الوحدة العاشرة: الإحصاء والاحتمال Statistic and Probability

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

١٠ – ١: تحليل البيانات

جزء ١: إيجاد مقاييس النزعة المركزية: المتوسط الحسابي – الوسيط – المنوال.

جزء ٢: استخدام هذه المقاييس في تحليل البيانات.

١٠ – ٢: الأرباعيات

جزء ١: المدى.

جزء ٢: الأرباعيات: الأدنى، الأوسط، الأعلى، مجمل الأعداد الخمسة.

جزء ٣: الصندوق ذو العارضتين.

١٠ – ٣: الانحراف المعياري

جزء ١: التباين والانحراف المعياري.

١٠ – ٤: طرق العد

جزء ١: حل مسائل العد – الشجرة البيانية.

جزء ٢: استخدام قوانين التباديل أو التوافيق.

١٠ – ٥: الاحتمال المشروط

جزء ١: الحدث المستقل.

جزء ٢: الحدث التابع.

جزء ٣: إيجاد الاحتمال المشروط.

مقدمة الوحدة

الوحدة العاشرة

الإحصاء والاحتمال

Statistic and Probability

مشروع الوحدة: اختيار وظيفة

١ مقدمة المشروع: هل تحلم بمتابعة دراستك الجامعية؟ أو بشراء سيارة؟ أو امتلاك منزل؟ أو تنفيذ مشروع يؤمن لك مستقبلًا زاهرًا؟

أسئلة كثيرة تعبر حتمًا في مخيلتك، ولكن كيف تجيب عنها؟

إن التفكير بادخار مبلغ من المال لفترات معينة يُمكِّن أي شخص من تحقيق أجزاء مهمة من أحلامه.

٢ الهدف: إن البدء بوضع موازنة صغيرة لمدخولك ومصروفك واستخدام برنامج Excel على الحاسوب وصنع قرارات عن كيفية إدارة الأموال سوف يكون الهدف الأساسي لهذا المشروع، حيث ستجد سبيلًا إلى ادخار مبلغ محدد خلال فترات من أسابيع أو من أشهر.

٣ اللوازم: حاسوب – آلة حاسبة.

٤ المتابعة:

شجع الطلاب على الإجابة عن الأسئلة التالية:

أ ما المبلغ الذي يحصل عليه الطالب؟ (من الأهل – راتب – مقابل عمل ...)

ب ما المبلغ الذي يصرفه الطالب في أسبوع؟ (طعام، نقليات، ...)

ج ما المبلغ غير المتوقع الذي يصرفه الطالب؟ (سينما، ألعاب، مجلات، ...)

د ما المبلغ الذي ادخره الطالب؟ (أسبوعيًا، شهريًا، ....)

٥ التقرير: حفّز الطلاب على كتابة تقرير مفصل يبين خطوات تنفيذ المشروع مرفقًا بجدولة واضحة للدخل والمصاريف والادخار. شجعهم على تبادل الأفكار ومراجعة حساباتهم إذا كان ذلك ضروريًا.

دروس الوحدة

تحليل البيانات	الأرباعيات	الانحراف المعياري	طرق العد	الاحتمال المشروط
١-١٠	٢-١٠	٣-١٠	٤-١٠	٥-١٠

١٥٦

يعتبر علم الإحصاء من أهم العلوم التطبيقية في عصرنا الحاضر. إذا نظرت حولك تجد أنه لا يمكن القيام بأي خطوة تنفيذية في أي مجال دون الأخذ بعين الاعتبار نتائج الإحصاء.

تريد معرفة مدى انتشار البرامج التلفزيونية ...

تريد الترويج لمنتج معين ومعرفة ما إذا تحققت الغاية ...

تريد الاستقصاء عن توجه الناخبين في عملية انتخاب لمجلس الأمة أو انتخاب رئيس جمهورية ...

في المحصلة انكب العاملون في مجال الإحصاء على إيجاد أسس وقوانين يتوقعون من خلالها الحصول على نتائج علمية تساعد على توقعات محددة واتخاذ قرارات سليمة.

لقد كان علم الإحصاء يهتم في البدء بعملية العد والحصر للأشياء، لذا سمي بالعربية «إحصاء» وهي مشتقة من كلمة أحصى، وكان الاهتمام محصورًا فقط بتعداد السكان لجهة عدد المواليد والوفيات لمعرفة الموارد البشرية الموجودة في الدولة، ومن هنا جاءت التسمية بالأجنبية «Statistics» حيث هي مشتقة من "State" وتعني الدولة.

وقد عُرف قديمًا الإحصاء بأنه جمع معلومات وترتيبها في جداول وتمثيلها في رسوم بيانية. ولكن تطور هذا المفهوم ليصبح علمًا متقدمًا بحيث تحول إلى جمع البيانات وتنظيمها وعرضها ووصفها وتحليلها، واستخلاص النتائج وإيجاد التوقعات واتخاذ القرارات المناسبة.

يعتبر علم الإحصاء في عصرنا الحاضر، أداة للتخطيط، حيث أصبحت البيانات هي القاعدة المتينة التي تُبنى عليها سياسة الدول في كل المجالات.

في الاقتصاد: يستخدم علم الإحصاء في تفسير الحركة الاقتصادية من حيث العرض والطلب وتأثير الأسعار والعلاقة بين الدخل والإنفاق، ومراقبة الإنتاج في المؤسسات الصناعية لجهة كمية ودرجة وجوده، ومدى ملاءمة كل ذلك لاحتياجات السوق وأذواق المستهلكين.

أما في العلوم الطبية،فيستخدم لمقارنة الأمراض وسبل معالجتها وتحديد العلاقة بين بعض الأمراض ومسبباتها وقياس كفاءة الأدوية المستخدمة ...

مشروع الوحدة

يقدم هذا المشروع فرصة أمام الطلاب ليختبروا إمكاناتهم في عملية إحصاء بسيطة تهدف من خلالها إلى تكوين فكرة عن مدخولهم، مصروفهم، كيف سينظمون هذه المعلومات، كيف سيعرضونها، كيف سيحللونها ليضعوا توقعات ويتخذوا قرارات سليمة، وأكثر من ذلك كيف سيدافعون عن هذه القرارات عند كتابة التقرير.

شجع الطلاب على العمل بجدية في هذا المشروع، لأنه يؤمن خطوة أولى عن كيفية وضع ميزانية مصغرة، وهي مهمة جدًّا في بناء شخصية مخطِّطة قادرة على المواجهة في المستقبل.

اشرح لهم بالتفصيل الأسئلة الموجودة في فقرة «المتابعة» وكيفية استخدام أوراق جدولة الانتشار.

الوحدة العاشرة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت عرض البيانات (تمثيل بياني مصور – تمثيل بياني بالأعمدة – تمثيل بياني بالنقاط المجمعة – تمثيل بياني بالخطوط – تمثيل بياني بالدائرة).
- تعلمت وصف البيانات (المتوسط الحسابي – الوسيط – المنوال – مخطط الساق والأوراق).
- استخدمت الشجرة البيانية.
- طبقت طرق العد في حالات يكون فيها الترتيب مهمًا التباديل (التراتيب) وحالات يكون فيها الترتيب غير مهم (التوافيق).
- تعلمت حساب الاحتمال.
- استخدمت التجارب لإيجاد الاحتمالات.

ماذا سوف تتعلم؟

- حساب مقاييس النزعة المركزية جبريًا وباستخدام التكنولوجيا.
- استخدام هذه المقاييس في تحليل البيانات.
- تحديد الأرباعيات ومجمل الأعداد الخمسة في البيانات وتمثيلها بواسطة الصندوق ذو العارضتين وتفسيرها.
- دراسة تشتت البيانات من خلال علاقتها بالانحراف المعياري.
- تفسير البيانات الإحصائية.
- حل مسائل باستخدام مبدأ العد.
- حل مسائل باستخدام قوانين التوافيق والتباديل.
- الاحتمال المشروط.

المصطلحات الأساسية

تحليل البيانات – مقاييس النزعة المركزية – مجمل الأعداد الخمسة – التشتت – الأرباعيات – الصندوق ذو العارضتين – الانحراف المعياري – التباين – مبدأ العد – التباديل – التوافيق – الأحداث المستقلة – الاحتمال المشروط.

أضف إلى معلوماتك

أحداث نادرة

إن استباق خطر حدوث عطل في حاسوب أو في صاروخ يحمل قمرًا اصطناعيًّا أو في مفاعل نووي، يحتسبه العلماء آخذين بالاعتبار احتمال الخلل في كل من مكوناته. يهدف العلماء للوصول إلى احتمالات تقرب من ١ : ١٠^-١ أي أن احتمال حدوث عطل هو قريب من النسبة ١ إلى مليون خلال عام في مفاعل نووي. ولكن إذا كان هناك مجمع لمئة مفاعل نووي؟؟؟

في بعض الصواريخ التي تحمل أقمارًا اصطناعية يقترب احتمال حدوث عطل من $\frac{1}{10}$ ولكن هذه النسبة تقل كثيرًا في الرحلات المأهولة.

١٥٧

سلّم التقييم

٤.	الجداول مفصلة. الحسابات دقيقة. التقرير واضح يبيّن أرقام ميزانية صحيحة ومقبولة.
٣.	معظم الجداول مفصلة. بعض الأخطاء في الحسابات. التقرير واضح مع أخطاء طفيفة في عرض الميزانية.
٢.	بعض الجداول مفصلة. أخطاء كثيرة في الحسابات. التقرير غير مفصل مع أخطاء متعددة في الميزانية.
١.	معظم عناصر المشروع غير كاملة.

١٠-١: تحليل البيانات

١ الأهداف

- يوجد مقاييس النزعة المركزية جبريًّا وبيانيًّا.
- يوجد مقاييس النزعة المركزية تقنيًّا.
- يستخدم هذه المقاييس في تحليل البيانات.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

مقاييس النزعة المركزية: المتوسط الحسابي، الوسيط، المنوال.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة – آلة حاسبة علمية – حاسوب (اختياري) – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اكتب على السبورة البيانات التالية:

٧، ٨، ٦، ٧، ٩، ٥، ٧، ١٠، ٤، ٣، ٣، ٤.

اطلب إلى الطلاب:

- ترتيب هذه البيانات تصاعديًّا.
- إيجاد الوسيط.
- إيجاد المتوسط الحسابي.
- إيجاد المنوال.
- تنظيم هذه البيانات في جدول يبيّن التكرارات.

٥ التدريس

يتطرق هذا الدرس إلى قيم النزعة المركزية (المتوسط الحسابي، الوسيط، المنوال) عندما تتضمن البيانات قيمًا بأعداد كبيرة، فنحتاج عندها إلى استخدام الفئات.

ولكن من المهم جدًّا في البدء إيضاح مميزات كل قيمة من قيم النزعة المركزية وسلبياتها.

- **المتوسط الحسابي**: من مميزاته، أنه يوفر طريقة نستخدم من خلالها قيمة واحدة لتمثيل هذه البيانات.
  من سلبياته، أنه يعطي فكرة مضللة عن البيانات وخاصة إذا كان هناك قيم متطرفة.
- **الوسيط**: من مميزاته، أنه لا يتأثر بالقيم المتطرفة.
  لا توجد سلبيات مباشرة في استخدامه.
- **المنوال**: من مميزاته، أنه يعطي فكرة عن القيم الأكثر تكرارًا في البيانات.

١٠-١

تحليل البيانات
Data Analysis

عمل تعاوني

يبين الجدول التالي أطوال القامات بالسنتيمتر عند ٣٠ طالبًا في المرحلة الثانوية.

١٧٢	١٦٣	١٦٨	١٦٧	١٦٩	١٧٥	١٧١	١٦٤	١٥٨	١٧٠
١٥٥	١٦٩	١٦٠	١٦٦	١٦٢	١٦٤	١٧٧	١٦٩	١٥٩	١٧٤
١٦٨	١٦٥	١٦٨	١٧٥	١٧٣	١٧٠	١٧٥	١٧١	١٧٤	١٧٩

سوف تتعلم
- إيجاد مقاييس النزعة المركزية جبريًّا وباستخدام التكنولوجيا
- استخدام مقاييس النزعة المركزية في تحليل البيانات

١ استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد المتوسط الحسابي لأطوال هؤلاء الطلاب.

ما الوسيط لهذه البيانات؟

ب أكمل الجدول التالي:

الفئة	١٥٥-	١٦٠-	١٦٥-	١٧٠-	١٧٥-
التكرار					
مركز الفئة					

جـ ما الفئة التي تتضمن الوسيط؟

د ما الفئة التي تتضمن التكرار الأكبر؟

هـ استخدم مراكز الفئات والتكرار لتجد المتوسط الحسابي لأطوال قامات هؤلاء الطلاب.

و قارن بين النتيجة في السؤال ١ والنتيجة في السؤال هـ. ماذا تلاحظ؟

معلومة رياضية:
مركز الفئة [١٥٥، ١٦٠) هو $\frac{١٥٥ + ١٦٠}{٢}$ = ١٥٧,٥

مقاييس النزعة المركزية Measure of Central Tendency

على افتراض أن مدير شركة أو مؤسسة يريد إجراء دراسة حول رواتب الموظفين لعدة أعوام متتالية ويريد عددًا واحدًا يبيّن له متوسط الرواتب في عام معين. فما الذي يحتاج إليه؟

١٥٨

المتوسط الحسابي Mean

المتوسط الحسابي لـ ن من الأعداد س١، س٢، س٣، ...، سن، هو:

$$\bar{س} = \frac{س_١ + س_٢ + س_٣ + ... + س_ن}{ن} = \frac{١}{ن}\sum_{ر=١}^{ن} س_ر$$

وبصورة عامة يمكننا إيجاد المتوسط الحسابي من جدول تكراري ذو فئات باستخدام القانون التالي:

الربط بالحياة:

لإدخال بيانات ذو متغير مفرده = {1، 2، 3، 3، 4، 4، 5}.

باستخدام العمود FREQ لتعيين عدد التكرارات لكل بند {x; freq}.

= {1;1 ،2;2 ،3;3 ،4;1 ،5;1}. وحساب الانحراف المعياري للسكان والمتوسط.

SHIFT MODE (SETUP) ▼ 4 (STAT) 1 (ON)

MODE 3 (STAT) 1 (1-VAR)

1 = 2 = 3 = 4 = 5 = ▼ ▶

1 = 2 = 3 = 4 = 2 =

AC SHIFT 1 (STAT) 3 (Var) 2 (σ) =

AC SHIFT 1 (STAT) 3 (Var) 2 (σx) =

STAT	
x	FREQ
1	1
2	2
3	2
4	1
5	1

3

1.154700538

الناتج: المتوسط ٣ الانحراف المعياري للسكان: 1.154700538

قانون: (الطريقة المباشرة)

$$\bar{س} = \frac{ت_١ س_١ + ت_٢ س_٢ + ... + ت_ن س_ن}{ت_١ + ت_٢ + ت_٣ + ... + ت_ن} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (ت_ر س_ر)}{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر}$$

حيث $ت_ر$ تكرار الفئة ر،
$س_ر$ مركز الفئة ر،
ن عدد الفئات

مثال (١)

يبيّن الجدول التالي الأوزان بالكيلوجرام لِـ ٦٠ طالبًا في المرحلة الثانوية.
أوجد المتوسط الحسابي لأوزان هؤلاء الطلاب.

الفئة	٥٠-	٥٥-	٦٠-	٦٥-	٧٠-	٧٥-	٨٠-
التكرار	٤	٧	١٢	١٤	١١	٩	٣

١٥٩

من سلبياته أننا لا نستفيد شيئًا إذا كانت كل قيمة من البيانات لا تظهر سوى لمرة واحدة، أي أنه لا يوجد منوال في هذه الحالة في فقرة «عمل تعاوني». تابع بدقة النتائج التي يحصل عليها الطلاب لأنها سوف تكون الأساس بالنسبة إلى مجريات الدرس. ناقش معهم معنى الفئة، وما هي القيم الموجودة في كل فئة وكيفية فرز القيم واستخدام علامات التكرار.

اشرح لهم كيفية إيجاد مركز الفئة.

في المتوسط الحسابي، ساعدهم على فهم الرموز المستخدمة في القاعدة:

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر س_ر}{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر}$$

وأن هذه القاعدة هي متقدمة أكثر عما درسوه سابقًا.

أخبرهم أن تنظيم جدول يبيّن الفئة ومركز الفئة أو $\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر$ (مجموع التكرارات)، وأخيرًا $\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر س_ر$ (مجموع ناتج ضرب التكرارات في القيم المناظرة في البيانات) يساعد كثيرًا على استخدام الآلة الحاسبة أو عدم استخدامها في إيجاد المتوسط الحسابي كما في المثال (١).

يمكن تبسيط فكرة القيمة الفرضية من قبل المعلم باستخدام مثال أولي:

كانت درجات صالح في امتحان الرياضيات حيث النهاية العظمى ١٠٠ درجة كما يلي: ٨٢، ٧٥، ٨٨، ٨٠، ٧٨، ٨٦.

وجد صالح المتوسط الحسابي لهذه الدرجات بالحساب الذهني باختيار درجة مناسبة قريبة جدًّا من الوسط وهي ٨٠ واستنتج ما يلي بالمقارنة مع ٨٠:

٨٢	٧٥	٨٨	٨٠	٧٨	٨٦
+٢	−٥	+٨	٠	−٢	+٦

وعند جمع هذه القيم، نحصل على:

+٢ − ٥ + ٨ + ٠ − ٢ + ٦ = ٩.

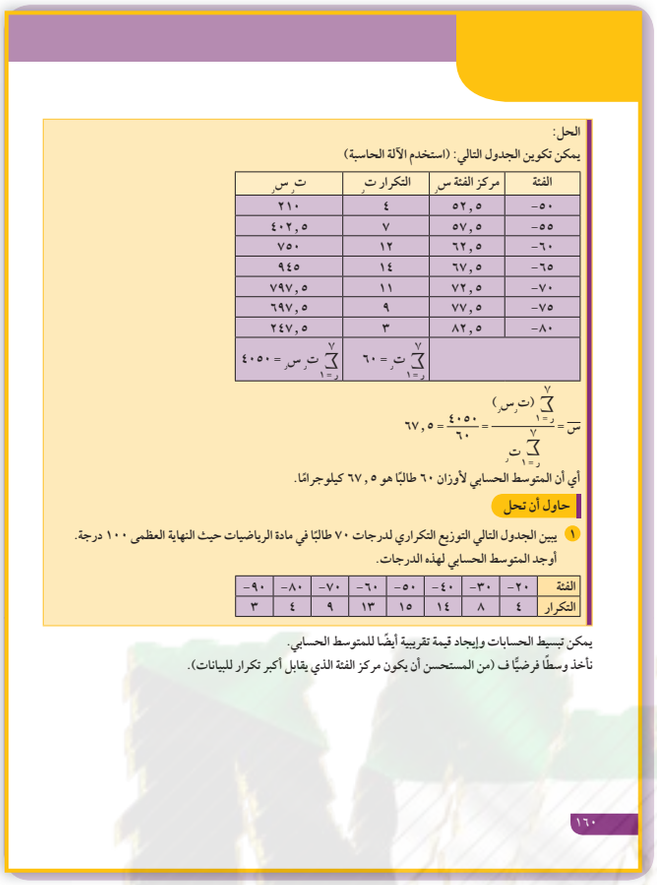
وبالتالي المتوسط الحسابي = ٨٠ + $\frac{٩}{٦}$ أي $\bar{س}$ = ٨١,٥.

علمًا أنه باستخدام الحساب العادي نجد أن:

$$\bar{س} = \frac{٨٢ + ٧٥ + ٨٨ + ٨٠ + ٧٨ + ٨٦}{٦} = ٨١,٥$$

والنتيجة هي نفسها.

ويمكن ايضًا استخدام المثال التالي لإيجاد قيمة تقريبية



الحل:

يمكن تكوين الجدول التالي: (استخدم الآلة الحاسبة)

الفئة	مركز الفئة $س_ر$	التكرار $ت_ر$	$ت_ر س_ر$
٥٠-	٥٢,٥	٤	٢١٠
٥٥-	٥٧,٥	٧	٤٠٢,٥
٦٠-	٦٢,٥	١٢	٧٥٠
٦٥-	٦٧,٥	١٤	٩٤٥
٧٠-	٧٢,٥	١١	٧٩٧,٥
٧٥-	٧٧,٥	٩	٦٩٧,٥
٨٠-	٨٢,٥	٣	٢٤٧,٥
		$\sum_{ر=١}^{٧} ت_ر = ٦٠$	$\sum_{ر=١}^{٧} ت_ر س_ر = ٤٠٥٠$

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{٧} (ت_ر س_ر)}{\sum_{ر=١}^{٧} ت_ر} = \frac{٤٠٥٠}{٦٠} = ٦٧,٥$$

أي أن المتوسط الحسابي لأوزان ٦٠ طالبًا هو ٦٧,٥ كيلوجرامًا.

حاول أن تحل

١ يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لدرجات ٧٠ طالبًا في مادة الرياضيات حيث النهاية العظمى ١٠٠ درجة.
أوجد المتوسط الحسابي لهذه الدرجات.

الفئة	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-
التكرار	٤	٨	١٤	١٥	١٣	٩	٤	٣

يمكن تبسيط الحسابات وإيجاد قيمة تقريبية أيضًا للمتوسط الحسابي.
نأخذ وسطًا فرضيًّا ف (من المستحسن أن يكون مركز الفئة الذي يقابل أكبر تكرار للبيانات).

١٦٠

الوسيط Median

الوسيط لعدد ن من القيم المرتبة تصاعديًّا أو تنازليًّا هو:

أ العدد الذي يتوسط القيم إذا كان العدد ن فرديًّا.

ب المتوسط الحسابي للعددين في منتصف القيم إذا كان العدد ن زوجيًّا.

أي أن الوسيط هو القيمة التي ترتيبها $\frac{ن+١}{٢}$ من الأعداد إذا كان العدد ن فرديًّا ومتوسط القيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{ن}{٢}$، $\frac{ن}{٢}$ + ١ من الأعداد إذا كان العدد ن زوجيًّا.

يمكن إيجاد الوسيط باستخدام التمثيل البياني للتكرار المتجمع الصاعد وللتكرار المتجمع النازل أو لكليهما.

مثال (٢)

يوضح الجدول التالي التوزيع التكراري لأطوال قامات ٥٥ طالبًا في المرحلة الثانوية.
أكمل الجدول لإيجاد الوسيط باستخدام التمثيل البياني لمنحنى التكرار المتجمع الصاعد.

الفئات	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
١٥٠-	٣		
١٥٥-	٧		
١٦٠-	٩		
١٦٥-	١٢		
١٧٠-	١٠		
١٧٥-	٨		
١٨٠-	٤		
١٨٥-	٢		

الحل:

الفئات	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
١٥٠-	٣	أقل من ١٥٥	٣
١٥٥-	٧	أقل من ١٦٠	١٠
١٦٠-	٩	أقل من ١٦٥	١٩
١٦٥-	١٢	أقل من ١٧٠	٣١
١٧٠-	١٠	أقل من ١٧٥	٤١
١٧٥-	٨	أقل من ١٨٠	٤٩
١٨٠-	٤	أقل من ١٨٥	٥٣
١٨٥-	٢	أقل من ١٩٠	٥٥

١٦١

للمتوسط الحسابي فنأخذ وسطًا فرضيًا ف، نطبق القاعدة:

$$\bar{س} = ف + \frac{\sum ت_ر ح_ر}{\sum ت}$$ علمًا أن: $ح_ر = س_ر - ف$

يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لمعدل الكوليسترول عند ٣٠ شخصًا.

أوجد قيمة تقريبية للمتوسط الحسابي لمعدل الكوليسترول عند هؤلاء الأشخاص باستخدام وسطًا فرضيًّا.

الفئة	١٩٥-	٢٠٠-	٢٠٥-	٢١٠-	٢١٥-	٢٢٠-
التكرار	٥	٣	٤	٩	٦	٣

الحل: نأخذ وسطًا فرضيًّا ف = ٢١٢,٥

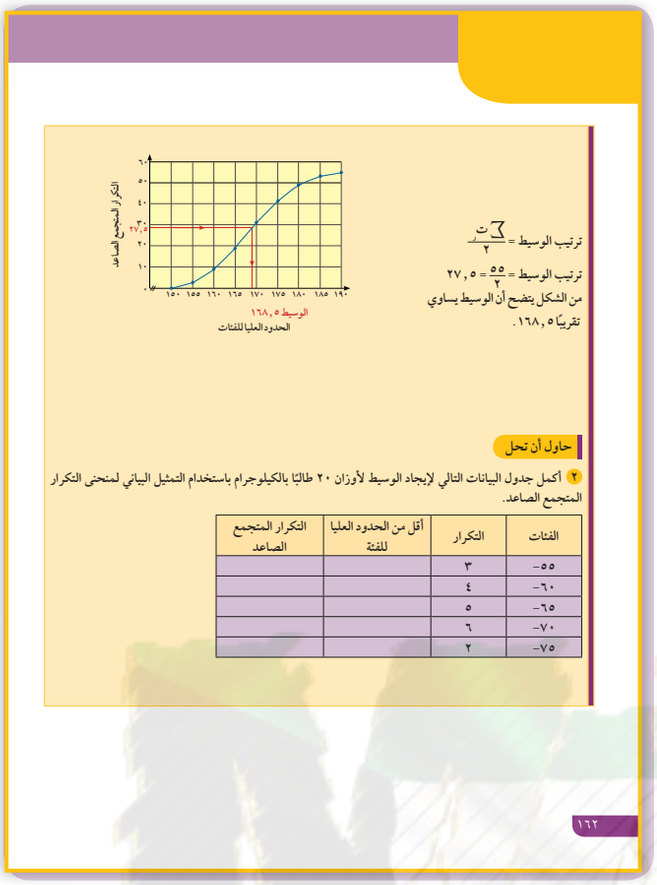
نأخذ ف = ٢١٢,٥ لأنه يقابل أكبر تكرار. نكوّن الجدول التالي:

الفئة	١٩٥-	٢٠٠-	٢٠٥-	٢١٠-	٢١٥-	٢٢٠-
مركز الفئة	١٩٧,٥	٢٠٢,٥	٢٠٧,٥	٢١٢,٥	٢١٧,٥	٢٢٢,٥
التكرار $ت_ر$	٥	٣	٤	٩	٦	٣
الانحراف عن ف $ح_ر = س_ر - ف$	١٥-	١٠-	٥-	٠	٥	١٠
$ت_ر \times ح_ر$	٧٥-	٣٠-	٢٠-	٠	٣٠	٣٠

نحصل على: $\sum_{ر=١}^{٦} ت_ر = ٣٠$ ، $\sum_{ر=١}^{٦} ت_ر ح_ر = -٦٥$

فيكون: $\bar{س} = ٢١٢,٥ + \frac{-٦٥}{٣٠} \simeq ٢١٠,٣٣$

أي أن المتوسط الحسابي لمعدل الكوليسترول عند ٣٠ شخصًا هو ٢١٠,٣٣ مليجرامات تقريبًا.



