلم

- إيجاد المسافة بين نقطتين
- إيجاد إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة

المسافة بين نقطتين — Distance Between Two Points

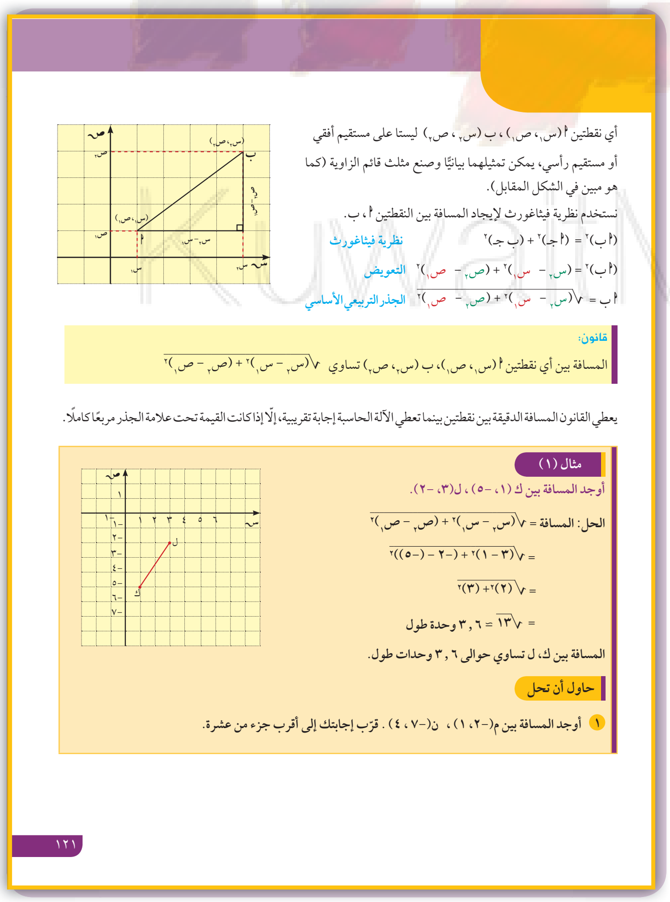
في المخطط إلى اليسار، $\overline{\text{ﺃب}}$ موازية للمحور السيني (قطعة أفقية). يمكنك إيجاد طولها بطرح الإحداثي السيني للنقطة ﺃ من الإحداثي السيني للنقطة ب.

طول $\overline{\text{ﺃب}}$ = |٥ − ١| = ٤ وحدة طول.

وبالطريقة نفسها، يمكنك إيجاد طول $\overline{\text{جـ د}}$ قطعة موازية للمحور الصادي (قطعة رأسية) وذلك بطرح الإحداثي الصادي للنقطة جـ من الإحداثي الصادي للنقطة د.

طول $\overline{\text{جـ د}}$ = |٣ − (−٢)| = ٥ وحدة طول.

١٢٠



أي نقطتين ﺃ (س$_{١}$، ص$_{١}$)، ب (س$_{٢}$، ص$_{٢}$) ليستا على مستقيم أفقي أو مستقيم رأسي، يمكن تمثيلهما بيانيًّا وصنع مثلث قائم الزاوية (كما هو مبين في الشكل المقابل).

نستخدم نظرية فيثاغورث لإيجاد المسافة بين النقطتين ﺃ، ب.

(ﺃب)^{٢} = (ﺃجـ)^{٢} + (ب جـ)^{٢} نظرية فيثاغورث

(ﺃب)^{٢} = (س$_{٢}$ − س$_{١}$)^{٢} + (ص$_{٢}$ − ص$_{١}$)^{٢} التعويض

ﺃب = $\sqrt{(\text{س}_{٢} - \text{س}_{١})^{٢} + (\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١})^{٢}}$ الجذر التربيعي الأساسي

قانون:

المسافة بين أي نقطتين ﺃ (س$_{١}$، ص$_{١}$)، ب (س$_{٢}$، ص$_{٢}$) تساوي $\sqrt{(\text{س}_{٢} - \text{س}_{١})^{٢} + (\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١})^{٢}}$

يعطي القانون المسافة الدقيقة بين نقطتين بينما تعطي الآلة الحاسبة إجابة تقريبية، إلّا إذا كانت القيمة تحت علامة الجذر مربعًا كاملًا.

مثال (١)

أوجد المسافة بين ك (١، −٥)، ل(٣، −٢).

الحل: المسافة = $\sqrt{(\text{س}_{٢} - \text{س}_{١})^{٢} + (\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١})^{٢}}$

= $\sqrt{(٣ - ١)^{٢} + (-٢ - (-٥))^{٢}}$

= $\sqrt{(٢)^{٢} + (٣)^{٢}}$

= $\sqrt{١٣}$ = ٣,٦ وحدة طول

المسافة بين ك، ل تساوي حوالى ٣,٦ وحدات طول.

حاول أن تحل

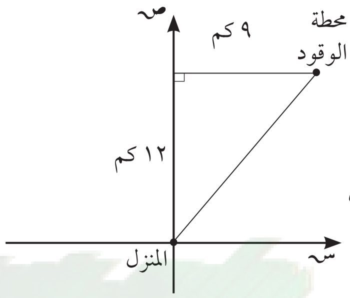
١ أوجد المسافة بين م(−٢، ١)، ن(−٧، ٤). قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

١٢١

اشرح جيدًا قانون المسافة بين نقطتين، وكيف أن نظرية فيثاغورث ساعدت كثيرًا على وضع هذا القانون. أشر إلى أن إيجاد المسافات بين النقاط يساعد على إيجاد محيط مضلع.

تأكد من أنهم فهموا جيدًا إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة، وأنهم تمكنوا من إيجاد الفرق بين قاعدة المسافة بين نقطتين وقاعدة منتصف القطعة المستقيمة، بخاصة إذا كان هناك حاجة في حالة معينة لاستخدام كلتا القاعدتين.

٦ الربط



خرج أحمد من منزله وقاد سيارته شمالًا، فاجتاز مسافة ١٢ كم، ثم انحرف يمينًا باتجاه الشرق وتوقف عند محطة وقود بعد أن اجتاز ٩ كم.

ساعد أحمد على معرفة أقصر مسافة تفصله الآن عن منزله كخط مستقيم. (١٥ كم)

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تحديد نقطة في مستوى الإحداثيات وفي تحديد نقطة البداية ونقطة النهاية في قاعدة المسافة بين نقطتين.

ساعدهم على ترميز النقاط حتى يتمكنوا من التطبيق بشكل صحيح.

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتدرك مدى استيعابهم مفاهيم هذا الدرس ومهاراته.

اختبار سريع

١ إذا كان أ(٧، ١١)، ب (١٣، ٧)، جـ (٣، ٥).

فأوجد أب، أجـ، ب جـ.

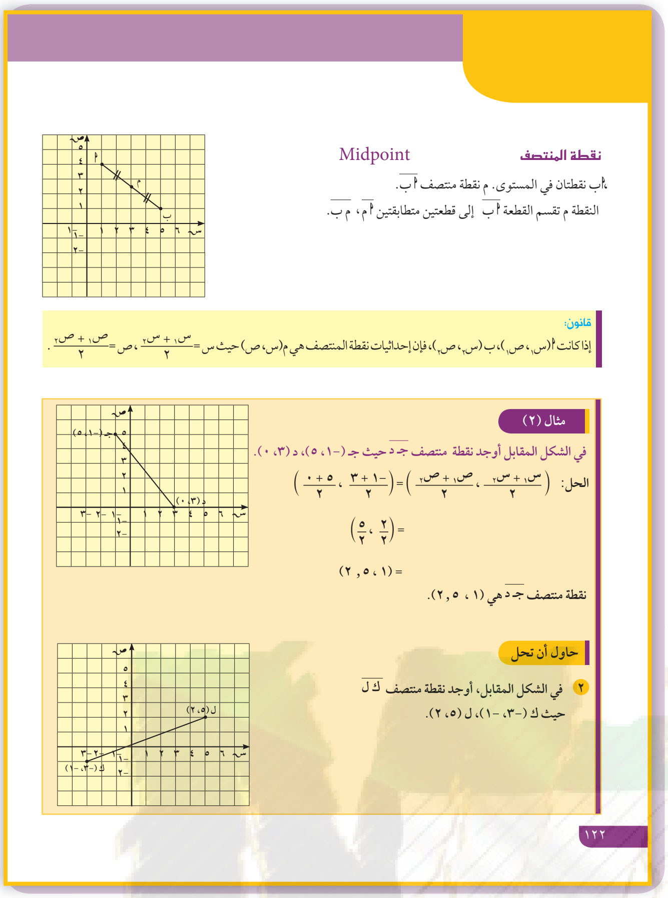
ثم أثبت أن Δأب جـ قائم الزاوية أ ومتطابق الضلعين.

أب = $\sqrt{٥٢}$ ≃ ٧,٢١، أجـ = $\sqrt{٥٢}$ ≃ ٧,٢١،

ب جـ = $\sqrt{١٠٤}$ ≃ ١٠,٢.

(أب)^٢ + (أجـ)^٢ = ٥٢ + ٥٢ = ١٠٤ = (ب جـ)^٢

إذًا أب جـ قائم الزاوية أ ومتطابق الضلعين.



نقطة المنتصف Midpoint

أب نقطتان في المستوى. م نقطة منتصف $\overline{أب}$.

النقطة م تقسم القطعة $\overline{أب}$ إلى قطعتين متطابقتين $\overline{أم}$، $\overline{م ب}$.

قانون:

إذا كانت أ(س$_١$، ص$_١$)، ب (س$_٢$، ص$_٢$)، فإن إحداثيات نقطة المنتصف هي م(س، ص) حيث س = $\frac{س_١ + س_٢}{٢}$، ص = $\frac{ص_١ + ص_٢}{٢}$.

مثال (٢)

في الشكل المقابل أوجد نقطة منتصف $\overline{جـ د}$ حيث جـ (−١، ٥)، د (٣، ٠).

الحل: $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right) = \left(\frac{-١ + ٣}{٢}، \frac{٥ + ٠}{٢}\right)$

$= \left(\frac{٢}{٢}، \frac{٥}{٢}\right)$

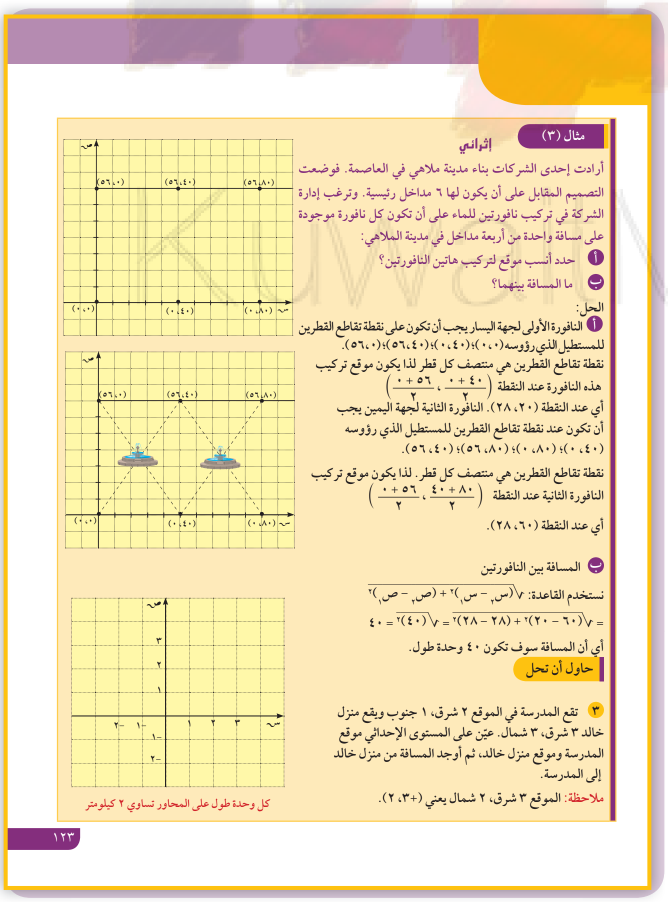
= (١، ٢,٥)

نقطة منتصف $\overline{جـ د}$ هي (١، ٢,٥).

حاول أن تحل

٢ في الشكل المقابل، أوجد نقطة منتصف $\overline{ك ل}$ حيث ك (−٣، −١)، ل (٥، ٢).

١٢٢



مثال (٣) **إثرائي**

أرادت إحدى الشركات بناء مدينة ملاهي في العاصمة. فوضعت التصميم المقابل على أن يكون لها ٦ مداخل رئيسية. وترغب إدارة الشركة في تركيب نافورتين للماء على أن تكون كل نافورة موجودة على مسافة واحدة من أربعة مداخل في مدينة الملاهي:

أ حدد أنسب موقع لتركيب هاتين النافورتين؟

ب ما المسافة بينهما؟

الحل:

أ النافورة الأولى لجهة اليسار يجب أن تكون على نقطة تقاطع القطرين للمستطيل الذي رؤوسه (٠، ٠)؛ (٤٠، ٠)؛ (٤٠، ٥٦)؛ (٠، ٥٦).

نقطة تقاطع القطرين هي منتصف كل قطر لذا يكون موقع تركيب هذه النافورة عند النقطة $\left(\frac{٤٠ + ٠}{٢}، \frac{٥٦ + ٠}{٢}\right)$

أي عند النقطة (٢٠، ٢٨). النافورة الثانية لجهة اليمين يجب أن تكون عند نقطة تقاطع القطرين للمستطيل الذي رؤوسه (٤٠، ٠)؛ (٨٠، ٠)؛ (٨٠، ٥٦)؛ (٤٠، ٥٦).

نقطة تقاطع القطرين هي منتصف كل قطر. لذا يكون موقع تركيب النافورة الثانية عند النقطة $\left(\frac{٨٠ + ٤٠}{٢}، \frac{٥٦ + ٠}{٢}\right)$

أي عند النقطة (٦٠، ٢٨).

ب المسافة بين النافورتين

نستخدم القاعدة: $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

$= \sqrt{(٦٠ - ٢٠)^٢ + (٢٨ - ٢٨)^٢} = \sqrt{(٤٠)^٢} = ٤٠$

أي أن المسافة سوف تكون ٤٠ وحدة طول.

حاول أن تحل

٣ تقع المدرسة في الموقع ٢ شرق، ١ جنوب ويقع منزل خالد ٣ شرق، ٣ شمال. عيّن على المستوى الإحداثي موقع المدرسة وموقع منزل خالد، ثم أوجد المسافة من منزل خالد إلى المدرسة.

ملاحظة: الموقع ٣ شرق، ٢ شمال يعني (+٣، ٢).

كل وحدة طول على المحاور تساوي ٢ كيلومتر

١٢٣

٩ إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

١ أ(١٢، ٣)؛ ب(١٠، ١)؛ جـ(٥، ١)؛ د(٣، ٣)؛ هـ(٨، ١٠)؛ و(١٢، ٥)؛ ك(٨، ٥)؛ ن(٨، ٣)؛ ف(٣، ٥)؛ ق(٨، ١٥).

٢ أد = ٩ وحدات؛ ب جـ = ٥ وحدات.

٣ $س_{أ} - س_{د} = ١٢ - ٣ = ٩$؛

$س_{ب} - س_{جـ} = ١٠ - ٥ = ٥$

نلاحظ أن: أد = $س_{أ} - س_{د}$ ، ب جـ = $س_{ب} - س_{جـ}$.

«حاول أن تحل»

١ م ن = $\sqrt{(-٧ + ٢)^{٢} + (٤ - ١)^{٢}} = \sqrt{٢٥ + ٩}$

= $\sqrt{٣٤} \simeq ٥,٨٣$ وحدات طول.


تمرَّنْ ٩-١

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

المستوى الإحداثي

Coordinate Plane

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمرينين (١-٢)، أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط التالية.

(١) (٧، -٣)(-٢، ٩)

(٢) (-٢، ٧)(-٢، -٧)

في التمرينين (٣-٤)، أوجد إحداثيي نقطة المنتصف لكل من القطع المستقيمة التالية، بمعلومية إحداثيات طرفي القطعة المستقيمة.

(٣) أ(٢، ٥) ، ب(٠، ٧)

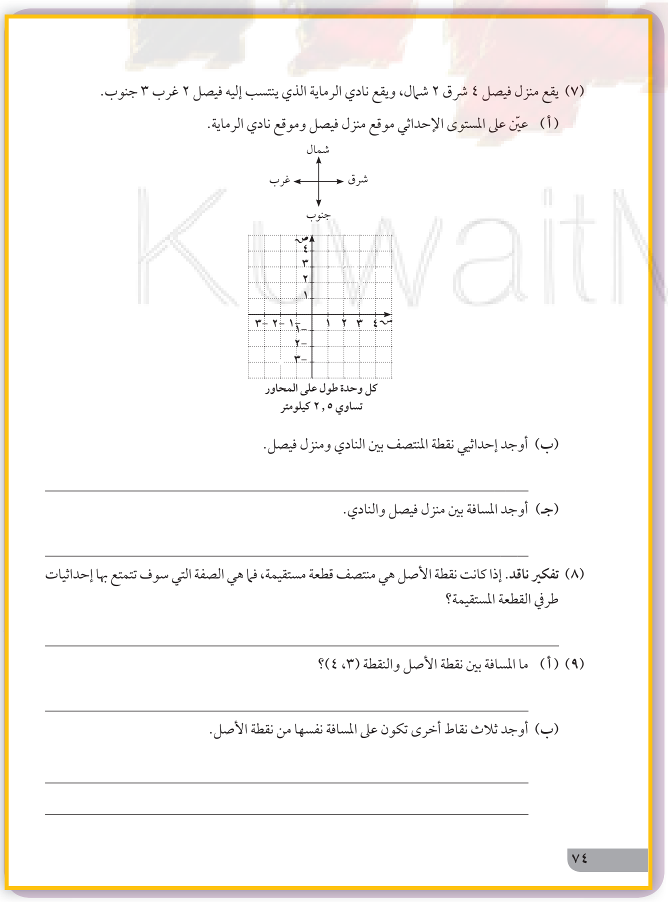
(٤) س(-٣، ١٤) ، ص(١، ١٠)

في التمرينين (٥-٦)، أوجد أطوال أضلاع كل من المثلثات التالية بمعلومية إحداثيات رؤوسها. قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.

(٥) أ(٢، ٢) ، ب(٦، ٣) ، جـ(٥، ٦)

(٦) م(-١، -٥) ، ن(٤، -٤) ، ك(٢، -١)

٧٣


(٧) يقع منزل فيصل ٤ شرق ٢ شمال، ويقع نادي الرماية الذي ينتسب إليه فيصل ٢ غرب ٣ جنوب.

(أ) عيّن على المستوى الإحداثي موقع منزل فيصل وموقع نادي الرماية.

(ب) أوجد إحداثيي نقطة المنتصف بين النادي ومنزل فيصل.

(جـ) أوجد المسافة بين منزل فيصل والنادي.

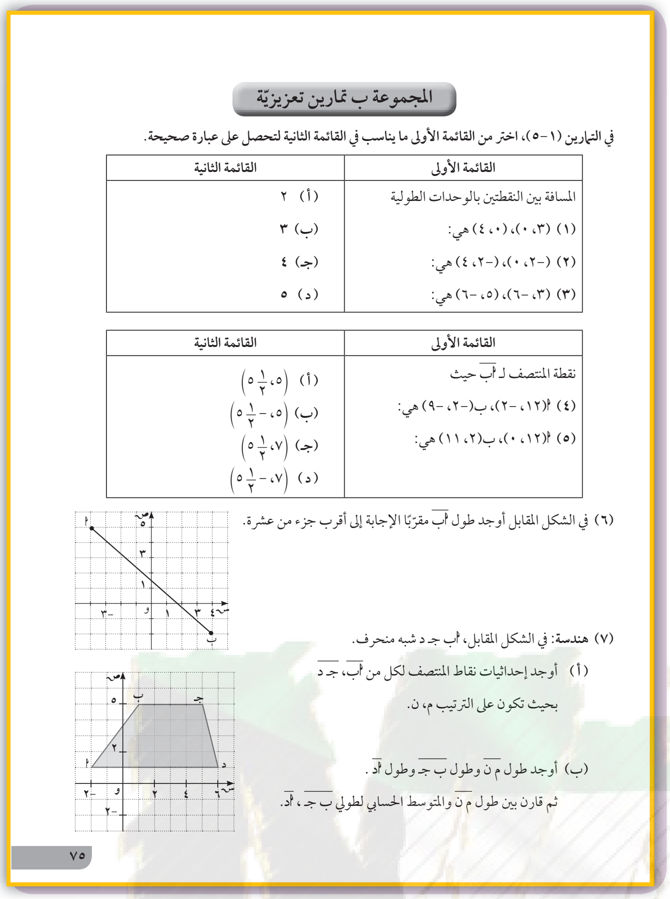
(٨) **تفكير ناقد.** إذا كانت نقطة الأصل هي منتصف قطعة مستقيمة، فما هي الصفة التي سوف تتمتع بها إحداثيات طرفي القطعة المستقيمة؟

(٩) (أ) ما المسافة بين نقطة الأصل والنقطة (٣، ٤)؟

(ب) أوجد ثلاث نقاط أخرى تكون على المسافة نفسها من نقطة الأصل.

٧٤

٢ م منتصف $\overline{\text{كَ لَ}}$ فتكون م $\left(١،\ \frac{١}{٢}\right)$.



المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

في التمارين (١-٥)، اختر من القائمة الأولى ما يناسب في القائمة الثانية لتحصل على عبارة صحيحة.

القائمة الأولى	القائمة الثانية
المسافة بين النقطتين بالوحدات الطولية	(أ) ٢
(١) (٣، ٠)، (٠، ٤) هي:	(ب) ٣
(٢) (-٢، ٠)، (-٢، ٤) هي:	(جـ) ٤
(٣) (٣، -٦)، (٥، -٦) هي:	(د) ٥

القائمة الأولى	القائمة الثانية
نقطة المنتصف لـ $\overline{\text{أب}}$ حيث	(أ) $\left(٥،\ ٥\frac{١}{٢}\right)$
(٤) أ(١٢، -٢)، ب(-٢، -٩) هي:	(ب) $\left(٥،\ -٥\frac{١}{٢}\right)$
(٥) أ(١٢، ٠)، ب(٢، ١١) هي:	(جـ) $\left(٧،\ ٥\frac{١}{٢}\right)$
	(د) $\left(٧،\ -٥\frac{١}{٢}\right)$

(٦) في الشكل المقابل أوجد طول $\overline{\text{أب}}$ مقرّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.

(٧) **هندسة:** في الشكل المقابل، أب جـ د شبه منحرف.

(أ) أوجد إحداثيات نقاط المنتصف لكل من $\overline{\text{أب}}$، $\overline{\text{جـ د}}$

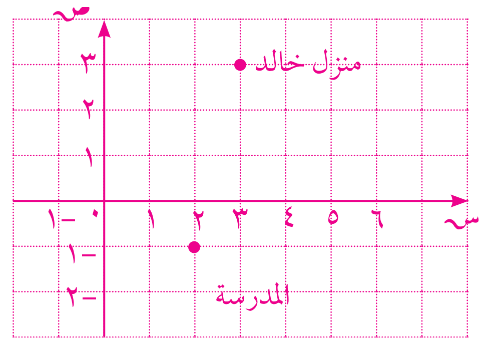
بحيث تكون على الترتيب م، ن.

(ب) أوجد طول $\overline{\text{م ن}}$ وطول $\overline{\text{ب جـ}}$ وطول $\overline{\text{أد}}$.

ثم قارن بين طول $\overline{\text{م ن}}$ والمتوسط الحسابي لطولي $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overline{\text{أد}}$.

٧٥

٣



المسافة في المستوى الإحداثي = $\sqrt{١٧}$ وحدة طول.

المسافة = ٢ × $\sqrt{١٧}$ تبين المسافة بين منزل خالد والمدرسة

≃ ٨,٢٥ كم

لأن كل وحدة طول على المحاور تساوي ٢ كم.

٩_٢ تقسيم قطعة مستقيمة

١ الأهداف

- يوجد إحداثيات نقطة تقسيم قطعة مستقيمة بنسبة معينة من الداخل.
- يوجد إحداثيات نقطة تقسيم قطعة مستقيمة بنسبة معينة من الخارج.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

تقسيم قطعة مستقيمة من الداخل – تقسيم قطعة مستقيمة من الخارج.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة – ورق رسم بياني – آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اسأل الطلاب عن النسبة والتناسب والضرب التقاطعي.

(١) شجرة ارتفاعها ١٥ مترًا وطول ظلها في فترة من النهار ٦ أمتار. ما نسبة طول الشجرة إلى ظلها؟ أو ما نسبة ظل الشجرة إلى ارتفاعها؟

(٢) ناطحة سحاب ارتفاعها ١٧٤ مترًا، يوجد بناء إلى جانبها ارتفاعه ٣٦ مترًا. فما نسبة ارتفاع البناء إلى ارتفاع ناطحة السحاب؟

(٣) في فقرة «فلنعمل معًا»، ما نسبة طول قطعة الخشب الصغرى إلى طول قطعة الخشب الكبرى.

(٤) حدد على مستوى إحداثي موقع النقطتين:

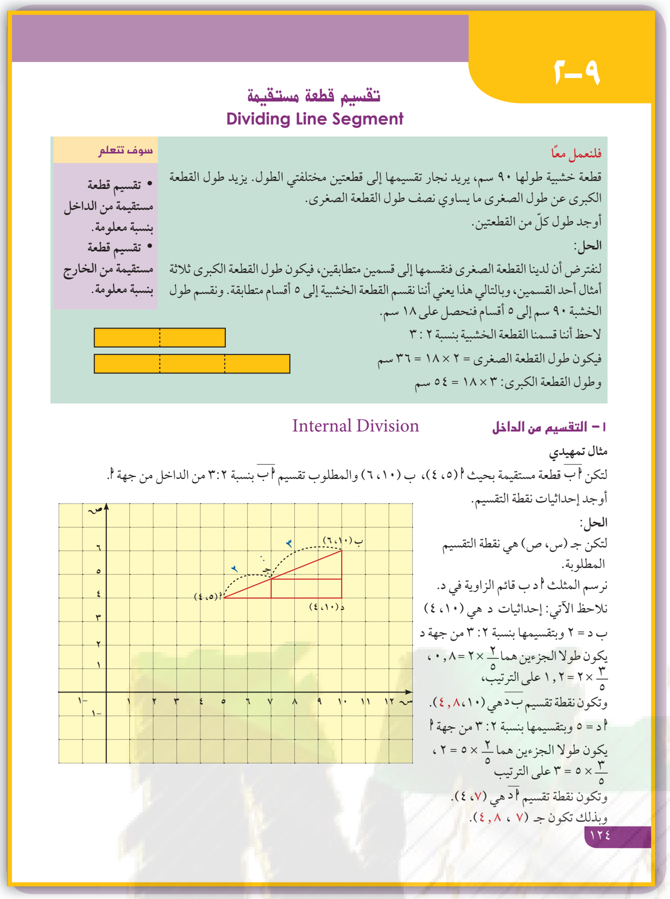
أ(–٤ ، ٦)، ب(٣، –٢).

(٥) حل التناسب التالي: $\frac{٥}{٩} = \frac{س}{٢٧}$.

٥ التدريس

قد يجد الطلاب صعوبة في هذا الدرس لجهة الحفظ ومن ثم التذكر، وبخاصة مع قاعدة تقسيم قطعة مستقيمة من الداخل وقاعدة تقسيم قطعة مستقيمة من الخارج بنسبة معينة.

دعهم يتعاملون بروية مع الدرس ليتمكنوا من تطبيق المخطط وفهم مجريات الشرح.



٩_٢

تقسيم قطعة مستقيمة

Dividing Line Segment

فلنعمل معًا

قطعة خشبية طولها ٩٠ سم، يريد نجار تقسيمها إلى قطعتين مختلفتي الطول. يزيد طول القطعة الكبرى عن طول الصغرى ما يساوي نصف طول القطعة الصغرى.

أوجد طول كلّ من القطعتين.

الحل:

لنفترض أن لدينا القطعة الصغرى فنقسمها إلى قسمين متطابقين، فيكون طول القطعة الكبرى ثلاثة أمثال أحد القسمين، وبالتالي هذا يعني أننا نقسم القطعة الخشبية إلى ٥ أقسام متطابقة. ونقسم طول الخشبة ٩٠ سم إلى ٥ أقسام فنحصل على ١٨ سم.

لاحظ أننا قسمنا القطعة الخشبية بنسبة ٢ : ٣

فيكون طول القطعة الصغرى = ٢ × ١٨ = ٣٦ سم

وطول القطعة الكبرى: ٣ × ١٨ = ٥٤ سم

سوف تتعلم

- تقسيم قطعة مستقيمة من الداخل بنسبة معلومة.
- تقسيم قطعة مستقيمة من الخارج بنسبة معلومة.

١ – التقسيم من الداخل Internal Division

مثال تمهيدي

لتكن أب قطعة مستقيمة بحيث أ(٥، ٤)، ب (١٠، ٦) والمطلوب تقسيم أب بنسبة ٢:٣ من الداخل من جهة أ.

أوجد إحداثيات نقطة التقسيم.

الحل:

لتكن جـ (س، ص) هي نقطة التقسيم المطلوبة.

نرسم المثلث أ د ب قائم الزاوية في د.

نلاحظ الآتي: إحداثيات د هي (١٠، ٤)

ب د = ٢ وبتقسيمها بنسبة ٢: ٣ من جهة د

يكون طولا الجزءين هما $\frac{٢}{٥}$ × ٢ = ٠,٨ ، $\frac{٣}{٥}$ × ٢ = ١,٢ على الترتيب،

وتكون نقطة تقسيم ب د هي (١٠، ٤,٨).

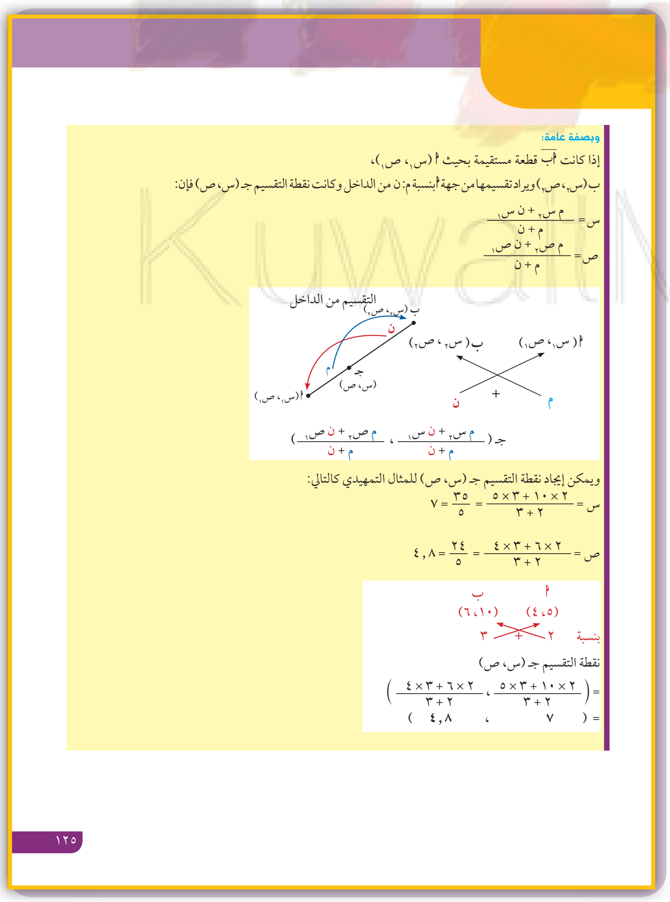
أ د = ٥ وبتقسيمها بنسبة ٢: ٣ من جهة أ

يكون طولا الجزءين هما $\frac{٢}{٥}$ × ٥ = ٢ ، $\frac{٣}{٥}$ × ٥ = ٣ على الترتيب

وتكون نقطة تقسيم أ د هي (٧، ٤).

وبذلك تكون جـ (٧ ، ٤,٨).

١٢٤



وبصفة عامة:

إذا كانت أب قطعة مستقيمة بحيث أ (س١، ص١)،

ب (س٢، ص٢) ويراد تقسيمها من جهة أ بنسبة م: ن من الداخل وكانت نقطة التقسيم جـ (س، ص) فإن:

س = $\frac{م\,س_٢ + ن\,س_١}{م + ن}$

ص = $\frac{م\,ص_٢ + ن\,ص_١}{م + ن}$

جـ ($\frac{م\,س_٢ + ن\,س_١}{م + ن}$ ، $\frac{م\,ص_٢ + ن\,ص_١}{م + ن}$)

ويمكن إيجاد نقطة التقسيم جـ (س، ص) للمثال التمهيدي كالتالي:

س = $\frac{٢ \times ١٠ + ٣ \times ٥}{٢ + ٣} = \frac{٣٥}{٥} = ٧$

ص = $\frac{٢ \times ٦ + ٣ \times ٤}{٢ + ٣} = \frac{٢٤}{٥} = ٤,٨$

أ (٥، ٤) ب (١٠، ٦)

بنسبة ٢ ٣

نقطة التقسيم جـ (س، ص)

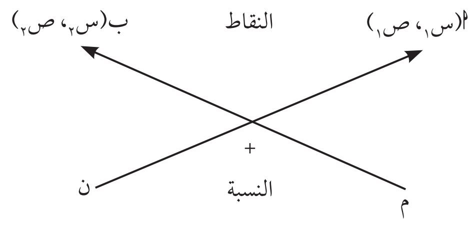
= ($\frac{٢ \times ١٠ + ٣ \times ٥}{٢ + ٣}$ ، $\frac{٢ \times ٦ + ٣ \times ٤}{٢ + ٣}$)

= (٧ ، ٤,٨)

١٢٥

في التقسيم من الداخل، اطلب إليهم التمرن على استخدام المخطط كما هو. ركّز على فكرة «التقسيم من جهة أي نقطة» ليعرفوا كيف يكتبون المخطط.

من جهة أ مثلًا نكتب:



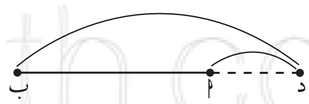
وهكذا نجد إحداثيات النقطة د هي:

$$\left(\frac{\text{م س}_٢ + \text{ن س}_١}{\text{م} + \text{ن}} ، \frac{\text{م ص}_٢ + \text{ن ص}_١}{\text{م} + \text{ن}}\right)$$

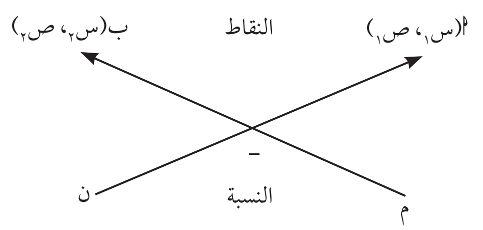
في المثال (١)، أكّد لهم أن الرسم البياني يساعد كثيرًا على الإيضاح وعلى التحقق من صحة النتائج.

أما في التقسيم من الخارج فيجب الانتباه أيضًا لجهة أي نقطة سوف يتم التقسيم بنسبة معينة، وبالتالي الاعتماد على القاعدة يمكن أن يوقعنا في أخطاء، لذا يستحسن الاعتماد على المثال (٢) للعودة إلى التقسيم من الداخل. قد يكون رسم صورة لتحديد النقاط على المستوى الإحداثي ضروريًّا جدًّا، للتأكد في ما بعد من النتائج التي حصلوا عليها.

أما لجهة القاعدة فيمكن استخدامها إذا كان التقسيم، مثلًا، لجهة أ.



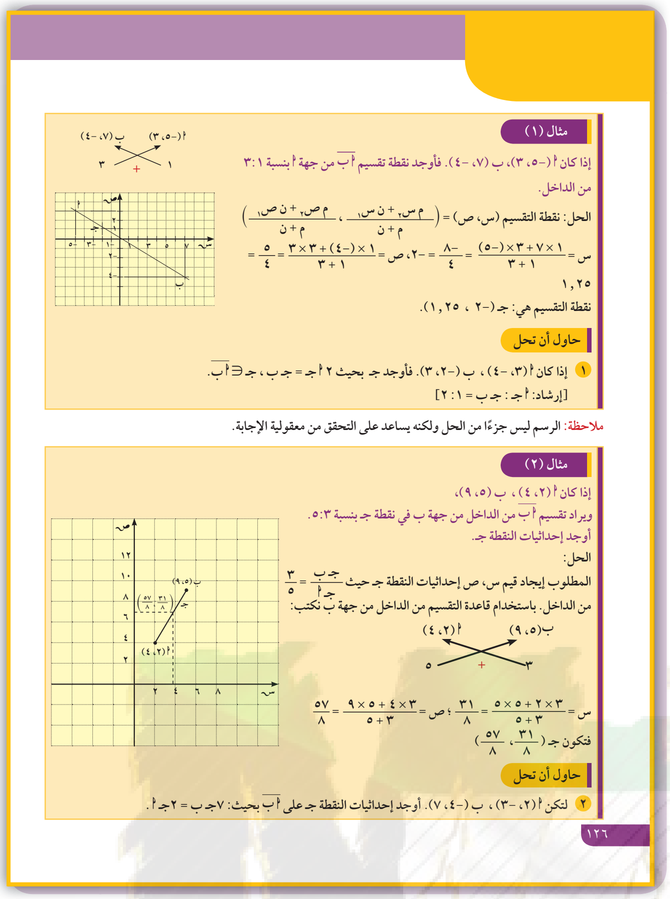
فيكون د هي:



$$\left(\frac{\text{م س}_٢ - \text{ن س}_١}{\text{م} - \text{ن}} ، \frac{\text{م ص}_٢ - \text{ن ص}_١}{\text{م} - \text{ن}}\right)$$

٦ الربط

يعبر المثال (٣) عن عملية ربط بموقف حياتي يستخدم فيه كيفية إيجاد نسبة تقسيم قطعة مستقيمة بواسطة نقطة.



مثال (١)

إذا كان أ(−٥، ٣)، ب (٧، −٤). فأوجد نقطة تقسيم $\overline{\text{أب}}$ من جهة أ بنسبة ١:٣ من الداخل.

الحل: نقطة التقسيم (س، ص) = $\left(\frac{\text{م س}_٢ + \text{ن س}_١}{\text{م} + \text{ن}} ، \frac{\text{م ص}_٢ + \text{ن ص}_١}{\text{م} + \text{ن}}\right)$

س = $\frac{١ \times ٧ + ٣ \times (-٥)}{١ + ٣} = \frac{-٨}{٤} = -٢$، ص = $\frac{١ \times (-٤) + ٣ \times ٣}{١ + ٣} = \frac{٥}{٤} =$ ١,٢٥

نقطة التقسيم هي: جـ(−٢ ، ١,٢٥).

حاول أن تحل

١ إذا كان أ(٣، −٤) ، ب (−٢، ٣). فأوجد جـ بحيث ٢ أجـ = جـ ب ، جـ ∈ $\overline{\text{أب}}$.

[إرشاد: أجـ : جـ ب = ١ : ٢]

ملاحظة: الرسم ليس جزءًا من الحل ولكنه يساعد على التحقق من معقولية الإجابة.

مثال (٢)

إذا كان أ(٢، ٤) ، ب (٥، ٩)،

ويراد تقسيم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل من جهة ب في نقطة جـ بنسبة ٣:٥.

أوجد إحداثيات النقطة جـ.

الحل:

المطلوب إيجاد قيم س، ص إحداثيات النقطة جـ حيث $\frac{\text{جـ ب}}{\text{جـ أ}} = \frac{٣}{٥}$ من الداخل. باستخدام قاعدة التقسيم من الداخل من جهة ب نكتب:

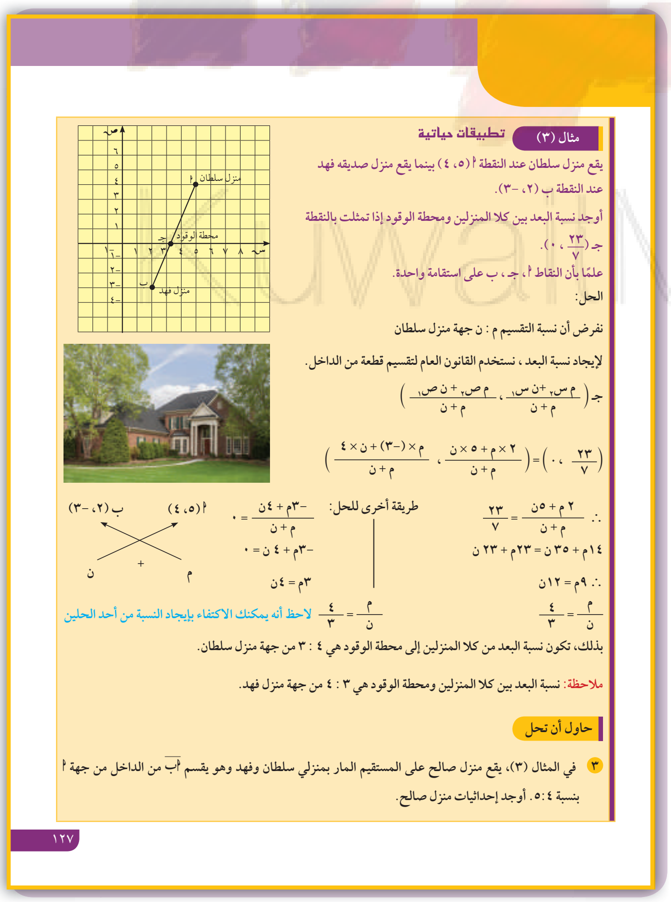
س = $\frac{٣ \times ٢ + ٥ \times ٥}{٣ + ٥} = \frac{٣١}{٨}$ ؛ ص = $\frac{٣ \times ٤ + ٥ \times ٩}{٣ + ٥} = \frac{٥٧}{٨}$

فتكون جـ $\left(\frac{٣١}{٨} ، \frac{٥٧}{٨}\right)$

حاول أن تحل

٢ لتكن أ(٢، −٣) ، ب (−٤، ٧). أوجد إحداثيات النقطة جـ على $\overline{\text{أب}}$ بحيث: ٧جـ ب = ٢جـ أ .

١٢٦



مثال (٣) **تطبيقات حياتية**

يقع منزل سلطان عند النقطة أ(٥، ٤) بينما يقع منزل صديقه فهد عند النقطة ب (٢، −٣).

أوجد نسبة البعد بين كلا المنزلين ومحطة الوقود إذا تمثلت بالنقطة جـ $\left(\frac{٢٣}{٧} ، ٠\right)$.

علمًا بأن النقاط أ، جـ، ب على استقامة واحدة.

الحل:

نفرض أن نسبة التقسيم م : ن جهة منزل سلطان

لإيجاد نسبة البعد ، نستخدم القانون العام لتقسيم قطعة من الداخل.