ترتيب الوسيط = $\frac{\sum ت_ر}{٢}$

ترتيب الوسيط = $\frac{٥٥}{٢}$ = ٢٧,٥

من الشكل يتضح أن الوسيط يساوي تقريبًا ١٦٨,٥.

حاول أن تحل

٢ أكمل جدول البيانات التالي لإيجاد الوسيط لأوزان ٢٠ طالبًا بالكيلوجرام باستخدام التمثيل البياني لمنحنى التكرار المتجمع الصاعد.

الفئات	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
٥٥-	٣		
٦٠-	٤		
٦٥-	٥		
٧٠-	٦		
٧٥-	٢		

١٦٢

لإيجاد «**الوسيط**» يقدم الدرس ثلاث طرق:
الأولى باستخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد، والثانية باستخدام منحنى التكرار المتجمع النازل، والثالثة باستخدام الرسم البياني للتكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل. ومن تقاطع الرسمين البيانيين، نرسم عمودًا نازلًا على المحور الأفقي ونقرأ على هذا المحور قيمة الوسيط تقريبًا.

قدّم للطلاب تمارين متعددة لتساعدهم على تطبيق القاعدة أو على استخدام الرسم البياني كما في الأمثلة (٢)، (٣)، (٤).
في المنوال نستخدم قانون الرافعة كما هو مبين في المثال (٦) كما يمكن أيضًا استخدام القاعدة أو استخدام المدرج التكراري كما هو مبين في المثال (٧).

في المثال (٧)، يبيّن المدرج التكراري الفئة التي تسبق فئة المنوال، ثم فئة المنوال، وبعد ذلك الفئة التالية لفئة المنوال بمستطيلات تختلف أطوالها بحسب تكرار كل فئة.
أما القطع المستقيمة التي تربط بين الرؤوس المتقابلة في المستطيلات فتتقاطع في نقطة، والعمود المرسوم من هذه النقطة عموديًّا على المحور الأفقي يحدد قيمة المنوال تقريبًا.

٦ الربط

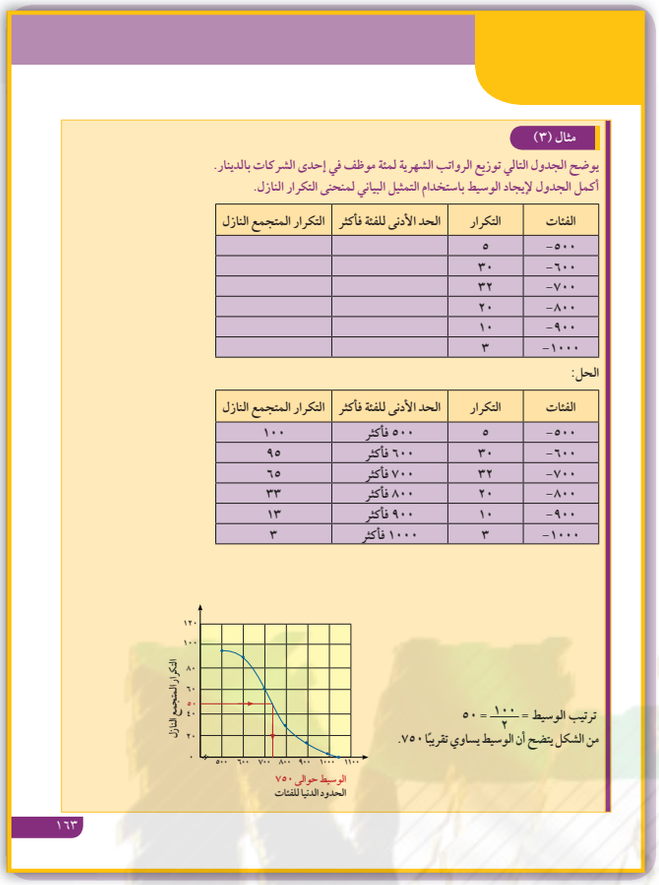
تربط الأمثلة في هذا الدرس بين المفاهيم والمهارات وبين المواقف الحياتية.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تحديد الفئة الوسيطية.
ساعدهم في البدء على تحديد ترتيب الوسيط، ثم أخبرهم أن هذا الناتج يجب أن يتواجد في الفئة المناسبة عند تكوين جدول التكرار المتجمع الصاعد.

٨ التقييم

راقب الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من أنهم قد فهموا جيّدًا ما ورد في هذا الدرس.



مثال (٣)

يوضح الجدول التالي توزيع الرواتب الشهرية لمئة موظف في إحدى الشركات بالدينار.
أكمل الجدول لإيجاد الوسيط باستخدام التمثيل البياني لمنحنى التكرار النازل.

الفئات	التكرار	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٥٠٠-	٥		
٦٠٠-	٣٠		
٧٠٠-	٣٢		
٨٠٠-	٢٠		
٩٠٠-	١٠		
١٠٠٠-	٣		

الحل:

الفئات	التكرار	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٥٠٠-	٥	٥٠٠ فأكثر	١٠٠
٦٠٠-	٣٠	٦٠٠ فأكثر	٩٥
٧٠٠-	٣٢	٧٠٠ فأكثر	٦٥
٨٠٠-	٢٠	٨٠٠ فأكثر	٣٣
٩٠٠-	١٠	٩٠٠ فأكثر	١٣
١٠٠٠-	٣	١٠٠٠ فأكثر	٣

ترتيب الوسيط = $\frac{١٠٠}{٢}$ = ٥٠
من الشكل يتضح أن الوسيط يساوي تقريبًا ٧٥٠.

١٦٣

تمرَّنْ ١-١٠

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

تحليل البيانات
Data Analysis

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لأوزان ٣٠ طالبًا.

الفئة	٥٦-	٦٠-	٦٤-	٦٨-	٧٢-	٧٦-
التكرار	٣	٨	٣	٩	٤	٣

(أ) أوجد المتوسط الحسابي لهذه الأوزان.

(ب) أوجد الوسيط لهذه الأوزان باستخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد.

الفئة	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
٥٦-	٣		
٦٠-	٨		
٦٤-	٣		
٦٨-	٩		
٧٢-	٤		
٧٦-	٣		

٩٦

اختبار سريع

يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لدرجات طلاب الصف العاشر في الاختبار النهائي لمادة الرياضيات حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة.

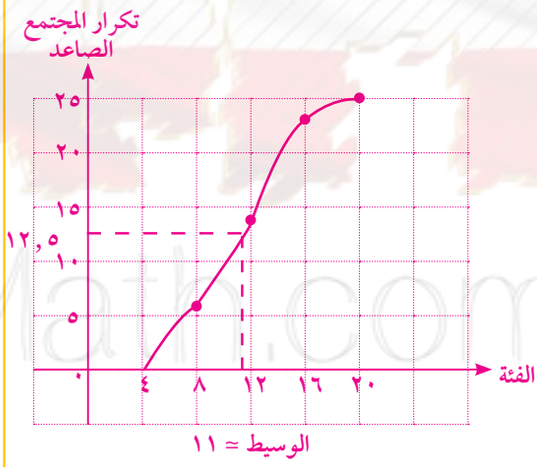
الفئة	−٤	−٨	−١٢	−١٦
التكرار	٦	٨	٩	٢

١ أكمل الجدول لتبين التكرار المتجمع الصاعد ومركز الفئة.

الفئة	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد	مركز الفئة س ر	س ر × ت ر
−٤	٦	أقل من ٨	٦	٦	٣٦
−٨	٨	أقل من ١٢	١٤	١٠	٨٠
−١٢	٩	أقل من ١٦	٢٣	١٤	١٢٦
−١٦	٢	أقل من ٢٠	٢٥	١٨	٣٦

٢ أوجد المتوسط الحسابي $\overline{\text{س}}$. $\overline{\text{س}}$ = ١١,١٢

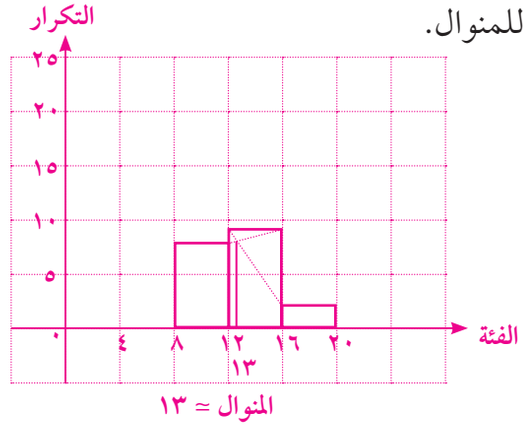
٣ ارسم منحنى المتجمع الصاعد

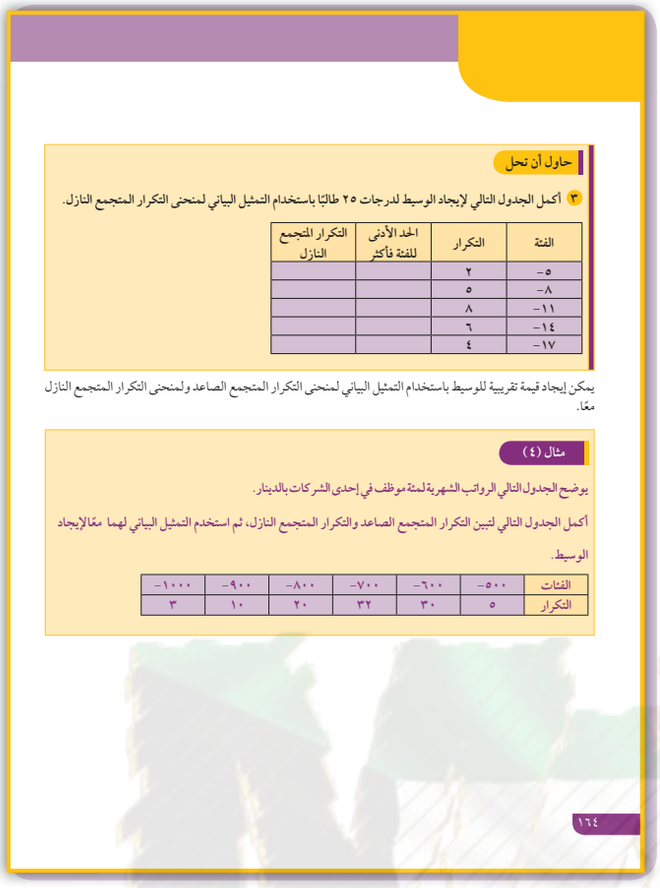


واستنتج وسيط قيم البيانات.

الوسيط ≃ ١١,٥

٤ استخدم التمثيل البياني للمدرج التكراري لإيجاد قيمة تقريبية للمنوال.





حاول أن تحل

٣ أكمل الجدول التالي لإيجاد الوسيط لدرجات ٢٥ طالبًا باستخدام التمثيل البياني لمنحنى التكرار المتجمع النازل.

الفئة	التكرار	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
−٥	٢		
−٨	٥		
−١١	٨		
−١٤	٦		
−١٧	٤		

يمكن إيجاد قيمة تقريبية للوسيط باستخدام التمثيل البياني لمنحنى التكرار المتجمع الصاعد ولمنحنى التكرار المتجمع النازل معًا.

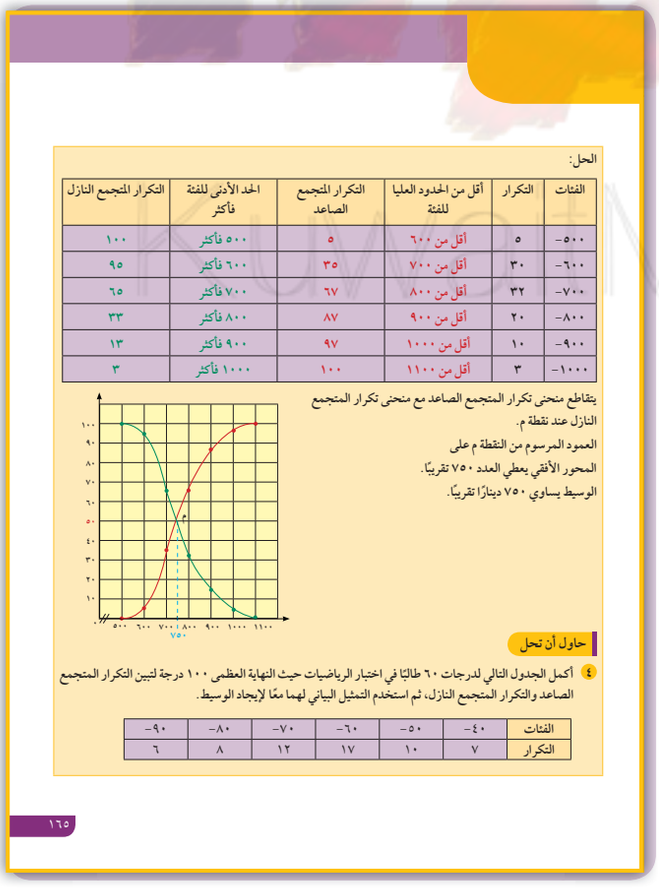
مثال (٤)

يوضح الجدول التالي الرواتب الشهرية لمئة موظف في إحدى الشركات بالدينار.

أكمل الجدول التالي لتبين التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل، ثم استخدم التمثيل البياني لهما معًا لإيجاد الوسيط.

الفئات	−٥٠٠	−٦٠٠	−٧٠٠	−٨٠٠	−٩٠٠	−١٠٠٠
التكرار	٥	٣٠	٣٢	٢٠	١٠	٣

١٦٤



الحل:

الفئات	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
−٥٠٠	٥	أقل من ٦٠٠	٥	٥٠٠ فأكثر	١٠٠
−٦٠٠	٣٠	أقل من ٧٠٠	٣٥	٦٠٠ فأكثر	٩٥
−٧٠٠	٣٢	أقل من ٨٠٠	٦٧	٧٠٠ فأكثر	٦٥
−٨٠٠	٢٠	أقل من ٩٠٠	٨٧	٨٠٠ فأكثر	٣٣
−٩٠٠	١٠	أقل من ١٠٠٠	٩٧	٩٠٠ فأكثر	١٣
−١٠٠٠	٣	أقل من ١١٠٠	١٠٠	١٠٠٠ فأكثر	٣

يتقاطع منحنى تكرار المتجمع الصاعد مع منحنى تكرار المتجمع النازل عند نقطة م.

العمود المرسوم من النقطة م على المحور الأفقي يعطي العدد ٧٥٠ تقريبًا.

الوسيط يساوي ٧٥٠ دينارًا تقريبًا.

حاول أن تحل

٤ أكمل الجدول التالي لدرجات ٦٠ طالبًا في اختبار الرياضيات حيث النهاية العظمى ١٠٠ درجة لتبين التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل، ثم استخدم التمثيل البياني لهما معًا لإيجاد الوسيط.

الفئات	−٤٠	−٥٠	−٦٠	−٧٠	−٨٠	−٩٠
التكرار	٧	١٠	١٧	١٢	٨	٦

١٦٥

٩ إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

(أ) المتوسط الحسابي = $\bar{س} = \frac{٥٠٥٠}{٣٠} = ١٦٨,\bar{٣}$

ترتيب البيانات تصاعديًّا: ١٥٥، ١٥٨، ١٥٩، ١٦٠، ١٦٢، ١٦٣، ١٦٤، ١٦٤، ١٦٥، ١٦٦، ١٦٧، ١٦٨، ١٦٨، ١٦٨، ١٦٩، ١٦٩، ١٦٩، ١٧٠، ١٧٠، ١٧١، ١٧١، ١٧٢، ١٧٣، ١٧٤، ١٧٤، ١٧٥، ١٧٥، ١٧٥، ١٧٧، ١٧٩

الوسيط = ١٦٩

(ب)

الفئة	−١٥٥	−١٦٠	−١٦٥	−١٧٠	−١٧٥
التكرار	٣	٥	٩	٨	٥
مركز الفئة	١٥٧,٥	١٦٢,٥	١٦٧,٥	١٧٢,٥	١٧٧,٥

(جـ) فئة الوسيط هي: −١٦٥

(د) فئة التكرار الأكبر هي: −١٦٥

(هـ) $\bar{س} = \frac{٣ \times ١٥٧,٥ + ٥ \times ١٦٢,٥ + ٩ \times ١٦٧,٥ + ٨ \times ١٧٢,٥ + ٥ \times ١٧٧,٥}{٣٠} = \frac{٥٠٦٠}{٣٠}$

$\bar{س} = ١٦٨,\bar{٦}$

(و) في السؤال (أ) $\bar{س} = ١٦٨,\bar{٣}$، في السؤال (هـ) $\bar{س} = ١٦٨,\bar{٦}$ أي أن النتائج متقاربة.

«حاول أن تحل»

١

الفئة	−٢٠	−٣٠	−٤٠	−٥٠	−٦٠	−٧٠	−٨٠	−٩٠
التكرار	٤	٨	١٤	١٥	١٣	٩	٤	٣
مركز الفئة	٢٥	٣٥	٤٥	٥٥	٦٥	٧٥	٨٥	٩٥

$\bar{س} = ٥٦,٨٦$

المنوال Mode

المنوال هو القيمة الأكثر تكرارًا في البيانات.

مثال (٥)

أوجد المنوال في ما يلي:

١ ٥، ٨، ٩، ٧، ٤، ٥، ٦، ١٠، ٥

ب ١٢، ١٨، ١١، ١٢، ٢٠، ١١، ١٥، ١٦، ١٧، ٢٣

جـ ٧، ٧، ٧، ٧، ٧

د ٥، ٦، ٥، ٦، ٥، ٦، ٧

الحل:

١ المنوال = ٥ (الأكثر تكرارًا)

ب يوجد منوالان: ١١، ١٢

جـ لا يوجد منوال

د يوجد منوالان: ٥، ٦

حاول أن تحل

٥ أوجد المنوال في ما يلي:

١ ٧، ٥، ١٢، ٦، ٧، ١٤

ب ١٥، ٨، ٩، ١٢، ١٥، ٨، ٧، ١٠

جـ ١، ١، ١، ١، ١

د ٣، ٨، ٣، ٨، ٨، ٣، ٤، ٤

ملاحظة:

إذا لم يوجد تكرار في البيانات فلا يوجد منوال لها.

ويمكن أن يوجد أكثر من منوال لمجموعة القيم.

الربط بالحياة:

استخدم الآلة الحاسبة (Casio Classpad 300)

لإيجاد وسيط ومنوال البيانات التالية:

٢، ٣، ٥، ٤، ٣، ٦، ٥، ٧، ٣، ٨، ١، ٧، ٥، ٩

انقر Statistics (في قائمة التطبيقات).

استخدم list 1: تأكد من أن المؤشر في الموضع الأول من list 1.

أدخل ٢ في المركز الأول، وهذا سوف يظهر في الجزء السفلي من الشاشة كما [١] = ٢.

المفتاح (EXE) للانتقال إلى الموضع التالي في القائمة.

اكتب قيم البيانات المتبقية في لائحة القائمة ١ اضغط على (EXE) بعد كل إدخال. تظهر الشاشة كافة البيانات التي يتم إدخالها في list 1.

العثور على الإحصاء الوصفي للبيانات

انقر على Calc في شريط القوائم للحصول على الإحصاء الوصفي

نحن نتعامل مع متغير واحد لذا انقر على One-Variable

فإن نافذة Set Calculation تتيح لك اختيار القائمة التي تحتوي على البيانات ذات الصلة.

اضغط OK

جميع الإحصاءات المتوفرة وصفيًّا

هذا المتغير تظهر على الشاشة:

القيمة الأولى، ٥٠، تعني. المتوسط الحسابي the mean

أي ٤,٨٦٧ (إلى ٣ منازل عشرية)

القيمة الثانية تعني: ΣX=73 أي مجموع البيانات 73

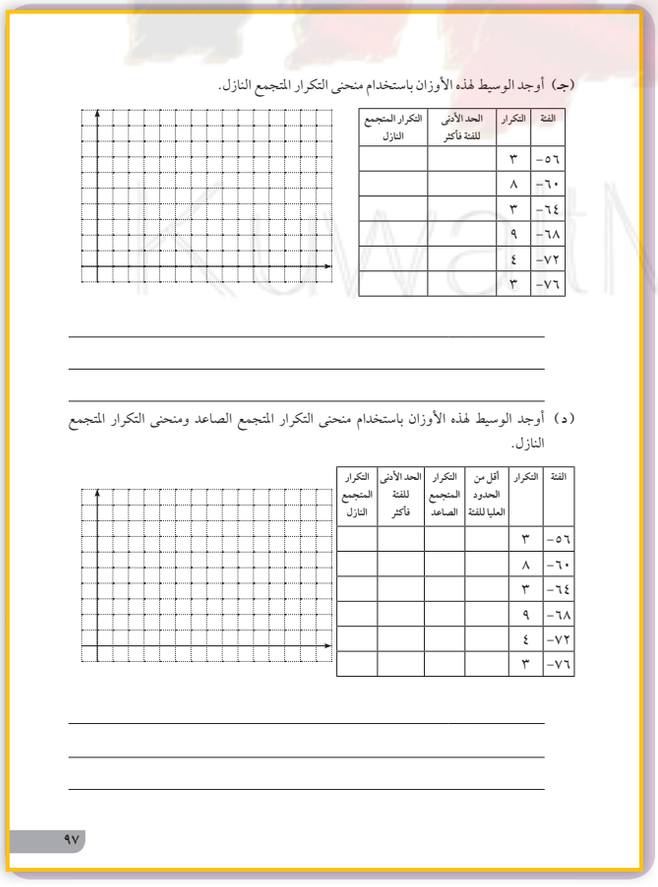
n=15 تعني أن عدد قيم مجموعة البيانات ١٥.

تتجه إلى الأسفل لإيجاد كل من الوسيط والمنوال

Med = 5 يعني الوسيط يساوي ٥

Mode = 5 يعني المنوال يساوي ٥

١٦٦



(جـ) أوجد الوسيط لهذه الأوزان باستخدام منحنى التكرار المتجمع النازل.

الفئة	التكرار	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
−٥٦	٣		
−٦٠	٨		
−٦٤	٣		
−٦٨	٩		
−٧٢	٤		
−٧٦	٣		

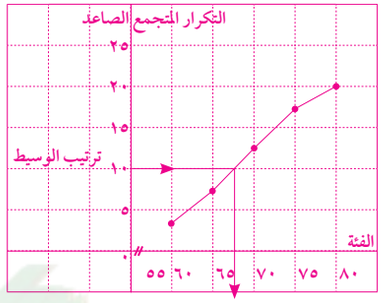
(د) أوجد الوسيط لهذه الأوزان باستخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد ومنحنى التكرار المتجمع النازل.

الفئة	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
−٥٦	٣				
−٦٠	٨				
−٦٤	٣				
−٦٨	٩				
−٧٢	٤				
−٧٦	٣				

٩٧

٢

الفئات	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
٥٥-	٣	أقل من ٦٠	٣
٦٠-	٤	أقل من ٦٥	٧
٦٥-	٥	أقل من ٧٠	١٢
٧٠-	٦	أقل من ٧٥	١٨
٧٥-	٢	أقل من ٨٠	٢٠



الوسيط حوالى ٦٨

٣

الفئات	التكرار	الحد الأدنى فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٥-	٢	٥ فأكثر	٢٥
٨-	٥	٨ فأكثر	٢٣
١١-	٨	١١ فأكثر	١٨
١٤-	٦	١٤ فأكثر	١٠
١٧-	٤	١٧ فأكثر	٤

منحنى التكرار المتجمع النازل

الوسيط ≃ ١٣

إيجاد المنوال للتوزيع التكراري باستخدام قانون الرافعة:

نحدد الفئة المنوالية وهي الفئة التي يقابلها أكبر تكرار.

نحدد التكرار للفئتين السابقة مباشرة واللاحقة مباشرة للفئة المنوالية على الترتيب $ك_١$ ، $ك_٢$.

المنوال يقسم الفئة المنوالية كما في الشكل بحيث إن:

$ك_١ \times س = ك_٢ \times (ف - س)$

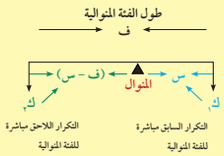
ف = طول الفئة المنوالية

المنوال = الحد الأدنى للفئة المنوالية + س

هذا ما يعرف «بطريقة الرافعة» لحساب المنوال.

ويمكن وضع صيغة رياضية لقانون الرافعة على الشكل التالي:

المنوال = الحد الأدنى للفئة المنوالية + $\frac{ك_٢}{ك_١ + ك_٢} \times ف$



مثال (٦)

يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لعدد ساعات الدراسة الأسبوعية عند ٥٠ طالبًا.

أوجد المنوال لعدد ساعات الدراسة الأسبوعية عند الطلاب .

الفئة	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-	٥٥-
التكرار	٧	٢٠	١٥	٦	٢

معلومة مفيدة:

قانون الرافعة:

القوة × طول ذراعها = المقاومة × طول ذراعها.

الحل:

باستخدام قانون الرافعة

الحد الأدنى للفئة المنوالية = ٤٠

ف: طول الفئة المنوالية = ٥

$ك_١$: تكرار الفئة السابقة للفئة المنوالية = ٧

$ك_٢$: تكرار الفئة اللاحقة للفئة المنوالية = ١٥

$ك_١ \times س = ك_٢ \times (ف - س)$

$٧ \times س = ١٥ \times (٥ - س)$

$٧ س = ٧٥ - ١٥ س$

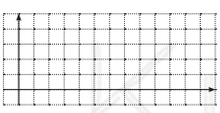
$٢٢ س = ٧٥$

$\therefore س = \frac{٧٥}{٢٢}$

$س \simeq ٣,٤١$

(هـ) أوجد المنوال لهذه الأوزان باستخدام قانون الرافعة.

(و) أوجد المنوال لهذه الأوزان باستخدام المدرج التكراري.

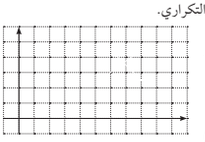


(٢) يبيّن الجدول التالي ٥ فئات تمثل توزيع المصروف اليومي لـ ٣٠ عائلة بالدينار.

الفئة	٢٠-	٤٠-	٦٠-	٨٠-	١٠٠-
التكرار	٧	٦	٩	٥	٣

(أ) أوجد المنوال لمصروف العائلات اليومي باستخدام قانون الرافعة.

(ب) أوجد المنوال لمصروف العائلات اليومي باستخدام المدرج التكراري.



في التمارين (٣-٦)، ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة وظلّل (ب) إذا كانت العبارة خاطئة.

(٣) الوسيط لمجموعة القيم ٧، ٨، ٥، ٤، ٢، ٦ يساوي $٥\frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

(٤) إذا كان المتوسط الحسابي لمجموعة القيم ٣، ٠، ٧، ٩، س يساوي ٦ فإن س = ٥ (أ) (ب)

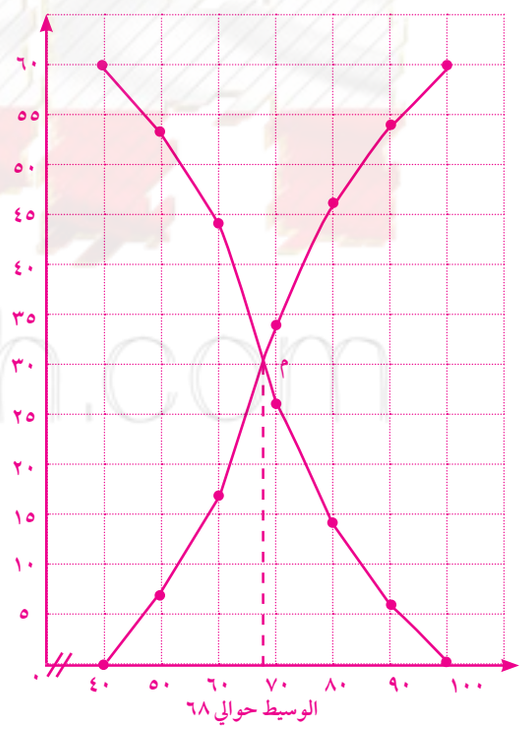
(٥) لأي توزيع تكراري يكون المنوال أكبر من المتوسط الحسابي. (أ) (ب)

(٦) للمفردات ٣، ٥، ٧، ٣، ٧، ٨، ٦ منوالان. (أ) (ب)

٤

الفئات	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد	الحد الأدنى فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٤٠-	٧	أقل من ٥٠	٧	أكثر من ٤٠	٦٠
٥٠-	١٠	أقل من ٦٠	١٧	أكثر من ٥٠	٥٣
٦٠-	١٧	أقل من ٧٠	٣٤	أكثر من ٦٠	٤٣
٧٠-	١٢	أقل من ٨٠	٤٦	أكثر من ٧٠	٢٦
٨٠-	٨	أقل من ٩٠	٥٤	أكثر من ٨٠	١٤
٩٠-	٦	أقل من ١٠٠	٦٠	أكثر من ٩٠	٦

يساوي الوسيط تقريبًا ٦٨.



٥ (أ) المنوال = ٧ . (ب) يوجد منوالان: ٨، ١٥.

(جـ) لا يوجد منوال. (د) يوجد منوالان: ٣، ٨.

المنوال = الحد الأدنى للفئة المنوالية + س

∴ المنوال ≃ ٤٠ + ٣,٤١

≃ ٤٣,٤١

وبذلك يكون منوال ساعات الدراسة أسبوعيًّا عند الطلاب ٤٣ ساعة و٢٥ دقيقة تقريبًا.

حاول أن تحل

٦ يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لمعدل الكوليسترول عند ٢٠ شخصًا.

أوجد المنوال لمعدل الكوليسترول عند هؤلاء الأشخاص باستخدام الصيغة الرياضية لقانون الرافعة.

معلومة صحية:

المعدل الطبيعي للكوليسترول في الدم في دولة الكويت:

CHOL ... 3.10 ⟶ 5.20

HDL/D ... 1.04 ⟶ 1.68

الفئة	٥,٠٤-	٥,١٧-	٥,٣٠-	٥,٤٣-	٥,٥٦-	٥,٦٩-
التكرار	١	٣	٤	٧	٤	١

يمكن إيجاد قيمة تقريبية للمنوال بيانيًّا باستخدام المدرج التكراري من خلال تحديد فئة المنوال والفئة السابقة مباشرة والفئة اللاحقة مباشرة.

مثال (٧)

يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لرواتب الموظفين بالدينار في إحدى المؤسسات.

استخدم التمثيل البياني للمدرج التكراري لإيجاد قيمة تقريبية لمنوال رواتب الموظفين.

الفئة	٢٠٠-	٣٠٠-	٤٠٠-	٥٠٠-	٦٠٠-	٧٠٠-
التكرار	٥	٢٧	٣٥	٢٠	١٠	٣

١٦٨

في التمارين (٧-٩)، اختر الإجابة الصحيحة.

(٧) في التوزيع التكراري المنوال يمكن أن يساوي:

الفئة	١٢-	١٦-	٢٠-	٢٤-	٢٨-
التكرار	٣	١٠	٨	٥	٤

(أ) ١٠ (ب) ١٩ (جـ) ٢٤ (د) ٢٨

(٨) في التوزيع التكراري فإن ترتيب الوسيط يساوي:

الفئة	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-
التكرار	٤	٥	٨	٣

(أ) ٥ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

(٩) في البيانات: ٣، ٤، ٦، ٨، س، ٥، ٧ إذا كان المتوسط الحسابي يساوي ٦، فإن س =

(أ) ٧ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٩

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لأهداف الفرق في مباريات كأس العالم لسنة ٢٠٠٦.

الأهداف	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
التكرار (عدد الفرق)	٧	١٣	١٨	١٢	١٠	٢	٢

أوجد المتوسط الحسابي للأهداف.

(٢) يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري على فئات لقياسات أرجل ٥٠ رياضيًّا في أحد النوادي.

الفئة	٣٨-	٤٠-	٤٢-	٤٤-
التكرار	١١	١٦	١٧	٦

(أ) أوجد المتوسط الحسابي للقياسات.

٩٩

٦ الفئة المنوالية: ٥,٤٣-

الحد الأدنى للفئة المنوالية = ٥,٤٣

ك$_{١}$ × س = ك$_{٢}$ × (ف − س)

٤ × س = ٤ × (٠,١٣ − س)

س = ٠,٠٦٥

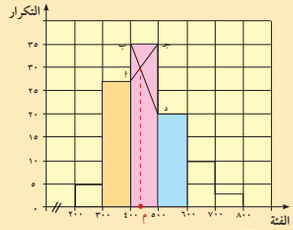
المنوال = الحد الأدنى للفئة المنوالية + س

= ٥,٤٣ + ٠,٠٦٥ = ٥,٤٩٥

المنوال = ٥,٤٩٥

الحل:

يبين الجدول أن الفئة المنوالية هي ٤٠٠ – والفئة السابقة المباشرة هي ٣٠٠ – والفئة اللاحقة مباشرة هي ٥٠٠ –



من نقطة تقاطع $\overline{أجـ}$ مع $\overline{ب د}$ نرسم عمودًا على المحور الأفقي يقطعه في النقطة م. فنحصل على قيمة تقريبية للمنوال وهي ٤٤٥ دينارًا.

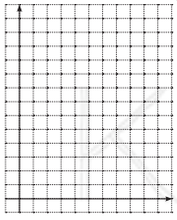
حاول أن تحل

٧ يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لأوزان ٦٠ طالبًا ثانويًّا بالكيلوجرام. استخدم المدرج التكراري لإيجاد قيمة تقريبية لمنوال أوزان هؤلاء الطلاب.

الفئة	٦٠-	٦٤-	٦٨-	٧٢-	٧٦-	٨٠-
التكرار	٧	١٢	١٨	١٠	٨	٥

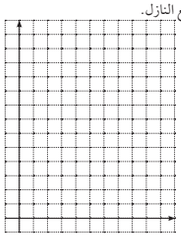
١٦٩

(ب) أوجد الوسيط لهذه الأوزان باستخدام منحنى التكرار المجتمع الصاعد.



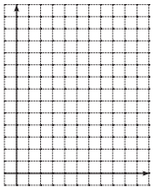
الفئة	التكرار	أقل من الحدود العليا لفئة	التكرار المتجمع الصاعد
٣٨-	١١		
٤٠-	١٦		
٤٢-	١٧		
٤٤-	٦		

(جـ) أوجد الوسيط لهذه الأوزان باستخدام منحنى التكرار المتجمع النازل.



الفئة	التكرار	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٣٨-	١١		
٤٠-	١٦		
٤٢-	١٧		
٤٤-	٦		

(د) أوجد الوسيط لهذه الأوزان باستخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد ومنحنى التكرار المتجمع النازل معًا.

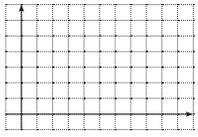


الفئة	التكرار	أقل من الحدود العليا لفئة	التكرار المتجمع الصاعد	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٣٨-	١١				
٤٠-	١٦				
٤٢-	١٧				
٤٤-	٦				

١٠٠

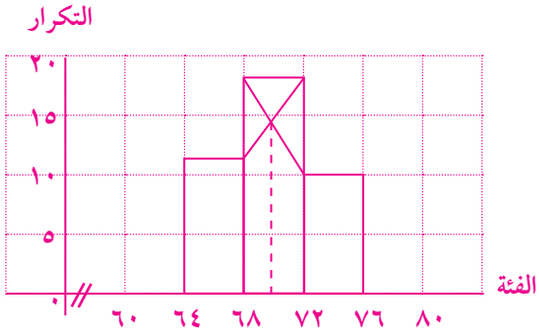
(هـ) أوجد المنوال لهذه القياسات باستخدام قانون الرافعة .

(و) أوجد المنوال لهذه القياسات باستخدام المدرج التكراري.



١٠٦

٧ فئة المنوال: ٦٨-



المنوال:

٦٩,٥ تقريبًا

١٠-٢: الأرباعيات

١ الأهداف

- يتعرف مفهوم مقاييس التشتت.
- يتعرف المدى للبيانات.
- يتعرف الأرباعيات: الأدنى، الأوسط، الأعلى.
- يتعرف على مجمل الأعداد الخمسة.
- يرسم الصندوق ذو العارضتين.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

مدى – أرباعي أدنى – أرباعي أوسط (الوسيط)– أرباعي أعلى – صندوق ذو العارضتين – مجمل الأعداد الخمسة.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة – آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اكتب على السبورة البيانات التالية: ٧، ٥، ٨، ٩، ٦، ١٠، ٤.

اطلب إلى الطلاب:

- ترتيب هذه البيانات تصاعديًّا.
- إيجاد القيمة الصغرى والقيمة العظمى ثم الفرق بينهما.
- إيجاد الوسيط لهذه البيانات.
- إيجاد المنوال.
- إيجاد المتوسط الحسابي.
- إيجاد وسيط الأعداد: ٤، ٥، ٦، ثم إيجاد وسيط الأعداد: ٨، ٩، ١٠.

٥ التدريس

تأكد من أن الطلاب يتفاعلون باهتمام كبير مع فقرة «عمل تعاوني»، لأن هذه الفقرة سوف تساعدهم في فهم ما سوف يأتي في سياق الدرس وخاصة في إيجاد الأرباعيات والمدى للبيانات.

ركز مع الطلاب على أهمية إيجاد مجمل الأعداد الخمسة بعد ترتيب البيانات تصاعديًّا، لأن ذلك سوف يساعدهم على رسم مخطط الصندوق.

اشرح بإسهاب دور كل أرباعي في البيانات، وأهمية المدى الأرباعي.

اطلب إليهم، من خلال استخدام أمثلة متعددة، إيجاد النسبة المئوية للبيانات، الموجودة في المدى الأرباعي ر٣ – ر١.

شجع الطلاب على رسم مخطط الصندوق بشكل دقيق حتى

١٠-٢

الأرباعيات
Quartiles

عمل تعاوني

كانت درجات الطلاب في مادة الرياضيات حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة كما يلي:
١٤، ١٥، ١٧، ٩، ٨، ١٠، ١٣، ١٤، ١٦، ١٧،
٧، ٥، ٦، ٩، ١٤، ١٩، ١٥، ١٠، ١١،
١٤، ١٠، ١٧، ١٦، ١٨، ١٠، ٦، ١٢، ١٠.

١ أوجد الفرق بين أعلى قيمة وأدنى قيمة.
٢ رتب قيم هذه البيانات تصاعديًّا.
٣ أوجد الوسيط لهذه البيانات.
٤ يقسم الوسيط قيم البيانات إلى قسمين متساويين:
أ أوجد الوسيط الأدنى لمجموعة القيم التي هي أصغر من الوسيط الذي حصلت عليه في السؤال (٣).
ب أوجد الوسيط الأعلى لمجموعة القيم التي هي أكبر من الوسيط الذي حصلت عليه في السؤال (٣).
٥ رتب تصاعديًّا القيم التالية:
القيمة الصغرى للبيانات، الوسيط الأدنى، الوسيط، الوسيط الأعلى، القيمة العظمى للبيانات.

سوف تتعلم
من مقاييس التشتت
- المدى
- الأرباعيات
- الصندوق ذو العارضتين

تذكر:
الوسيط: هو القيمة من البيانات التي تأتي في المنتصف بعد ترتيبها تصاعديًّا أو تنازليًّا.

إن **مقاييس النزعة المركزية** تعطينا فكرة عن قرب أو بعد قيم البيانات عن المتوسط الحسابي أو عن الوسيط ولكنها لا توضح كيفية توزيع هذه القيم وانتشارها.
تصف مقاييس الانتشار (التشتت) مدى التغير في البيانات.
يكون التشتت صغيرًا عندما تكون مفردات البيانات متقاربة من بعضها ويكون كبيرًا عندما تكون المفردات متباعدة
فأهمية دراسة التشتت تكمن في معرفة مدى تجانس قيم هذه البيانات .
إذا كان لدينا مجموعتان من البيانات لديهما نفس المتوسط الحسابي.
فإن المجموعة التي قيم بياناتها قريبة أكثر من المتوسط الحسابي تكون الأكثر تجانسًا وانسجامًا في ما بينها.
أبسط مقاييس الانتشار هو معرفة المدى.
المدى = القيمة العظمى – القيمة الصغرى.
يوضح المدى الانتشار الكامل لقيم البيانات والذي يمكن أن يتضمن القيمة المتطرفة والتي قد تزيد المدى بشكل كبير، وبالتالي تعطي فكرة خاطئة عن انتشار قيم البيانات.

١٧٠

مثال (١)

أوجد المدى لقيم البيانات التالية:
أ ٧، ٨، ١٠، ١٢، ٦، ٩، ١١، ١٤
ب ١٢، ١٥، ١٠، ١١، ٢٠، ١٨، ٤٧

الحل:
أ المدى = ١٤ – ٦ = ٨
ب المدى = ٤٧ – ١٠ = ٣٧. القيمة المتطرفة ٤٧ أعطت مدًى كبيرًا جدًّا لانتشار القيم.

حاول أن تحل

١ أوجد المدى لقيم البيانات التالية:
أ ٥٧، ٥٣، ٤٠، ٤٥، ٤٨، ٥٩
ب ١٢٥، ١٧٦، ١٢٨، ١٣٠، ١٣٢، ١٢٤

لكي نتجاهل المدى الكبير الناتج عن القيمة المتطرفة في قيم البيانات نستخدم الأرباعيات والمدى الأرباعي.

الأرباعيات Quartiles

يقسم الوسيط قيم البيانات إلى نصفين وتقسم الأرباعيات قيم البيانات إلى ٤ أرباع ومنها نستنتج:

أ الأرباعي الأول $ر_1$ وهو وسيط النصف الأدنى من قيم البيانات ويسمى **الأرباعي الأدنى**.
ب الأرباعي الثاني $ر_2$ وهو وسيط قيم البيانات ويسمى **الوسيط**.
ج الأرباعي الثالث $ر_3$ وهو وسيط النصف الأعلى من قيم البيانات ويسمى **الأرباعي الأعلى**.
د المدى الأرباعي = $ر_3 - ر_1$.

تسمى (القيمة الصغرى، الأرباعي الأدنى، الوسيط، الأرباعي الأعلى، القيمة العظمى) "مجمل الأعداد الخمسة".

مثال (٢)

يبين الجدول التالي نتائج الدوري الكويتي الممتاز لكرة القدم ٢٠١١ – ٢٠١٢.

الفريق	القادسية	الكويت	العربي	السالمية	الجهراء	كاظمة	النصر	الشباب
النقاط	٥١	٤٠	٣٣	٢٥	٢٤	٢٢	١٧	١٤

أ رتب هذه القيم تصاعديًّا.
ب أوجد قيمة المدى.
ج أوجد قيم الوسيط والأرباعيات (الأدنى والأعلى والمدى الأرباعي).
د اكتب "مجمل الأعداد الخمسة".

١٧١

يلاحظوا جيّدًا انتشار البيانات داخل الصندوق وخارجه وكيفية اقترابهم من الوسيط أو بعدهم عنه.

اطلب إليهم إيجاد النسب المئوية من البيانات بين الأرباعي الأدنى والوسيط وبين الأرباعي الأعلى والوسيط وفي كل مرة اسألهم عن ملاحظاتهم. مثال (٣).

في المثال (٤)، إن مقارنة البيانات عن طريق رسم مخططات الصناديق جنبًا إلى جنب تساعد كثيرًا على مقارنة هذه البيانات وكيفية انتشارها.

٦ الربط

الأمثلة (٢)، (٣)، (٤) تربط بين البيانات والمفاهيم والمهارات في هذا الدرس.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تحديد الأرباعي الأدنى والأرباعي الأعلى. أكّد لهم أن الوسيط يقسم البيانات إلى قسمين متساويين، واطلب إليهم تلوين قيمة الوسيط، ثم تحديد وسيط النصف الأدنى ووسيط النصف الأعلى.

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يجيبون عن الأسئلة في فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من حسن أدائهم ومن فهمهم لكل ما ورد.

اختبار سريع

تبين من دراسة لأعمار الصغار في إحدى مراكز الحضانة بالسنوات ما يلي: ٣، ٤، ٣، ٥، ٥، ٤، ٤، ٣، ٢، ٣، ٥، ٣.

١ رتب قيم البيانات تصاعديًّا.

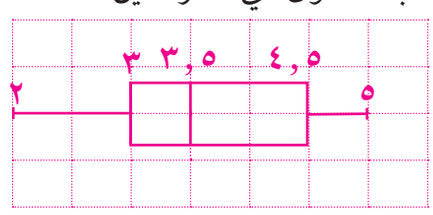
٢، ٣، ٣، ٣، ٣، ٣، ٤، ٤، ٤، ٥، ٥، ٥، ٥.

٢ أوجد قيم الوسيط، الوسيط الأدنى، الوسيط الأعلى ثم اكتب القيم الخمس.

الوسيط = ٣,٥، الوسيط الأدنى = ٣، الوسيط الأعلى = ٤,٥ القيم الخمس: ٢، ٣، ٣,٥، ٤,٥، ٥

٣ مثل هذه البيانات بالصندوق ذي العارضتين. ماذا تلاحظ؟

التمثيل بالصندوق



يلاحظ أن الأعمار بالسنوات في مركز الحضانة تتقارب أكثر بين ٣ سنوات و٣,٥ سنة أي بين الوسيط الأدنى والوسيط.

الحل:

١ ١٤، ١٧، ٢٢، ٢٤، ٢٥، ٣٣، ٤٠، ٥١

ب المدى: ٥١ − ١٤ = ٣٧ (نلاحظ أن المدى كبير)

ج الوسيط (ر٢) = (٢٥ + ٢٤) / ٢ = ٢٤,٥

البيانات مع الوسيط: ١٤، ١٧، ٢٢، ٢٤، ر٢ = ٢٤,٥ ، ٢٥، ٣٣، ٤٠، ٥١

الأرباعي الأدنى هو وسيط القيم: ١٤، ١٧، ٢٢، ٢٤

ر١ = (١٧ + ٢٢) / ٢ = ١٩,٥

الأرباعي الأعلى هو وسيط القيم: ٢٥، ٣٣، ٤٠، ٥١

ر٣ = (٣٣ + ٤٠) / ٢ = ٣٦,٥

المدى الأرباعي = ٣٦,٥ − ١٩,٥ = ١٧

د مجمل الأعداد الخمسة: (١٤، ١٩,٥، ٢٤,٥، ٣٦,٥، ٥١)

ملاحظة: يمكن ترتيب قيم البيانات على الشكل التالي:

١٤، ١٧، ر١ = ١٩,٥، ٢٢، ٢٤، الوسيط ر٢ = ٢٤,٥، ٢٥، ٣٣، ر٣ = ٣٦,٥، ٤٠، ٥١

حاول أن تحل

٢ يبين الجدول التالي نتائج الدوري الكويتي لكرة القدم ٢٠١٠ – ٢٠١١.

الفريق	القادسية	الكويت	العربي	كاظمة	الجهراء	النصر	السالمية	الشباب
النقاط	٥١	٤٧	٣٩	٣٨	١٩	١٦	١٤	١٢

١ أوجد الوسيط والمدى والأرباعيات والمدى الأرباعي لقيم هذه البيانات.

ب اكتب "مجمل الأعداد الخمسة".

مخطط الصندوق Box Plot

هو تمثيل بياني يصف مجمل الأعداد الخمسة لقيم البيانات وهو يتكون من مستطيل مركزي (الصندوق) يمثل الأرباعي الأدنى ر١ والوسيط ر٢ والأرباعي الأعلى ر٣ وقطعتين مستقيمتين من الجهتين تمثلان القيمة الصغرى والقيمة العظمى ونسميها العارضتين.

١٧٢

التاريخ الهجري: ..... التاريخ الميلادي: .....

تمرَّنْ ١٠-٢

الأرباعيات

Quartiles

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) أوجد المدى لقيم البيانات التالية:

(أ) ٧، ٤، ٦، ٨، ٩، ١٠، ٥، ٤، ٣.

(ب) ١٧، ٢٠، ١١، ٢٣، ١٥، ١٨، ١٩، ١٢، ١٦.

(٢) أوجد مجمل الأعداد الخمسة للبيانات: ٥٢، ٦٠، ٥٠، ٥٤، ٥٩، ٦٥، ٦٦، ٦٤، ٩٥، ٦٢.

(٣) (أ) أوجد مجمل الأعداد الخمسة للقيم التالية التي تمثل أوزان أكياس من الأرز: ١١، ١٢، ١٣، ١٧، ٢٣، ٢٦، ٢٧، ٥٠.

(ب) ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين لقيم البيانات في (أ). ماذا تستنتج؟ اشرح.

١٠٢

٩ إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

١ ١٩ − ٥ = ١٤

٢ ٥، ٦، ٦، ٧، ٨، ٩، ٩، ١٠، ١٠، ١٠، ١٠، ١٠، ١٠، ١١، ١٢، ١٣، ١٤، ١٤، ١٤، ١٤، ١٥، ١٥، ١٦، ١٦، ١٧، ١٧، ١٧، ١٨، ١٩.

٣ $\frac{١٢ + ١٣}{٢}$ = ١٢,٥ (الوسيط).

٤ (أ) الوسيط الأدنى = $\frac{٩ + ١٠}{٢}$ = ٩,٥

(ب) الوسيط الأعلى = $\frac{١٥ + ١٦}{٢}$ = ١٥,٥

٥ القيمة الصغرى (٥)، الوسيط الأدنى (٩,٥)، الوسيط (١٢,٥)، الوسيط الأعلى (١٥,٥)، القيمة العظمى (١٩).

«حاول أن تحل»

١ (أ) ٥٩ − ٤٠ = ١٩

(ب) ١٧٦ − ١٢٤ = ٥٢

٢ (أ) ترتيب البيانات: ١٢، ١٤، ١٦، ١٩، ٣٨، ٣٩، ٤٧، ٥١

الوسيط = $\frac{١٩ + ٣٨}{٢}$ = ٢٨,٥

المدى = ٥١ − ١٢ = ٣٩

الأرباعي الأدنى = $\frac{١٤ + ١٦}{٢}$ = ١٥

الأرباعي الأعلى = $\frac{٣٩ + ٤٧}{٢}$ = ٤٣

المدى الأرباعي = ٤٣ − ١٥ = ٢٨

(ب) مجمل الأعداد الخمسة = (١٢، ١٥، ٢٨,٥، ٤٣، ٥١).