جـ $\left(\frac{\text{م س}_٢ + \text{ن س}_١}{\text{م} + \text{ن}} ، \frac{\text{م ص}_٢ + \text{ن ص}_١}{\text{م} + \text{ن}}\right)$

$\left(\frac{٢٣}{٧} ، ٠\right) = \left(\frac{٢ \times \text{م} + ٥ \times \text{ن}}{\text{م} + \text{ن}} ، \frac{\text{م} \times (-٣) + \text{ن} \times ٤}{\text{م} + \text{ن}}\right)$

∴ $\frac{٢\text{م} + ٥\text{ن}}{\text{م} + \text{ن}} = \frac{٢٣}{٧}$

١٤م + ٣٥ن = ٢٣م + ٢٣ن

∴ ٩م = ١٢ن

$\frac{\text{م}}{\text{ن}} = \frac{٤}{٣}$

طريقة أخرى للحل:

$\frac{-٣\text{م} + ٤\text{ن}}{\text{م} + \text{ن}} = ٠$

−٣م + ٤ن = ٠

٣م = ٤ن

$\frac{\text{م}}{\text{ن}} = \frac{٤}{٣}$ لاحظ أنه يمكنك الاكتفاء بإيجاد النسبة من أحد الحلين

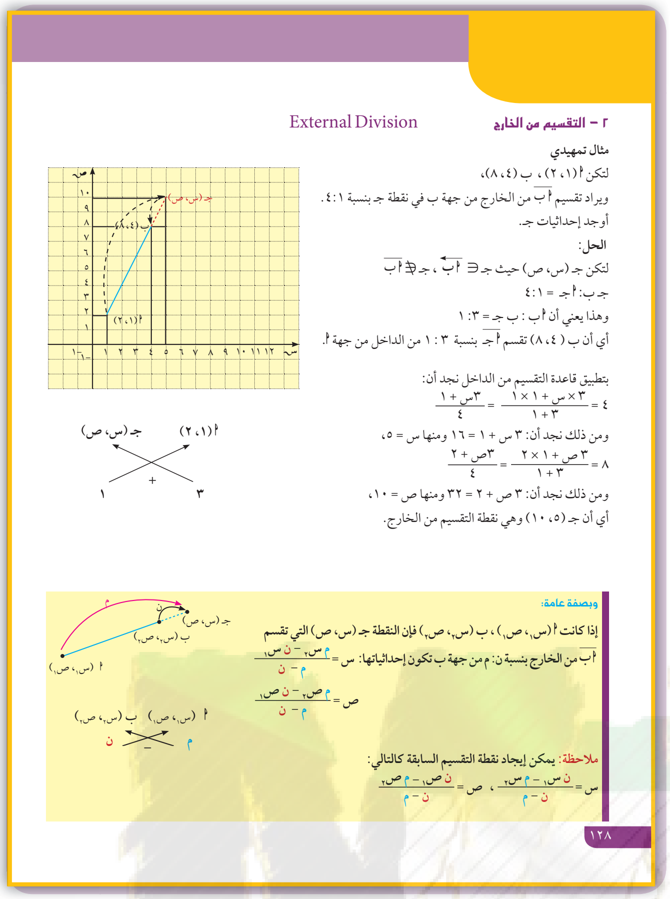
بذلك، تكون نسبة البعد من كلا المنزلين إلى محطة الوقود هي ٤ : ٣ من جهة منزل سلطان.

ملاحظة: نسبة البعد بين كلا المنزلين ومحطة الوقود هي ٣ : ٤ من جهة منزل فهد.

حاول أن تحل

٣ في المثال (٣)، يقع منزل صالح على المستقيم المار بمنزلي سلطان وفهد وهو يقسم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل من جهة أ بنسبة ٤:٥. أوجد إحداثيات منزل صالح.

١٢٧


٢ – التقسيم من الخارج External Division

مثال تمهيدي

لتكن أ (١، ٢) ، ب (٤، ٨)،

ويراد تقسيم $\overline{أب}$ من الخارج من جهة ب في نقطة جـ بنسبة ١ : ٤.

أوجد إحداثيات جـ.

الحل:

لتكن جـ (س، ص) حيث جـ ∈ $\overleftarrow{أب}$ ، جـ ∉ $\overline{أب}$

جـ ب : أجـ = ١ : ٤

وهذا يعني أن أب : ب جـ = ٣ : ١

أي أن ب (٤، ٨) تقسم $\overline{أجـ}$ بنسبة ٣ : ١ من الداخل من جهة أ.

بتطبيق قاعدة التقسيم من الداخل نجد أن:

$٤ = \frac{٣ \times س + ١ \times ١}{٣ + ١} = \frac{٣س + ١}{٤}$

ومن ذلك نجد أن: ٣ س + ١ = ١٦ ومنها س = ٥،

$٨ = \frac{٣ ص + ١ \times ٢}{٣ + ١} = \frac{٣ص + ٢}{٤}$

ومن ذلك نجد أن: ٣ ص + ٢ = ٣٢ ومنها ص = ١٠،

أي أن جـ (٥، ١٠) وهي نقطة التقسيم من الخارج.

وبصفة عامة:

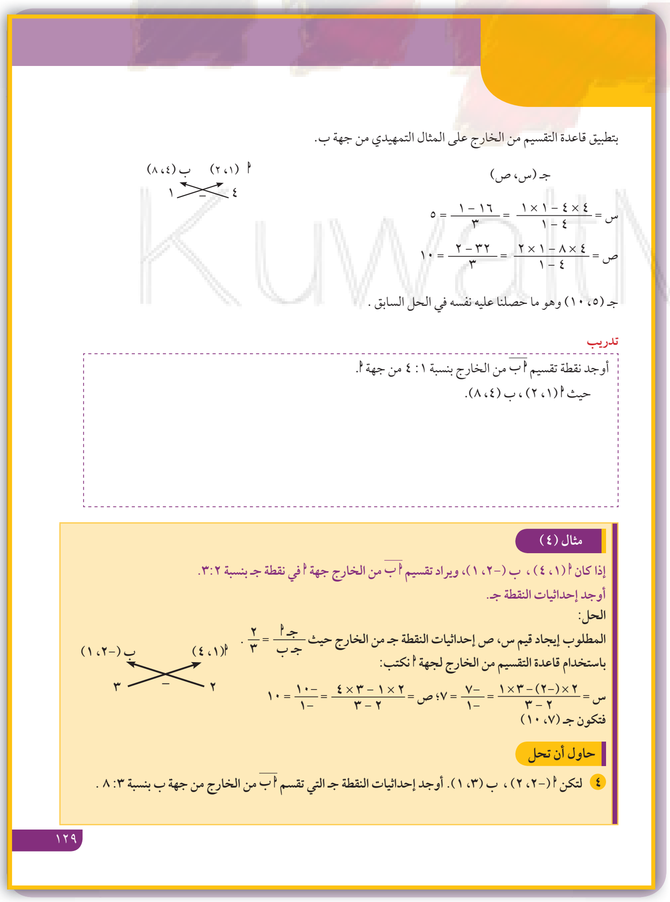
إذا كانت أ (س١، ص١) ، ب (س٢، ص٢) فإن النقطة جـ (س، ص) التي تقسم $\overline{أب}$ من الخارج بنسبة ن: م من جهة ب تكون إحداثياتها: $س = \frac{م س_٢ - ن س_١}{م - ن}$

$ص = \frac{م ص_٢ - ن ص_١}{م - ن}$

ملاحظة: يمكن إيجاد نقطة التقسيم السابقة كالتالي:

$س = \frac{ن س_١ - م س_٢}{ن - م}$ ، $ص = \frac{ن ص_١ - م ص_٢}{ن - م}$

١٢٨


بتطبيق قاعدة التقسيم من الخارج على المثال التمهيدي من جهة ب.

جـ (س، ص)

$س = \frac{٤ \times ٤ - ١ \times ١}{٤ - ١} = \frac{١٦ - ١}{٣} = ٥$

$ص = \frac{٤ \times ٨ - ١ \times ٢}{٤ - ١} = \frac{٣٢ - ٢}{٣} = ١٠$

جـ (٥، ١٠) وهو ما حصلنا عليه نفسه في الحل السابق .

تدريب

أوجد نقطة تقسيم $\overline{أب}$ من الخارج بنسبة ١ : ٤ من جهة أ.

حيث أ (١، ٢) ، ب (٤، ٨).

مثال (٤)

إذا كان أ (١، ٤) ، ب (−٢، ١)، ويراد تقسيم $\overline{أب}$ من الخارج جهة أ في نقطة جـ بنسبة ٢:٣.

أوجد إحداثيات النقطة جـ.

الحل:

المطلوب إيجاد قيم س، ص إحداثيات النقطة جـ من الخارج حيث $\frac{جـ أ}{جـ ب} = \frac{٢}{٣}$.

باستخدام قاعدة التقسيم من الخارج لجهة أ نكتب:

$س = \frac{٢ \times (-٢) - ٣ \times ١}{٢ - ٣} = \frac{-٧}{-١} = ٧$؛ $ص = \frac{٢ \times ١ - ٣ \times ٤}{٢ - ٣} = \frac{-١٠}{-١} = ١٠$

فتكون جـ (٧، ١٠)

حاول أن تحل

٤ لتكن أ (−٢، ٢) ، ب (٣، ١). أوجد إحداثيات النقطة جـ التي تقسم $\overline{أب}$ من الخارج من جهة ب بنسبة ٣: ٨ .

١٢٩

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطىء الطلاب في كلتا القاعدتين في تطبيق إحداثيات النقاط وحدّي النسبة. ساعدهم من خلال عدة أمثلة على استخدام المخططات وتحديد النسبة لأي جهة من النقاط.

٨ التقييم

كن حريصًا على متابعة عمل كل طالب في فقرات «حاول أن تحل»، للتأكد من كونهم يضعون المخطط أولًا ثم يوجدون إحداثيات نقطة التقسيم.

اختبار سريع

لتكن أ(٢، −٣)، ب (٤، ٢)

١ أوجد نقطة تقسيم $\overline{أب}$ من الداخل من جهة ب بنسبة $\frac{٢}{٥}$.

$\left(\frac{٢٤}{٧} ، \frac{٤}{٧}\right)$

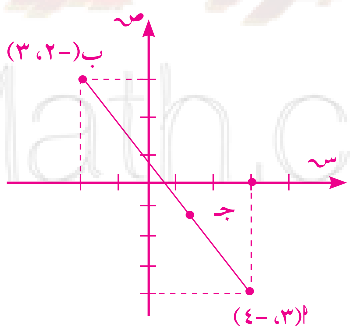
٢ أوجد نقطة تقسيم $\overline{أب}$ من الخارج من جهة أ بنسبة $\frac{١}{٣}$.

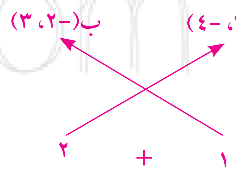
(١، −٥,٥)

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ $\frac{أجـ}{جـ ب} = \frac{١}{٢}$

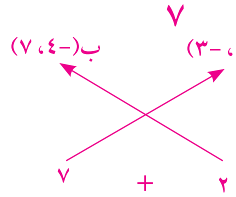




جـ$\left(\frac{٤}{٣} ، -\frac{٥}{٣}\right)$

التقسيم من جهة أ

٢ $\frac{جـ ب}{جـ أ} = \frac{٢}{٧}$

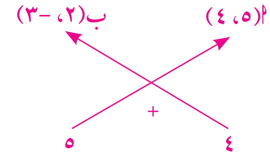


جـ$\left(-\frac{٨}{٣} ، \frac{٤٣}{٩}\right)$

التقسيم من جهة ب.

٣ لتكن جـ تمثل منزل صالح

$$\frac{\text{جـ أ}}{\text{جـ ب}} = \frac{٤}{٥}$$



جـ(س، ص)

$$\text{س} = \frac{١١}{٣}$$

$$\text{ص} = \frac{٨}{٩}$$

جـ$\left(\frac{١١}{٣}، \frac{٨}{٩}\right)$، حيث هي إحداثيات منزل صالح.

٤ جـ (٦، ٤, ٠)

٥ (أ) $\frac{٤ ٦٧٥}{٤ ٦٨٧}$

(ب) (٦, ٩٨، ١٠, ٩٧) تقريبًا.

«تدريب»

جـ(٠، ٠)

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ ٩-٢

تقسيم قطعة مستقيمة

Dividing Line Segment

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) أوجد إحداثيي النقطة ن التي تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل من جهة أ إذا علم أن:

(أ) أ(-٧، ٥)، ب(٨، -٥) ونسبة التقسيم ١ : ٢.

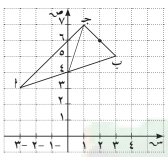
(ب) أ(٦، ٩)، ب(-٢، ١) ونسبة التقسيم ١ : ٣.

(٢) أوجد إحداثيي النقطة م التي تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الخارج من جهة أ إذا علم أن:

(أ) أ(-٢، ٥)، ب(٤، ٢) ونسبة التقسيم ٢ : ٥.

(ب) أ(١، ٨)، ب(-٥، ٣) ونسبة التقسيم ١ : ٣.

(٣) أ ب جـ مثلث فيه: أ(-٣، ٣)، ب(٣، ٥)، جـ(١، ٧) أوجد:



(أ) إحداثيات منتصفات أضلاع المثلث.

(ب) إحداثيا نقطة تقاطع متوسطاته.

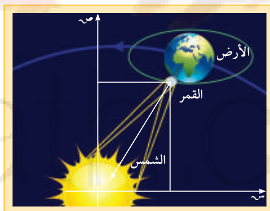
المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

(١) أوجد إحداثيي النقطة ن التي تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الخارج من جهة أ إذا علم أن:

(أ) أ(-٦، ٤)، ب(٣، -٢) ونسبة التقسيم ١ : ٢.

(ب) أ(١٠، ١٥)، ب(٦، ١٠) ونسبة التقسيم ١ : ٥.

مثال (٥) إثرائي



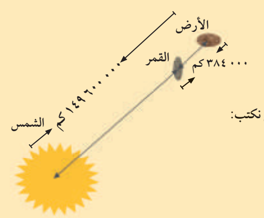
أثناء الكسوف تكون الأرض والشمس والقمر على استقامة واحدة كما تبين الصورة المقابلة. المسافة بين الأرض والشمس ٠٠٠ ٦٠٠ ١٤٩ كم تقريبًا والمسافة بين الأرض والقمر ٠٠٠ ٣٨٤ كم تقريبًا.

أ أوجد نسبة التقسيم من الخارج جهة القمر على القطعة المستقيمة الواصلة بين القمر والشمس حيث توجد الأرض.

ب لنأخذ مستوى إحداثي مركزه نقطة الأصل وهي الشمس.

إذا كان القمر في هذه الحالة له الإحداثيات (٦، ١٠)، فما هي إحداثيات الأرض؟

الحل:



أ المسافة بين الأرض والقمر = ٠٠٠ ٣٨٤ كم

المسافة بين الأرض والشمس = ٠٠٠ ٦٠٠ ١٤٩ كم

$$\text{النسبة} = \frac{٣٨٤ ٠٠٠}{١٤٩ ٦٠٠ ٠٠٠} = \frac{١٢}{٤ ٦٧٥}$$

ب التقسيم من الخارج بالنسبة إلى الأرض والقمر والشمس نكتب:

القمر (٦، ١٠) الشمس (٠، ٠)

١٢ ٤٦٧٥

$$\text{س} = \frac{١٢ \times ٠ - ٦ \times ٤٦٧٥}{١٢ - ٤٦٧٥}$$

$$\text{س} \simeq ٦,٠١٥$$

$$\text{ص} = \frac{١٢ \times ٠ - ١٠ \times ٤٦٧٥}{١٢ - ٤٦٧٥}$$

$$\text{ص} \simeq ١٠,٠٢٦$$

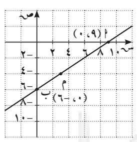
أي أن إحداثيات الأرض هي تقريبًا: (٦,٠١٥، ١٠,٠٢٦)

حاول أن تحل

٥ أ في المثال (٥)، أوجد نسبة التقسيم: $\frac{\text{مسافة بين الشمس والقمر}}{\text{مسافة بين الشمس والأرض}}$.

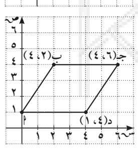
ب إذا افترضنا أن إحداثيات الأرض هي (٧، ١١). فما هي إحداثيات القمر؟

(٢) المستقيم الموضح بالشكل يقطع محوري الإحداثيات في النقطتين أ، ب على الترتيب. أوجد إحداثيي م التي تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل من جهة أ بنسبة ٢ : ١.



(٣) أ، ب، جـ، د أربع نقاط على الشكل التالي:

أ(٠، ١)، ب(٢، ٤)، جـ(٦، ٤)، د(٤، ١).

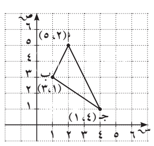


(أ) أثبت أنّ أ ب جـ د متوازي الأضلاع.

(ب) أوجد إحداثيي النقطة ن، حيث ن نقطة تقاطع القطرين في متوازي الأضلاع أب جـ د.

* (جـ) أوجد إحداثيات النقاط س، ص، ع، ل. حيث س ، ص، ع، ل متوازي أضلاع له المركز نفسه «ن» وأطوال أضلاعه تساوي $\frac{١}{٢}$ أطوال أضلاع متوازي الأضلاع أ ب جـ د، حيث س، ص، ع، ل تنتمي لقطري متوازي الأضلاع أ ب جـ د.

(٤) أ ب جـ مثلث فيه أ(٢، ٥)، ب(١، ٣)، جـ(٤، ١).



(أ) أوجد إحداثيي النقطة ن التي تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل من جهة أ بنسبة ١ : ٣.

(ب) أوجد إحداثيي النقطة ك التي تقسم $\overline{\text{ب جـ}}$ من الداخل من جهة ب بنسبة ١ : ٢.

٩-٣ [أ] ميل الخط المستقيم

١ الأهداف

- يوجد معدل التغير لكميتين مختلفتين.
- يوجد ميل الخط المستقيم.
- يكتب العلاقة بين ميل المستقيم وظل الزاوية التي يصنعها الاتجاه الموجب لمحور السينات مع الخط المستقيم.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

معدل التغير - التغير الرأسي - التغير الأفقي - الميل.

٣ الأدوات والوسائل

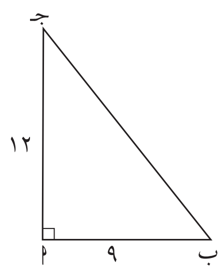
مسطرة - ورق رسم بياني - آلة حاسبة - حاسوب - جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اسأل الطلاب:

(١) كيف تجد المسافة بين نقطتين على محور السينات وعلى مستقيم موازٍ لمحور السينات بدلالة إحداثياتها؟

- كيف تجد المسافة بين نقطتين على محور الصادات أو على مستقيم موازٍ لمحور الصادات بدلالة إحداثياتها؟
- كيف تجد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي بدلالة إحداثياتها؟



(٢) أب جـ مثلث قائم الزاوية أ.

أوجد ظاجـ ، ظاب.

(٣) إذا كان ظا ٦٠° = $\sqrt{3}$ ،

فأوجد ظا(١٢٠°).

٥ التدريس

اعرض أمام الطلاب أمثلة متعددة لترسيخ فكرة المعدل ومعدل التغير، كي يتعرفوا الفرق بين معدل التغير والنسبة. مثل: سرعة السيارة بالساعة، ثمن سلعة معينة بالدينار، وزن جسم معين بالكيلوجرام...

قد يساعد المثال (١) بشكل كبير على فهم فكرة معدل التغير، وبخاصة عندما نستخدم كميتين مختلفتين.

ركز على القاعدة: معدل التغير = $\dfrac{\text{التغير في المتغير التابع ص}}{\text{التغير في المتغير المستقل س}}$

اشرح لهم معنى المتغير التابع والمتغير المستقل بأمثلة حسية.

حفّز الطلاب على فهم كيفية إيجاد ميل الخط المستقيم وفهم معناه الحقيقي وتطبيقاته على الواقع، وبخاصة بالنسبة إلى شق الطرق...

في المثال (٣)

أهمية هذا المثال أنه يعطي الطلاب طريقة لأثبات أن ٣ نقاط هي على استقامة واحدة.

توسع في العلاقة التي تربط ميل المستقيم بظل الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

اشرح لهم أن الزاوية المنفرجة يكون ظلها حتمًا قيمة سالبة بحسب ما سبق أن تعلموه في دائرة الوحدة. وهذا يتفق تمامًا مع الميل السالب للخط المستقيم.

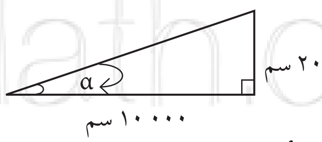
ذكرهم بالقاعدة: ظا$(\pi - \alpha^{د})$ = −ظا$\alpha^{د}$ أو

ظا$(١٨٠^{\circ} - \alpha^{\circ})$ = − ظاα°.

٦ الربط

أراد أحد مهندسي الطرق معرفة ميل طريق غالبًا ما يجتازه، فلاحظ أنه كلما اجتاز مسافة ١٠٠ متر أفقيًا يرتفع عن مستوى الأفق ٢٠ سم. ما ميل هذا الطريق؟

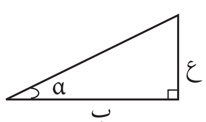
الميل = ظاα = ٠٫٠٠٢

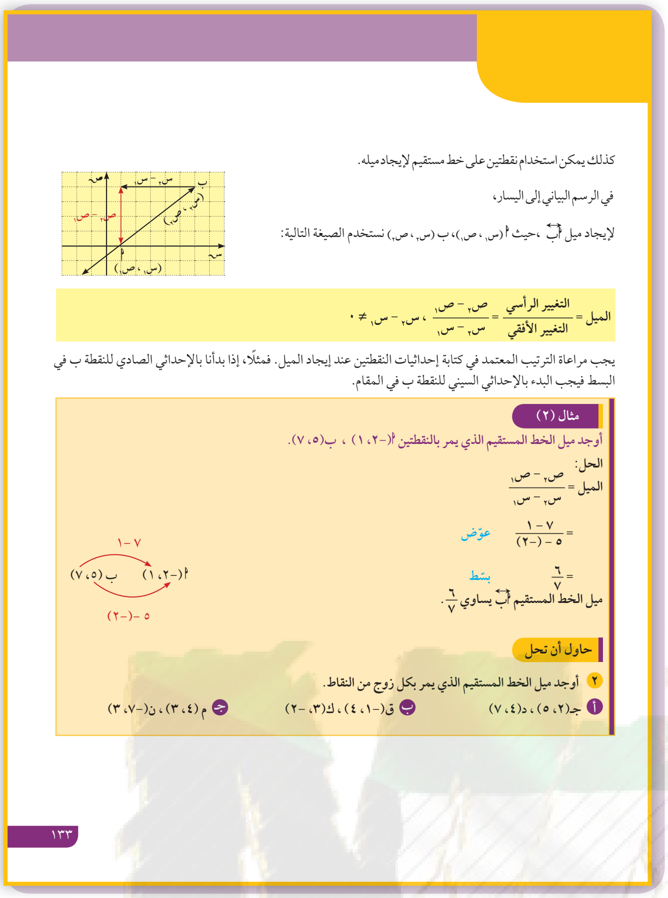


٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يكتب الطلاب الميل = $\dfrac{\text{التغير الأفقي}}{\text{التغير الرأسي}}$.

ساعدهم على ربط الميل بظل الزاوية في المثلث قائم الزاوية.




كذلك يمكن استخدام نقطتين على خط مستقيم لإيجاد ميله.

في الرسم البياني إلى اليسار،

لإيجاد ميل $\overleftrightarrow{أب}$ ،حيث أ(س$_١$ ، ص$_١$)، ب (س$_٢$ ، ص$_٢$) نستخدم الصيغة التالية:

الميل = $\dfrac{\text{التغيير الرأسي}}{\text{التغيير الأفقي}} = \dfrac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ ، س$_٢$ − س$_١$ ≠ ٠

يجب مراعاة الترتيب المعتمد في كتابة إحداثيات النقطتين عند إيجاد الميل. فمثلًا، إذا بدأنا بالإحداثي الصادي للنقطة ب في البسط فيجب البدء بالإحداثي السيني للنقطة ب في المقام.

مثال (٢)

أوجد ميل الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين أ(−٢، ١) ، ب(٥، ٧).

الحل:

الميل = $\dfrac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

= $\dfrac{٧ - ١}{٥ - (-٢)}$ عوّض

= $\dfrac{٦}{٧}$ بسّط

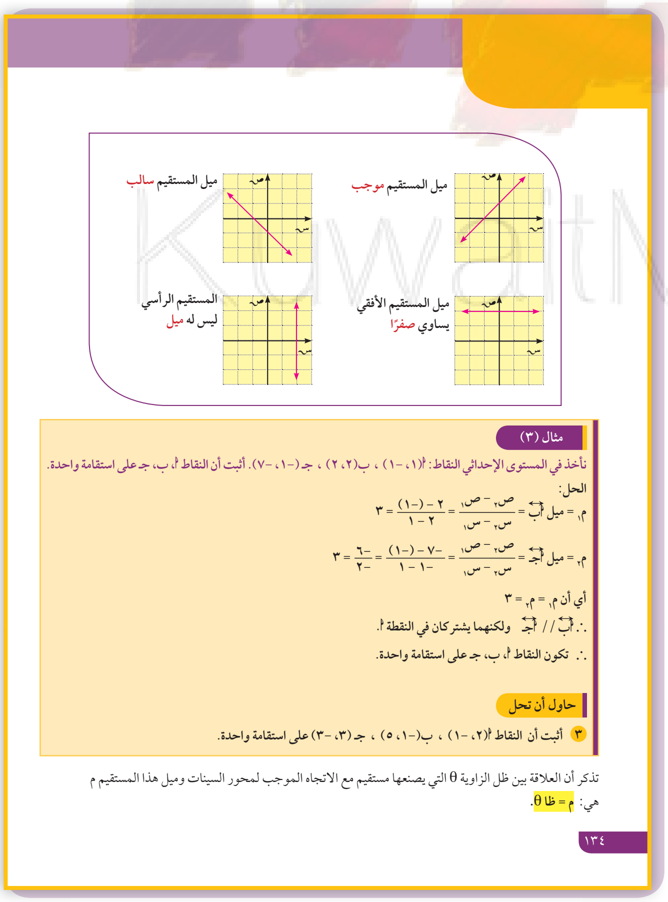
ميل الخط المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ يساوي $\dfrac{٦}{٧}$.

حاول أن تحل

٢ أوجد ميل الخط المستقيم الذي يمر بكل زوج من النقاط.

أ جـ(٢، ٥) ، د(٤، ٧)　ب ق(−١، ٤) ، ك(٣، −٢)　جـ م (٤، ٣) ، ن(−٧، ٣)

١٣٣



مثال (٣)

نأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: أ(١، −١) ، ب(٢، ٢) ، جـ(−١، −٧). أثبت أن النقاط أ، ب، جـ على استقامة واحدة.

الحل:

م$_١$ = ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\dfrac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \dfrac{٢ - (-١)}{٢ - ١} = ٣$

م$_٢$ = ميل $\overleftrightarrow{أجـ}$ = $\dfrac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \dfrac{-٧ - (-١)}{-١ - ١} = \dfrac{-٦}{-٢} = ٣$

أي أن م$_١$ = م$_٢$ = ٣

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{أجـ}$ ولكنهما يشتركان في النقطة أ.

∴ تكون النقاط أ، ب، جـ على استقامة واحدة.

حاول أن تحل

٣ أثبت أن النقاط أ(٢، −١) ، ب(−١، ٥) ، جـ (٣، −٣) على استقامة واحدة.

تذكر أن العلاقة بين ظل الزاوية θ التي يصنعها مستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وميل هذا المستقيم م هي: م = ظا θ.

١٣٤

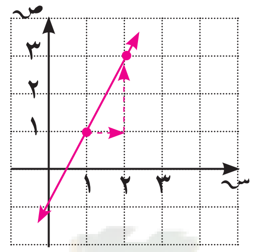
٨ التقييم

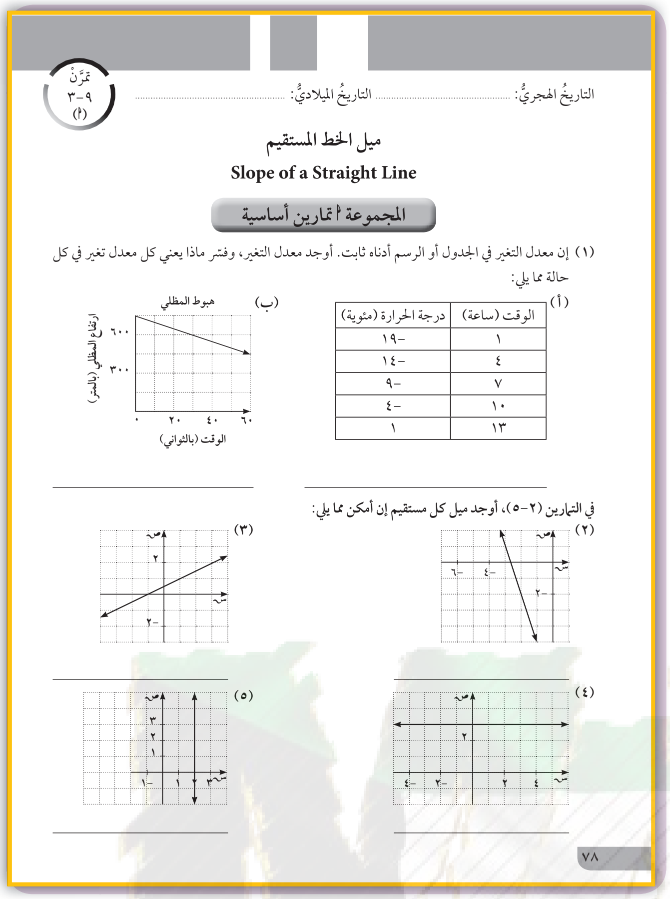
تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من حسن استخدامهم مفاهيم هذا الدرس ومهاراته.

اختبار سريع

١ أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين أ(٣، ٥)، ب (٢، ٤) ١

٢ ارسم المستقيم المار بنقطة (١، ١) وميله ٢.





التاريخ الهجريّ: .... التاريخ الميلاديّ: .... تمرّن ٣-٩ (أ)

ميل الخط المستقيم

Slope of a Straight Line

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) إن معدل التغير في الجدول أو الرسم أدناه ثابت. أوجد معدل التغير، وفسّر ماذا يعني كل معدل تغير في كل حالة مما يلي:

(أ)

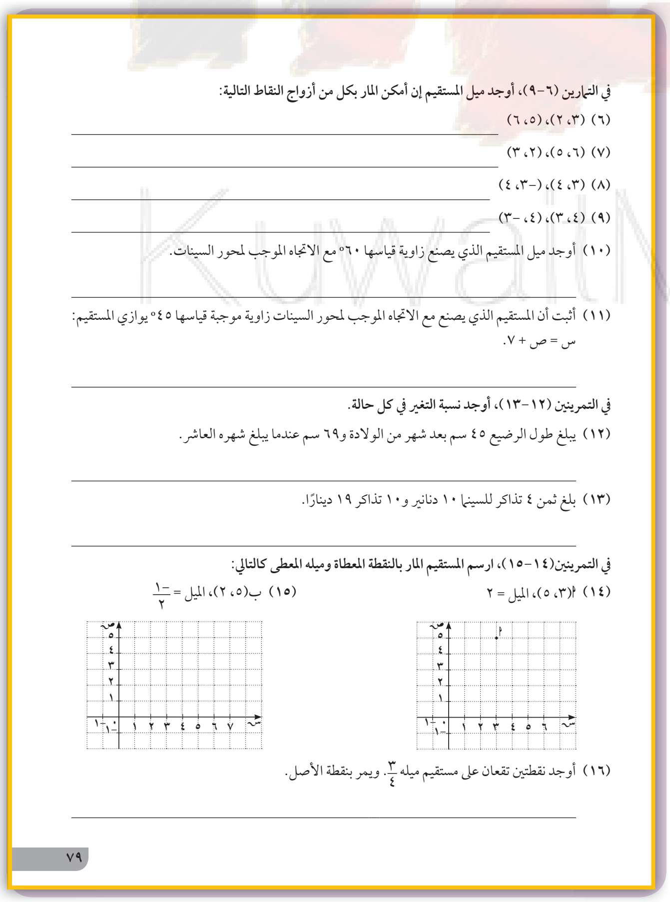
الوقت (ساعة)	درجة الحرارة (مئوية)
١	-١٩
٤	-١٤
٧	-٩
١٠	-٤
١٣	١

(ب) هبوط المظلي

في التمارين (٢-٥)، أوجد ميل كل مستقيم إن أمكن مما يلي:

(٢) (٣) (٤) (٥)

٧٨



في التمارين (٦-٩)، أوجد ميل المستقيم إن أمكن المار بكل من أزواج النقاط التالية:

(٦) (٣، ٢)، (٥، ٦)

(٧) (٦، ٥)، (٢، ٣)

(٨) (٣، ٤)، (-٣، ٤)

(٩) (٤، ٣)، (٤، -٣)

(١٠) أوجد ميل المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

(١١) أثبت أن المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° يوازي المستقيم: س = ص + ٧.

في التمرينين (١٢-١٣)، أوجد نسبة التغير في كل حالة.

(١٢) يبلغ طول الرضيع ٤٥ سم بعد شهر من الولادة و٦٩ سم عندما يبلغ شهره العاشر.

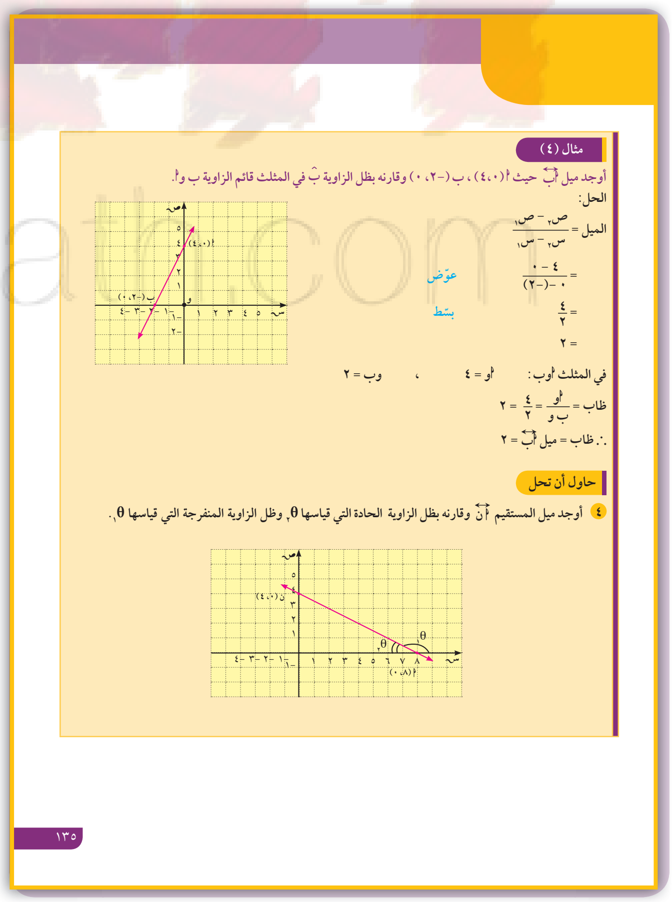
(١٣) بلغ ثمن ٤ تذاكر للسينما ١٠ دنانير و١٠ تذاكر ١٩ دينارًا.

في التمرينين (١٤-١٥)، ارسم المستقيم المار بالنقطة المعطاة وميله المعطى كالتالي:

(١٤) أ(٣، ٥)، الميل = ٢ (١٥) ب(٥، ٢)، الميل = $-\frac{١}{٢}$

(١٦) أوجد نقطتين تقعان على مستقيم ميله $\frac{٣}{٤}$، ويمر بنقطة الأصل.

٧٩



مثال (٤)

أوجد ميل أب حيث أ(٠، ٤)، ب(-٢، ٠) وقارنه بظل الزاوية ب في المثلث قائم الزاوية ب و أ.

الحل:

الميل = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

= $\frac{٤ - ٠}{٠ - (-٢)}$ عوّض

= $\frac{٤}{٢}$ بسّط

= ٢

في المثلث أوب: أو = ٤ ، وب = ٢

ظا ب = $\frac{أو}{وب}$ = $\frac{٤}{٢}$ = ٢

∴ ظا ب = ميل أب = ٢

حاول أن تحل

٤ أوجد ميل المستقيم أن وقارنه بظل الزاوية الحادة التي قياسها θ، وظل الزاوية المنفرجة التي قياسها θ.

١٣٥

٩ إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

١ – ٤ تحقق من إجابات الطلاب.

«حاول أن تحل»

١ (أ) معدل التغير: $\frac{\text{١٢} - \text{٧,٥}}{\text{٥} - \text{٢}} = \text{١,٥}$

(ب) لا، لأنه عندما نتحدث عن معدل التغير، يجب أن يكون ثابتًا في جميع البيانات.

٢ (أ) $\frac{\text{٥} - \text{٧}}{\text{٢} - \text{٤}} = \frac{-\text{٢}}{-\text{٢}} = \text{١}$

(ب) $\frac{\text{٤} - (-\text{٢})}{-\text{١} - \text{٣}} = \frac{\text{٦}}{-\text{٤}} = -\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$

(جـ) صفر (٠)

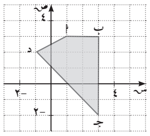
في التمارين (١٧–١٩)، أوجد قيمة كل من س، ص إذا كانت النقطتان على المستقيم مع المعطيات التالية:

(١٧) (س، ٣)، (٢، ٨)، الميل = $\frac{-\text{٥}}{\text{٢}}$.

(١٨) (–٤، ص)، (٢، ٤ص)، الميل = ٦.

(١٩) (٣، ٥)، (س، ٢)، الميل غير معرّف.

(٢٠) **هندسة:** أوجد ميل كل ضلع في الشكل المقابل إن أمكن.



في التمارين (٢١–٢٤)، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة و (ب) إذا كانت العبارة خطأ.

(٢١) من الممكن أن يكون لمستقيمين مختلفين الميل نفسه. (أ) (ب)

(٢٢) إن ميل المستقيم الذي يمر بالربع الثالث ونقطة الأصل هو دائمًا سالب. (أ) (ب)

(٢٣) لا يمر المستقيم الذي ميله يساوي صفرًا بنقطة الأصل. (أ) (ب)

(٢٤) نقطتين لديهما الإحداثي السيني نفسه، فإنهما ينتميان إلى المستقيم الرأسي نفسه. (أ) (ب)

(٢٥) **تحليل الخطأ:** وجد سالم أن ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (١، ٧)، (٣، ٩) يساوي: $\frac{\text{١} - \text{٣}}{\text{٧} - \text{٩}}$.
ما هو خطأ سالم؟

(٢٦) أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (س، –ص)، (–س، –ص).

في التمرينين (٢٧–٢٨)، حدِّد إن كانت مجموعة النقاط التالية تقع على استقامة واحدة.

(٢٧) أ(١، ٣)، ب(٤، ٢)، جـ(–٢، ٤).

(٢٨) أ(–٢، ٣)، ب(٠، –١)، جـ(٢، ١).

(٢٩) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (–١، –١)، (–٤، ٥) عمودي على المستقيم المار بالنقطتين (٠، ١)، (٤، ٣).

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) (أ) أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين أ(٤، –٣)، ب(١، –٥) مستخدمًا أ($س_٢$، $ص_٢$)، ب ($س_١$، $ص_١$).

(ب) أوجد ميل المستقيم في (أ) مستخدمًا أ($س_١$، $ص_١$)، ب($س_٢$، $ص_٢$).

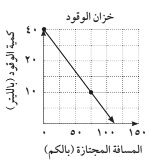
(جـ) ماذا تلاحظ؟

(٢) إذا كان معدل التغير في الجدول أو الرسم أدناه ثابتًا. أوجد معدل التغير وفسّر ماذا يعني كل معدل تغير في كل حالة مما يلي:

(أ)

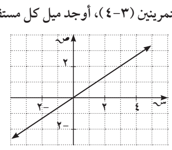
عدد الأشخاص	سعر الوجبة (بالدينار)
٢	٤
٣	٦
٤	٨
٥	١٠
٦	١٢

(ب)

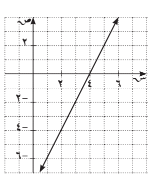


في التمرينين (٣–٤)، أوجد ميل كل مستقيم مما يلي:

(٣)



(٤)



٣ ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}} = \frac{٥ - (-١)}{-١ - ٢} = \frac{٦}{-٣} = -٢$

ميل $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}} = \frac{-٣ - ٥}{٣ - (-١)} = \frac{-٨}{٤} = -٢$

ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ويشتركان في النقطة ب

∴ أ، ب، جـ على استقامة واحدة.

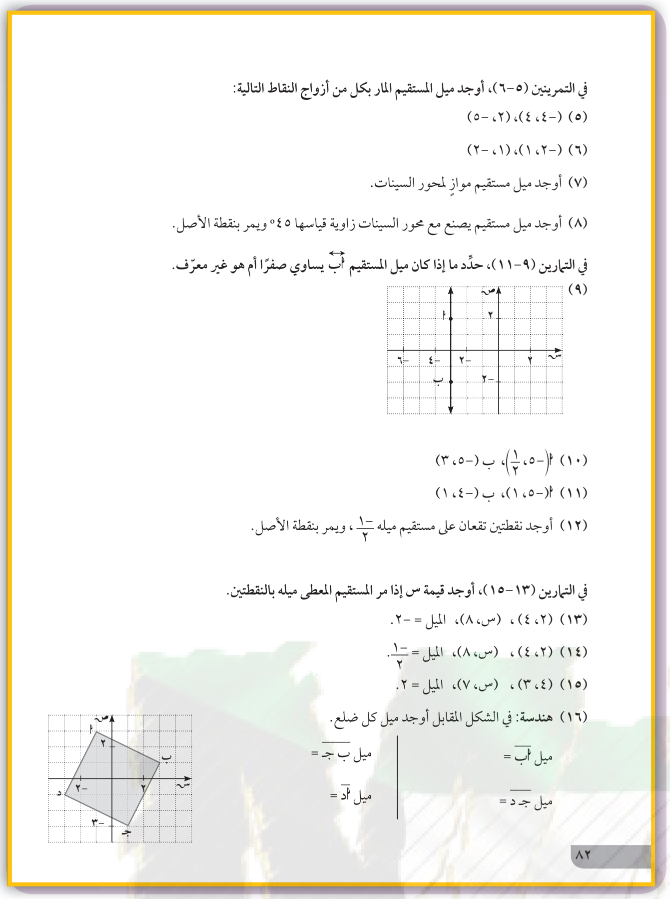
٤ ميل $\overleftrightarrow{\text{أن}} = \frac{٤ - ٠}{٠ - ٨} = -\frac{١}{٢}$

= ظل الزاوية التي يصنعها مع $\overleftrightarrow{\text{أن}}$ الاتجاه

الموجب لمحور السينات

ميل $\overleftrightarrow{\text{أن}}$ = ظا $\theta_١$

= − ظا $\theta_٢$



في التمرينين (٥–٦)، أوجد ميل المستقيم المار بكل من أزواج النقاط التالية:

(٥) (−٤، ٤)، (٢، −٥)

(٦) (−٢، ١)، (١، −٢)

(٧) أوجد ميل مستقيم موازٍ لمحور السينات.

(٨) أوجد ميل مستقيم يصنع مع محور السينات زاوية قياسها ٤٥° ويمر بنقطة الأصل.

في التمارين (٩–١١)، حدِّد ما إذا كان ميل المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يساوي صفرًا أم هو غير معرّف.

(٩)

(١٠) أ(−٥، $\frac{١}{٢}$)، ب (−٥، ٣)

(١١) أ(−٥، ١)، ب (−٤، ١)

(١٢) أوجد نقطتين تقعان على مستقيم ميله $\frac{-١}{٢}$، ويمر بنقطة الأصل.