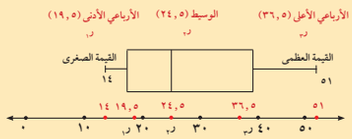
مثال (٣)

استخدم "مجمل الأعداد الخمسة" من المثال (٢) لترسم مخطط الصندوق ذي العارضتين. فسّر النتائج.

الحل:

"مجمل الأعداد الخمسة" : (١٤، ١٩,٥، ٢٤,٥، ٣٦,٥، ٥١)

مخطط الصندوق



يبين مخطط الصندوق أن المنطقة المحصورة بين الوسيط والأرباعي الأدنى هي أصغر من المنطقة المحصورة بين الوسيط والأرباعي الأعلى. أي أن الوسيط أقرب إلى الأرباعي الأدنى.

ولتفسير ذلك:

إن انتشار قيم البيانات قريبة أكثر إلى بعضها بين الوسيط والأرباعي الأدنى وتبتعد عن بعضها بين الوسيط والأرباعي الأعلى. مما يعني أن هناك مجموعتين من الأندية متقاربة في ما بينهما المجموعة الأولى بين المركز الأول والثالث ومجموعة بين المركز الرابع والأخير.

كما أن مخطط الصندوق لا يبين وجود قيمة متطرفة.

حاول أن تحل

٣ ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين للبيانات الموجودة في فقرة "حاول أن تحل (٢)". فسّر النتائج.

١٧٣

---

(٤) يبيّن الجدول التالي تواريخ وأطوال الأعاصير التي اجتاحت إحدى المدن في سنة ١٩٩٥.

التاريخ	٤/١٧	٤/١٨	٤/١٩	٥/٦	٥/٧	٦/٨	٦/٩
طول الإعصار (بالكيلومتر)	٣	٧	١١	٢٠	١٠	٨	٩

ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين. وفسّر النتائج.

في التمارين (٥–٧)، ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة وظلّل (ب) إذا كانت العبارة خاطئة.

(٥) إذا كان المدى لمجموعة من القيم يساوي ١٠ وكانت أصغر قيمة من هذه القيم هي ٢ فإن أكبر قيمة تساوي ١٢. (أ) (ب)

(٦) إذا كان المدى لمجموعة القيم ٣، ٧، ٨، ٢، س يساوي ١٥ فإن س = ١٣. (أ) (ب)

(٧) للقيم ٥١، ٤٠، ٣٣، ٢٢، ٢٤، ١٧، ٢٥، ١٤ يكون الأرباعي الأعلى لا يساوي $٣٦\frac{١}{٢}$. (أ) (ب)

في التمارين (٨–١٠)، اختر الإجابة الصحيحة.

(٨) في البيانات: ١٧، ٣٠، ٢٥، ١٢، ١٥، ٢٨، ٢٠، ٢٤، الأرباعي الأدنى هو:

(أ) ١٧ (ب) ١٦ (جـ) ١٥ (د) ٢٢

(٩) في البيانات: ١٨، ٣٠، ٢٦، ١٢، ١٤، ٢٨، ٢٠، ٢٤، المدى الأرباعي هو:

(أ) ١١ (ب) ١٨ (جـ) ١٦ (د) ٢٧

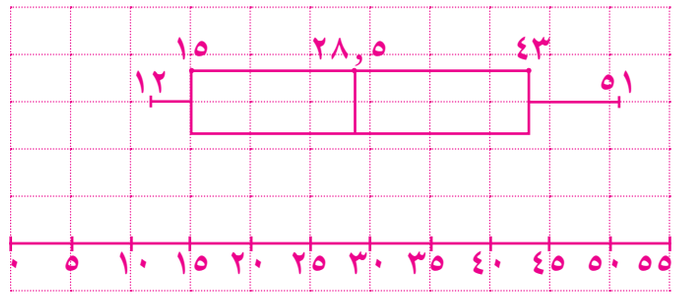
(١٠) في البيانات: ٧، ١١، ٤، ٦، ١٧، ١٤، ٩، ١٥، ١٣ مجمل الأعداد الخمسة هي:

(أ) (٤، ٧، ١١، $١٤\frac{١}{٢}$، ١٧) (ب) (٤، $٦\frac{١}{٢}$، ١١، ١٤، ١٧)

(جـ) (٤، ٧، ١١، ١٤، ١٧) (د) (٤، $٦\frac{١}{٢}$، ١١، $١٤\frac{١}{٢}$، ١٧)

١٠٣

٣ مخطط الصندوق للبيانات الموجودة في فقرة «حاول أن تحل (٢)»



نلاحظ توزيع متقارب بين الوسيط والوسيط الأدنى والوسيط الأعلى وذلك لنقاط الفرق.

يمكن رسم مخططين لصندوقين لمقارنة النتائج.

مثال (٤)

تمثل المجموعة الأولى بيانات معدل مصروف المنزل الشهري على الطعام بالدولار الأمريكي في ١٢ بلدًا أوروبيًا:

٣١٠، ٤٢٠، ٧٥٠، ٤٥٠، ٥٢٠، ٦٨٠، ٤٧٠، ٤٩٠، ٥٩٠، ٥٦٠، ٣٨٠، ٣٥٠ .

تمثل المجموعة الثانية بيانات معدل مصروف المنزل الشهري على الطعام بالدولار الأمريكي في ١٢ بلدًا عربيًا:

١٠٥٠، ٦٥٠، ٧٠٠، ٣٧٠، ٩٠٠، ٨٠٠، ٢٢٠، ٨٣٠، ١١٠٠، ١١٩٠، ١٩٠، ٧٦٠.

١ رتب البيانات بطريقة تصاعدية.

٢ أوجد الوسيط والأرباعي الأدنى والأعلى لكل مجموعة من البيانات بالإضافة إلى القيمة الأصغر والقيمة الأكبر لكل مجموعة من البيانات.

٣ ارسم مخططين لصندوقين مستخدمًا البيانات المرتبة تصاعديًا لكل من المجموعتين الأولى والثانية.

٤ فسّر النتائج.

الحل:

١ المجموعة الأولى بحسب الترتيب التصاعدي:

٣١٠، ٣٥٠، ٣٨٠، ٤٢٠، ٤٥٠، ٤٧٠، ٤٩٠، ٥٢٠، ٥٦٠، ٥٩٠، ٦٨٠، ٧٥٠.

المجموعة الثانية بحسب الترتيب التصاعدي:

١٩٠، ٢٢٠، ٣٧٠، ٦٥٠، ٧٠٠، ٧٦٠، ٨٠٠، ٨٣٠، ٩٠٠، ١٠٥٠، ١١٠٠، ١١٩٠.

٢ القيمة الصغرى = ٣١٠، وسيط المجموعة الأولى = $\frac{٤٧٠ + ٤٩٠}{٢}$ = ٤٨٠ ،

الأرباعي الأدنى = ٤٠٠، الأرباعي الأعلى = ٥٧٥،

القيمة الكبرى = ٧٥٠.

القيمة الصغرى = ١٩٠، وسيط المجموعة الثانية = $\frac{٧٦٠ + ٨٠٠}{٢}$ = ٧٨٠ ،

الأرباعي الأدنى = ٥١٠ ، الأرباعي الأعلى = ٩٧٥،

القيمة الكبرى = ١١٩٠.

١٧٤

المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

(١) أوجد مجمل الأعداد الخمسة للبيانات التالية:

(أ) ٤٩، ٥٨، ٦٢، ٦٤، ٦٧، ٧٧، ٨٠.

(ب) ١٠٠، ١٠١، ١٠٢، ١٠٣، ١٠٤، ١٠٥، ١٠٩، ١١٠.

(جـ) ١١، ١٢، ١٣، ١٤، ١٥، ١٧، ١٩، ١٩، ٢٠.

(٢) يبيّن الجدول التالي عدد أكبر الزلازل التي حدثت في العالم حيث قوتها تخطت ٧ درجات على مقياس ريختر وذلك بين ١٩٨٥ وَ١٩٩٤.

السنة	١٩٨٥	١٩٨٦	١٩٨٧	١٩٨٨	١٩٨٩	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢	١٩٩٣	١٩٩٤
عدد الزلازل	١٤	٦	١١	٨	٧	١٣	١١	٣٣	١٥	١٤

(أ) أوجد مجمل الأعداد الخمسة لقيم هذه البيانات.

١٠٤

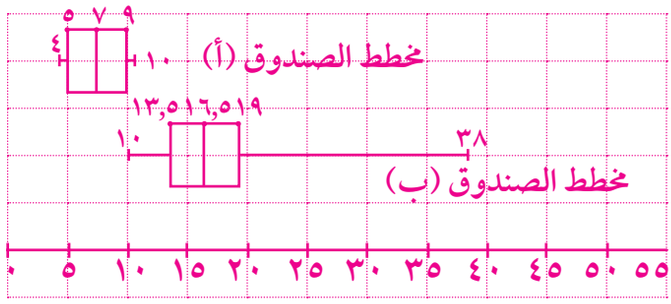
٤ (أ) ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠

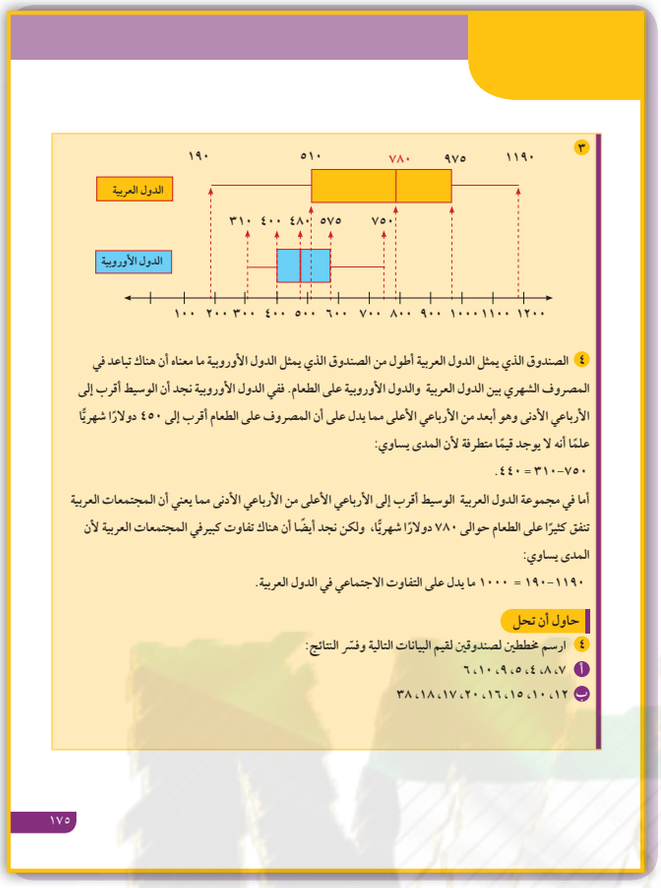
الأعداد الخمسة = (٤، ٥، ٧، ٩، ١٠)

(ب) ١٠، ١٢، ١٥، ١٦، ١٧، ١٨، ٢٠، ٣٨

الأعداد الخمسة = (١٠، ١٣,٥، ١٦,٥، ١٩، ٣٨)

مخططا الصندوقين جنبًا إلى جنب.





٣

٤ الصندوق الذي يمثل الدول العربية أطول من الصندوق الذي يمثل الدول الأوروبية ما معناه أن هناك تباعد في المصروف الشهري بين الدول العربية والدول الأوروبية على الطعام. ففي الدول الأوروبية نجد أن الوسيط أقرب إلى الأرباعي الأدنى وهو أبعد من الأرباعي الأعلى مما يدل على أن المصروف على الطعام أقرب إلى ٤٥٠ دولارًا شهريًّا علمًا أنه لا يوجد قيمًا متطرفة لأن المدى يساوي:

٧٥٠−٣١٠ = ٤٤٠.

أما في مجموعة الدول العربية الوسيط أقرب إلى الأرباعي الأعلى من الأرباعي الأدنى مما يعني أن المجتمعات العربية تنفق كثيرًا على الطعام حوالى ٧٨٠ دولارًا شهريًّا، ولكن نجد أيضًا أن هناك تفاوت كبيرفي المجتمعات العربية لأن المدى يساوي:

١١٩٠−١٩٠ = ١٠٠٠ ما يدل على التفاوت الاجتماعي في الدول العربية.

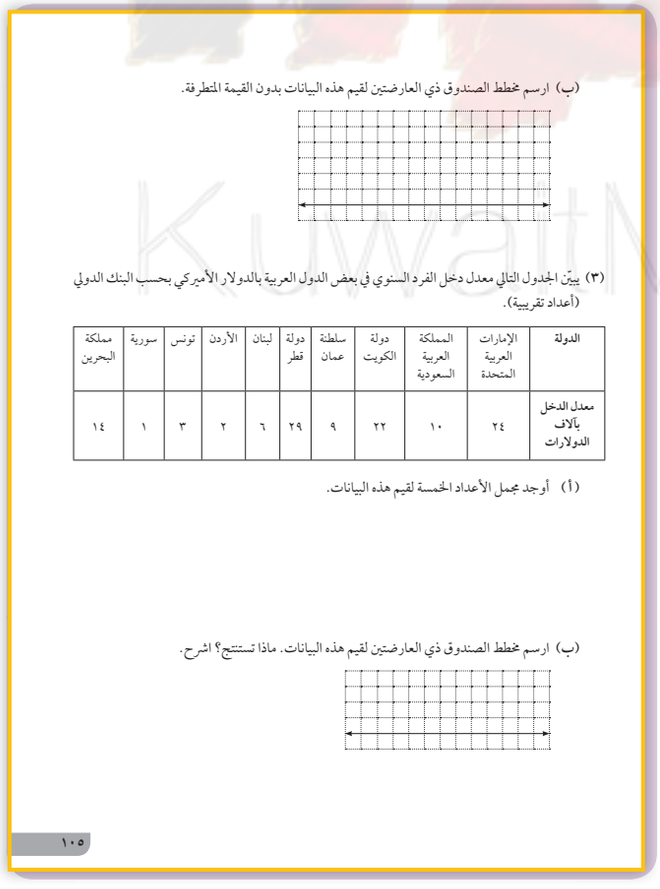
حاول أن تحل

٤ ارسم مخططين لصندوقين لقيم البيانات التالية وفسّر النتائج:

أ ٧، ٨، ٤، ٥، ٩، ١٠، ٦

ب ١٢، ١٠، ١٥، ١٦، ٢٠، ١٧، ١٨، ٣٨

١٧٥



(ب) ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين لقيم هذه البيانات بدون القيمة المتطرفة.

(٣) يبيّن الجدول التالي معدل دخل الفرد السنوي في بعض الدول العربية بالدولار الأميركي بحسب البنك الدولي (أعداد تقريبية).

الدولة	الإمارات العربية المتحدة	المملكة العربية السعودية	دولة الكويت	سلطنة عمان	دولة قطر	لبنان	الأردن	تونس	سورية	مملكة البحرين
معدل الدخل بآلاف الدولارات	٢٤	١٠	٢٢	٩	٢٩	٦	٢	٣	١	١٤

(أ) أوجد مجمل الأعداد الخمسة لقيم هذه البيانات.

(ب) ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين لقيم هذه البيانات. ماذا تستنتج؟ اشرح.

١٠٥

١٠ـ٣: الانحراف المعياري

١ الأهداف

- يوجد التباين لمجموعة من البيانات.
- يستنتج الانحراف المعياري.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

تباين – انحراف معياري .

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اكتب على السبورة البيانات التالية:

٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢، ١٣

اطلب إلى الطلاب:

- إيجاد المتوسط الحسابي لهذه البيانات.
- إيجاد الوسيط لهذه البيانات.
- إيجاد: $\sqrt{٢٢٥}$ ، $\sqrt{١٣٤}$.
- أسألهم الفرق بين |٧ – ٩| وَ |٩ – ٧|.
- أسألهم الفرق بين (أ – جـ)^{٢} وَ (جـ – أ)^{٢}.

٥ التدريس

يعتبر الانحراف المعياري من أهم المؤشرات المستخدمة في علم الإحصاء كونه يعطينا فكرة واضحة عن تشتت البيانات بالنسبة إلى المتوسط الحسابي.

ركز مع الطلاب على فقرة «عمل تعاوني»، إذ إنها توضح كيف أن مجموعتين من البيانات لهما المتوسط الحسابي نفسه، علمًا بأن الشعبتين مختلفتين والدرجات مختلفة إذ يوجد في الجدول الثاني قيمتان ١١، ١٦ من الدرجات.

لذا، وجد الإحصائيون أن مقاييس النزعة المركزية لا تعطي فكرة شاملة عن تشتت البيانات، ما جعلهم يبحثون عن مقاييس أكثر دقة، فكان الانحراف المعياري.

يجب تنبيه الطلاب إلى ضرورة تكوين جداول كما في الأمثلة (١)، (٢)، (٣) للحصول على معطيات صحيحة يمكن إدخالها إلى برنامج الإحصاء في الآلة الحاسبة المستخدمة.

١٠ـ٣

الانحراف المعياري
Standard Deviation

عمل تعاوني

أراد معلم الفصل مقارنة درجات ٨ طلاب الأوائل من الشعبة (أ) والشعبة (ب) للصف العاشر حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة.

درجات الشعبة أ: ١٠، ١٢، ١٣، ١٤، ١٥، ١٧، ١٩، ١٢.

درجات الشعبة ب: ١١، ١٢، ١٣، ١٤، ١٤، ١٥، ١٦، ١٧.

أ أوجد $\overline{س}$ المتوسط الحسابي لدرجات طلاب الشعبة أ.

ب أوجد $\overline{ص}$ المتوسط الحسابي لدرجات طلاب الشعبة ب.

جـ استنادًا إلى قيم $\overline{س}$، $\overline{ص}$: هل يستطيع معلم الفصل أن يقرر أي مجموعة من الطلاب درجاتهم هي الأفضل؟

د أكمل الجدولين التاليين:

سوف تتعلم

من مقاييس التشتت:
- التباين
- الانحراف المعياري

شعبة (أ)

$س_ر$	$س_ر - \overline{س}$	$(س_ر - \overline{س})^{٢}$
١٠		
١٢		
١٢		
١٣		
١٤		
١٥		
١٧		
١٩		
المجموع		

شعبة (ب)

$ص_ر$	$ص_ر - \overline{ص}$	$(ص_ر - \overline{ص})^{٢}$
١١		
١٢		
١٣		
١٤		
١٤		
١٥		
١٦		
١٧		
المجموع		

سوف تتعلم في هذا البند مؤشرات أخرى من مقاييس التشتت وهي التباين $ع^{٢}$ والانحراف المعياري ع.

التباين والانحراف المعياري Variance and Standard Deviation

إذا كانت $س_١$، $س_٢$، $س_٣$، ... ، $س_ن$ مجموعة من القيم عددها ن حيث متوسطها الحسابي $\overline{س}$ فإن:

$$\text{التباين} = ع^{٢} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^{٢}}{ن}$$

ومنه الانحراف المعياري = $ع = \sqrt{ع^{٢}}$

١٧٦

إذا كانت $س_١$، $س_٢$، $س_٣$، ... ، $س_ن$ هي قيم بيانات؛ $ت_١$، $ت_٢$، $ت_٣$، .... ، $ت_ن$ هي تكرار هذه القيم على الترتيب فيكون التباين لهذه القيم هو:

$$ع^{٢} = \frac{ت_١(س_١ - \overline{س})^{٢} + ت_٢(س_٢ - \overline{س})^{٢} + ... + ت_ن(س_ن - \overline{س})^{٢}}{ت_١ + ت_٢ + ... + ت_ن}$$

$$= \frac{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر (س_ر - \overline{س})^{٢}}{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر}$$

$$\text{والانحراف المعياري} = ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر (س_ر - \overline{س})^{٢}}{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر}}$$

معلومة رياضية:
- $(س_ر - \overline{س})$ هي انحراف $س_ر$ عن المتوسط الحسابي.
- المتوسط الحسابي: هو ناتج قسمة مجموع قيم البيانات على عدد هذه القيم.

مثال (١)

أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم البيانات:
٤، ٦، ٨، ٥، ٣، ٧، ٢

الحل:

نوجد أولًا المتوسط الحسابي:

$$\overline{س} = \frac{٤ + ٦ + ٨ + ٥ + ٣ + ٧ + ٢}{٧} = \frac{٣٥}{٧} = ٥$$

نكون الجدول التالي:

القيمة $س_ر$	الانحراف عن المتوسط الحسابي $س_ر - \overline{س}$	مربع الانحراف عن المتوسط الحسابي $(س_ر - \overline{س})^{٢}$
٤	١–	١
٦	١	١
٨	٣	٩
٥	٠	٠
٣	٢–	٤
٧	٢	٤
٢	٣–	٩
		المجموع = ٢٨

$$\text{التباين } ع^{٢} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^{٢}}{ن} = \frac{٢٨}{٧} = ٤$$

١٧٧

ونتيجة لذلك، يساعد الانحراف المعياري لمجموعتين من البيانات على مقارنتها لتحديد الأفضل بينهما، وهذه العملية تستخدم في الإنتاج بين عدة مصانع لسلعة واحدة كما في المثال (٢).

٦ الربط

يربط المثالان (٢) ، (٣) بين التباين والانحراف المعياري والمواقف الحياتية، حيث تظهر أهمية استخدام هذا المؤشر في عملية الإحصاء لتوقع نتائج واتخاذ قرارات مناسبة.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام الآلة الحاسبة عند إدخال البيانات، ساعدهم على فهم برنامج كل آلة حاسبة وكيفية استخدامها ليحصلوا على نتائج صحيحة.

٨ التقييم

إن متابعة الطلاب وهم يجيبون عن الأسئلة في فقرات «حاول أن تحل» توضح للمعلم قدرة الطلاب على التفاعل مع مفاهيم هذا الدرس ومهاراته.

اختبار سريع

أخذت عينة من الطلاب في القسم الثانوي لدراسة الأعمار بالسنوات فكانت النتائج كما يلي: ١٥، ١٦، ١٧، ١٨، ١٥، ١٨، ١٧، ١٥، ١٥، ١٤

❶ أوجد المتوسط الحسابي لأعمار الطلاب $\overline{س}$.

$$\overline{س} = \frac{١٤ + ٤ \times (١٥) + ١٦ + ٢ \times (١٧) + ٢ \times (١٨)}{١٠}$$

$$= \frac{١٦٠}{١٠} = ١٦$$

❷ كوّن جدولاً يبيّن $ت_ر(س_ر - \overline{س})^٢$ والمجموع.

$س_ر$	$ت_ر$	$س_ر - \overline{س}$	$ت_ر(س_ر - \overline{س})^٢$
١٤	١	−٢	$١(-٢)^٢ = ٤$
١٥	٤	−١	$٤(-١)^٢ = ٤$
١٦	١	٠	٠
١٧	٢	١	$٢(١)^٢ = ٢$
١٨	٢	٢	$٢(٢)^٢ = ٨$
المجموع = ١٨			

التباين $ع^٢ = ٤$

الانحراف المعياري $ع = \sqrt{٤} = ٢$.

حاول أن تحل

❶ أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم البيانات:
٩، ٧، ٨، ٦، ٤، ٢

مثال (٢)

يمكن استخدام الآلة الحاسبة

يبين الجدول التالي عدد الساعات القصوى لعمر ٧ مصابيح كهربائية بالساعات من إنتاجين مختلفين.

إنتاج (أ)	١٠٥٠	٩١٠	١٠٠٠	١٠٣٠	٩٤٠	٩٦٠	٩٧٠
إنتاج (ب)	١١٣٠	٧٠٠	٩٧٠	٩٦٠	١٠٥٠	١١٨٠	٨٧٠

❶ أوجد المتوسط الحسابي $\overline{س}$ للإنتاج (أ) والمتوسط الحسابي $\overline{ص}$ للإنتاج (ب).

❷ أوجد وسيط الإنتاج (أ) ثم وسيط الإنتاج (ب).

❸ ستبين الحسابات في السؤالين (أ)، (ب) أن المتوسط الحسابي في الإنتاجين هو نفسه وأن الوسيط في الإنتاجين هو نفسه.
أوجد الانحراف المعياري $ع_س$ في الإنتاج (أ) والانحراف المعياري $ع_ص$ في الإنتاج (ب). ماذا تستنتج؟
أي إنتاج هو الأفضل؟

الحل:

❶ $\overline{س} = \frac{١٠٥٠ + ٩١٠ + ١٠٠٠ + ١٠٣٠ + ٩٤٠ + ٩٦٠ + ٩٧٠}{٧} = ٩٨٠$

$\overline{ص} = \frac{١١٣٠ + ٧٠٠ + ٩٧٠ + ٩٦٠ + ١٠٥٠ + ١١٨٠ + ٨٧٠}{٧} = ٩٨٠$

١٧٨

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

تمرَّنْ ١٠-٣

الانحراف المعياري

Standard Deviation

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) أوجد الانحراف المعياري لقيم البيانات التالية (يمكن استخدام الآلة الحاسبة):

(أ) ٥٢، ٦٣، ٥٤، ٧٠، ٦٦.

(ب) ١، ٢، ١٧، ١٢، ١٥، ٨، ١٠، ١٥.

١٠٦

③ استنتج التباين والانحراف المعياري.