في التمارين (١٣–١٥)، أوجد قيمة س إذا مر المستقيم المعطى ميله بالنقطتين.

(١٣) (٢، ٤)، (س، ٨)، الميل = −٢.

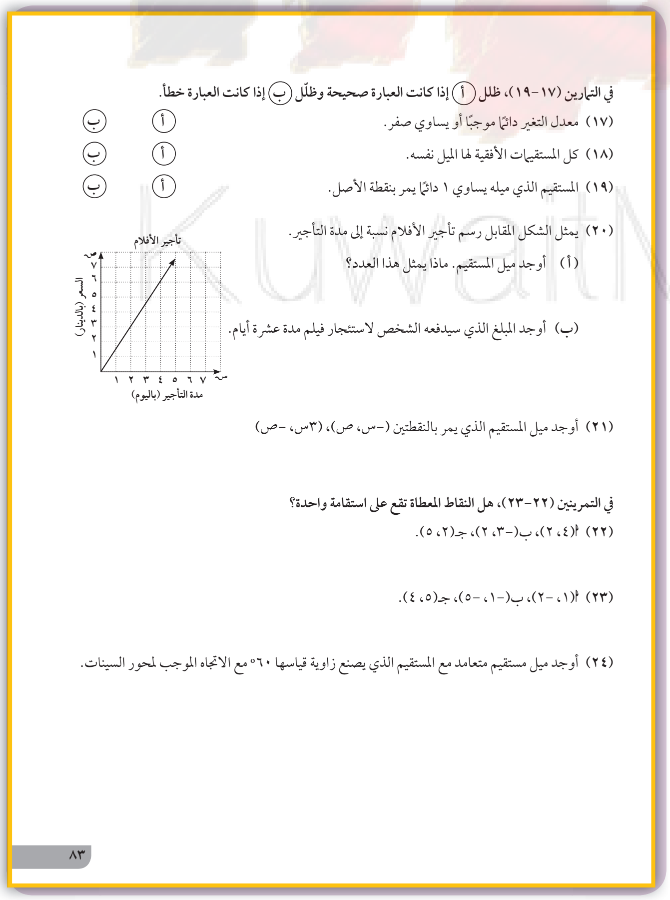
(١٤) (٢، ٤)، (س، ٨)، الميل = $\frac{-١}{٢}$.

(١٥) (٤، ٣)، (س، ٧)، الميل = ٢.

(١٦) هندسة: في الشكل المقابل أوجد ميل كل ضلع.

ميل $\overline{\text{أب}}$ = | ميل $\overline{\text{ب جـ}}$ =

ميل $\overline{\text{جـ د}}$ = | ميل $\overline{\text{أد}}$ =



في التمارين (١٧–١٩)، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة وظلّل (ب) إذا كانت العبارة خطأ.

(١٧) معدل التغير دائمًا موجبًا أو يساوي صفر. (أ) (ب)

(١٨) كل المستقيمات الأفقية لها الميل نفسه. (أ) (ب)

(١٩) المستقيم الذي ميله يساوي ١ دائمًا يمر بنقطة الأصل. (أ) (ب)

(٢٠) يمثل الشكل المقابل رسم تأجير الأفلام نسبة إلى مدة التأجير.

(أ) أوجد ميل المستقيم. ماذا يمثل هذا العدد؟

(ب) أوجد المبلغ الذي سيدفعه الشخص لاستئجار فيلم مدة عشرة أيام.

(٢١) أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (−س، ص)، (٣س، −ص)

في التمرينين (٢٢–٢٣)، هل النقاط المعطاة تقع على استقامة واحدة؟

(٢٢) أ(٤، ٢)، ب(−٣، ٢)، جـ(٢، ٥).

(٢٣) أ(١، −٢)، ب(−١، −٥)، جـ(٥، ٤).

(٢٤) أوجد ميل مستقيم متعامد مع المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٩_٣[ب] معادلة الخط المستقيم

١ الأهداف

- يوجد معادلة الخط المستقيم متى علم ميله ونقطة عليه.
- يوجد معادلة الخط المستقيم متى علم نقطتين عليه.
- يتعرف الصورة العامة لمعادلة المستقيم.
- يتعرف العلاقة بين ميل المستقيم ومعدل التغير.
- يتعرف معادلة المستقيم الأفقي ومعادلة المستقيم الرأسي.
- يوجد معدل التغير لكميتين مختلفتين.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

معدل التغير – معادلة – توازٍ – تعامد – معادلة محور السينات – معادلة محور الصادات.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة – ورق رسم بياني – آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اسأل الطلاب:

(أ) ما هو ميل الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين ﺃ(٢، ٥)، ب(–٣، –١)؟

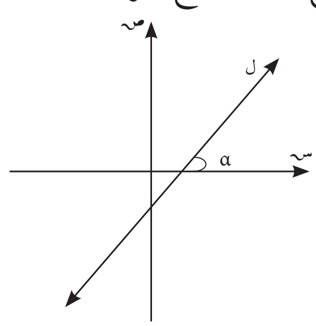
(ب) كيف تكون الخطوط المستقيمة متوازية؟

(جـ) كيف تكون الخطوط المستقيمة متعامدة؟

(د) إذا كان الخط المستقيم ل يصنع زاوية α مع محور السينات، وكان ظا α = $\sqrt{٣}$.

فما قياس هذه الزاوية بالدرجات؟

وما هو ميل هذا المستقيم؟



٥ التدريس

يتطرق هذا الدرس إلى أشكال متعددة من معادلة الخط المستقيم، وذلك بحسب موقعة في المستوى الإحداثي. لقد رأينا في الدرس السابق أن بإمكان الخط المستقيم أن يكون موازيًا

٩–٣ (ب)

معادلة الخط المستقيم
Equation of a Straight Line

دعنا نفكر ونتناقش

تُمثِّل المعادلة: ص = م س + ن بيانيًّا بخط مستقيم.

إذا كانت م = ٠ فإن معادلة المستقيم تصبح ص = ن وهي تمثل مستقيمًا موازيًا للمحور السيني (مستقيم أفقي).

إذا كانت ن = ٠ فإن المستقيم يمر بنقطة الأصل ومعادلته ص = م س.

سوف تتعلم

- كتابة معادلة الخط المستقيم
- الصورة العامة لمعادلة المستقيم
- إيجاد معدل التغيير

ملاحظة:

١ لكتابة معادلة خط مستقيم ليس رأسيًّا نحن بحاجة إلى معرفة:
- الميل (م).
- نقطة من نقاط المستقيم ولتكن ($س_١$، $ص_١$).

تكون معادلة المستقيم: ص – $ص_١$ = م(س – $س_١$).

٢ معادلة المستقيم الرأسي هي س = ﺃ (وهذا المستقيم ليس له ميل)

مثال (١)

اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{٣}{٢}$ و يمر بالنقطة (٤، –١).

الحل:

ص – (–١) = $\frac{٣}{٢}$ (س – ٤) بالتعويض

ص + ١ = $\frac{٣}{٢}$ س – ٦

ص = $\frac{٣}{٢}$ س – ٧ بالتبسيط

∴ المعادلة: ص = $\frac{٣}{٢}$ س – ٧.

تذكر:

معادلة محور السينات هي: ص = ٠
معادلة محور الصادات هي: س = ٠
وبالتالي إحداثيات نقاط محور السينات (س، ٠) وإحداثيات نقاط محور الصادات (٠، ص).

حاول أن تحل

١ اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{-٢}{٣}$ ويمر بالنقطة (–٦، ٥).

معلومة رياضية:

معدل درجة الحرارة بالفهرنهايت يرتبط بمعدل الدرجة المئوية (سيليزية) بالعلاقة:
ف° = $\frac{٩}{٥}$ م° + ٣٢ ويمكن كتابتها:
ص = $\frac{٩}{٥}$ س + ٣٢ وهي معادلة خط مستقيم ميله = $\frac{٩}{٥}$
أو ص = ١,٨ س + ٣٢.

١٣٦

مثال (٢)

اكتب معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين ﺃ(١، ٣)، ب(–٢، ٠).

الحل:

نوجد الميل

م = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٣ - ٠}{١ - (-٢)}$

م = $\frac{٣}{٣}$ = ١

المعادلة: ص – $ص_١$ = م(س – $س_١$)

ص – ٣ = ١ (س – ١) بالتعويض في المعادلة

ص = ٣ + س – ١ بالتبسيط

ص = س + ٢

وبالتالي معادلة المستقيم هي: ص – س – ٢ = ٠ أو س – ص + ٢ = ٠ وهي الصورة العامة لمعادلة المستقيم.

معلومة مفيدة:

الصورة العامة لمعادلة المستقيم هي:
ﺃس + ب ص + جـ = ٠
حيث ﺃ، ب لا يساويان الصفر معًا.

حاول أن تحل

٢ أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين جـ(٣، –١)، د(٢، –٢).

لأي مستقيمين غير رأسيين ومتوازيين الميل نفسه. أما إذا كان المستقيمان متعامدين وليس أحدهما رأسيًّا، فناتج ضرب ميليهما يساوي –١. وبالتالي إذا علمنا ميل أحد المستقيمات فيمكننا إيجاد ميل المستقيمات المتوازية معه أو ميل المستقيمات المتعامدة معه، كذلك يمكننا إيجاد معادلته بمعرفة نقطة على هذا المستقيم.

مثال (٣)

إذا كان المستقيم ل: ص = ٢س + ١، فأوجد:

أ معادلة المستقيم هـ الموازي للمستقيم ل والذي يمر بالنقطة (٢، –٣).

ب معادلة المستقيم ف العمودي على المستقيم ل والذي يمر بالنقطة (٤، –٣).

الحل:

أ ∵ المستقيمان ل، هـ متوازيان ، ميل المستقيم هـ = ميل المستقيم ل

∴ ميل المستقيم هـ = ٢

وبالتالي، معادلة المستقيم هـ تكتب على الشكل:

ص – $ص_١$ = م(س – $س_١$)

ص – (–٣) = ٢ (س – ٢) بالتعويض في المعادلة

ص = –٣ + ٢س – ٤ بالتبسيط

ص = ٢س – ٧

وبالتالي معادلة هـ : ص – ٢س + ٧ = ٠

أو ٢س – ص – ٧ = ٠ وهي الصورة العامة لمعادلة المستقيم.

١٣٧

لمحور السينات أو لمحور الصادات أو يمر بنقطة الأصل أو ليس أيًّا مما سبق.

لذا كان من الضروري إيجاد معادلة للخط المستقيم في كل حالة وردت. كما يتطرق هذا الدرس إلى وضعية الخطوط المستقيمة مع بعضها بعضًا إذا كانت متوازية أو متقاطعة أو متقاطعة متعامدة.

والأهم في كتابة معادلة الخط المستقيم هو إيجاد الميل وتحديد إحداثيات نقطة واحدة يمر بها كما في المثال (١).

إذا كان يمر بنقطتين نوجد الميل أولًا، ثم نستخدم واحدة من النقطتين كما في المثال (٢).

ركّز مع الطلاب على شرط توازي مستقيمين:

ميل المستقيم الأول = ميل المستقيم الثاني حيث الميل معرف

وعلى شروط تعامد مستقيمين:

ميل المستقيم الأول × ميل المستقيم الثاني = −١، مثال (٣).

وضّح للطلاب أن بيانات كثيرة من المسائل الحياتية يمكن نمذجتها بمعادلات خطية، نستطيع من خلالها وضع توقعات واتخاذ قرارات تساعد كثيرًا في حركة البيع والشراء والمعاملات في مجالات مختلفة.

ضرورة الاهتمام بالصورة العامة لمعادلة المستقيم حتى يستطيع الطالب توظيفها في البند التالي (البعد بين نقطة ومستقيم)

وهي على شكل: $أ$س + ب ص + جـ = ٠

ب ∵ ل ، ف مستقيمان متعامدان ∴ ميل المستقيم ل × ميل المستقيم ف = −١

٢ × ميل المستقيم ف = −١

ميل المستقيم ف = $\frac{-١}{٢}$

وبالتالي معادلة المستقيم ف:

ص − ص$_١$ = م (س − س$_١$)

ص − (−٣) = $\frac{-١}{٢}$ (س − ٤) بالتعويض

ص + ٣ = $\frac{-١}{٢}$ س + ٢ بالتبسيط

ص = $\frac{-١}{٢}$ س − ١

∴ معادلة المستقيم ف: ص = $\frac{-١}{٢}$ س − ١

تذكر: إذا كان ميل المستقيم هو $\frac{أ}{ب}$ فإن ميل المستقيم المتعامد معه هو $\frac{-ب}{أ}$ حيث $أ$، ب ≠ ٠

حاول أن تحل

٣ إذا كان المستقيم ك: ٣ص + س + ٣ = ٠، فأوجد:

أ معادلة المستقيم $أ$ الموازي للمستقيم ك والذي يمر بالنقطة (−٣، ٢).

ب معادلة المستقيم ز العمودي على المستقيم ك والذي يمر بالنقطة (١، ٤).

يمكن كتابة معادلة خطية لنمذجة البيانات في جدول لتوضيح العلاقة الخطية بين مجموعتين من البيانات فإذا كان معدل التغير بين الأزواج المتتالية من البيانات هو نفسه فيوجد علاقة خطية ويكون معدل التغير هو الميل.

مثال (٤)

هل يمكن إيجاد علاقة خطية بين الأزواج المتتالية في الجدول الموضح؟ إذا وجدت، فاكتب المعادلة الخطية التي يمكن أن تمثل جدول هذه البيانات.

س	ص
−١	٤
٣	٦
٥	٧
١١	١٠

الحل:

الخطوة الأولى:

أوجد معدل التغير بين كل زوجين مرتبين.

س	ص
−١	٤
٣	٦
٥	٧
١١	١٠

$\frac{٦ - ٤}{٣ + ١} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

$\frac{٧ - ٦}{٥ - ٣} = \frac{١}{٢}$

$\frac{١٠ - ٧}{١١ - ٥} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

معدل التغير = $\frac{١}{٢}$ وبالتالي م = $\frac{١}{٢}$

∴ يمكن إيجاد علاقة خطية بين الأزواج في جدول البيانات.

١٣٨

الخطوة الثانية:

استخدم صيغة الميل والنقطة لكتابة المعادلة:

ص − ص$_١$ = م (س − س$_١$)

ص − ٧ = $\frac{١}{٢}$ (س − ٥) عوض (س$_١$، ص$_١$) بـ (٥، ٧) وم بـ $\frac{١}{٢}$.

ص = $\frac{١}{٢}$ س + $\frac{٩}{٢}$

حاول أن تحل

٤ هل يمكن إيجاد علاقة خطية بين الأزواج المتتالية في جدول البيانات المرسوم؟

في حال وجود تلك العلاقة، اكتب المعادلة الخطية التي يمكن أن تمثل جدول هذه البيانات.

س	ص
−١١	−٧
−١	−٣
٤	−١
١٩	٥

مثال (٥) إثرائي

يبين الجدول التالي النسبة المئوية ص لتناقص الطاقة الكهربائية بدلالة س عدد ساعات عند استخدام البطارية في الحاسوب المحمول.

عدد ساعات استهلاك الطاقة الكهربائية (س)	١	٢	٣
النسبة المئوية للطاقة المتبقية (ص)	٨٠٪	٦٠٪	٤٠٪

أ اكتب معادلة خطية يمكن أن تنمذج العلاقة بين عدد الساعات والنسبة المئوية للطاقة المتبقية.

ب بعد كم ساعة تصبح الطاقة المتبقية في البطارية ٥٪؟

الحل:

أ معدل التغير = $\frac{٠,٦ - ٠,٨}{٢ - ١}$ = −٠,٢

$\frac{٠,٤ - ٠,٦}{٣ - ٢}$ = −٠,٢ فيكون معدل التغير ثابت

نستخدم المعادلة:

ص − ص$_١$ = م (س − س$_١$) معادلة المستقيم

ص − ٠,٦ = −٠,٢ (س − ٢) بالتعويض

ص = −٠,٢س + ١ بالتبسيط

ب المعادلة: ص = −٠,٢س + ١

ص = ٠,٠٥ بالتعويض نكتب ٠,٠٥ = −٠,٢س + ١

٠,٢س = ١ − ٠,٠٥

١٣٩

٦ الربط

يوفر مثال (٥) فرصة كبيرة للربط بين المسائل الحياتية ونمذجتها بمعادلات خطية لإيجاد توقعات واتخاذ قرارات مناسبة.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

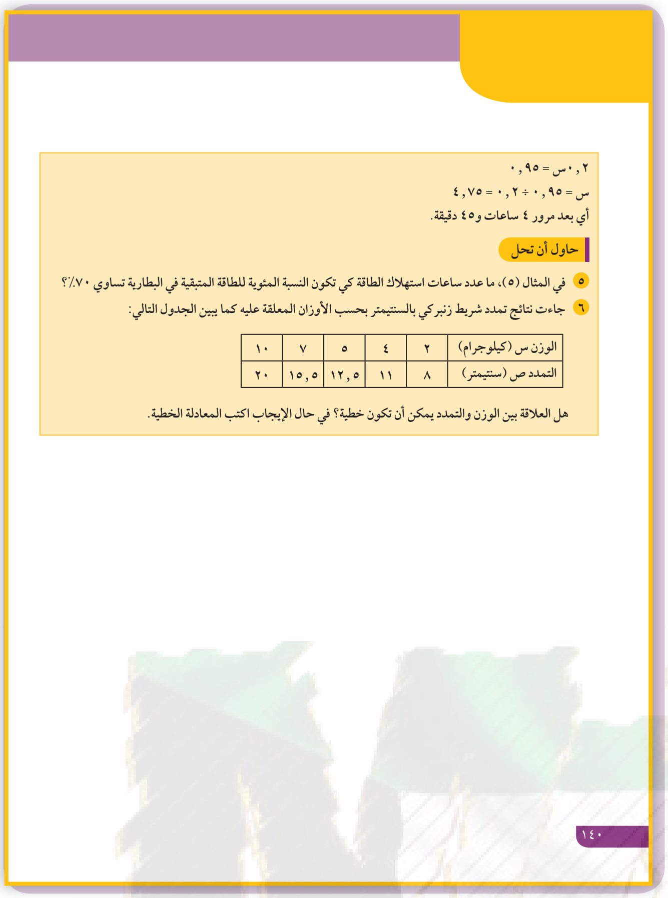
قد يخطئ الطلاب في استخدام قاعدة المسافة بين نقطتين فيكتبوا $\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}} = أ + ب$. أعط أمثلة تبيّن خطأ هذه المعادلة. مثال $\sqrt{٣^{٢} + ٤^{٢}} \neq ٣ + ٤ = ٧$. أشر إلى أن هذه المعادلة صحيحة فقط في حالة الضرب:

$\sqrt{أ^{٢} \times ب^{٢}} = \sqrt{أ^{٢}} \times \sqrt{ب^{٢}}$:

$= أ \times ب$ شرط $أ \times ب > ٠$

٨ التقييم

راقب عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لأنها تعطيك فكرة واضحة عن تمكنهم مما ورد في الدرس.


٢,٠س = ٩٥,٠

س = ٩٥,٠ ÷ ٢,٠ = ٤,٧٥

أي بعد مرور ٤ ساعات و٤٥ دقيقة.

حاول أن تحل

٥ في المثال (٥)، ما عدد ساعات استهلاك الطاقة كي تكون النسبة المئوية للطاقة المتبقية في البطارية تساوي ٧٠٪؟

٦ جاءت نتائج تمدد شريط زنبركي بالسنتيمتر بحسب الأوزان المعلقة عليه كما يبين الجدول التالي:

الوزن س (كيلوجرام)	٢	٤	٥	٧	١٠
التمدد ص (سنتيمتر)	٨	١١	١٢,٥	١٥,٥	٢٠

هل العلاقة بين الوزن والتمدد يمكن أن تكون خطية؟ في حال الإيجاب اكتب المعادلة الخطية.

١٤٠

اختبار سريع

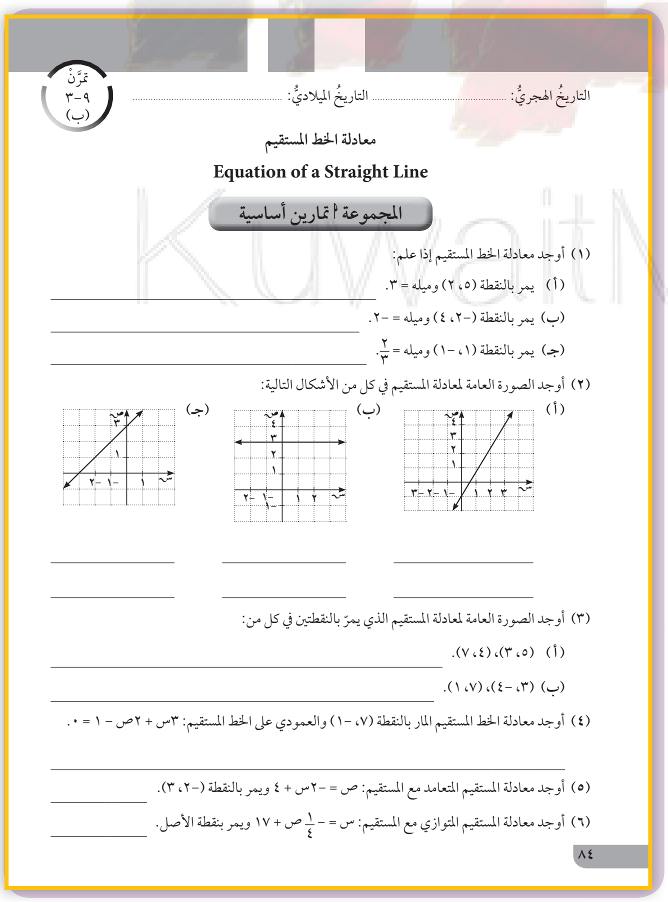
١ اكتب معادلة المستقيم ل الذي يمر بالنقطتين: أ(٣، ٥)، ب(−١، ٤). $ص = \frac{١}{٤} س + \frac{١٧}{٤}$

٢ أوجد معادلة المستقيم هـ الموازي للمستقيم ل والمار بنقطة الأصل. $ص = \frac{١}{٤} س$

٣ في الجدول، هل العلاقة يمكن أن تكون خطية؟ في حال الإيجاب اكتب المعادلة الخطية.