التباين $ع^٢ = \frac{١٨}{١٠} = ١,٨$

الانحراف المعياري $ع = \sqrt{١,٨} \simeq ١,٣٤$

٩ إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

(أ) المتوسط الحسابي في الجدول الأول: $\overline{س} = ١٤$.

(ب) المتوسط الحسابي في الجدول الثاني: $\overline{ص} = ١٤$.

(جـ) إن الطلاب الأوائل في الشعبتين لديهم نفس معدل الدرجات لذا لا يمكن تحديد الشعبة الأفضل من خلال $\overline{س}$ و $\overline{ص}$

(د) شعبة (أ)

س	$س_ر - \overline{س}$	$(س_ر - \overline{س})^٢$
١٠	٤−	١٦
١٢	٢−	٤
١٢	٢−	٤
١٣	١−	١
١٤	٠	٠
١٥	١	١
١٧	٣	٩
١٩	٥	٢٥
المجموع = ٦٠		

شعبة (ب)

$ص_ر$	$ص_ر - \overline{ص}$	$(ص_ر - \overline{ص})^٢$
١١	٣−	٩
١٢	٢−	٤
١٣	١−	١
١٤	٠	٠
١٤	٠	٠
١٥	١	١
١٦	٢	٤
١٧	٣	٩
المجموع = ٢٨		

ب إنتاج (أ): ٩١٠، ٩٤٠، ٩٦٠، ٩٧٠، ١٠٠٠، ١٠٣٠، ١٠٥٠

الوسيط = ٩٧٠

إنتاج (ب): ٧٠٠، ٨٧٠، ٩٦٠، ٩٧٠، ١٠٥٠، ١١٣٠، ١١٨٠

الوسيط = ٩٧٠

جـ

القيمة $س_ر$	$س_ر - \overline{س}$	$(س_ر - \overline{س})^٢$
١٠٥٠	٧٠	٤٩٠٠
٩١٠	٧٠−	٤٩٠٠
١٠٠٠	٢٠	٤٠٠
١٠٣٠	٥٠	٢٥٠٠
٩٤٠	٤٠−	١٦٠٠
٩٦٠	٢٠−	٤٠٠
٩٧٠	١٠−	١٠٠
المجموع = ١٤٨٠٠		

$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^٢}{ن}}$

الانحراف المعياري في الإنتاج (أ)

$ع_أ = \sqrt{٢١١٤,٢٨٦} = ٤٥,٩٨$

$ص_ر$	$ص_ر - \overline{ص}$	$(ص_ر - \overline{ص})^٢$
١١٣٠	١٥٠	٢٢٥٠٠
٧٠٠	٢٨٠−	٧٨٤٠٠
٩٧٠	١٠−	١٠٠
٩٦٠	٢٠−	٤٠٠
١٠٥٠	٧٠	٤٩٠٠
١١٨٠	٢٠٠	٤٠٠٠٠
٨٧٠	١١٠−	١٢١٠٠
المجموع = ١٥٨٤٠٠		

$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (ص_ر - \overline{ص})^٢}{ن}}$

الانحراف المعياري في الإنتاج (ب)

$ع_ب = \sqrt{٢٢٦٢٨,٥٧} = ١٥٠,٤٣$

١٧٩

نلاحظ أن $ع_أ$ يساوي ٣ $ع_ب$ تقريبًا.

لذا في الإنتاج (ب) التشتت عن المتوسط الحسابي كبير وبالتالي المصابيح الكهربائية في الإنتاج (أ) هي الأفضل.

حاول أن تحل

② لتكن (أ)، (ب) مجموعتين من البيانات

(أ): ١٢، ١٠، ٧، ١٥، ٨، ١٩، ٢٠

(ب): ١٤، ١٨، ١٢، ٩، ٨، ١١، ١٩

معلومة: من المتعارف عليه عند الإحصائيين أنه كلما كان الانحراف المعياري صغيرًا كلما كان تشتت قيم البيانات أقرب إلى المتوسط الحسابي، وكلما كان كبيرًا كان تشتت قيم البيانات بعيدًا عن المتوسط الحسابي.

أ أوجد المتوسط الحسابي $\overline{س}$ لقيم (أ) والمتوسط الحسابي $\overline{ص}$ لقيم (ب). ماذا تلاحظ؟

ب أوجد وسيط قيم المجموعة (أ)، ثم وسيط قيم المجموعة (ب). ماذا تلاحظ؟

جـ أوجد الانحراف المعياري $ع_ر$ لقيم المجموعة (أ) والانحراف المعياري $ع_ر$ لقيم المجموعة (ب). أي القيم أقل تشتتًا عن متوسطها الحسابي؟ اشرح إجابتك.

ملاحظة: لحساب التباين لقيم بيانات في جدول تكراري ذو فئات نعتبر $س_ر$ هي مركز الفئة.

مثال (٣)

يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لدرجات ٦٠ طالبًا في امتحان نهاية العام الدراسي حيث النهاية العظمى ١٠٠ درجة.

الفئة (درجات)	٠−	٢٠−	٤٠−	٦٠−	٨٠−
التكرار	٤	٦	١٦	٢٤	١٠

أوجد المتوسط الحسابي $\overline{س}$ والتباين $ع^٢$ والانحراف المعياري $ع_ر$ لقيم هذه البيانات.

١٨٠

«حاول أن تحل»

١ نوجد أولًا المتوسط الحسابي $\overline{س} = ٦$

نكوّن الجدول:

$س_ر$	$س_ر - \overline{س}$	$(س_ر - \overline{س})^٢$
٩	٣	٩
٧	١	١
٨	٢	٤
٦	٠	٠
٤	−٢	٤
٢	−٤	١٦

المجموع = ٣٤

$ع^٢ = \frac{٣٤}{٦} = ٥,\overline{٦}$

الانحراف المعياري $ع \simeq ٢,٣٨$.

٢ (أ): ٧، ٨، ١٠، ١٢، ١٥، ١٩، ٢٠.

(ب): ٨، ٩، ١١، ١٢، ١٤، ١٨، ١٩.

(أ) $\overline{س} = ١٣$ ، $\overline{ص} = ١٣$.

البيانان (أ) و (ب) لهما المتوسط الحسابي نفسه وهو ١٣.

(ب) وسيط قيم (أ) = ١٢

وسيط قيم (ب) = ١٢

ولهما أيضًا الوسيط نفسه وهو ١٢.

(جـ) للمجموعة(أ)

$س_ر$	$س_ر - \overline{س}$	$(س_ر - \overline{س})^٢$
١٢	−١	١
١٠	−٣	٩
٧	−٦	٣٦
١٥	٢	٤
٨	−٥	٢٥
١٩	٦	٣٦
٢٠	٧	٤٩

$ع_١^٢ = \frac{١٦٠}{٧}$

$ع_١ = \sqrt{\frac{١٦٠}{٧}}$

$ع_١ \simeq ٤,٨$

الحل:

المتوسط الحسابي: $\frac{\sum س_ر ت_ر}{\sum ت_ر} = \frac{٣٦٠٠}{٦٠} = ٦٠$

$\therefore \overline{س} = ٦٠$

الفئة	مركز الفئة $س_ر$	التكرار $ت_ر$	$س_ر ت_ر$	$(س_ر - \overline{س})$	$(س_ر - \overline{س})^٢$	$(س_ر - \overline{س})^٢ \times ت_ر$
−٠	١٠	٤	٤٠	−٥٠	٢٥٠٠	١٠٠٠٠
−٢٠	٣٠	٦	١٨٠	−٣٠	٩٠٠	٥٤٠٠
−٤٠	٥٠	١٦	٨٠٠	−١٠	١٠٠	١٦٠٠
−٦٠	٧٠	٢٤	١٦٨٠	١٠	١٠٠	٢٤٠٠
−٨٠	٩٠	١٠	٩٠٠	٣٠	٩٠٠	٩٠٠٠
		المجموع: ٦٠	المجموع: ٣٦٠٠			المجموع: ٢٨٤٠٠

التباين = $\frac{\sum (س_ر - \overline{س})^٢ ت_ر}{\sum ت_ر} = \frac{٢٨٤٠٠}{٦٠} = ٤٧٣\frac{١}{٣}$

التباين = $ع^٢ = ٤٧٣,\overline{٣}$

الانحراف المعياري: $ع = \sqrt{٤٧٣,\overline{٣}} \simeq ٢١,٧٥٦$

حاول أن تحل

٣ يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لأوزان ١٠٠ طالب ثانوي (الوزن بالكيلوجرام).

الفئة	−٦٠	−٦٤	−٦٨	−٧٢	٧٦
التكرار	٥	١٨	٤٢	٢٧	٨

أوجد المتوسط الحسابي $\overline{س}$ والانحراف المعياري $ع$ لهذه الأوزان.

١٨١

(٢) يبيّن الجدول التالي الطاقة الكهربائية المستهلكة بالميغاواط/ ساعة خلال خمسة أيام متتالية في إحدى المدن.

اليوم	١	٢	٣	٤	٥
الطاقة المستهلكة	٤٨,٠	٥٣,٢	٥٢,٣	٤٦,٦	٤٩,٩

أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم هذه البيانات.

(٣) يمثّل الجدول التالي الاستهلاك الأسبوعي من البنزين لعينة مكوّنة من ٥٠ سيارة لأقرب لتر.

الفئة	−٢٠	−٢٥	−٣٠	−٣٥	−٤٠	−٤٥
عدد السيارات	٦	٦	٨	١٠	١٤	٦

أوجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لاستهلاك السيارات من البنزين.

(٤) يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لدرجات ٢٠ طالبًا في أحد الاختبارات حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة.

الفئة	−٤	−٨	−١٢	−١٦
التكرار	٥	٧	٦	٢
مركز الفئة	٦	١٠	١٤	١٨

أوجد الانحراف المعياري لدرجات الطلاب.

١٠٧

للمجموعة (ب)

$ص_ر$	$ص_ر - \overline{ص}$	$(ص_ر - \overline{ص})^2$
١٤	١	١
١٨	٥	٢٥
١٢	−١	١
٩	−٤	١٦
٨	−٥	٢٥
١١	−٢	٤
١٩	٦	٣٦

$ع_٢^٢ = \frac{١٠٨}{٧}$ $\quad ع_٢ = \sqrt{\frac{١٠٨}{٧}}$ $\quad \therefore ع_٢ \simeq ٣,٩$

يعتبر تشتت القيم في المجموعة الثانية أفضل من تشتت القيم في المجموعة الأولى.

٣ $\overline{س} = ٧٠,٦$ كم.

$$ع^٢ = \frac{٥(٦٢ - ٧٠,٦)^٢ + ١٨(٦٦ - ٧٠,٦)^٢ + ٤٢(٧٠ - ٧٠,٦)^٢}{١٠٠}$$

$$+ \frac{٢٧(٧٤ - ٧٠,٦)^٢ + ٨(٧٨ - ٧٠,٦)^٢}{١٠٠} = ١٥,١٦$$

$ع = ٣,٩$

الانحراف المعياري ٣,٩ صغير، وبالتالي أوزان هؤلاء الطلاب متقاربة جدًّا من المتوسط الحسابي ٧٠,٦.

مثال (٤)

إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة قيم من بيانات هو ع = ٦ وأن مجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو ٥٤٠، فما عدد قيم هذه البيانات؟

الحل:

نأخذ القاعدة: $ع^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (ص_ر - \overline{ص})^٢}{ن}$

وبالتعويض: $(٦)^٢ = \frac{٥٤٠}{ن}$

$ن = \frac{٥٤٠}{٣٦} = ١٥$

عدد قيم هذه البيانات هو ١٥.

حاول أن تحل

٤ الانحراف المعياري لمجموعة قيم من بيانات هو ع = ٤، ومجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو ٤٨٠.

فما عدد قيم هذه البيانات؟

١٨٢

في التمرينين (٥–٦)، ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة وظلّل (ب) إذا كانت العبارة خاطئة.

(٥) مجموع انحرافات مجموعة من القيم عن متوسطها الحسابي يساوي صفرًا. (أ) (ب)

(٦) إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة قيم يساوي ٣ وكان مجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي يساوي ١٨٠ فإن عدد القيم هو ٦. (أ) (ب)

في التمرينين (٧–٨)، اختر الإجابة الصحيحة.

(٧) في البيانات: ١٠، ١٣، ٩، ٧، ١٢، ١٥ الانحراف المعياري هو:

(أ) ٧ (ب) ٦

(جـ) $\sqrt{٧}$ (د) ليس أيّ مما سبق

(٨) إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة قيم بيانات يساوي ٤ ومجموع مربعات انحرافات قيم البيانات عن متوسطها الحسابي يساوي ١٩٢ فإن عدد قيم هذه البيانات هو:

(أ) ١٦ (ب) ٤٨

(جـ) ١٢ (د) ليس أيّ مما سبق

المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

(١) أوجد الانحراف المعياري لقيم البيانات التالية، ماذا تستنتج؟

(أ) ٥، ٧، ٦، ٤، ٨، ٩، ٣.

١٠٨

٤ ع = ٤ لذا ع^{٢} = ١٦

القاعدة: ع^{٢} = $\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س})^{٢}}{ن}$

بالتعويض: ١٦ = $\frac{٤٨٠}{ن}$

ومنه ن = $\frac{٤٨٠}{١٦}$ = ٣٠

عدد قيم هذه البيانات هو ٣٠.

(ب) ٣٤، ٤٥، ٣٧، ٤٢، ٣٦، ٤٣، ٤٤، ٣٩.

١٠٩

(٢) يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لاستهلاك الطاقة الكهربائية بالميغاواط/ ساعة طيلة شهر أغسطس في إحدى المدن:

الكمية	٣٣	٣٦	٣٩	٤٠	٤١	٤٢
التكرار	٨	٢	٦	٦	٤	٥

(أ) أوجد المتوسط الحسابي.

(ب) أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم هذه البيانات باستخدام الآلة الحاسبة.

(٣) يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لكمية المياه بالسنتيلتر الموجودة في ١٠٠ عبوة.

سعة العبوة الواحدة المفترضة ١٠٠ سنتيلتر.

الفترة	-٨٦	-٩٠	-٩٤	-٩٨	-١٠٢	-١٠٦
التكرار	٥	١٠	٣٩	٣٢	٩	٥

أوجد المتوسط الحسابي، التباين، الانحراف المعياري لقيم هذه البيانات.

١١٠

١٠ـ٤: طرق العد

١ الأهداف

- يحل مسائل باستخدام مبدأ العد.
- يحل مسائل باستخدام قوانين التباديل والتوافيق.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

مبدأ العد – التباديل – التوافيق.

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اسأل الطلاب الإجابة عما يلي:

- إذا ألقيت قطعة نقود معدنية منتظمة، فما هي النواتج الممكنة؟
- إذا ألقيت حجر نرد مرقم من ١ إلى ٦، فما هي النواتج الممكنة؟
- إذا ألقيت قطعة نقود معدنية منتظمة ثم حجر نرد مرقم من ١ إلى ٦، فما هي النواتج الممكنة؟
- بكم طريقة يمكنك تنظيم لونين مختلفين من أربعة ألوان: أصفر (ص)، أخضر (خ)، أسود (س)، أزرق (ز)؟

٥ التدريس

يساعد مبدأ العد على حل مسائل كثيرة تواجه الطلاب عند دراسة احتمال حدث معين. لذا من المهم جدًّا متابعة عملهم في فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» لمعرفة مدى قدرتهم على إيجاد فضاء العينة وترتيبها في قائمة منظمة.

يبيّن المثال (١) الطريقة المتبعة والمطولة في تنظيم قائمة لإيجاد فضاء العينة أو عدد النواتج الممكنة، وما يتطلبه ذلك من جهد وانتباه وتركيز. لذا كان من الضروري التوجه إلى مبدأ العد، الذي يوفر الوقت ويعطي النتيجة المتوخاة بشكل سريع.

أخبر الطلاب أن مخطط الشجرة البيانية يصبح دون فائدة إذا كانت العينة والحدث يتضمنان عناصر كبيرة العدد أيضًا.

أما في المثال (٢)، فقد استخدم مخطط الشجرة البيانية.

يعطي المثال (٣) فكرة واضحة عن كيفية استخدام مبدأ العد.

١٠–٤

طرق العد
Methods of Counting

دعنا نفكر ونتناقش

يقوم خالد برمي حجري نرد معًا مرة واحدة. الأول لونه أحمر والثاني لونه أخضر.
انظر الشكل أدناه.

١ مم يتألف كل ناتج؟
ب اكتب كل عناصر فضاء العينة في قائمة.
ج ما عدد النواتج الممكنة؟
د ما النواتج التي تشكل الحدث «رمي حجري نرد معًا بحيث يكون مجموع العددين الظاهرين يساوي ٩»؟

سوف تتعلم
- حل مسائل باستخدام مبدأ العد
- حل مسائل باستخدام قوانين التباديل أو التوافيق

كلنا نعرف كيف نعد، ولكننا سنتعرف في هذا الدرس على طرق للعد أكثر تطورًا.
مبدأ العد هو في صلب الجبر المتقطع، وسنستفيد منه عند دراسة الاحتمال.
العديد من المسائل البسيطة أو المعقدة تتطلب تحديد عدد عناصر مجموعة أو الطرق التي يمكن بها ترتيب أشياء أو تجميعها.

مبدأ العد Counting Principle

يمكن أن نحل بعض مسائل العد عن طريق ترتيب المجموعة التي سوف نقوم بعدها. وسوف نبدأ بمثالين يتبعان هذه الطريقة.

مثال (١) العد عن طريق القوائم

ما عدد الرموز ثلاثية الحروف التي يمكن تكوينها من بين الحروف: أ، ب، جـ، د من دون تكرار لأي حرف منها؟

الحل:
اكتب قائمة بالإمكانيات بشكل مرتب (متوال بحسب الترتيب):

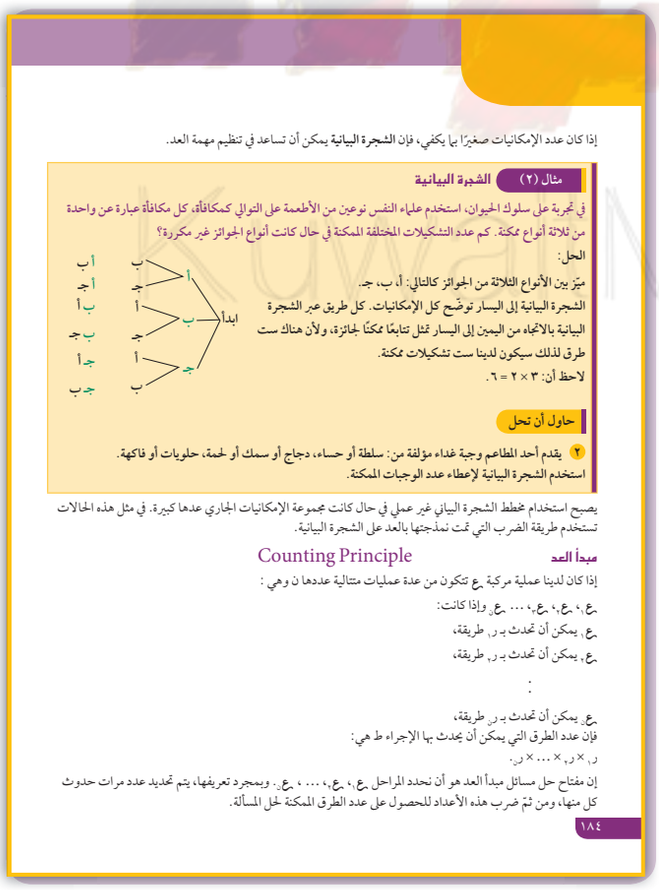
أ ب جـ	أ ب د	أ جـ ب	أ جـ د	أ د ب	أ د جـ	(أ أولًا)
ب أ جـ	ب أ د	ب جـ أ	ب جـ د	ب د أ	ب د جـ	(ب أولًا)
جـ أ ب	جـ أ د	جـ ب أ	جـ ب د	جـ د أ	جـ د ب	(جـ أولًا)
د أ ب	د أ جـ	د ب أ	د ب جـ	د جـ أ	د جـ ب	(د أولًا)

يوجد ٤ × ٦ = ٢٤ إمكانية. يمكن كتابة ٢٤ رمزًا.

حاول أن تحل

١ ما عدد الرموز التي يمكن تكوينها من حروف «نواف» من دون تكرار لأي حرف منها شرط ألّا يبدأ الرمز بـ «أ»؟

١٨٣



إذا كان عدد الإمكانيات صغيرًا بما يكفي، فإن الشجرة البيانية يمكن أن تساعد في تنظيم مهمة العد.

مثال (٢) الشجرة البيانية

في تجربة على سلوك الحيوان، استخدم علماء النفس نوعين من الأطعمة على التوالي كمكافأة، كل مكافأة عبارة عن واحدة من ثلاثة أنواع ممكنة. كم عدد التشكيلات المختلفة الممكنة في حال كانت أنواع الجوائز غير مكررة؟

الحل:
ميّز بين الأنواع الثلاثة من الجوائز كالتالي: أ، ب، جـ.
الشجرة البيانية إلى اليسار توضّح كل الإمكانيات. كل طريق عبر الشجرة البيانية بالاتجاه من اليمين إلى اليسار تمثل تتابعًا ممكنًا لجائزة، ولأن هناك ست طرق لذلك سيكون لدينا ست تشكيلات ممكنة.
لاحظ أن: ٣ × ٢ = ٦.

ابدأ
أ: ب، جـ
ب: أ، جـ
جـ: أ، ب
أ ب، أ جـ، ب أ، ب جـ، جـ أ، جـ ب

حاول أن تحل

٢ يقدم أحد المطاعم وجبة غداء مؤلفة من: سلطة أو حساء، دجاج أو سمك أو لحمة، حلويات أو فاكهة.
استخدم الشجرة البيانية لإعطاء عدد الوجبات الممكنة.

يصبح استخدام مخطط الشجرة البياني غير عملي في حال كانت مجموعة الإمكانيات الجاري عدها كبيرة. في مثل هذه الحالات تستخدم طريقة الضرب التي تمت نمذجتها بالعد على الشجرة البيانية.

مبدأ العد Counting Principle

إذا كان لدينا عملية مركبة ع تتكون من عدة عمليات متتالية عددها ن وهي:
ع١، ع٢، ع٣، ... عن وإذا كانت:
ع١ يمكن أن تحدث بـ ر١ طريقة،
ع٢ يمكن أن تحدث بـ ر٢ طريقة،
:
عن يمكن أن تحدث بـ رن طريقة،
فإن عدد الطرق التي يمكن أن يحدث بها الإجراء ط هي:
ر١ × ر٢ × ... × رن.

إن مفتاح حل مسائل مبدأ العد هو أن نحدد المراحل ع١، ع٢، ... ، عن. وبمجرد تعريفها، يتم تحديد عدد مرات حدوث كل منها، ومن ثمّ ضرب هذه الأعداد للحصول على عدد الطرق الممكنة لحل المسألة.

١٨٤

اسأل الطلاب ما إذا كان ممكنًا رسم مخطط شجرة بيانية أو تنظيم قائمة، لإيجاد نواتج لحدث يتكون من حرفين من بين ٢٨ حرفًا يتبعها ثلاثة أرقام من بين ١٠ أرقام. هنا تكمن أهمية فهم مبدأ العد وكيفية التعامل معه. يعالج المثال (٤) حالة حياتية مهمة في مضمار الرياضة. شجع الطلاب على رسم مخطط مشابه مع إعطائهم مثالًا آخر لتتأكد من فهمهم مبدأ العد.

ركز على فهم التباديل أولًا، ثم كيفية استخدام القاعدة حسابيًّا، وبعد ذلك إيجاد النتائج على الآلة الحاسبة.

ابدأ بمقدمة بسيطة تبيّن أمام الطلاب الفرق بين التباديل والتوافيق. أكّد لهم أن موقع العنصر وترتيبه في العملية الأولى مهم، أما في العملية الثانية فلا يهم موقع العنصر أو ترتيبه.

اربط ذلك بما عرفوه سابقًا، على سبيل المثال، الزوج المرتب (س، ص) الذي يحدد موقع نقطة في المستوى الإحداثي (٢، ٥) ≠ (٥، ٢)، ولكن المجموعة المكونة من عنصرين لا تتغير بتغير موقع عنصريها {٢، ٥} = {٥، ٢}.

ويمكن أيضًا تعميم الفكرة إلى ثلاثة عناصر أو أكثر.

المهم توجيه الطلاب إلى قراءة النصوص جيّدًا لفهم ما إذا كان المطلوب هو إيجاد التباديل [اختيار: رئيس، نائب رئيس، أمين سر، أمين صندوق، كما في المثال (٥)] أو إيجاد التوافيق [ما عدد اللجان المؤلفة من ثلاثة أشخاص نختارها من بين ٤ أشخاص، كما في المثال (٨)].

ساعدهم على فهم التوافيق وإدراك علاقتها بالتباديل في القاعدة $^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{ر!}$.

أرشدهم إلى إيجاد الإجابة حسابيًّا أولًا عن طريق التبسيط، ثم باستخدام الآلة الحاسبة.

ناقش معهم أنواع النواتج في المثال (١١) لتتأكد من أنهم قادرون على التمييز في النصوص لاستخدام التباديل أو التوافيق.

٦ الربط

جميع الأمثلة في هذا الدرس هي من واقع الحياة، يواجهها الطالب في مواقف متعددة.

مثال (٣) استخدام مبدأ العد

تبدأ لوحات السيارات في إحدى المدن بحرفين من الحروف الأبجدية يتبعها ثلاثة أرقام. كم عدد اللوحات التي يمكن الحصول عليها؟ افترض أنه لا يوجد تكرار لأي من الحروف أو الأرقام في أي من لوحات التراخيص.