س	ص
٢	٦
٣	٨,٥
٥	١٣,٥
٦	١٦

نعم، $ص = \frac{٥}{٢} س + ١$


تمرَّنْ ٩-٣ (ب)

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

معادلة الخط المستقيم

Equation of a Straight Line

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) أوجد معادلة الخط المستقيم إذا علم:

(أ) يمر بالنقطة (٥، ٢) وميله = ٣.

(ب) يمر بالنقطة (−٢، ٤) وميله = −٢.

(جـ) يمر بالنقطة (١، −١) وميله = $\frac{٢}{٣}$.

(٢) أوجد الصورة العامة لمعادلة المستقيم في كل من الأشكال التالية:

(أ) (ب) (جـ)

(٣) أوجد الصورة العامة لمعادلة المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين في كل من:

(أ) (٥، ٣)، (٤، ٧).

(ب) (٣، −٤)، (٧، ١).

(٤) أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٧، −١) والعمودي على الخط المستقيم: ٣س + ٢ص − ١ = ٠.

(٥) أوجد معادلة المستقيم المتعامد مع المستقيم: ص = −٢س + ٤ ويمر بالنقطة (−٢، ٣).

(٦) أوجد معادلة المستقيم المتوازي مع المستقيم: س = $-\frac{١}{٤}$ ص + ١٧ ويمر بنقطة الأصل.

٨٤

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ باستخدام: ص − ص١ = م (س − س١)

$ص - ٥ = -\frac{٢}{٣} (س + ٦)$

ومنه: $ص = -\frac{٢}{٣} س + ١$

٢ الميل = $\frac{-٢ - (-١)}{٢ - ٣}$ = +١، ص − ص$_١$ = م (س − س$_١$)

نأخذ إحدى النقاط فيكون س − ص − ٤ = ٠

٣ (أ) ميل المستقيم ك = $-\frac{١}{٣}$

لذا يكون ميل المستقيم م = $-\frac{١}{٣}$

نأخذ المعادلة: ص − ص$_١$ = م (س − س$_١$)

ص − ٢ = $-\frac{١}{٣}$ (س + ٣)

ومنه ص = $-\frac{١}{٣}$ س + ١

(ب) ميل المستقيم ز العمودي على ك يساوي ٣

نأخذ المعادلة: ص − ص$_١$ = م (س − س$_١$)

ص − ٤ = ٣ (س − ١)

ومنه ص = ٣س + ١

٤ $\frac{-٣ - (-٧)}{-١ - (-١١)}$ = $\frac{٤}{١٠}$ = $\frac{٢}{٥}$

$\frac{-١ - (-٣)}{٤ - (-١)}$ = $\frac{٢}{٥}$

$\frac{٥ - (-١)}{١٩ - ٤}$ = $\frac{٦}{١٥}$ = $\frac{٢}{٥}$ من الممكن أن توجد علاقة خطية

المعادلة: ص = $\frac{٢}{٥}$ س − $\frac{١٣}{٥}$.

٥ ساعة ونصف

٦ نعم من الممكن أن تكون العلاقة خطية

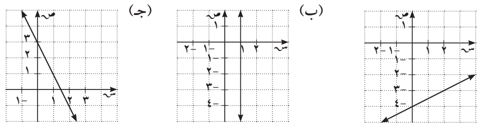
ص = $\frac{٣}{٢}$ س + ٥

(٧) أوجد معادلة الخط المستقيم العمودي على المستقيم: ٢س + ص + ١ = ٠ ويمر بالنقطة (−١، ١).

المجموعة ب تمارين تعزيزية

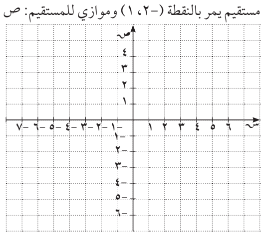
(١) أوجد معادلة الخط المستقيم المرسوم في ما يلي:

(أ) (ب) (جـ)

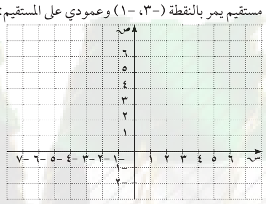


في التمارين (٢–٥)، أوجد معادلة كل مستقيم، ثمّ ارسمه:

(٢) مستقيم يمر بالنقطة (−٢، ١) وموازي للمستقيم: ص = −٣س + ١.

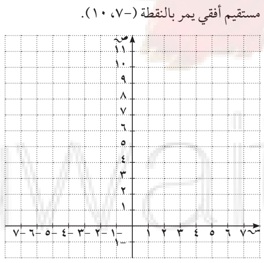


(٣) مستقيم يمر بالنقطة (−٣، −١) وعمودي على المستقيم: ص = $-\frac{٢}{٥}$س + ١.

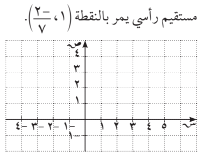


٨٥

(٤) مستقيم أفقي يمر بالنقطة (−٧، ١٠).



(٥) مستقيم رأسي يمر بالنقطة $\left(١، \frac{-٢}{٧}\right)$.



(٦) أوجد معادلة المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين: (٥، ٢)، (٠، −٣).

(٧) أوجد معادلة الخط المستقيم في كل مما يلي:

(أ) يمر بنقطة الأصل وميله ٧.

(ب) يمر بنقطة الأصل وبالنقطة (٣، −٤).

(جـ) يقطع من الجزء الموجب لمحور السينات جزءًا طوله ٣ وحدات، ومن الجزء الموجب لمحور الصادات جزءًا طوله ٥ وحدات.

(٨) أوجد الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم المار بالنقطة م(٥، ٧) والموازي للمستقيم المار بالنقطتين (٣، ٤)، (٢، ١).

٨٦

٩-٤ البعد بين نقطة ومستقيم

١ الأهداف

- إيجاد البعد بين نقطة ومستقيم.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

البعد بين نقطة ومستقيم.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة - آلة حاسبة - مثلث قائم الزاوية خشبي أو بلاستيكي - حاسوب - جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

ارسم على السبورة مستقيمين (غير متوازيين) ونقطة أ لا تنتمي لأي منهما.

اسأل الطلاب...

أي من المستقيمين هو أقرب إلى النقطة أ؟ وكيف يمكنكم معرفة ذلك؟ أشر إلى إمكانية استخدام المثلث قائم الزاوية الخشبي لمعرفة ذلك. ضع على أحد المستقيمين عدة نقاط.

اسألهم: أي من هذه النقاط هو الأقرب إلى أ.

٥ التدريس

راجع مع الطلاب كيفية التحقق من انتماء نقطة إلى مستقيم. أعطهم أمثلة على ذلك. استفد من المناسبة لتذكير الطلاب بنقطتي التقاطع بين المستقيم وكل من محوري الإحداثيات.

أشر إلى أن البعد بين نقطة ومستقيم هو أصغر مسافة بين النقطة وأي نقطة تنتمي إلى المستقيم.

ركّز على الصيغة $\text{ف} = \frac{|\text{أس}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}$.

أشر إلى ضرورة استخدام القيمة المطلقة لأن البعد هو عدد غير سالب. أخبر الطلاب أن قاعدة البعد بين نقطة ومستقيم مختلفة تمامًا عن قاعدة المسافة بين نقطتين.

٩-٤

البعد بين نقطة ومستقيم

Distance Between a Point and a Straight Line

دعنا نفكر ونتناقش

رأينا سابقًا المسافة بين النقطتين (س١، ص١)، (س٢، ص٢) والقاعدة التي توجد هذه المسافة ل على الشكل التالي:

$\text{ل} = \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$.

ومعادلة المستقيم هي على الصورة ص = م س + ن، حيث م هي ميل المستقيم.

في هذا الدرس سوف نوجد البعد بين نقطة ومستقيم حيث هو طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة على المستقيم، ولكي نجد هذا البعد

نحن بحاجة إلى كتابة معادلة المستقيم على الصورة:

أ س + ب ص + جـ = ٠، حيث أ، ب لا يساويان الصفر معًا.

سوف تتعلم

- إيجاد البعد بين نقطة ومستقيم

إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة ل: أ س + ب ص + جـ = ٠، فإن البعد ف بين النقطة د (س١، ص١) والمستقيم ل تعطى بالصيغة: $\text{ف} = \frac{|\text{أس}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}$.

إذا كانت النقطة د تنتمي إلى المستقيم ل فالبعد بينهما يساوي صفرًا.

مثال (١)

أثبت أن النقطة هـ(٢، ١) لا تنتمي إلى المستقيم ل الذي معادلته: ص = ٣ س - ٤، ثمّ أوجد البعد بين المستقيم ل والنقطة هـ.

الحل:

بالتعويض عن (س، ص) بـ (٢، ١) في المعادلة: ص = ٣س - ٤

نحصل على ١ ≟ ٣ × ٢ - ٤

١ ≠ ٢ ∴ هـ لا تنتمي إلى المستقيم ل.

لإيجاد البعد بين هـ، المستقيم ل يجب كتابة معادلة المستقيم ل على الصورة:

أ س + ب ص + جـ = ٠

∴ ل: ٣س - ص - ٤ = ٠

أ = ٣ ب = -١ جـ = -٤

س١ = ٢ ص١ = ١

$\text{البعد ف} = \frac{|\text{أس}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}$

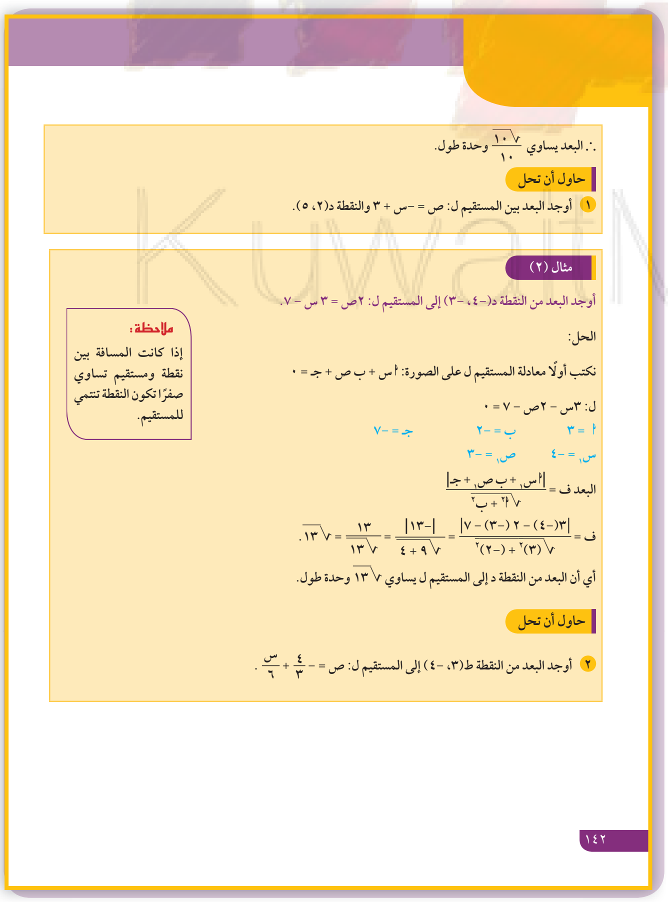
$= \frac{|٣ \times ٢ - ١ - ٤|}{\sqrt{٣^2 + (-١)^2}} = \frac{|٦ - ٥|}{\sqrt{١٠}} = \frac{١}{\sqrt{١٠}}$

ملاحظة:

بعد نقطة عن مستقيم هو طول القطعة العمودية المرسومة من النقطة على الخط المستقيم.

أ د هي أقصر مسافة بين النقطة أ والمستقيم ل.

١٤١



∴ البعد يساوي $\frac{\sqrt{١٠}}{١٠}$ وحدة طول.

حاول أن تحل

١ أوجد البعد بين المستقيم ل: ص = -س + ٣ والنقطة د(٢، ٥).

مثال (٢)

أوجد البعد من النقطة د(-٤، -٣) إلى المستقيم ل: ٢ص = ٣ س - ٧.

الحل:

نكتب أولًا معادلة المستقيم ل على الصورة: أ س + ب ص + جـ = ٠

ل: ٣س - ٢ص - ٧ = ٠

أ = ٣ ب = -٢ جـ = -٧

س١ = -٤ ص١ = -٣

$\text{البعد ف} = \frac{|\text{أس}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}$

$\text{ف} = \frac{|٣(-٤) - ٢(-٣) - ٧|}{\sqrt{(٣)^2 + (-٢)^2}} = \frac{|-١٣|}{\sqrt{٩ + ٤}} = \frac{١٣}{\sqrt{١٣}} = \sqrt{١٣}$.

أي أن البعد من النقطة د إلى المستقيم ل يساوي $\sqrt{١٣}$ وحدة طول.

ملاحظة:

إذا كانت المسافة بين نقطة ومستقيم تساوي صفرًا تكون النقطة تنتمي للمستقيم.

حاول أن تحل

٢ أوجد البعد من النقطة ط(٣، -٤) إلى المستقيم ل: ص = $-\frac{٤}{٣} + \frac{\text{س}}{٦}$.

١٤٢

أعط الطلاب المعادلة: ٢س − ص + ٤ = ٠ والنقطتين ﺃ(١، ٥)، ب(−٣، ٢) واطلب إليهم العمل أزواجًا لإيجاد البعد بين كل من النقطتين ﺃ، ب والمستقيم. تحقق من صحة التعويض عن س، ص في المعادلة.

٦ الربط

لا يوجد.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام صيغة البعد بين نقطة ومستقيم باعتماد الصيغة ص = ﺃس + ب لمعادلة المستقيم.
أشر إلى أن صيغة البعد تعتمد على المعادلة:
ﺃس + ب ص + جـ = ٠. وأعطهم أمثلة تبين كيفية الانتقال من ص = ﺃس + ب إلى ﺃس + ب ص + جـ = ٠

٨ التقييم

راقب عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لأنها تعطيك فكرة واضحة عن تمكنهم من الصيغة المطلوبة والتعويض الصحيح لقيم س، ص.

اختبار سريع

١ أثبت أن النقطة ك (١، ٢) لا تنتمي إلى المستقيم ل الذي معادلته ص = −٢س + ١.

٢ = −٢(١) + ١ ؛ ٢ ≠ −١.

٢ أوجد البعد بين النقطة ك والمستقيم ل.

$\frac{٣}{\sqrt{٥}}$ وحدة طول

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ البعد = ٢ $\sqrt{٢}$ وحدة طول.

٢ يفضل وضع المعادلة على الصورة العامة بعد ضرب طرفي المعادلة في ٦ فتصبح −س + ٦ص + ٨ = ٠

ويكون البعد = $\frac{١٩}{\sqrt{٣٧}}$ وحدة طول.

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ ٩-٤

البعد بين نقطة ومستقيم

Distance Between a Point and a Straight Line

المجموعة ﺃ تمارين أساسية

في التمارين (١−٤)، معادلة المستقيم ل: ٢س − ص + ٣ = ٠

بيّن ما إذا كانت النقطة تنتمي إلى المستقيم ل أم لا.

(١) م(−٢، −١) ________ (٢) ب(٠، −٢) ________

(٣) جـ(٤، ٠) ________ (٤) د(٢، −١) ________

(٥) أوجد البعد بين النقطة جـ(٢، ١) والمستقيم: ٣س − ص − ١ = ٠

(٦) أوجد البعد بين نقطة الأصل والمستقيم: ٢ص = ٣س + ٤

(٧) أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و(٢، −١) إذا كان المستقيم: ٣س − ٤ص + ٧ = ٠ مماس لها.

(٨) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢، −٣) على المستقيم: −٢س + ص − ٤ = ٠

(٩) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (−٤، ٧) على المستقيم: ص = −٥س + ١

(١٠) أوجد طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على المستقيم المار بالنقطتين (٧، ٣)، (−٥، ١)

٨٧

المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمارين (١−٣)، معادلة المستقيم ل: ٣ص − س + ١ = ٠

بيّن ما إذا كانت النقطة تنتمي إلى المستقيم ل أم لا.

(١) (٣، ٣)

(٢) (٢، ٠)

(٣) (٤، ١)

(٤) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٤، ٥) على المستقيم: ٣س + ٤ص = ٠

(٥) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٨، ٠) على المستقيم: ٥س + ١٢ص = ٠

(٦) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢، ٧) على المستقيم المار بالنقطتين: (٣، ١)، (٥، ٣).

(٧) أوجد بعد النقطة (٤، ٤) عن المستقيم المار بنقطة الأصل وميله $\frac{٣}{٤}$.

(٨) أوجد أقصر مسافة من النقطة (٤، ٤) إلى المستقيم المار بالنقطتين (٢، ٠)، (٠، ٢).

٨٨

٩ـ٥ معادلة الدائرة

١ الأهداف

- يكتب معادلة الدائرة بالصورة القياسية.
- يكتب معادلة الدائرة بالصورة العامة.
- يعين المركز وطول نصف القطر من الصورة العامة لمعادلة الدائرة.
- يكتب معادلة مماس على الدائرة.
- يوجد العلاقة بين دائرتين في المستوي.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

معادلة دائرة بالصورة القياسية – معادلة دائرة بالصورة العامة – معادلة مماس على الدائرة – شروط تقاطع دائرتين في المستوي – تماس الدائرتين – تداخل الدائرتين – تباعد دائرتين.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة – فرجار – ورق رسم بياني – آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اسأل الطلاب:

(أ) ما هي الدائرة؟

(ب) ما قياس الزاوية بين المماس ونصف القطر عن نقطة تقاطعها على الدائرة؟

(جـ) ما قاعدة المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي؟

(د) ما قاعدة البعد بين نقطة ومستقيم في المستوى الإحداثي؟

(هـ) اكتب المعادلتين: س^{٢} − ١٠ س + ٢٥ = ٠،

٤س^{٢} + ١٢س + ٩ = ٠ على صورة مربعين كاملين.

٥ التدريس

تعتبر معادلة الدائرة بالصورة القياسية:

(س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = نق^{٢}، بسيطة إذ لا يحتاج الطالب سوى إلى إحداثيات المركز (د، هـ) وطول نصف قطر الدائرة

٩ـ٥

معادلة الدائرة

Equation of a Circle

دعنا نفكر ونتناقش

إذا كان لديك قطعة من الحبل طولها ٦ أمتار، وأردت أن ترسم دائرة في فناء المدرسة، فما الذي تفعله؟ فكر مع زملائك.

هذا سيقودنا إلى تعريف الدائرة

الدائرة هي مجموعة النقاط في المستوي التي تكون على بعد ثابت من نقطة معلومة، والنقطة المعلومة تسمى **مركز الدائرة**.

والبعد الثابت هو طول نصف قطر الدائرة ويرمز له بالرمز نق.

سوف تتعلم

- معادلة الدائرة
- الصورة العامة لمعادلة الدائرة
- إيجاد مركز الدائرة وطول نصف قطرها
- معادلة مماس الدائرة
- العلاقة بين دائرتين في المستوي

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة:

لأي دائرة مركزها م(د، هـ) وطول نصف قطرها نق فإن المسافة بين مركز الدائرة وأي نقطة أ(س، ص) على الدائرة يمكن إيجادها باستخدام قانون المسافة بين نقطتين.

المسافة = $\sqrt{(س_{٢} − س_{١})^{٢} + (ص_{٢} − ص_{١})^{٢}}$

نق = $\sqrt{(س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢}}$

نق^{٢} = (س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢}

وعلى ذلك، تكون معادلة الدائرة التي مركزها (د، هـ) وطول نصف قطرها نق على الصورة:

(س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = نق^{٢}

وتسمّى هذه الصورة القياسية لمعادلة الدائرة بمعلومية المركز م(د، هـ) وطول نصف القطر نق.

مثال (١)

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣، −٢) وطول نصف قطرها ٧ وحدات.

الحل:

معادلة الدائرة على الصورة القياسية: (س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = نق^{٢} ، حيث (د، هـ) مركزها

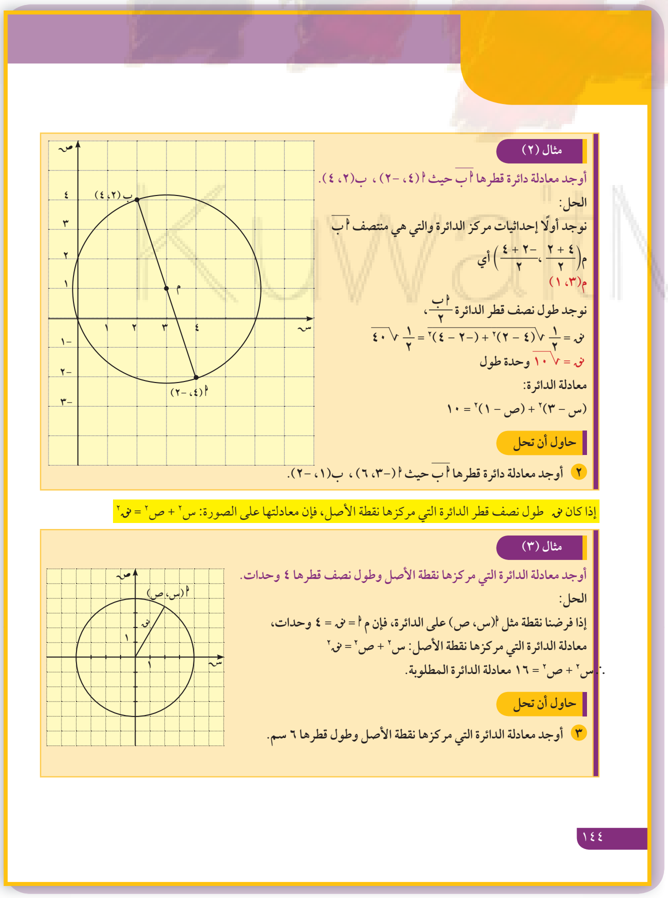
(س − ٣)^{٢} + [ص − (−٢)]^{٢} = ٤٩ بالتعويض عن (د، هـ) بـ (٣، −٢)

(س − ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٤٩

حاول أن تحل

١ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٥، −٣) وطول نصف قطرها ٥ وحدات.