الحل:

ع١: ختم اللوحة

ع٢: ختم الحرف الأول

ع٣: ختم الحرف الثاني

ع٤: ختم الرقم الأول

ج ك ٥٦

وهكذا لدينا:

		ع١	ع٢	ع٣	ع٤
العمليات	:		الأحرف	الأرقام	
عدد الطرق لاستكمال كل عملية	:	٢٨	٢٧	١٠	٩	٨

عدد طرق ختم اللوحة = ٢٨ × ٢٧ × ١٠ × ٩ × ٨

= ٥٤٤ ٣٢٠ طريقة

يمكن الحصول على ٥٤٤ ٣٢٠ لوحة في هذه المدينة.

حاول أن تحل

٣ استخدم معطيات المثال (٣)، ما هو عدد اللوحات التي يمكن الحصول عليها إذا كان رقم الآحاد فردي؟

مثال (٤) استخدام مبدأ العد

يوجد ثمانية متسابقين في سباق ١٠٠ م جري. ما هو عدد النتائج الممكنة لهذا السباق؟ افترض عدم وجود تعادل بين أي متسابقين. علمًا بأن المتسابقين وصل كلًّا منهم إلى خط النهاية.

الحل:

ع١: قائمة العدائين بترتيب إنهاء السباق.

ع٢: المتسابق الذي ينهي السباق أولًا.

ع٣: المتسابق الذي ترتيبه الثاني في إنهاء السباق.

١٨٥

وهكذا لدينا:

		ع١	ع٢	ع٣	ع٤	ع٥	ع٦	ع٧	ع٨
العمليات	:								
عدد الطرق لاستكمال كل عملية	:	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١

عدد الطرق لإجراء ع = ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

= ٨! = ٤٠ ٣٢٠

يوجد ٤٠ ٣٢٠ ناتجًا ممكنًا لهذا السباق.

تذكر:

مضروب ن أو

ن! هو: ن × (ن − ١) × ... × ٣ × ٢ × ١

فمثلًا: ٥! = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

٠! = ١ تُقرأ مضروب صفر = ١

حاول أن تحل

٤ اشترك ٢٠ جملًا في سباق للهجن ووصلت جميعها إلى خط النهاية في أوقات مختلفة (أي أنه لا يوجد أي تعادل). ما هو عدد النتائج الممكنة لهذا السباق؟

التباديل Permutations

في المثالين السابقين، كان الترتيب مهمًّا ومعتمدًا. مثل هذا الترتيب يسمى **بالتباديل**. وعمومًا **عدد تباديل ن من الأشياء هو ن!** (**مضروب ن**) كما هو مبيّن في المثال (٤) وفي حالة العديد من المواقف التي تتعامل مع تباديل الأشياء تهتم فقط **بمجموعة جزئية** من الأشياء المُتضمنة. المثال (٥) يختبر موقفًا مشابهًا.

مثال (٥) إيجاد عدد التباديل

افترض أن ٣١ عضوًا من جمعية الرياضيات في مدرستك يريدون اختيار أربعة أشخاص لأربعة مناصب: رئيس، نائب رئيس، أمين السر، أمين الصندوق. حدّد كم طريقة يمكن بها الاختيار لهذه المناصب.

الحل:

اختيار الرئيس: ٣١ طريقة

اختيار نائب الرئيس: ٣٠ طريقة

اختيار أمين السر: ٢٩ طريقة

اختيار أمين الصندوق: ٢٨ طريقة

عدد الطرق التي يمكن بها اختيار الأشخاص للمناصب الأربعة هو: ٣١ × ٣٠ × ٢٩ × ٢٨ = ٧٥٥ ١٦٠

حاول أن تحل

٥ في إحدى الجمعيات الخيرية يوجد ٢٠ عضوًا يشكلون مجلس الأمناء. يريدون اختيار رئيسًا، أمينًا للسر، أمينًا للصندوق. حدّد كم طريقة يمكن بها الاختيار لهذه المناصب.

١٨٦

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

لا يميز الطلاب في مبدأ العد بين التباديل والتوافيق.

أعط أمثلة بسيطة واطلب إليهم من خلالها أن يحاولوا التمييز بينهما.

٨ التقييم

إن متابعة الطلاب في الإجابة عن فقرات «حاول أن تحل» توضح للمعلم قدرة كل طالب على إيجاد التباديل أو التوافيق وتطبيقاتها.

اختبار سريع

١ أخذ ٥ أشخاص المصعد من الطابق الأرضي في مبنى من ٨ طوابق. بكم طريقة يمكن أن ينزل كل من الأشخاص الخمسة من المصعد في الطوابق على أن ينزل كل منهم في طابق مختلف عن الآخرين.

$^{٨}ل_{٥}$ = ٦٧٢٠

٢ ما عدد الكلمات التي يمكن تأليفها باستخدام ثلاثة أحرف مختلفة دون الاهتمام بالمعنى من أحرف كلمة سراب؟ $^{٤}ل_{٣}$ = ٢٤

٩ إجابات وحلول

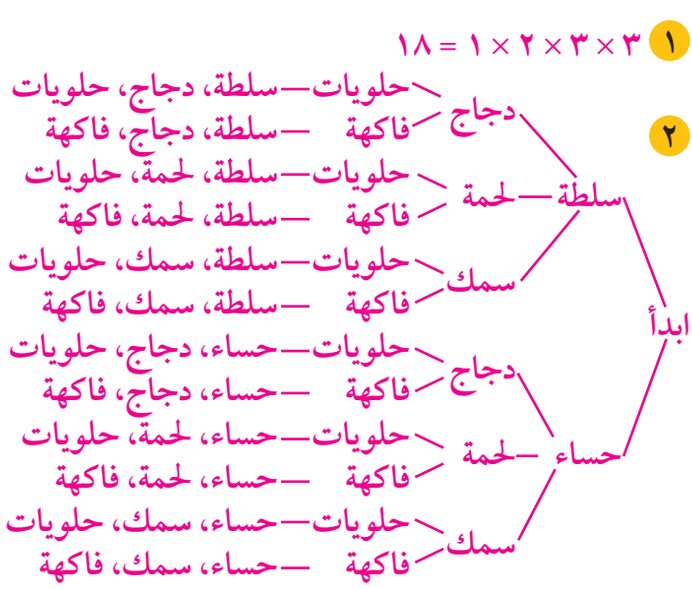
«دعنا نفكر ونتناقش»

(أ)، (ب)، (جـ)، (د) تحقق من إجابات الطلاب.

«حاول أن تحل»

١ ٣ × ٢ × ١ = ١٨

٢



عدد الوجبات الممكنة = ٢ × ٣ × ٢ = ١٢ وجبة ممكنة.

قانون التباديل Law of Permutations

عدد تباديل ن من العناصر المختلفة مأخوذة منها ر في كل مرة هو:

$^{ن}ل_{ر}$ = ن(ن − ١)(ن − ٢) ... (ن − ر + ١)، ر، ن ∈ صحيح، ر ≤ ن

عندما ر = ٠ يعرّف $^{ن}ل_{٠}$ = ١

لاحظ: $^{ن}ل_{ر}$ = ن × (ن − ١) × (ن − ٢) × ... × (ن − ر + ١)

= ن(ن − ١) × (ن − ٢) × ... × (ن − ر + ١) × $\frac{(ن − ر) × ... × ٣ × ٢ × ١}{(ن − ر) × ... × ٣ × ٢ × ١}$ (ر عامل)

= $\frac{ن!}{(ن − ر)!}$

مساعدة: يمكن استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد عدد التباديل، اضغط على nPr.

قانون

$^{ن}ل_{ر}$ = $\frac{ن!}{(ن − ر)!}$ حيث ر، ن ∈ صحيح، ر ≤ ن، $^{ن}ل_{٠}$ = ١

مثال (٦)

أوجد قيمة كل تبديل بدون استخدام الآلة الحاسبة بصورة مباشرة.

أ $^{٦}ل_{٤}$ ب $^{١١}ل_{٣}$ جـ $^{ن}ل_{٣}$

الحل:

أ الطريقة الأولى:

$^{٦}ل_{٤}$ = $\frac{٦!}{(٦ − ٤)!}$ = $\frac{٦!}{٢!}$

= $\frac{٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١}{٢ × ١}$ = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ = ٣٦٠

الطريقة الثانية:

$^{٦}ل_{٤}$ = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ = ٣٦٠ (نبدأ بـ ٦، ٤ أعداد)

ب $^{١١}ل_{٣}$ = $\frac{١١!}{(١١ − ٣)!}$ = $\frac{١١ × ١٠ × ٩ × ٨!}{٨!}$ = ١١ × ١٠ × ٩ = ٩٩٠

جـ $^{ن}ل_{٣}$ = $\frac{ن!}{(ن − ٣)!}$ = $\frac{ن × (ن − ١) × (ن − ٢) × (ن − ٣)!}{(ن − ٣)!}$ = ن(ن − ١)(ن − ٢)

١٨٧

حاول أن تحل

٦ أوجد قيمة كل تبديل بدون استخدام الآلة الحاسبة بصورة مباشرة.

أ $^{٥}ل_{٣}$ ب $^{١١}ل_{٣}$ جـ $^{ن}ل_{٣}$

طرق حساب $^{٦}ل_{٤}$

6 shift nPr 4 = 360

6! ÷ (6 − 4)! 360

6 × 5 × 4 × 3 360

مثال (٧)

ما عدد الكلمات التي يمكن أن تتشكل من خمسة حروف مختلفة من الأبجدية العربية وذلك في حال عدم تكرار أي منها؟

الحل:

المطلوب في المسألة إيجاد عدد التباديل لـ ٥ حروف من ٢٨ حرفًا في الوقت نفسه.

$^{٢٨}ل_{٥}$ = $\frac{٢٨!}{(٢٨ − ٥)!}$ = $\frac{٢٨!}{٢٣!}$ = ٢٨ × ٢٧ × ٢٦ × ٢٥ × ٢٤

= ١١٧٩٣٦٠٠

يوجد ١١٧٩٣٦٠٠ كلمة مكونة من خمسة حروف مختلفة من الأبجدية العربية.

مساعدة: ترتيب الحروف مهم في كتابة الكلمات. فكلمة كتاب تختلف عن كلمة كاتب.

حاول أن تحل

٧ ما عدد الأعداد التي يمكن أن تتشكل من ٤ أرقام من أرقام النظام العشري بدون الصفر وذلك في حال عدم تكرار أي رقم؟

التوافيق Combinations

عندما تريد إيجاد عدد المجموعات الجزئية والمكون كل منها من ر عنصر، والتي يمكن اختيارها من مجموعة مكونة من ن عنصر (ر ≤ ن) دون الاعتماد على الترتيب فنحن نحسب التوافيق.

مثال (٨)

ما عدد اللجان المكونة من ثلاثة أشخاص، والتي يمكن تكوينها من مجموعة من أربعة أشخاص؟

الحل:

سَمِّ الأشخاص الأربعة أ، ب، جـ، د ثم قم بإعداد قائمة كتلك الموجودة في المثال (١) وذلك كالتالي:

(لاحظ أن هناك $^{٤}ل_{٣}$ = ٢٤ ترتيبًا ممكنًا لاختيار ثلاثة منها).

١٨٨

٣ عدد الطرق الممكنة = ٢٨ × ٢٧ × ٥ × ٩ × ٨ =
٢٧٢ ١٦٠

٤ أوجد ٢٠! = ٢ ٤٣٢ ٩٠٢ ٠٠٨ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ أو
٢,٤٣٢ ٩٠٢ ٠٠٨ × ١٠^١٨

٥ أوجد: $\frac{٢٠!}{(٢٠ - ٣)!} = \frac{٢٠!}{١٧!} = ٢٠ \times ١٩ \times ١٨$
= ٦ ٨٤٠ طريقة

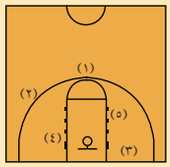
٦ (أ) $ل^{٥}_{٣} = \frac{٥!}{(٥ - ٣)!} = ٥ \times ٤ \times ٣ = ٦٠$

(ب) $ل^{١٠}_{٤} = \frac{١٠!}{(١٠ - ٤)!} = ١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ = ٥٠٤٠$

(جـ) $ل^{ن}_{٤} = \frac{ن!}{(ن - ٤)!} = ن(ن - ١)(ن - ٢)(ن - ٣)$

مثال (٩)

إذا كان فريق كرة سلة يتكوّن من ١٢ لاعبًا.
فما عدد الفرق المختلفة التي يمكن تكوينها من خمسة لاعبين من بين لاعبي هذا الفريق (يمكن لأي لاعب اللعب في كل المراكز)؟



(١) لاعب الهجوم الخلفي
(٢) المدافع مسدد الهدف
(٣) لاعب الهجوم صغير الجسم
(٤) لاعب الهجوم قوي الجسم
(٥) لاعب الوسط

الحل:
يجب أن نوجد $\binom{١٢}{٥}$ وهي عدد الفرق المختلفة المكونة من ٥ لاعبين
والذين يمكن اختيارهم من ١٢ لاعبًا.

$\binom{١٢}{٥} = \frac{١٢!}{(١٢ - ٥)!٥!} = \frac{١٢ \times ١١ \times ١٠ \times ٩ \times ٨}{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ٧٩٢$ عند استخدام الآلة الحاسبة 12 nCr shift 5 = 792

يوجد ٧٩٢ فريقًا مختلفًا، كل فريق مكون من ٥ لاعبين وتم اختيارهم من بين ١٢ لاعبًا.

حاول أن تحل

٩ إذا كان فريق كرة قدم يتكوّن من ٢٠ لاعبًا. فما عدد الفرق المختلفة التي يمكن تكوينها من ١١ لاعبًا من بين لاعبي هذا الفريق؟ (يمكن لأي لاعب اللعب في أي مركز)

تستطيع العديد من الآلات الحاسبة أن تحسب $^{١٢}ق_{٧}$ مباشرة من دون ضرورة لإيضاح الخطوات الوسطية. وعلى الرغم من ذلك فنحن نوضحها هنا لأنها قد تساعدك في بعض الأحيان التي تكون فيها الأعداد كبيرة بحيث يصعب أن تعطي إجابة دون استخدام الآلة الحاسبة. وفي حالة الأعداد الكبيرة جدًا قد لا تساعدك بعض الآلات الحاسبة مثل $^{١٠٠٠}ق_{٠٠٠}$. فطبق القانون.

تستخدم الخطوات التالية لإيجاد التوافيق بواسطة الآلة الحاسبة:
ن nCr ر =

مثال (١٠)

من أجل اختيار لوائح المرشحين للانتخابات النيابية، يجب اختيار ١٠ مرشحين من بين ٥١ مرشحًا.
ما عدد اللوائح المختلفة التي يمكن تكوينها؟

الحل:
إن الترتيب أثناء اختيار اللائحة غير مطلوب، إذًا هذه مسألة تتعلق بالتوافيق لإيجاد $^{٥١}ق_{١٠}$.

$^{٥١}ق_{١٠} = \frac{٥١!}{١٠! \times ٤١!} = ١٢\,٧٧٧\,٧١١\,٨٧٠$ عند استخدام الآلة الحاسبة 51 nCr 10 = $1,2777711870.10^{10}$

عدد اللوائح المختلفة الممكنة هو ١٢ ٧٧٧ ٧١١ ٨٧٠

أ ب جـ	أ ب د	أ جـ ب	أ جـ د	أ د ب	أ د جـ
ب أ جـ	ب أ د	ب جـ أ	ب جـ د	ب د أ	ب د جـ
جـ أ ب	جـ أ د	جـ ب أ	جـ ب د	جـ د أ	جـ د ب
د أ ب	د أ جـ	د ب أ	د ب جـ	د جـ أ	د جـ ب

لاحظ أن لجنة معينة مكونة من ثلاثة أشخاص أ، ب، جـ تظهر ٣! = ٦ مرات في القائمة.

أ ب جـ أ جـ ب ب أ جـ ب جـ أ جـ أ ب جـ ب أ

تشكل هذه الترتيبات الستة مجموعة واحدة لذلك فإن إجمالي أعداد اللجان مساو لـ $^{٤}ل_{٣}$ ترتيبًا ممكنًا مقسمًا على ٣! ترتيبًا مختلفًا لكل لجنة.

عدد اللجان = $\frac{^{٤}ل_{٣}}{٣!} = \frac{\frac{٤!}{(٤ - ٣)!}}{٣!} = \frac{٤!}{(٤ - ٣)!\,٣!} = \frac{٤!}{١!\,٣!} = ٤$

حاول أن تحل

٨ ما عدد اللجان المكونة من شخصين والتي يمكن تكوينها من مجموعة من أربعة أشخاص؟

وبصفة عامة، عدد التوافيق المكوّن كل منها من ر عنصر والمختارة من بين مجموعة مكونة من ن عنصر يمكن إيجادها كالآتي:

عدد التوافيق = $\frac{^{ن}ل_{ر}}{ر!} = \frac{ن!}{(ن - ر)!\,ر!}$

تعريف: قانون التوافيق

إذا كان ن، ر عددان صحيحان موجبان حيث ن ≥ ر، فإن:
عدد التوافيق المكونة كل منها من ر من الأشياء والمختارة من بين ن من الأشياء هو:

$\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!\,ر!}$

ملاحظة:
يستخدم الرمز $^{ن}ق_{ر}$ للتعبير عن عدد التوافيق.

ملاحظات:
(١) عندما ر = ٠ يُعرَّف $\binom{ن}{٠} = ١$
(٢) $\binom{ن}{ن} = ١$

تمرَّنْ ١٠-٤

التاريخُ الهجريُّ:..... التاريخُ الميلاديُّ:.....

طرق العد
Methods of Counting

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمارين (١-٣)، اكتب قائمة بكل الإمكانيات أو ارسم شجرة بيانية للإجابة عن الأسئلة التالية:

(١) **كلمات مكونة من ثلاثة حروف:** ما عدد الكلمات المختلفة التي تستطيع تكوينها من بين ثلاثة حروف: ع، ل، م دون تكرارها (دون الاهتمام بالمعنى)؟
_____

(٢) **الطرق الممكنة:** توجد ثلاثة طرق ممكنة تصل بين القرية أ والقرية ب، وتوجد أربعة طرق ممكنة تصل بين القرية ب والقرية جـ. كم عدد الطرق المختلفة من القرية أ إلى القرية جـ مرورًا بالقرية ب؟
_____

(٣) **الرئيس ونائب الرئيس:** يوجد ثلاثة مرشحين لمنصب الرئيس وأربعة مرشحين لمنصب نائب الرئيس. كم عدد الأزواج التي يمكن أن تكوّن من رئيس ونائب رئيس؟
_____

في التمارين (٤-٦)، استخدم مبدأ العد الأساسي.

(٤) **أرقام الهاتف:** كم عدد أرقام الهاتف التي يمكن أن تكونها من سبعة أرقام علمًا بأنه لا يمكن أن يبدأ الرقم من اليسار بـ ٠ أو ١، لماذا؟
_____

٧ $^{٩}ل_{٤} = \frac{!٩}{!(٩ - ٤)} = ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ = ٣٠٢٤$

٨ أوجد: $^{٤}ق_{٢} = \frac{!٤}{!٢ !(٤ - ٢)} = \frac{٤ \times ٣}{٢} = ٦$

٩ أوجد: $^{٢٠}ق_{١١} = \frac{!٢٠}{!١١ !(٢٠ - ١١)}$

$= ١٦٧ ٩٦٠$ وهو عدد الفرق.

١٠ أوجد: $^{٦٠}ق_{١٥} = \frac{!٦٠}{!١٥ !(٦٠ - ١٥)}$

$= ٥,٣١٩ ٤٠٨ ٩١٩ \times ١٠^{١٣}$

١١ (أ) توفيقًا.

(ب) تبديلًا.

(٥) **لوحات الترخيص**: كم عدد لوحات الترخيص التي يمكن أن تكونها من رقمين يتبعهما حرفان ثم ثلاثة أرقام بدون أن تتكرر أي حروف أو أرقام؟

(٦) **رمي حجر نرد**: عند رمي حجري نرد أحدهما أحمر والثاني أخضر معًا وملاحظة الوجه العلوي لكل منهما. كم عدد النواتج الممكنة؟

في التمارين (٧-١٠)، أوجد قيمة كلّ مما يلي:

(٧) $^{٨}ل_{٤}$

(٨) $^{١٢}ل_{٧}$

(٩) $^{٤}ق_{٤}$

(١٠) $^{٤٨}ق_{٤٠}$

في التمارين (١١-١٣)، حل المسائل التالية:

(١١) **تكوين اللجان**: سوف يتم انتخاب لجنة مكونة من ٣ سيدات من بين ٢٥ سيدة. كم عدد اللجان المختلفة التي يمكن انتخابها؟

(١٢) **شراء أقراص حاسوب مدمجة**: لدى جيهان نقود تكفي لشراء ثلاثة أقراص حاسوب مدمجة فقط من بين ٤٨ قرصًا. كم عدد مجموعة أقراص الحاسوب التي يمكن شراؤها؟

(١٣) يجري مدير شؤون الموظفين مقابلات شخصية مع ثمانية أشخاص مرشحين لثلاث وظائف شاغرة. كم عدد المجموعات المكونة من ثلاثة أشخاص التي يمكن توظيفها؟

١١٢

حاول أن تحل

١٠ أثناء الإعداد لزيارة المتحف الوطني، أراد منظمو الزيارة إعداد لوائح للطلاب لاستخدام حافلات تتسع كل منها ١٥ طالبًا. علمًا بأن عدد الطلاب هو ٦٠ طالبًا، فما عدد اللوائح المختلفة التي يمكن إعدادها لهذه الزيارة؟

مثال (١١)

في كل مما يلي حدّد ما إذا كان المثال يبيّن تبديلًا أو توفيقًا واحسب عدد الطرق في كل حالة.

أ اختيار رئيس، نائب رئيس، أمين سر من بين ٢٥ عضوًا في نادي القراءة.

ب اختيار ٥ حبات بطاطا من كيس يحتوي على ١٢ حبة لإعداد وجبة غذائية.

ج وضع معلم مخططًا يبيّن مقاعد ٢٢ طالبًا في غرفة بها ٢٥ مقعدًا.

د اختيار ٤ أبيات من قصيدة شعرية مكونة من ١١ بيتًا لكتابتها وتعليقها في غرفة الفصل.

الحل:

أ الترتيب مهم في الاختيار ∴ تباديل. $^{٢٥}ل_{٣} = ١٣ ٨٠٠$

ب الترتيب غير مهم في الاختيار ∴ توافيق. $^{١٢}ق_{٥} = ٧٩٢$

ج الترتيب مهم ∴ تباديل. $^{٢٥}ل_{٢٢} \simeq ٢,٥٨٥٢ \times ١٠^{٢٤}$

د الترتيب غير مهم ∴ توافيق. $^{١١}ق_{٤} = ٣٣٠$

حاول أن تحل

١١ في ما يلي، حدّد ما إذا كان المثال يبيّن تبديلًا أو توفيقًا.

أ اختيار ٣ طلاب من الصف العاشر للمشاركة في مسابقة تلاوة القرآن.

ب مراكز المشاركين الثلاثة في مسابقة تلاوة القرآن.

١٩١

المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمارين (١-٣)، اكتب قائمة بكل الإمكانيات أو ارسم شجرة بيانية للإجابة عن الأسئلة التالية:

(١) **كلمات مكوّنة من ثلاثة حروف**: ما عدد الكلمات المختلفة التي تستطيع تكوينها من ثلاثة حروف دون تكرارها من بين ٤ حروف ل، ع، ب، هـ؟

(٢) **الطرق الممكنة**: توجد ثلاثة طرق ممكنة تصل بين القرية أ والقرية ب، وتوجد أربعة طرق ممكنة تصل بين القرية ب والقرية جـ.

كم عدد الطرق المختلفة من القرية أ إلى القرية جـ والرجوع إلى القرية أ مرورًا بالقرية ب في كل اتجاه؟

(٣) **تذاكر الطيران**: عندما تطلب تذكرة طيران يمكنك أن تحجز في الدرجة الأولى أو درجة رجال الأعمال أو الدرجة السياحية. يمكنك أيضًا أن تختار مكانك إلى جانب نافذة الطائرة أو في الممر أو في الكرسي الأوسط، إلا في حالة عدم وجود كرسي أوسط كما هو الحال في الدرجة الأولى حيث يوجد كرسيان فقط.

كم عدد الطرق المختلفة التي يمكن أن تحجز بها مكانك على متن الطائرة؟

١١٣

١٠ـ٥: الاحتمال المشروط

١ الأهداف

- يتعرف الحدث المستقل.
- يتعرف الحدث التابع.
- يوجد الاحتمال المشروط.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

حدث مستقل – حدث تابع – جدول ذو مدخلين – مخطط ڤن – احتمال مشروط – التقاطع – الاتحاد – المتمم – حدثان متنافيان.

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اسأل الطلاب:

- بكم طريقة يمكن اختيار: رئيس، أمين سر، أمين صندوق من بين ٧ أشخاص؟
- بكم طريقة يمكن اختيار مجموعة مؤلفة من ثلاثة أشخاص لتمثل مجموعة من ٧ أشخاص؟
- ما قيمة $^{٧}ل_{٤}$ حسابيًّا؟
- ما قيمة $^{٩}ق_{٥}$ حسابيًّا؟
- أوجد $^{١٧}ل_{٧}$ ، $^{٢٠}ق_{٩}$ باستخدام الآلة الحاسبة.

١٠ـ٥

الاحتمال المشروط
Conditional Probability

دعنا نفكر ونتناقش

تتألف لعبة الدومينو من بلاطات على شكل متوازي مستطيلات، دُوّن على أحد أوجهها نقاط عددها يتراوح من الصفر (فراغ) إلى ٦.

١ أ كوّن جدولًا يبيّن الأزواج الممكنة. ما عددها؟

ب ما عدد النواتج المؤلفة من رقمين متساويين؟

٢ تم سحب بلاطة رقماها غير متساويين، ما احتمال أن يكون مجموع الرقمين يساوي ٥؟

٣ سحبت بلاطة رقماها متساويان. ما احتمال أن يكون مجموع الرقمين أصغر من ٥؟

سوف تتعلم

- الحدث المستقل
- الحدث التابع
- الاحتمال المشروط

في كل تجربة عشوائية، نهتم أولًا بمعرفة مجموعة النواتج الممكنة والتي تسمى **فضاء العينة (ف)**. كل حدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة.

إذا كانت جميع نواتج التجربة لها فرصة الظهور نفسها فإن احتمال الحدث أ هو:

$$ل(الحدث\ أ) = \frac{عدد\ نواتج\ الحدث\ أ}{عدد\ النواتج\ في\ فضاء\ العينة}$$

أي أن: $ل(أ) = \frac{ن(أ)}{ن(ف)}$

يكتب الاحتمال بصورة كسر عشري أو كسر أو نسبة أو نسبة مئوية.

مثال (١)

في لعبة «رمي حجري نرد منتظمين ومتمايزين» والتجربة هي ملاحظة الوجه العلوي لكل من الحجرين

١ مِمّ يتألف كل ناتج؟ اكتب فضاء العينة. وما عدد النواتج الممكنة؟

ب مثل فضاء العينة بيانيًّا.

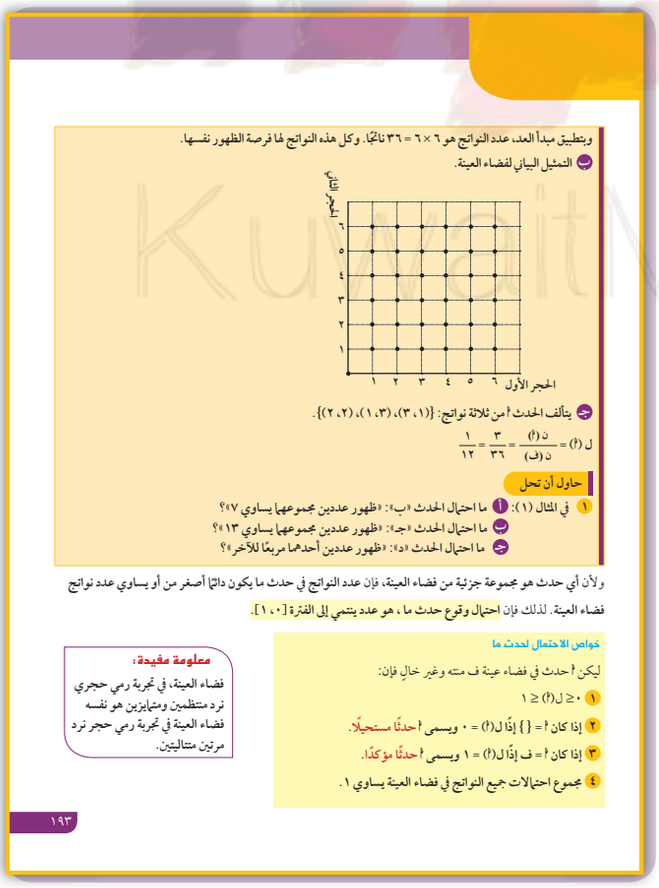
ج ما احتمال الحدث أ: «ظهور عددين مجموعهما يساوي ٤»؟

الحل:

١ يتألف كل ناتج من زوج مرتب (م، ن) حيث ١ ≤ م ≤ ٦، ١ ≤ ن ≤ ٦. م، ن ∈ صـ.

ف = {(١، ١)، (١، ٢)، ... ، (١، ٦)،
(٢، ١)، (٢، ٢)، ... ، (٢، ٦)،
⋮
(٦، ١)، (٦، ٢)، ... ، (٦، ٦)}

١٩٢



وبتطبيق مبدأ العد، عدد النواتج هو ٦ × ٦ = ٣٦ ناتجًا. وكل هذه النواتج لها فرصة الظهور نفسها.

ب التمثيل البياني لفضاء العينة.

ج يتألف الحدث أ من ثلاثة نواتج: {(١، ٣)، (٣، ١)، (٢، ٢)}.

$$ل(أ) = \frac{ن(أ)}{ن(ف)} = \frac{٣}{٣٦} = \frac{١}{١٢}$$

حاول أن تحل

١ في المثال (١): أ ما احتمال الحدث «ب»: «ظهور عددين مجموعهما يساوي ٧»؟

ب ما احتمال الحدث «جـ»: «ظهور عددين مجموعهما يساوي ١٣»؟

ج ما احتمال الحدث «د»: «ظهور عددين أحدهما مربعًا للآخر»؟

ولأن أي حدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة، فإن عدد النواتج في حدث ما يكون دائمًا أصغر من أو يساوي عدد نواتج فضاء العينة. لذلك فإن احتمال وقوع حدث ما، هو عدد ينتمي إلى الفترة [٠، ١].

خواص الاحتمال لحدث ما

ليكن أ حدث في فضاء عينة ف منته وغير خالٍ فإن:

١ ٠ ≤ ل(أ) ≤ ١

٢ إذا كان أ = { } إذًا ل(أ) = ٠ ويسمى أ **حدثًا مستحيلًا**.

٣ إذا كان أ = ف إذًا ل(أ) = ١ ويسمى أ **حدثًا مؤكدًا**.

٤ مجموع احتمالات جميع النواتج في فضاء العينة يساوي ١.

معلومة مفيدة:
فضاء العينة، في تجربة رمي حجري نرد منتظمين ومتمايزين هو نفسه فضاء العينة في تجربة رمي حجر نرد مرتين متتاليتين.

١٩٣

٥ التدريس

تعرف الطلاب في مراحل سابقة حالات استخدموا فيها الاحتمال الأولي، حيث طبقوا القاعدة لحدث بسيط كما يلي:

$$\text{ل (الحدث)} = \frac{\text{عدد النواتج في الحدث}}{\text{عدد النواتج الممكنة}}.$$

والآن سوف يتعرفون ويطبقون نوعًا متقدمًا من الاحتمال، ألا وهو الاحتمال المشروط حيث يتدرج من لعبة «رمي مكعبين منتظمين» وإيجاد فضاء العينة أولًا أو النتائج الممكنة كما في المثال (١)، ثم التقدم شيئًا فشيئًا ليستخدموا ما تعلموه في الدرس السابق من قواعد التباديل والتوافيق في أحداث معينة كما في المثال (٣). وبعد ذلك، سوف يتعرفون مخطط ڤن واستخداماته في حل أحداث مركبة كما في المثال (٤)، ويتعرفون أيضًا الجدول المزدوج كما في المثال (٧).

أكّد للطلاب أن جميع هذه الأدوات والوسائل سوف تكون مهمة عند إيجاد إجابات لمواقف، يتطلب فيها موقف ما معرفة احتمال حدوثه.

شدّد أيضًا مع الطلاب على العمليات المستخدمة على الأحداث، وارتباطها بما سبق أن تعلموه عن المجموعات.

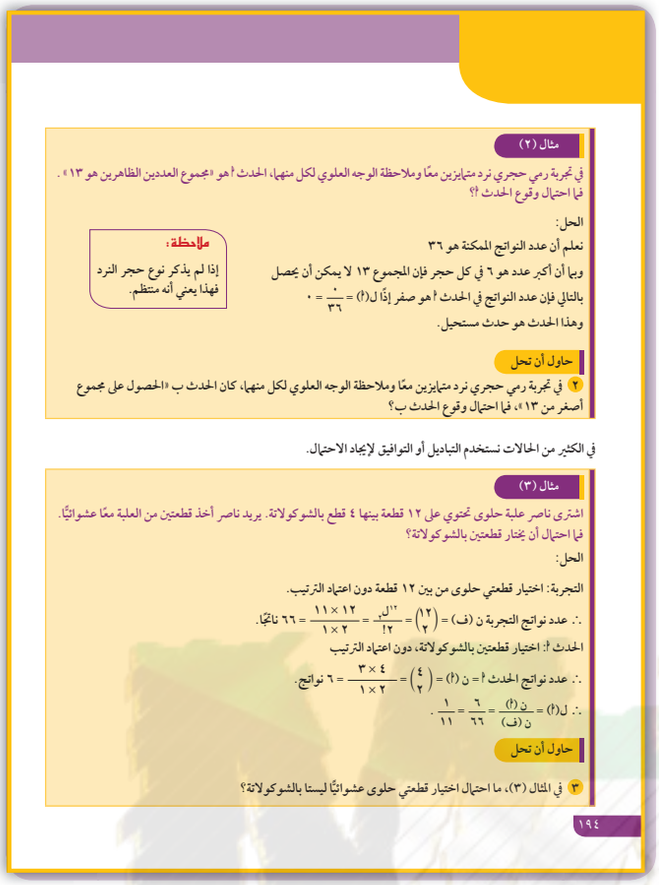
أعط أمثلة متعددة قبل البدء بفقرة تقاطع المجموعات، واتحاد المجموعات، ومتمم الجزء من مجموعة معنية.

أشر إلى الربط بين فضاء العينة والمجموعة الكاملة، وبين الحدث والجزء من المجموعة.

تعامل بهدوء مع المثال (٧)، ليتمكن الطلاب من فهم هذه العمليات.

توسع في شرح معنى الأحداث المستقلة والأحداث التابعة.

أعط أمثلة متعددة ليميز الطلاب بين حدث تابع وحدث مستقل.



مثال (٢)

في تجربة رمي حجري نرد متمايزين معًا وملاحظة الوجه العلوي لكل منهما، الحدث أ هو «مجموع العددين الظاهرين هو ١٣». فما احتمال وقوع الحدث أ؟

الحل:

نعلم أن عدد النواتج الممكنة هو ٣٦

وبما أن أكبر عدد هو ٦ في كل حجر فإن المجموع ١٣ لا يمكن أن يحصل بالتالي فإن عدد النواتج في الحدث أ هو صفر إذًا ل(أ) = $\frac{٠}{٣٦}$ = ٠

وهذا الحدث هو حدث مستحيل.

ملاحظة: إذا لم يذكر نوع حجر النرد فهذا يعني أنه منتظم.

حاول أن تحل

٢ في تجربة رمي حجري نرد متمايزين معًا وملاحظة الوجه العلوي لكل منهما، كان الحدث ب «الحصول على مجموع أصغر من ١٣»، فما احتمال وقوع الحدث ب؟

في الكثير من الحالات نستخدم التباديل أو التوافيق لإيجاد الاحتمال.

مثال (٣)

اشترى ناصر علبة حلوى تحتوي على ١٢ قطعة بينها ٤ قطع بالشوكولاتة. يريد ناصر أخذ قطعتين من العلبة معًا عشوائيًّا. فما احتمال أن يختار قطعتين بالشوكولاتة؟

الحل:

التجربة: اختيار قطعتي حلوى من بين ١٢ قطعة دون اعتماد الترتيب.

∴ عدد نواتج التجربة ن (ف) = $\binom{١٢}{٢} = \frac{ل^{١٢}_{٢}}{!٢} = \frac{١٢ \times ١١}{٢ \times ١}$ = ٦٦ ناتجًا.

الحدث أ: اختيار قطعتين بالشوكولاتة، دون اعتماد الترتيب

∴ عدد نواتج الحدث أ = ن (أ) = $\binom{٤}{٢} = \frac{٤ \times ٣}{٢ \times ١}$ = ٦ نواتج.

∴ ل(أ) = $\frac{ن(أ)}{ن(ف)} = \frac{٦}{٦٦} = \frac{١}{١١}$.

حاول أن تحل

٣ في المثال (٣)، ما احتمال اختيار قطعتي حلوى عشوائيًّا ليستا بالشوكولاتة؟

١٩٤

مخطط ڤن Venn Diagram

تساعد النماذج الهندسية أحيانًا على فهم المسائل وإيجاد الاحتمالات.

مثال (٤) مخطط ڤن (مثال إثرائي)

في إحدى المدارس الثانوية يهتم ٥٤٪ من الطلاب بالأنشطة الكشفية، ٦٢٪ بالرياضة.
نصف الذين يهتمون بالأنشطة الكشفية يهتمون أيضًا بالرياضة.

١ ما النسبة المئوية للطلاب الذين يهتمون فقط بالرياضة؟

٢ اختير طالب عشوائيًّا من طلاب هذه المدرسة، فما احتمال ألا يهتم بالرياضة؟

الحل:

لترتيب المعطيات وعرضها نختار مستطيلًا يمثل فضاء العينة (كل طلاب المدرسة) ونرسم داخل المستطيل منطقتين متداخلتين لتمثيل الطلاب الذين يهتمون بالأنشطة الكشفية والطلاب الذين يهتمون بالرياضة.

ندوّن داخل هذه المناطق النسب المئوية كما يلي:

المنطقة المتداخلة (الخضراء) تتضمن نصف الطلاب المهتمين بالأنشطة الكشفية والمهتمين بالرياضة: ٠,٥ × ٥٤٪ = ٢٧٪

المنطقة الصفراء تتضمن: (٥٤ − ٢٧)٪ = ٢٧٪

المنطقة الزرقاء تتضمن: (٦٢ − ٢٧)٪ = ٣٥٪

المنطقة البيضاء تتضمن: [١٠٠ − (٢٧ + ٢٧ + ٣٥)]٪ = ١١٪

يمكننا الآن الإجابة عن الأسئلة بقراءة مخطط ڤن.

١ النسبة المئوية للطلاب الذين يهتمون فقط بالرياضة = ٣٥٪

٢ احتمال ألا يهتم الطالب بالرياضة = ٢٧٪ + ١١٪ = ٣٨٪ أو ٠,٣٨

• حل آخر: ١ − ٠,٦٢ = ٠,٣٨

حاول أن تحل

٤ يقرأ ٨٤٪ من طلاب الصف العاشر كتب مطالعة باللغة العربية، ويقرأ ١٨٪ من طلاب هذا الصف كتبًا باللغة الإنكليزية، ويقرأ ١٥٪ من الطلاب كتبًا باللغتين.

اختير طالب عشوائيًّا من طلاب هذا الفصل،

١ ما احتمال أن يكون ممن يقرأون كتبًا باللغة الإنكليزية فقط؟

٢ ما احتمال أن يكون هذا الطالب ممن لا يقرأون كتبًا باللغتين معًا؟

١٩٥

ناقش معهم النتائج الموجودة في المثالين: (٨) و(٩) لتتأكد من فهمهم الأحداث وكيف تكون تابعة أو مستقلة.

شدّد على مفهوم الاحتمال المشروط لأنها المرة الأولى التي يتعرف عليه الطلاب.

اشرح بإسهاب معنى «حدث يحصل بعد حصول حدث قبله».

أكّد لهم أن ل (ب | أ) لا تعني أبدًا أننا نوجد احتمال الكسر $\frac{أ}{ب}$ بل هو احتمال حصول الحدث ب بعد حصول الحدث أ كما في المثالين (١٠)، (١١).

أعط أمثلة متعددة لتطبيق القاعدة:

$$ل(ب \mid أ) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(أ)}$$

٦ الربط

كل الأمثلة الواردة في هذا الدرس تربط مفاهيمه ومهاراته بالحياة الواقعية.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام قاعدة الاحتمال المشروط.

ساعدهم على التعرف من خلال النص إلى ما هو مقصود بحدث يحصل أولًا، ليتبعه حدث آخر يحصل بعد ذلك.

العمليات على الأحداث واحتمالاتها:

تقاطع حدثين أ، ب هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في أ، ب في آن معًا ويرمز إليه بـ أ ∩ ب.

اتحاد حدثين أ، ب هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في أ أو ب ويرمز إليه بـ أ ∪ ب.

الحدثان أ، ب هما متنافيان (Incompatible) إذا لم يشتركا في أي عنصر أي أ ∩ ب = ∅.

متمم الحدث أ هو $\bar{أ}$ (complement) الذي يتألف من كل النواتج الموجودة في فضاء العينة وغير الموجودة في أ.

قاعدة الاحتمال لاتحاد حدثين:

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

ومنها ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∪ ب)

قاعدة الاحتمال لمتمم الحدث أ:

ل($\bar{أ}$) = ١ − ل(أ)

قاعدة الاحتمال لحدثين متنافيين:

إذا كان أ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة ف فإن ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب).

مثال (٥)

إذا كان أ، ب حدثان في فضاء العينة ف وكان:

ل(أ) = ٠,٧، ل(ب) = ٠,٤، ل(أ ∩ ب) = ٠,٤، أوجد كلًّا من:

١ ل(أ ∪ ب) ٢ ل($\bar{أ}$)

الحل:

١ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= ٠,٧ + ٠,٤ − ٠,٤ = ٠,٧.

٢ ل($\bar{أ}$) = ١ − ل(أ)

= ١ − ٠,٧ = ٠,٣

حاول أن تحل

٥ إذا كان أ، ب حدثان في فضاء العينة، وكان ل(أ) = ٠,٣، ل(ب) = ٠,٥، ل(أ ∪ ب) = ٠,٦ أوجد كلًّا من:

أ ل(أ ∩ ب)

ب ل($\bar{ب}$)

١٩٦

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

تمرَّنْ ١٠-٥

الاحتمال المشروط

Conditional Pobability

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمارين (١-٣)، عند رمي حجر نرد أحمر اللون وحجر نرد أخضر اللون معًا وملاحظة الوجه العلوي. فما النواتج الممكنة لهذا الحدث؟ وما احتمال وقوع كل حدث مما يلي؟

(١) مجموع العددين الظاهرين ٩.

(٢) مجموع العددين الظاهرين هو عدد زوجي.

(٣) العدد الظاهر على الحجر الأحمر أكبر من العدد الظاهر على الحجر الأخضر.

في التمارين (٤-٩)، ج تتضمن عينة لألوان الحلوى التقليدية التي ينتجها مصنع للحلوى وهي:

ج = {البني، الأخضر، البرتقالي، الأحمر، البرونزي، الأصفر}.

احتمال كل حدث في ج يساوي نسبة إنتاج هذا اللون من الحلوى من إجمالي الألوان. وقد صرح المسؤول في هذا المصنع ببعض المعلومات عن احتمال الإنتاج في الجدول التالي:

اللون	البني	الأحمر	الأصفر	الأخضر	البرتقالي	البرونزي
الاحتمال	٠,٣	٠,٢	٠,٢	٠,١	٠,١	٠,١

إذا قمت بأخذ قطعة حلوى عشوائيًّا من علبة مفتوحة حديثًا من إنتاج هذا المصنع، فما احتمال أن تأخذ حلوى بالألوان التالية:

(٤) البني أو البرونزي؟

١١٤

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يحاولون الإجابة عن فقرات «حاول أن تحل» لتكوّن فكرة عن أدائهم في هذا الدرس، وعن مدى اكتسابهم المفاهيم والمهارات الواردة.

اختبار سريع

في كيس ٧ كرات متشابهة: ٣ كرات سوداء مرقمة من ١ إلى ٣، ٤ كرات حمراء مرقمة من ١ إلى ٤. سحبت عشوائيًّا كرة من الكيس ومن دون إعادتها سحبت كرة ثانية. أوجد احتمال كل من الأحداث التالية:

١ ل (كرة حمراء ثم كرة سوداء). $\frac{٤}{٧} \times \frac{٣}{٦} = \frac{٢}{٧}$

٢ ل (كرتين مجموع رقميهما ٢). $\frac{٢}{٧} \times \frac{١}{٦} = \frac{٢}{٤٢} = \frac{١}{٢١}$

٣ ل (الكرة الثانية حمراء إذا علمنا أن الكرة الأولى سوداء). $\frac{٢}{٣}$

---

٢ أوجد ل($\overline{أ}$).

٣ أ ليكن هـ الحدث: «الشخص يكون امرأة وطبيب»، احسب ل(هـ) باستخدام الجدول.

ب اكتب مستخدمًا الحدثين ب، جـ الحدث «و»: «الشخص يكون امرأة أو طبيب»، ثمّ احسب ل(و).

٤ احسب ل(أ ∪ جـ).

الحل:

١ اختيار الشخص عشوائيًّا يعني أن نواتج التجربة لها فرصة الظهور نفسها ومنها:

ل(أ) = $\frac{٢٥٢}{٣٥٠}$ = ٠,٧٢ ، ل(ب) = $\frac{٢٨٠}{٣٥٠}$ = ٠,٨ ، ل(جـ) = $\frac{٤٢}{٣٥٠}$ = ٠,١٢

٢ ل($\overline{أ}$) = ١ − ل(أ) = ١ − ٠,٧٢ = ٠,٢٨

٣ أ نحسب احتمال الحدث ب ∩ جـ، بحسب الجدول الحدث هـ = ب ∩ جـ لديه ١٤ ناتجًا

وبالتالي: ل(هـ) = ل(ب ∩ جـ) = $\frac{١٤}{٣٥٠}$ = ٠,٠٤

ب نحسب احتمال الحدث ب ∪ جـ، حيث إن ب، جـ ليسا حدثين متنافيين

ل(و) = ل(ب ∪ جـ) = ل(ب) + ل(جـ) − ل(ب ∩ جـ)

= ٠,٨٠ + ٠,١٢ − ٠,٠٤ = ٠,٨٨

٤ أ، جـ هما حدثان متنافيان إذًا: ل(أ ∪ جـ) = ل(أ) + ل(جـ) = ٠,٧٢ + ٠,١٢ = ٠,٨٤

حاول أن تحل

٧ في فضاء عينة ف لدينا حدثان أ، ب متنافيان حيث ل(أ) = ٠,٤ ، ل(ب) = ٠,٥.

أ احسب ل(أ ∪ ب).

ب احسب ل($\overline{أ ∪ ب}$).

مثال (٦)

إذا كان أ، ب حدثان في فضاء العينة ف وكان:

ل($\overline{أ}$) = ٠,٢ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٩ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٤ ، أوجد ل($\overline{ب}$)، ل($\overline{أ ∩ ب}$).

الحل:

∵ ل($\overline{أ}$) = ١ − ل(أ)

∴ ل(أ) = ١ − ل($\overline{أ}$) = ١ − ٠,٢ = ٠,٨

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

٠,٩ = ٠,٨ + ل(ب) − ٠,٤

ل(ب) = ٠,٩ − ٠,٨ + ٠,٤

= ٠,٥

ل($\overline{ب}$) = ١ − ل(ب)

= ١ − ٠,٥ = ٠,٥

ل($\overline{أ ∩ ب}$) = ١ − ل(أ ∩ ب) = ١ − ٠,٤ = ٠,٦

حاول أن تحل

٦ إذا كان أ، ب حدثان في فضاء العينة، وكان ل(أ) = ٠,٥ ، ل(ب) = ٠,٦ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٢

أوجد ل($\overline{أ ∪ ب}$).

مثال (٧)

يبين الجدول المزدوج التالي توزيعًا للأشخاص العاملين في إحدى المستشفيات:

المهنة / الجنس	رجل	امرأة	المجموع
طبيب	٢٨	١٤	٤٢
ممرض	٢٠	٢٣٢	٢٥٢
تقني–إداري	٢٢	٣٤	٥٦
المجموع	٧٠	٢٨٠	٣٥٠

تم اختيار شخص عشوائيًّا من بين ٣٥٠ شخصًا عاملًا في المستشفى.

١ أوجد احتمال كل حدث من الأحداث التالية:

أ: «الشخص ممرض» ب: «الشخص امرأة» جـ: «الشخص طبيب»

الأحداث المستقلة Independent Events

يكون الحدثان مستقلين إذا كان وقوع (أو عدم وقوع) أحدهما لا يؤثر على وقوع (أو عدم وقوع) الآخر. فمثلًا، في تجربة عشوائية عند رمي عملة معدنية مرتين وملاحظة الوجه العلوي فإن الحدث «ظهور صورة في الرمية الأولى» لا يؤثر على وقوع الحدث «ظهور صورة في الرميّة الثانية»، لأن أي من الرميتين لا تؤثر على الأخرى بأي طريقة، ولذلك **فالحدثان مستقلان**.

إذا كنا نعلم الاحتمالات الفردية لحدثين مستقلين فإنه يمكننا إيجاد احتمال وقوع الحدثين معًا باستخدام القاعدة التالية:

قاعدة الضرب للأحداث المستقلة Multiplication principle of Independent Events

إذا كان أ، ب حدثان مستقلان فإن احتمال وقوع الحدثين معًا هو:

ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب)

معظم الآلات الحاسبة يمكنها إنتاج أعداد عشوائية تقع بين ٠، ١. كل عدد عشوائي ينتج يكون مستقلًا عن العدد الآخر السابق له.

مثال (٨)

قام أحمد بتطوير قاعدة باستخدام الآلة الحاسبة البيانية لإنتاج أرقام عشوائية من ٠ إلى ٩ (انظر إلى الشكل المقابل).

فما احتمال أن يكون الرقم الأول الذي حصل عليه زوجيًّا وأن يكون الرقم الثاني مضاعفًا لـ ٣؟

الحل:

بما أن الأرقام عشوائية، فإن الناتج الأول لا يؤثر على الناتج الثاني. أي أن الحدثين مستقلين وهما:

ر: «الرقم الناتج يكون زوجيًّا» ر = {٠، ٢، ٤، ٦، ٨}.

م: «الرقم الناتج يكون مضاعفًا لـ ٣» م = {٣، ٦، ٩}.

ولأن الحدثين مستقلين، لذلك يمكن تطبيق قاعدة الضرب:

ل(ر ∩ م) = ل(ر) × ل(م) = $\frac{٥}{١٠} \times \frac{٣}{١٠}$ = ٠,١٥

وبالتالي: احتمال أن يكون الرقم الأول زوجيًّا والرقم الثاني من مضاعفات ٣ هو ٠,١٥.