١٤٣



مثال (٢)

أوجد معادلة دائرة قطرها $\overline{أب}$ حيث أ(٤، −٢)، ب(٢، ٤).

الحل:

نوجد أولًا إحداثيات مركز الدائرة والتي هي منتصف $\overline{أب}$

م$\left(\frac{٤ + ٢}{٢}، \frac{−٢ + ٤}{٢}\right)$ أي

م(٣، ١)

نوجد طول نصف قطر الدائرة $\frac{أب}{٢}$،

نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{(٤ − ٢)^{٢} + (−٢ − ٤)^{٢}} = \frac{١}{٢}\sqrt{٤٠}$

نق = $\sqrt{١٠}$ وحدة طول

معادلة الدائرة:

(س − ٣)^{٢} + (ص − ١)^{٢} = ١٠

حاول أن تحل

٢ أوجد معادلة دائرة قطرها $\overline{أب}$ حيث أ(−٣، ٦)، ب(١، −٢).

إذا كان نق طول نصف قطر الدائرة التي مركزها نقطة الأصل، فإن معادلتها على الصورة: س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢}

مثال (٣)

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٤ وحدات.

الحل:

إذا فرضنا نقطة مثل أ(س، ص) على الدائرة، فإن م أ = نق = ٤ وحدات،

معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل: س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢}

∴ س^{٢} + ص^{٢} = ١٦ معادلة الدائرة المطلوبة.

حاول أن تحل

٣ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول قطرها ٦ سم.

١٤٤

نحو، ثم إلى تطبيق قاعدة المسافة بين نقطتين، واحدة (س، ص) متحركة أينما كانت على الدائرة ومركز الدائرة الذي هو نقطة ثابتة كما في المثالين (١) و(٢). وبالعكس، إذا كان لدينا الصورة القياسية لمعادلة الدائرة. كما ويمكن أيضًا ببساطة إيجاد إحداثيات مركزها وطول نصف قطرها كما في المثال (٤).

شدّد على الصورة العامة لمعادلة الدائرة حيث يجب الانتباه إلى تحويل كل من التعبيرين س، ص إلى مربع كامل للحصول على الصورة القياسية. قدم أمثلة متنوعة ومتعددة لربط الصورة العامة بالصورة القياسية.

اشرح لهم أن س^{٢} + ل س هو التعبير الذي سيأخذ الشكل (س − د)^{٢}، وأن ص^{٢} + ك ص هو التعبير الذي سيأخذ الشكل (ص − هـ)^{٢}. أخبرهم أنهم قد يواجهون مشاكل في الصورة، بحيث إنهم لن يحصلوا على معادلة دائرة إذا كانت القيمة بعد المساواة سالبة عند تحويلها إلى الصورة القياسية.

رسّخ لدى الطلاب فكرة أن معاملي س^{٢}، ص^{٢} يجب أن تكون متساوية ، كما أنه لا يجب أن يكون في الصورة العامة حدًّا يشمل س × ص.

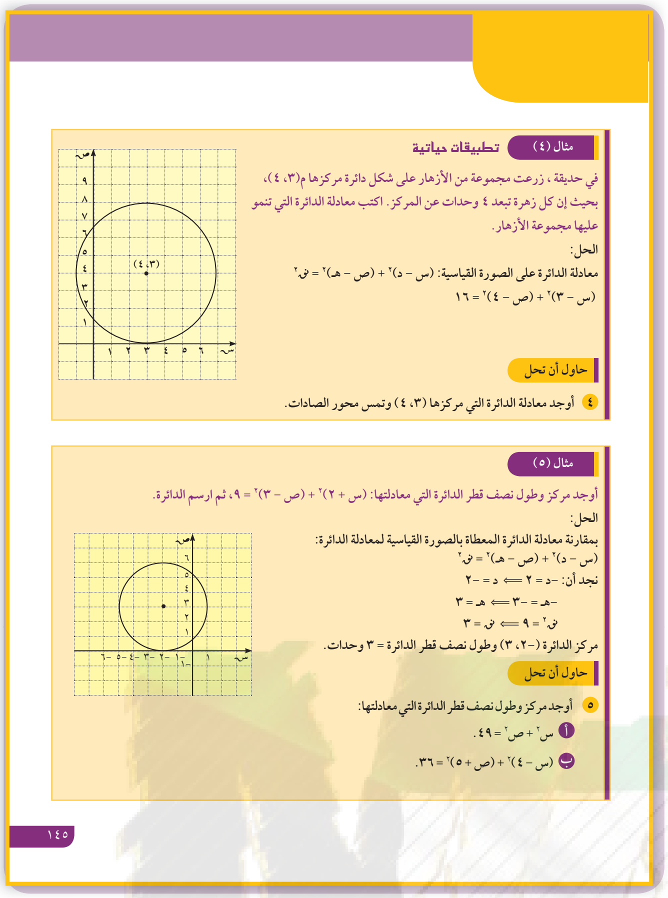
اشرح لهم أن معادلة عامة على شكل: م س^{٢} + م ص^{٢} + ل س + ك ص + ب = ٠ (م ≠ ٠)، يمكن أن تكون معادلة دائرة، وذلك بالقسمة على م فنحصل على المعادلة:

$$س^{٢} + ص^{٢} + \frac{ل}{م} س + \frac{ك}{م} ص + \frac{ب}{م} = ٠.$$

تعامل مع الطلاب بروية في المثال (٥)، لأنه يحقق شروط كثيرة من المعادلة بالصورة العامة وصولاً إلى المعادلة بالصورة القياسية.

في المثال (٨)، أكد للطلاب أن معادلة المماس للدائرة سوف تتناول في هذا الدرس حالة واحدة، وهي عندما تكون نقطة على الدائرة، نرسم من هذه النقطة المماس، وهو سوف يكون عموديًّا على نصف القطر المار بهذه النقطة، لذا يمكن تطبيق شروط المستقيمين المتعامدين.

لدراسة تقاطع دائرتين في المستوى الإحداثي، أوجد المسافة بين مركزي الدائرتين باستخدام قاعدة المسافة بين نقطتين، ثم قارن هذه المسافة بمجموع طولي نصف القطر للدائرتين، كما هو موضح في الجدول من كتاب الطالب ص ١٥١.



مثال (٤) تطبيقات حياتية

في حديقة ، زرعت مجموعة من الأزهار على شكل دائرة مركزها م(٣، ٤)، بحيث إن كل زهرة تبعد ٤ وحدات عن المركز. اكتب معادلة الدائرة التي تنمو عليها مجموعة الأزهار.

الحل:

معادلة الدائرة على الصورة القياسية: (س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = نق^{٢}

(س − ٣)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ١٦

حاول أن تحل

٤ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣، ٤) وتمس محور الصادات.

مثال (٥)

أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها: (س + ٢)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٩، ثم ارسم الدائرة.

الحل:

بمقارنة معادلة الدائرة المعطاة بالصورة القياسية لمعادلة الدائرة:

(س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = نق^{٢}

نجد أن: −د = ٢ ⟸ د = −٢

−هـ = −٣ ⟸ هـ = ٣

نق^{٢} = ٩ ⟸ نق = ٣

مركز الدائرة (−٢، ٣) وطول نصف قطر الدائرة = ٣ وحدات.

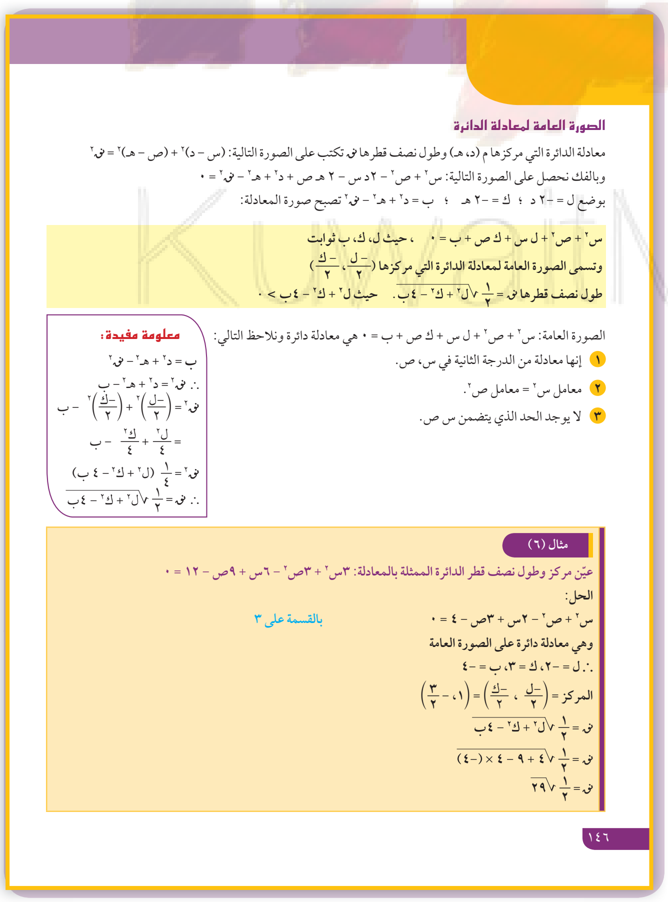
حاول أن تحل

٥ أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها:

أ س^{٢} + ص^{٢} = ٤٩.

ب (س − ٤)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٣٦.

١٤٥



الصورة العامة لمعادلة الدائرة

معادلة الدائرة التي مركزها م (د، هـ) وطول نصف قطرها نق تكتب على الصورة التالية: (س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = نق^{٢}

وبالفك نحصل على الصورة التالية: س^{٢} + ص^{٢} − ٢د س − ٢ هـ ص + د^{٢} + هـ^{٢} − نق^{٢} = ٠

بوضع ل = −٢ د ؛ ك = −٢ هـ ؛ ب = د^{٢} + هـ^{٢} − نق^{٢} تصبح صورة المعادلة:

س^{٢} + ص^{٢} + ل س + ك ص + ب = ٠ ، حيث ل، ك، ب ثوابت

وتسمى الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها $\left(\frac{-ل}{٢}، \frac{-ك}{٢}\right)$

طول نصف قطرها نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب}$. حيث ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب > ٠

الصورة العامة: س^{٢} + ص^{٢} + ل س + ك ص + ب = ٠ هي معادلة دائرة ونلاحظ التالي:

١ إنها معادلة من الدرجة الثانية في س، ص.

٢ معامل س^{٢} = معامل ص^{٢}.

٣ لا يوجد الحد الذي يتضمن س ص.

معلومة مفيدة:

ب = د^{٢} + هـ^{٢} − نق^{٢}

∴ نق^{٢} = د^{٢} + هـ^{٢} − ب

نق^{٢} = $\left(\frac{-ل}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{-ك}{٢}\right)^{٢}$ − ب

= $\frac{ل^{٢}}{٤} + \frac{ك^{٢}}{٤}$ − ب

نق^{٢} = $\frac{١}{٤}$ (ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ ب)

∴ نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب}$

مثال (٦)

عيّن مركز وطول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة: ٣س^{٢} + ٣ص^{٢} − ٦س + ٩ص − ١٢ = ٠

الحل:

س^{٢} + ص^{٢} − ٢س + ٣ص − ٤ = ٠ بالقسمة على ٣

وهي معادلة دائرة على الصورة العامة

∴ ل = −٢، ك = ٣، ب = −٤

المركز = $\left(\frac{-ل}{٢}، \frac{-ك}{٢}\right) = \left(١، -\frac{٣}{٢}\right)$

نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب}$

نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{٤ + ٩ - ٤ \times (-٤)}$

نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{٢٩}$

١٤٦

٦ الربط

يوفر المثال (٤) فرصة كبيرة للربط بين الدائرة واستخداماتها، كما أن الدواليب في الدراجات الهوائية والنارية خير أمثلة على الربط بالدائرة.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في التحقق من انتماء النقطة على الدائرة.
قد يخطئ الطلاب في الشروط الواجب توافرها في الصورة العامة لمعادلة الدائرة.
ساعدهم بأمثلة تبيّن تحقيق المساواة في معادلة الدائرة عند التعويض بقيم س، ص.

٨ التقييم

لاحظ بعناية ما يقوم به الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» وما إذا كانوا قادرين على الإجابة بطريقة توضح مدى فهمهم لها.

اختبار سريع

١ هل المعادلة س^{٢} + ص^{٢} − ٤س + ٢ص − ٤ = ٠. تمثل معادلة دائرة؟ في حالة الإيجاب عيّن مركزها وطول نصف قطرها.
نعم المركز (٢، −١)، نق = ٣

٢ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (١، ٢) وتمر بالنقطة (٥، ٣) (س − ١)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ١٧

٣ أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها:
(س − ٤)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ١٠ عند نقطة التماس م(٣، ٥) س − ٣ص + ١٢ = ٠


الدائرة مركزها $\left(١، −\frac{٣}{٢}\right)$ وطول نصف قطرها نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{٢٩}$ وحدة طول.

حاول أن تحل

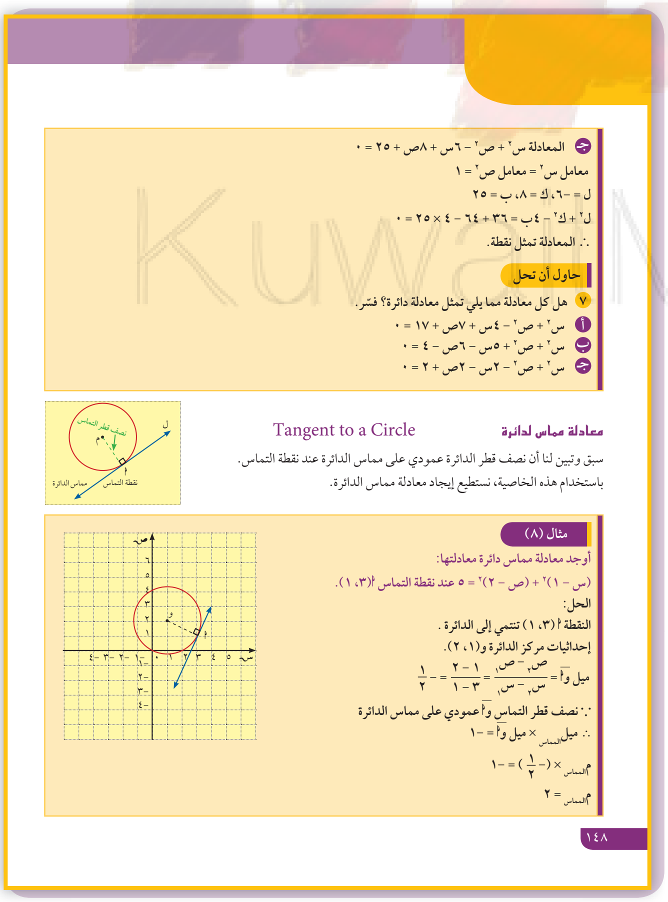
٦ عيّن مركز وطول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة: ٢س^{٢} + ٢ص^{٢} − ١٢س − ٤ص − ٣٠ = ٠

ملاحظة
عندما يكون لدينا معادلة على الصورة العامة التالية: س^{٢} + ص^{٢} + ل س + ك ص + ب = ٠
يمكننا معرفة ما تمثله بيانيًّا هذه المعادلة بمجرد مقارنة ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب مع الصفر.
١ عندما ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب < ٠ فإن المعادلة لا تمثل معادلة دائرة.
٢ عندما ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب = ٠ فإن المعادلة تمثل نقطة.
٣ عندما ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب > ٠ فإن المعادلة تمثل دائرة.

مثال (٧)
هل كل معادلة مما يلي تمثل معادلة دائرة؟ فسّر.
أ س^{٢} + ص^{٢} − ٣س + ٥ص − $\frac{١٥}{٤}$ = ٠
ب س^{٢} + ص^{٢} + ٤س − ٧ص + ٢٠ = ٠
جـ س^{٢} + ص^{٢} − ٦س + ٨ص + ٢٥ = ٠

الحل:
أ المعادلة: س^{٢} + ص^{٢} − ٣س + ٥ص − $\frac{١٥}{٤}$ = ٠
معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١
ل = −٣، ك = ٥، ب = $\frac{−١٥}{٤}$
ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب = ٩ + ٢٥ − ٤$\left(\frac{−١٥}{٤}\right)$ = ٩ + ٢٥ + ١٥ = ٤٩ > ٠
٤٩ > ٠ ∴ المعادلة تمثل معادلة دائرة.
ب المعادلة: س^{٢} + ص^{٢} + ٤س − ٧ص + ٢٠ = ٠
معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١
ل = ٤، ك = −٧، ب = ٢٠
ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب = ١٦ + ٤٩ − ٤ × ٢٠ = −١٥ < ٠
∴ المعادلة لا تمثل معادلة دائرة.

١٤٧


جـ المعادلة س^{٢} + ص^{٢} − ٦س + ٨ص + ٢٥ = ٠
معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١
ل = −٦، ك = ٨، ب = ٢٥
ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب = ٣٦ + ٦٤ − ٤ × ٢٥ = ٠
∴ المعادلة تمثل نقطة.

حاول أن تحل

٧ هل كل معادلة مما يلي تمثل معادلة دائرة؟ فسّر.
أ س^{٢} + ص^{٢} − ٤س + ٧ص + ١٧ = ٠
ب س^{٢} + ص^{٢} + ٥س − ٦ص − ٤ = ٠
جـ س^{٢} + ص^{٢} − ٢س − ٢ص + ٢ = ٠

معادلة مماس لدائرة Tangent to a Circle

سبق وتبين لنا أن نصف قطر الدائرة عمودي على مماس الدائرة عند نقطة التماس.
باستخدام هذه الخاصية، نستطيع إيجاد معادلة مماس الدائرة.

مثال (٨)
أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها:
(س − ١)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٥ عند نقطة التماس أ(٣، ١).
الحل:
النقطة أ (٣، ١) تنتمي إلى الدائرة.
إحداثيات مركز الدائرة و(١، ٢).
ميل $\overline{وأ}$ = $\frac{ص_٢ − ص_١}{س_٢ − س_١}$ = $\frac{١ − ٢}{٣ − ١}$ = $−\frac{١}{٢}$
∵ نصف قطر التماس $\overline{وأ}$ عمودي على مماس الدائرة
∴ ميل$_{المماس}$ × ميل $\overline{وأ}$ = −١
م$_{المماس}$ × $\left(−\frac{١}{٢}\right)$ = −١
م$_{المماس}$ = ٢

١٤٨

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ $(س - ٥)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٢٥$

٢ إحداثيات مركز الدائرة: $(-١ ، ٢)$

$نق = \frac{١}{٢}\sqrt{١٦ + ٦٤} = \frac{١}{٢}\sqrt{٨٠}$

معادلة الدائرة: $(س + ١)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٢٠$

٣ $س^{٢} + ص^{٢} = ٩$

٤ $(س - ٣)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ٩$

٥ (أ) المركز $(٠ ، ٠)$، $نق = ٧$

(ب) $(٤ ، -٥)$، $نق = ٦$

٦ المركز $(٣ ، ١)$، $نق = ٥$

نعرف أن نصف قطر التماس و$\overline{ٲ}$ هو عمودي على المماس عند النقطة ٲ

ليكن $م'$ ميل المماس: $م \times م' = -١$

أي $\frac{-٣}{٤} \times م' = -١$ ومنه $م' = \frac{٤}{٣}$

نأخذ المعادلة: $ص - ص_{١} = م'(س - س_{١})$

$ص - (-٤) = \frac{٤}{٣}(س - ٦)$

$ص = \frac{٤}{٣}س - ١٢$

∴ معادلة المماس $ص = \frac{٤}{٣}س - ١٢$

حاول أن تحل

٩ أثبت أن النقطة ٲ(١ ، ١) تنتمي إلى الدائرة التي مركزها و ، معادلتها: $س^{٢} + ص^{٢} + ٦س + ٨ص - ١٦ = ٠$، ثم أوجد معادلة المماس لهذه الدائرة عند هذه النقطة.

١٥٠

معادلة المماس و$\overline{ٲ}$ الذي ميله ٢ ويمر بالنقطة (٣، ١) هي:

$ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

$ص - ١ = ٢(س - ٣)$

$ص - ١ = ٢س - ٦$

∴ معادلة المماس $ص = ٢س - ٥$

حاول أن تحل

٨ أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها $(س - ٢)^{٢} + (ص - ١)^{٢} = ٢٥$ عند النقطة ٲ(٦، ٤).

مثال (٩)

أثبت أن النقطة ٲ (٦، -٤) تنتمي إلى الدائرة التي مركزها و، معادلتها: $س^{٢} + ص^{٢} - ٤س + ٢ص - ٢٠ = ٠$، ثم أوجد معادلة المماس لهذه الدائرة عند هذه النقطة.

الحل:

$س^{٢} + ص^{٢} - ٤س + ٢ص - ٢٠ = ٠$

المعادلة على شكل الصورة العامة لمعادلة الدائرة حيث ل = -٤، ك = ٢ ، ب = -٢٠

بالتعويض عن النقطة (٦، -٤)

$(٦)^{٢} + (-٤)^{٢} - ٤(٦) + ٢(-٤) - ٢٠$

$= ٣٦ + ١٦ - ٢٤ - ٨ - ٢٠ = ٠$ ✓

∴ النقطة ٲ(٦، -٤) تنتمي إلى الدائرة.

مركز الدائرة و (٢، -١)، طول نصف قطرها: $نق = \frac{١}{٢}\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب}$

$نق = \frac{١}{٢}\sqrt{١٠٠} = ٥$

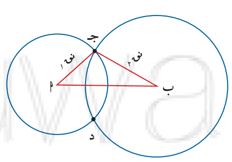
ميل نصف قطر التماس و$\overline{ٲ}$ = $م = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{-٤ - (-١)}{٦ - ٢} = \frac{-٣}{٤}$

١٤٩

الربط بالتعلم السابق

العلاقة بين دائرتين في المستوي

Intersection of Two Circles



في الشكل، الدائرتان (ٲ ، $نق_{١}$) ، (ب ، $نق_{٢}$) تتقاطعان في جـ ، د.

لدراسة العلاقة بين دائرتين، نستخدم متباينة المثلث.

إن مقارنة البعد بين مركزي الدائرتين وطولي نصفي قطري الدائرتين يحدد موقع الدائرتين كما هو مبيّن في الجدول التالي:

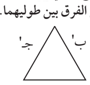
معلومة:

عندما نكتب: الدائرة (ٲ، نق) فهذا يعني أن ٲ مركز الدائرة و نق نصف قطرها.

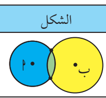
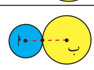
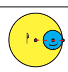
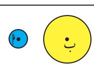
معلومة رياضية:

متباينة المثلث

في كل مثلث، طول أي ضلع أصغر من مجموع طولي الضلعين الآخرين وأكبر من الفرق بين طوليهما.



|ب' - جـ'| < ٲ' < ب' + جـ'

العلاقة بين ٲب وطولي نصفي القطرين	العلاقة بين الدائرتين	الشكل	ملاحظة
$\lvert نق_{١} - نق_{٢} \rvert < ٲب < نق_{١} + نق_{٢}$	الدائرتان تتقاطعان في نقطتين مختلفتين		البعد بين المركزين أصغر من مجموع طولي نصفي القطرين وأكبر من الفرق بينهما.
$ٲب = نق_{١} + نق_{٢}$	الدائرتان متماستان خارجيًّا		– البعد بين المركزين يساوي مجموع طولي نصفي القطرين – مركزا الدائرتين ونقطة التماس هي على استقامة واحدة.
$ٲب = \lvert نق_{١} - نق_{٢} \rvert$	الدائرتان متماستان داخليًّا		– البعد بين المركزين يساوي الفرق بين طولي نصف القطرين. – مركزا الدائرتين ونقطة التماس هي على استقامة واحدة.
$ٲب > نق_{١} + نق_{٢}$	الدائرتان لا تتقاطعان (متباعدتان)		– البعد بين المركزين أكبر من مجموع طولي نصف قطري الدائرتين.
$ٲب < \lvert نق_{١} - نق_{٢} \rvert$	الدائرتان لا تتقاطعان (متداخلتان)		– البعد بين المركزين أصغر من الفرق بين طولي نصفي القطرين.

١٥١

تمرَّنْ ٩-٥

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

معادلة الدائرة

Equation of a Circle

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) حدّد ما إذا كانت المعادلات التالية، معادلة دائرة أم لا.

(أ) ٣س^{٢} + ص^{٢} = ٤

(ب) (س − ١)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + ٤ = ٠

(جـ) س^{٢} + ص^{٢} −٢س −٢ص − ٨ = ٠

(د) س^{٢} + ص^{٢} − ٢س + ٧ = ٠

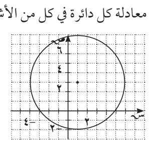
(٢) أوجد معادلة كل من الدوائر الآتية إذا علم:

(أ) المركز (٠، ٠) وطول نصف القطر = ٣.

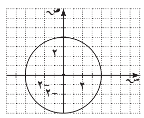
(ب) المركز (٤، ٥) وطول نصف القطر = ٢.

(٣) اكتب معادلة كل دائرة في كل من الأشكال التالية:

(أ)

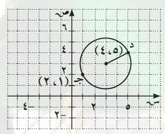


(ب)

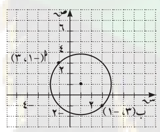


(٤) أوجد طول نصف قطر كل من الدوائر الآتية، وكذلك إحداثيي مركز كل دائرة:

(أ)



(ب)



(٥) محور السينات هو مماس للدائرة عند النقطة (−٣، ٠)، ومركز الدائرة هو (−٣، ٤). أوجد معادلة هذه الدائرة.

في التمارين (٦–٨)، أوجد مركز وطول نصف قطر كلّ من الدوائر ذات المعادلات التالية:

(٦) س^{٢} + ص^{٢} − ٨س + ٢ص − ٨ = ٠.

(٧) س^{٢} + ص^{٢} − ١٦س − ١٧ = ٠.

(٨) ٥س^{٢} + ٥ص^{٢} −٢٠ص − ٣٠ = ٠.

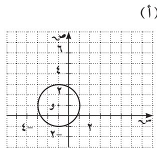
(٩) أوجد معادلة مماس دائرة، معادلتها: (س − ٢)^{٢} + ص^{٢} = ٨ عند النقطة أ(٠، ٢).

(١٠) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣، ٢) وتمس محور الصادات عند النقطة (٠، ٢).

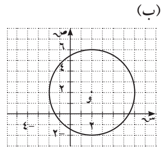
المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) أوجد طول نصف قطر كل من الدوائر التالية:

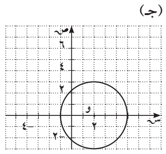
(أ)



(ب)



(جـ)



(٢) أوجد معادلة كل من الدوائر التالية إذا علم:

(أ) المركز (٠، ٣) وطول نصف القطر = ٧

(ب) المركز (−٤، ٠) وطول نصف القطر = ٣

٧ (أ) معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١

ل = −٤، ك = ٧، ب = ١٧

ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب = −٣ < ٠

المعادلة لا تمثل معادلة دائرة.

(ب) معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١

ل = ٥، ك = −٦، ب = −٤

ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب = ٢٥ + ٣٦ + ١٦ = ٧٧ > ٠

المعادلة تمثل معادلة دائرة.

(جـ) معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١

ل = −٢، ك = −٢، ب = ٢

ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب = ٤ + ٤ − ٨ = ٠

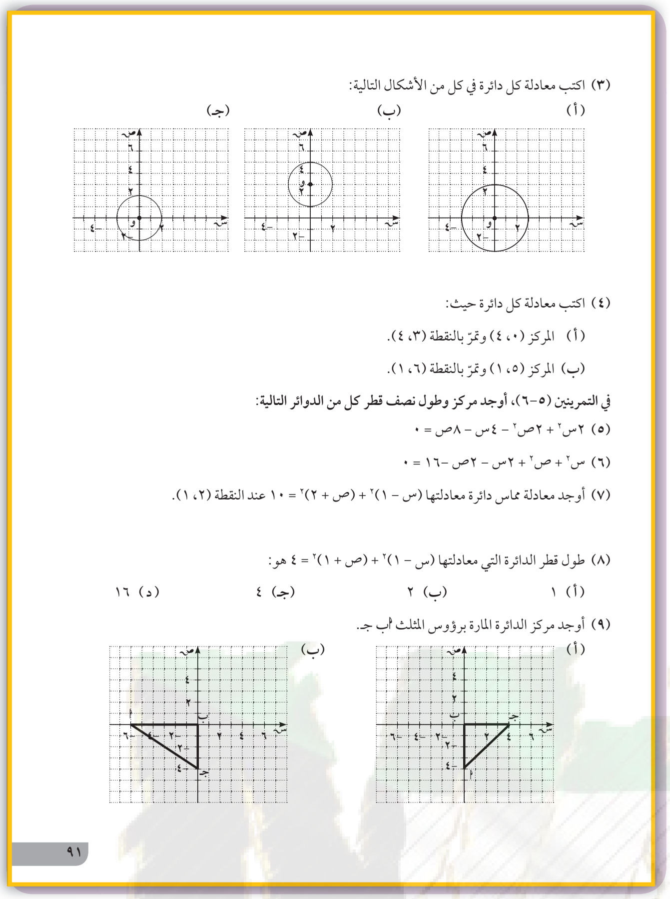
إذًا المعادلة تمثل نقطة.

٨ $٤س + ٣ص - ٣٦ = ٠$

٩ $١^{٢} + ١^{٢} + ٦ \times ١ + ٨ \times ١ - ١٦ = ٠$

∴ أ تنتمي إلى الدائرة.

معادلة المماس: $٤س + ٥ص - ٩ = ٠$



(٣) اكتب معادلة كل دائرة في كل من الأشكال التالية:

(أ) (ب) (جـ)

(٤) اكتب معادلة كل دائرة حيث:

(أ) المركز (٠، ٤) وتمرّ بالنقطة (٣، ٤).

(ب) المركز (٥، ١) وتمرّ بالنقطة (٦، ١).

في التمرينين (٥–٦)، أوجد مركز وطول نصف قطر كل من الدوائر التالية:

(٥) $٢س^{٢} + ٢ص^{٢} - ٤س - ٨ص = ٠$

(٦) $س^{٢} + ص^{٢} + ٢س - ٢ص - ١٦ = ٠$

(٧) أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها $(س - ١)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ١٠$ عند النقطة (٢، ١).

(٨) طول قطر الدائرة التي معادلتها $(س - ١)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٤$ هو:

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ١٦

(٩) أوجد مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ.

(أ) (ب)

٩١

المرشد لحل المسائل

المرشد لحل المسائل

وجد جاسم هذه المسألة:

أدى قذف حصاة في بركة مياه إلى تشكل موجات دائرية يتزايد طول نصف قطرها بمعدل ٦ سم/ ثانية.

بعد كم ثانية تصل هذه الموجات إلى مركب صغير كان على مسافة ٢ متر شرقًا ومترًا واحدًا شمالًا من مركز الموجة الأولى.

أوجد معادلة الدائرة التي تصل إلى المركب.

كيف فكر جاسم لحل المسألة؟

سوف أضع مخططًا للمسألة:

ليكن و مركز الموجة ، النقطة أ تبعد ٢ متر شرق المركز ، النقطة ب تبعد مترًا واحدًا إلى شمال النقطة أ.

لكي أحصل على الزمن:

أجد المسافة وب من مركز الموجة الأولى إلى المركب.

أقسم المسافة على السرعة (٦ سم/ ثانية).

أستخدم قاعدة الدائرة لأجد معادلتها.

التطبيق:

سأستخدم نظرية فيثاغورث على المثلث وأب القائم في $\hat{أ}$ ، $(وب)^{٢} = (وأ)^{٢} + (أب)^{٢}$

$(وب)^{٢} = ٢^{٢} + ١^{٢}$

$(وب)^{٢} = ٥$

$وب = \sqrt{٥}$ م

سأستخدم قاعدة الزمن $= \frac{المسافة}{السرعة}$

$الزمن = \frac{\sqrt{٥} \text{ م}}{٦ \text{ سم/ ثانية}} = \frac{\sqrt{٥} \times ١٠٠ \text{ سم}}{٦ \text{ سم/ ثانية}}$

الزمن = ٣٧ ثانية.

معادلة الدائرة التي مركزها و(٠، ٠) ونصف قطرها $\sqrt{٥}$ هي:

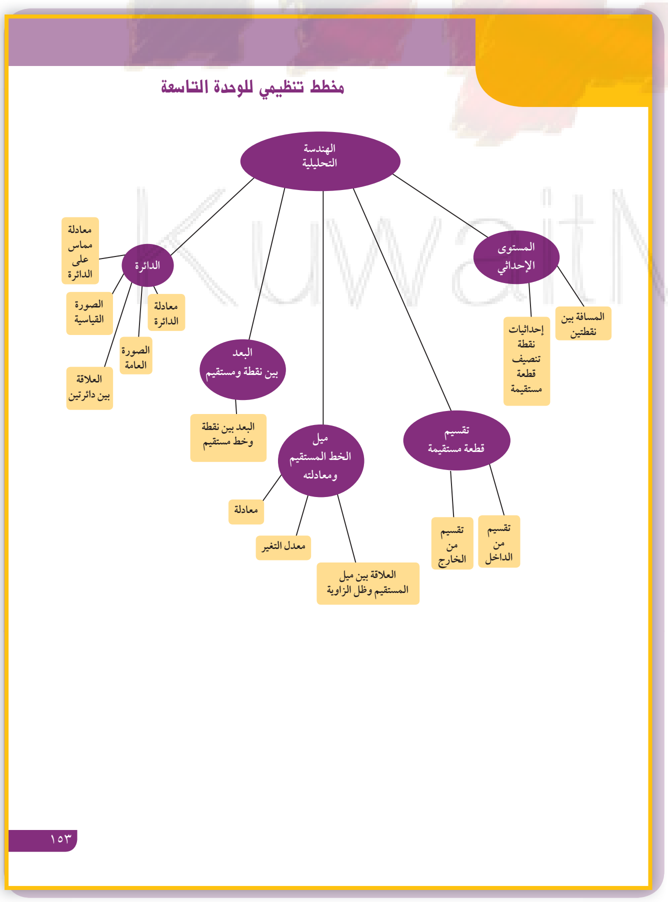
$س^{٢} + ص^{٢} = ٥$

مسألة إضافية

حوض زهور دائري الشكل، تنمذج دائرته بالمعادلة: $(س - ١)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٩$ (طول نصف القطر بالأمتار).

إذا أحطنا الحوض بالرمل بسماكة منتظمة ٥٠ سم، فأوجد طول نصف قطر الشكل الجديد ومعادلته.

١٥٢



مخطط تنظيمي للوحدة التاسعة

١٥٣

إجابة «مسألة إضافية»

مركز الحوض (١، ٢)، نصف قطره نق = ٣ م.

نصف القطر مع الرمل ٣,٥ م.

المعادلة: $(س - ١)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ١٢,٢٥$

ملخص

- المسافة بين نقطتين أ، ب على محور السينات تساوي القيمة المطلقة للفرق بين إحداثيات النقطتين.
- المسافة المائلة بين نقطتين أ(س$_1$، ص$_1$)، ب(س$_2$، ص$_2$): $\text{أب} = \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$.
- إذا كانت $\overline{\text{أب}}$ قطعة مستقيمة بحيث أ(س$_1$، ص$_1$)، ب(س$_2$، ص$_2$) فإن نقطة منتصف $\overline{\text{أب}}$ هي

$$\text{جـ}\left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2}، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2}\right).$$

- تقسيم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل من جهة أ بنسبة م: ن ، جـ (س، ص) نقطة التقسيم حيث:

$$\text{س} = \frac{\text{م س}_2 + \text{ن س}_1}{\text{م} + \text{ن}}، \text{ص} = \frac{\text{م ص}_2 + \text{ن ص}_1}{\text{م} + \text{ن}}.$$

- تقسيم $\overline{\text{أب}}$ من الخارج من جهة أ بنسبة م: ن ، جـ (س، ص) نقطة التقسيم حيث:

$$\text{س} = \frac{\text{م س}_2 - \text{ن س}_1}{\text{م} - \text{ن}}، \text{ص} = \frac{\text{م ص}_2 - \text{ن ص}_1}{\text{م} - \text{ن}}.$$

- ميل الخط المستقيم = $\dfrac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$.
- ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ حيث أ(س$_1$، ص$_1$)، ب(س$_2$، ص$_2$):

$$\text{م} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} \text{ شرط أن: } \text{س}_1 \neq \text{س}_2.$$

- ميل المستقيم م يساوي ظل الزاوية θ التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات: م = ظاθ.
- إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أب}} \parallel \overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يساوي ميل $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ وبالعكس.
- إذا كانا $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ متعامدين فإن ناتج ضرب ميليهما يساوي -1 وبالعكس.
- معادلة الخط المستقيم بمعلومية الميل (م) والجزء المقطوع من محور الصادات ص = م س + ن .
- طول العمود النازل من النقطة م (س$_1$، ص$_1$) على المستقيم (ل) ومعادلته أس + ب ص + جـ = ٠ هو:

$$\text{ف} = \frac{|\text{أس}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}.$$

- معادلة الدائرة التي مركزها م (د، هـ) وطول نصف قطرها نق: $(\text{س} - \text{د})^2 + (\text{ص} - \text{هـ})^2 = \text{نق}^2$.

مراجعة الوحدة التاسعة

(١) أوجد قيمة ص إذا كانت النقطة (١، ص) تبعد وحدة واحدة عن النقطة (٠، ١).

(٢) أوجد النقاط (١، ص) التي تبعد $\sqrt{١٧}$ وحدة عن النقطة (٠، ١).

(٣) إذا كان المستقيمان: ٤س − أ ص = ٦، حيث أ ثابت ، ٦س + ٣ص + ٢ = ٠ متعامدين. فما هي قيمة أ؟

(٤) يمر مستقيم بالنقطتين: (−٣، ٩)، (٤، ٤) ومستقيم آخر بالنقطتين: (٩، −١)، (٤، −٨). هل المستقيمان متوازيان أم متعامدان؟

(٥) إذا كان المستقيم ٢س − ٣ص = ١٠ مماس لدائرة مركزها (−٢، ٤). أوجد معادلة هذه الدائرة.

(٦) أب جـ مثلث فيه أ(٢، ٣)، ب(٧، ٨)، جـ(−٢، ٥). د يقسم $\overline{\text{ب جـ}}$ من الداخل من جهة ب بنسبة ١ : ٢.

(أ) أوجد إحداثيي د.

(ب) أوجد معادلة $\overleftrightarrow{\text{أد}}$.

(٧) لتكن معادلة $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ هي: ٥س − ص + ٢ = ٠، اختر نقطة تقع على $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ولتكن جـ (٠، ٢).

أوجد معادلة المستقيم العمودي على $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ويمر بالنقطة جـ.

(٨) أب جـ مثلث فيه أ(٤، ٣)، ب(٨، ٥)، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ يوازي محور السينات، $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ يوازي محور الصادات.

(أ) أوجد إحداثيي النقطة جـ .

(ب) في السؤال (أ)، أثبت أن Δأب جـ قائم الزاوية في جـ.

- الصورة العامة لمعادلة الدائرة: $\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ل س} + \text{ك ص} + \text{ب} = 0$ حيث ل، ك، ب ثوابت

وحيث إن مركز الدائرة $\left(-\frac{\text{ل}}{2}، -\frac{\text{ك}}{2}\right)$، $\text{نق} = \frac{1}{2}\sqrt{\text{ل}^2 + \text{ك}^2 - 4\text{ب}}$ حيث $\text{ل}^2 + \text{ك}^2 - 4\text{ب} > 0$

- لدراسة العلاقة بين دائرتين متقاطعتين نستخدم متباينة المثلث.
- لإيجاد ميل المماس عند نقطة على دائرة نستخدم العلاقة: ميل المماس × ميل نق = −١ .

(٩) أب جـ مثلث، إحداثيات رؤوسه على الترتيب هي: (٨، ١١)، (١٢، ٥)، (٣، ٥)، ق منتصف $\overline{\text{أب}}$، ك منتصف $\overline{\text{أجـ}}$.

(أ) أوجد إحداثيات ق، ك.

(ب) أثبت أن $\overline{\text{ق ك}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$.

(جـ) أثبت أن ق ك = $\frac{1}{2}$ ب جـ.

(د) أثبت أن $\overline{\text{أب}}$ ليس عموديًا على $\overline{\text{ب جـ}}$.

تمارين إثرائية

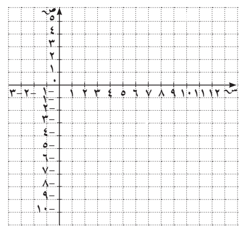
(١) لنأخذ النقاط و(٠، ٠)، ا(٣، ١)، ب(−٣، ٣) أوجد:

(أ) معادلة المنصف العمودي لـ $\overline{\text{وب}}$ ، لـ $\overline{\text{اب}}$.

(ب) معادلة الدائرة التي تمرّ بالنقاط ا، و، ب.

(جـ) معادلة المماس على الدائرة في النقطة ب.

(٢) د دائرة معادلتها: س^{٢} + ص^{٢} − ٦س − ٢ص − ١٥ = ٠، م مستقيم معادلته: ٤س + ٣ ص = ٠.



(أ) ارسم الدائرة والمستقيم في المستوى الإحداثي نفسه.

(ب) ارسم المماسين م$_{١}$ ، م$_{٢}$ للدائرة د والمتوازيان مع المستقيم م.

(جـ) أوجد معادلة المستقيم م$_{٣}$ الذي يمرّ بمركز الدائرة د ومتعامد مع المستقيم م.

(د) أوجد إحداثيات نقاط التقاطع ا، ب للدائرة د والمستقيم م$_{٣}$.

(هـ) أوجد معادلتي المماسين م$_{١}$ ، م$_{٢}$.

(٣) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وتمس المستقيم: ٣س − ٤ص + ١٦ = ٠.

(٤) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (−١، ٣) وتمس المستقيم: ٣س − ٦ص + ١٠ = ٠.

(٥) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٢، ٠) وتمس المستقيم الذي معادلته ص = $-\frac{٣}{٤}$ س + $\frac{١١}{٤}$.

(٦) أوجد معادلة الدائرة التي تمس المستقيمين: س = ٢، ص = −١ و طول نصف قطرها وحدتان.

(٧) أثبت أن المستقيمين اس + ب ص + جـ = ٠، ا د س + ب د ص + جـ = ٠ متوازيان، حيث (د ≠ ٠).

*(٨) لتغطية أحد التجمعات الرياضيّة من الجو، حلقت طوافتان تابعتان لمحطتي تلفزة على الارتفاع نفسه. بحيث موقع الطوافة ا على بعد ٢٠ كم غرب التجمع وموقع الطوافة ب على بعد ١٥ كم جنوب التجمع و١٥ كم شرق التجمع.

أوجد المسافة بين الطوافتين حيث نقطة التجمع تمثل نقطة الأصل.