- «int» هي أكبر دالة أعداد صحيحة
- «rand» هي منتج الأعداد العشوائية بين صفر، ١.
- int (10 * rand) تعطي أعدادًا بين صفر، ٩.

مثال: rand = ٠,٨١٧

10 * rand = ٨,١٧

int (10 * rand) = ٨

حاول أن تحل

٨ في تجربة عشوائية عند رمي قطعة نقود ثلاث مرات وملاحظة الوجه العلوي.

ما احتمال أن يكون الناتج (ص، ك، ص)؟

٩ إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

١ – ٣ تحقق من إجابات الطلاب.

«حاول أن تحل»

١ (أ) ل (ب) = $\frac{٦}{٣٦} = \frac{١}{٦}$

(ب) ل (جـ) = صفر

(جـ) ل (د) = $\frac{٣}{٣٦} = \frac{١}{١٢}$

٢ ل (ب) = $\frac{٣٦}{٣٦} = ١$

٣ نوجد احتمال (٢ قطع ليستا بالشوكولاتة)

نفرض أن حدث اختيار قطعتي حلوى عشوائيًّا ليست بالشوكولاتة هو الحدث ب

فإن ل(ب) = $\frac{{}^{٨}ق_{٢}}{{}^{١٢}ق_{٢}} = \frac{٢٨}{٦٦} = \frac{١٤}{٣٣}$.

---

(٥) الأحمر أو الأخضر أو البرتقالي؟ _____

(٦) الأحمر؟ _____

(٧) أي لون عدا الأحمر؟ _____

(٨) أي لون عدا البرتقالي أو الأصفر؟ _____

(٩) أي لون عدا البني أو البرونزي؟ _____

في التمارين (١٠–١٣)، ما احتمال أن يحقق رمز عدد عشوائي مكوّن من رقمين من ١ إلى ٩ الشروط التالية؟

(١٠) رقمان عشوائيان. الأول فردي والثاني من مضاعفات العدد ٤. _____

(١١) رقمان عشوائيان. الأول زوجي والثاني فردي. _____

(١٢) رقمان عشوائيان. كلا الرقمين أصغر من ٧. _____

(١٣) رقمان عشوائيان. الرقم الثاني هو الرقم الأول نفسه. _____

(١٤) **تأجير السيارات:** لدى شركة لتأجير السيارات ٢٥ سيارة للإيجار، ٢٠ منها من الحجم الكبير و٥ سيارات من الحجم المتوسط. إذا تم اختيار سيارتين بشكل عشوائي للإيجار لمدة يوم واحد، فما احتمال أن تكون السيارتان من الحجم الكبير؟

_____

(١٥) **اكتب لتتعلم:** علّل لماذا العبارة التالية غير صحيحة: احتمال أن يبيع بائع الحواسيب ٠، ١، ٢ أو ٣ أجهزة حاسوب في أي يوم من الأيام هو: ٠,١٢ ، ٠,٤٥ ، ٠,٣٨ ، ٠,١٥ بحسب الترتيب.

_____

(١٦) إذا كان أ، ب حدثين مستقلين وكان ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٤ . أوجد كلًّا من:

(أ) ل(أ ∪ ب) = _____

(ب) ل(أَ) = _____

(جـ) ل(أ ∩ ب) = _____

(١٧) ليكن: ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٧ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٨ . احسب:

(أ) ل(أ ∩ ب). = _____

(ب) ل(أ|ب).= _____

(جـ) ل(ب|أ).= _____

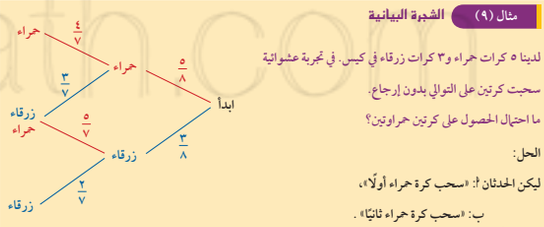
الحدث التابع Dependent Event

يكون الحدث تابعًا عندما يتأثر ظهوره بحدث سابق.

مثال (٩) الشجرة البيانية

لدينا ٥ كرات حمراء و٣ كرات زرقاء في كيس. في تجربة عشوائية سحبت كرتين على التوالي بدون إرجاع.

ما احتمال الحصول على كرتين حمراوتين؟



الحل:

ليكن الحدثان أ: «سحب كرة حمراء أولًا»،

ب: «سحب كرة حمراء ثانيًا» .

ل(أ) = $\frac{٥}{٨}$

دون إعادة الكرة الأولى يصبح لدينا في الكيس ٤ كرات حمراء فقط وفي الكيس هناك ٧ كرات وبالتالي ل(ب) = $\frac{٤}{٧}$.

ل(كرتان حمراوتان) = ل(أ) × ل(ب) = $\frac{٥}{٨} \times \frac{٤}{٧} = \frac{٥}{١٤}$

حاول أن تحل

٩ تحتوي علبة حلوى على ١٢ قطعة، ٤ منها بنكهة شوكولاتة والباقي بنكهة الحليب.
فما احتمال أخذ قطعة بنكهة شوكولاتة وأكلها، ثم أخذ قطعة بنكهة الحليب؟

---

(١٨) ليكن أ، ب حدثان مستقلان في فضاء عينة ف حيث ل(أ) = ٠,٥ ، ل(ب) = ٠,٥ .

احسب: ل(ب|أ).

_____

في التمارين (١٩–٢١)، اختر الإجابة الصحيحة.

(١٩) إذا كان أ، ب حدثين مستقلين وكان ل(أ) = ٠,٢ ، ل(ب) = ٠,٥

فإن ل(أ ∪ ب) =

(أ) ٠,٥ (ب) ٠,٧ (جـ) ٠,٨ (د) ٠,٦

(٢٠) إذا كان أ، ب حدثين في فضاء العينة وكان ل(أ) = ٠,٧ ، ل(ب) = ٠,٥ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٨

فإن ل(أ ∩ ب) =

(أ) ٠,٢ (ب) ٠,٤ (جـ) ٠,٦ (د) ١,٢

(٢١) إذا كان أ، ب حدثين مستقلين في فضاء العينة وكان ل(أ) = ٠,٦ ، ل(ب) = ٠,٤

فإن ل(أ|ب) =

(أ) ٠,٦ (ب) ٠,٤ (جـ) ٠,٢ (د) ١

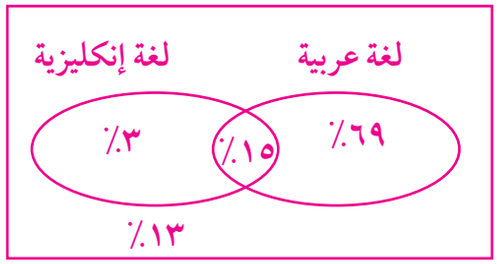
المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمارين (١–٣)، عند رمي حجر نرد أحمر اللون وحجر نرد أخضر اللون معًا وملاحظة الوجه العلوي لهما. فما النواتج الممكنة لهذا الحدث؟ وما احتمال ونوع كل حدث في ما يلي؟

(١) مجموع العددين الظاهرين أصغر من ١٠.

(٢) العددان الظاهران عددان فرديان.

٤



(أ) ٪٣

(ب) احتمال الذين لا يقرأون كتبًا باللغتين معًا

= ٪٦٩ يقرأون فقط بالعربية

+ ٪٣ يقرأون فقط بالإنكليزية

+ ٪١٣ لا يقرأون كتبًا

= ٪٨٥

أو ٪١٠٠ − ٪١٥ = ٪٨٥

٥ (أ) ل (أ ∩ ب) = ٠,٢

(ب) ل (ب̄) = ٠,٥

(٣) العددان الظاهران عددان زوجيان.

في التمرين (٤)، حل المسألة التالية:

(٤) **رقم التأمين الاجتماعي:** ما احتمال أن يتم بشكل عشوائي اختيار رقم تأمين اجتماعي مكون من تسعة أرقام مختلفة ليس من بينها الصفر؟

(٥) ما احتمال اختيار رقمًا عشوائيًا واحدًا من ١ إلى ٩ يحقق الشرطين التاليين:

رقم أولي أو من مضاعفات الرقم ٦.

في التمارين (٦-١٠)، ينتج المصنع حلوى محشوة بالفول السوداني مشكلة بالألوان الموضحة بالجدول.

يوضح الجدول التالي احتمال إنتاج الحلوى بحسب لونها:

اللون	البني	الأحمر	الأصفر	الأخضر	البرتقالي
الاحتمال	٠,٣	٠,٢	٠,٢	٠,٢	٠,١

إذا قمت بأخذ قطعة حلوى عشوائيًا من كل من علبتين مفتوحتين حديثًا من إنتاج هذا المصنع، فما احتمال أخذ حلوى بالألوان التالية؟

(٦) كلتاهما بنية اللون.

(٧) كلتاهما برتقالية اللون.

(٨) الأولى بنية اللون والثانية صفراء.

(٩) ولا واحدة صفراء.

(١٠) الأولى ليست حمراء والثانية ليست برتقالية.

الاحتمال المشروط Conditional Probability

في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة الوجه العلوي له فإن فضاء العينة ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}.

ليكن الحدث أ (ظهور عدد أكبر من ٣) فإن أ = {٤، ٥، ٦} ويكون ل(أ) = $\frac{ن(أ)}{ن(ف)} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

وليكن الحدث ب (ظهور عدد زوجي) فيكون ب = {٢، ٤، ٦}

ل(ب) = $\frac{ن(ب)}{ن(ف)} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

لنسأل الآن: إذا علمنا أن الحدث أ قد وقع، فما هو احتمال وقوع الحدث ب بشرط وقوع الحدث أ. بمعنى آخر ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي بشرط أن يكون أكبر من ٣؟

نلاحظ أن الشرط المعطى يجعل فضاء العينة الجديد هو أ = {٤، ٥، ٦} وللحصول على عدد زوجي أكبر من ٣ نوجد:

ب ∩ أ = {٤، ٦}

وبالتالي احتمال الحصول على عدد زوجي بشرط أن يكون أكبر من ٣ هو $\frac{٢}{٣}$

احتمال وقوع الحدث ب بشرط وقوع الحدث أ يسمى بالاحتمال المشروط (الشرطي) ويُكتب ل(ب|أ) ويُقرأ احتمال الحدث ب بشرط أ. ويمكن إيجاد ل(ب|أ) باستخدام القاعدة التالية:

قاعدة الاحتمال المشروط

إذا كان وقوع الحدث ب مشروطًا بوقوع الحدث أ فإن:

ل(ب|أ) = $\frac{ل(أ ∩ ب)}{ل(أ)}$ حيث ل (أ) ≠ ٠

وكذلك ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب|أ)

(١١) ليكن أ، ب حدثان مستقلان في فضاء عينة ف حيث ل(أ) = ٠,٢، ل(ب) = ٠,٧.

احسب:

(أ) ل(أ ∩ ب)

(ب) ل(ب|أ)

(جـ) ل(أ ∪ ب)

(د) ل(أ|ب)

٦ ل (أ ∪ ب) = ٠,٥ + ٠,٦ − ٠,٢ = ٠,٩

ل ($\overline{\text{أ ∪ ب}}$) = ١ − ٠,٩ = ٠,١.

٧ (أ) ل (أ ∪ ب) = ٠,٩

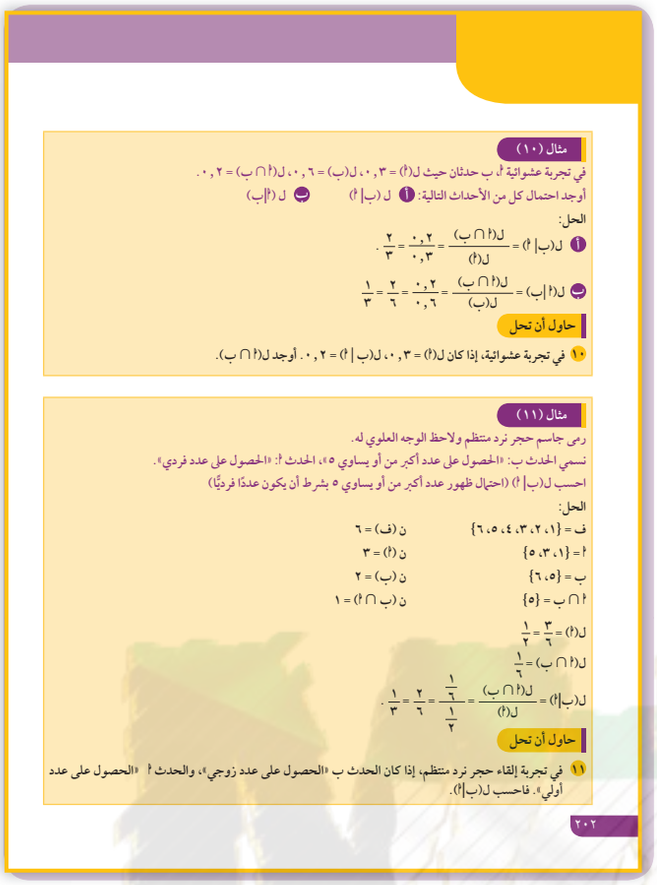
(ب) ل ($\overline{\text{أ ∪ ب}}$) = ٠,١

٨ $\frac{١}{٨}$

٩ $\frac{٤}{١٢} \times \frac{٨}{١١} = \frac{٨}{٣٣}$

١٠ ل (أ ∩ ب) = ٠,٠٦

١١ ل (ب|أ) = $\frac{١}{٣}$



مثال (١٠)

في تجربة عشوائية أ، ب حدثان حيث ل(أ) = ٠,٣، ل(ب) = ٠,٦، ل(أ ∩ ب) = ٠,٢.

أوجد احتمال كل من الأحداث التالية: (أ) ل (ب|أ) (ب) ل (أ|ب)

الحل:

(أ) ل(ب|أ) = $\frac{\text{ل(أ ∩ ب)}}{\text{ل(أ)}} = \frac{٠,٢}{٠,٣} = \frac{٢}{٣}$.

(ب) ل(أ|ب) = $\frac{\text{ل(أ ∩ ب)}}{\text{ل(ب)}} = \frac{٠,٢}{٠,٦} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

حاول أن تحل

١٠ في تجربة عشوائية، إذا كان ل(أ) = ٠,٣، ل(ب | أ) = ٠,٢. أوجد ل(أ ∩ ب).

مثال (١١)

رمى جاسم حجر نرد منتظم ولاحظ الوجه العلوي له.

نسمي الحدث ب: «الحصول على عدد أكبر من أو يساوي ٥»، الحدث أ: «الحصول على عدد فردي».

احسب ل(ب| أ) (احتمال ظهور عدد أكبر من أو يساوي ٥ بشرط أن يكون عددًا فرديًا)

الحل:

ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} ن (ف) = ٦

أ = {١، ٣، ٥} ن (أ) = ٣

ب = {٥، ٦} ن (ب) = ٢

أ ∩ ب = {٥} ن (ب ∩ أ) = ١

ل(أ) = $\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{٦}$

ل(ب|أ) = $\frac{\text{ل(أ ∩ ب)}}{\text{ل(أ)}} = \frac{\frac{١}{٦}}{\frac{١}{٢}} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$.

حاول أن تحل

١١ في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم، إذا كان الحدث ب «الحصول على عدد زوجي»، والحدث أ «الحصول على عدد أولي». فاحسب ل(ب|أ).

٢٠٢

المرشد لحل المسائل

إجابات «مسألة إضافية»

١ (أ) $\overline{س}$ = ٣١٢,٢٥ مليلتر

(ب) ع = ٢٧,٠٤٥، الانحراف المعياري غير مقبول لذا، يكون تشتت القيم عن المتوسط الحسابي كبير.

المرشد لحل المسائل

مثال (١)

(١) نأخذ البيانات التالية:

(أ): ١٠، ٢٠، ٤٠، ٥٠، ٧٠، ٨٠، ٩٠، ١٠٠، ١٢٠، ١٥٠

(ب): ١، ٢، ٤، ٥، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١٢، ١٥

أ كيف نستنتج القيم في بيانات المجموعة (ب) من قيم البيانات في المجموعة (أ)؟

ب أوجد التباين $ع^2$ لقيم المجموعة (أ) والتباين $ع^2$ لقيم المجموعة (ب).

جـ استنتج العلاقة بين $ع_1$، $ع_2$.

ما الذي أعرفه؟ قيم مجموعتين من البيانات.

ما الذي أريد معرفته؟

الربط بين قيم المجموعة (أ) وقيم المجموعة (ب).

العلاقة بين تباين قيم المجموعة (أ) وتباين قيم المجموعة (ب).

كيف سأحل المسألة؟

(أ) بالنظر إلى قيم البيانات في المجموعة (أ) وقيم البيانات في المجموعة (ب) نلاحظ أن جميع قيم المجموعة (ب) هي قيم المجموعة (أ) مقسومة على ١٠.

(ب) نكوّن جدولًا لكل من قيم المجموعتين:

جدول (أ)

القيمة $س_ر$	$س_ر - \overline{س}$	$(س_ر - \overline{س})^2$
١٠	−٦٣	٣٩٦٩
٢٠	−٥٣	٢٨٠٩
٤٠	−٣٣	١٠٨٩
٥٠	−٢٣	٥٢٩
٧٠	−٣	٩
٨٠	٧	٤٩
٩٠	١٧	٢٨٩
١٠٠	٢٧	٧٢٩
١٢٠	٤٧	٢٢٠٩
١٥٠	٧٧	٥٩٢٩
المجموع = ١٧٦١٠		

المتوسط الحسابي $\overline{س}$ = ٧٣

$ع_1^2 = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \overline{س})^2}{ن}$

$ع_1^2 = \frac{١٧٦١٠}{١٠}$

$ع_1^2$ = ١٧٦١

جدول (ب)

المتوسط الحسابي $\overline{ص}$ = ٧,٣

$ع_2^2 = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} (ص_ر - \overline{ص})^2}{ن}$

$ع_2^2 = \frac{١٧٦,١}{١٠}$

$ع_2^2$ = ١٧,٦١

القيمة $ص_ر$	$ص_ر - \overline{ص}$	$(ص_ر - \overline{ص})^2$
١	−٦,٣	٣٩,٦٩
٢	−٥,٣	٢٨,٠٩
٤	−٣,٣	١٠,٨٩
٥	−٢,٣	٥,٢٩
٧	−٠,٣	٠,٠٩
٨	٠,٧	٠,٤٩
٩	١,٧	٢,٨٩
١٠	٢,٧	٧,٢٩
١٢	٤,٧	٢٢,٠٩
١٥	٧,٧	٥٩,٢٩
المجموع = ١٧٦,١		

وبالتالي $ع_2^2 = ١٠٠\ ع_1^2$ أي $ع_2^2 = (١٠)^2\ ع_1^2$

(جـ) نستنتج أن $ع_2 = ١٠\ ع_1$

مثال (٢)

بيّنت دراسة إحصائية أن ٢٪ من القطع التي تصنعها إحدى الشركات فيها خلل تقني. لإلغاء هذه القطع وضع اختبار للجودة وكانت نتائجه كالآتي:

يلغي الاختبار إذا كان ٩٨٪ من القطع التي فيها خلل.

يلغي الاختبار إذا كان ٠,٥٪ من القطع التي ليس فيها خلل.

أخذت عشوائيًّا قطعة مصنعة في هذه الشركة.

ما احتمال أن يكون فيها خلل علمًا أنه لم يلغها اختبار الجودة؟

الحل:

ليكن ع الحدث: «القطعة فيها خلل»، خ الحدث: «اختبار الجودة يلغي القطعة».

أولًا: نرسم شجرة بيانية لتمثيل المعطيات

٢٪ من القطع فيها خلل

∴ ٩٨٪ لا خلل فيها.

يلغي الاختبار ٩٨٪ من القطع فيها خلل

∴ ٢٪ من القطع فيها خلل لا يلغيها.

يلغي الاختبار ٠,٥٪ من القطع التي لا خلل فيها

∴ ٩٩,٥٪ من القطع التي لا خلل فيها لا يلغيها الاختبار.

ثانيًا: $ل(ع | \overline{خ}) = \frac{ل(ع \cap \overline{خ})}{ل(\overline{خ})}$

تحضيرًا للحل نوجد ل(خ)، ثم $ل(\overline{خ})$. بالنظر إلى الشجرة البيانية، يلغي الاختبار قطعة ما في حالتين.

∴ ل(خ) = ل(ع ∩ خ) + ل($\overline{ع}$ ∩ خ)

= ٠,٠٢ × ٠,٩٨ + ٠,٩٨ × ٠,٠٠٥ = ٠,٠٢٤٥

∴ $ل(\overline{خ})$ = ١ − ٠,٠٢٤٥ = ٠,٩٧٥٥

$ل(ع \cap \overline{خ})$ = ٠,٠٢ × ٠,٠٠٤ = ٠,٠٠٠٤

$ل(ع | \overline{خ}) = \frac{ل(ع \cap \overline{خ})}{ل(\overline{خ})} = \frac{٠,٠٠٠٤}{٠,٩٧٥٥}$ = ٠,٠٠٠٤١

احتمال أن يكون في القطعة خلل علمًا أنه لم يلغها اختبار الجودة يساوي ٠,٠٠٠٤١ تقريبًا.

مسألة إضافية

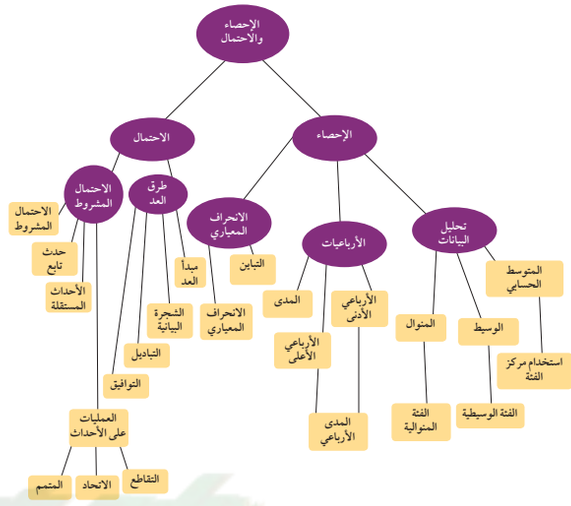
١ آلة مجهزة لتعبئة عبوات بالصابون السائل تحتوي كل منها على ٣١٠ مليليترات. اظهرت نتائج الكشف على ١٦ عبوة كما يلي:

٣١١، ٣٠٩، ٢٩٦، ٣١٥، ٣٠٠، ٤١٢، ٣٠٧، ٣٢٢، ٢٩٨، ٢٩١، ٣٠٣، ٣١١، ٣٠٠، ٣٠٦، ٣١٨، ٢٩٧.

أ أوجد المتوسط الحسابي لمحتويات هذه العبوات بالمليليتر .

ب أوجد الانحراف المعياري. ماذا تستنتج؟

مخطط تنظيمي للوحدة العاشرة



ملخص

– تستخدم قيم النزعة المركزية لوصف البيانات الإحصائية:

* المتوسط الحسابي هو ناتج قسمة مجموع قيم البيانات على عدد هذه القيم: $\overline{\text{س}} = \frac{\text{ت}_1\text{س}_1 + \text{ت}_2\text{س}_2 + \dots + \text{ت}_\text{ن}\text{س}_\text{ن}}{\text{ت}_1 + \text{ت}_2 + \dots + \text{ت}_\text{ن}}$
* الوسيط هو القيمة التي تأتي في المنتصف بعد ترتيب هذه القيم تصاعديًا أو تنازليًا.
* المنوال هو القيمة (القيم) الأكثر تكرارًا في البيانات.
* في البيانات حيث التوزيع التكراري على فئات نستخدم مركز الفئة لإيجاد المتوسط الحسابي.
* في البيانات حيث التوزيع التكراري على فئات نستخدم قانون الرافعة:

المنوال = الحد الأدنى للفئة المنوالية + $\frac{\text{ك}_2}{\text{ك}_1 + \text{ك}_2} \times \text{ف}$

حيث إن ف = طول الفئة المنوالية،

ك_1 = تكرار الفئة السابقة مباشرة للفئة المنوالية،

ك_2 = تكرار الفئة اللاحقة مباشرة للفئة المنوالية

* يمكن إيجاد الوسيط باستخدام بمنحنى المتجمع الصاعد أو منحنى المتجمع النازل أو كليهما.
* يمكن إيجاد المنوال باستخدام قانون الرافعة.
* يمكن إيجاد المنوال باستخدام المدرج التكراري.

– نستخدم الأرباعيات والمدى والتباين والانحراف المعياري لدراسة تشتت البيانات.

* المدى = القيمة العظمى من البيانات – القيمة الصغرى من البيانات.
* الأرباعي الأدنى = وسيط القيم الأدنى للبيانات أصغر من الوسيط ويعرف بالرمز ر_1.
* الأرباعي الأعلى = وسيط القيم الأعلى للبيانات أكبر من الوسيط ويعرف بالرمز ر_3.
* يعرف الوسيط للبيانات بالرمز ر_2.
* مجمل الأعداد الخمسة في البيانات هو: القيمة الصغرى، ر_1، ر_2، ر_3، القيمة العظمى.
* يوضح مخطط الصندوق ذي العارضتين كيفية توزيع القيم الخمس والعلاقة فيما بينها وتشتت قيم البيانات.
* التباين هو القيمة من البيانات الناتجة من حساب القاعدة: $\text{ع}^2 = \frac{\sum_{\text{ت}=1}^{\text{ن}} \text{ت}_\text{ت}(\text{س}_\text{ت} - \overline{\text{س}})^2}{\sum_{\text{ت}=1}^{\text{ن}} \text{ت}_\text{ت}}$
* الانحراف المعياري يبيّن تشتت البيانات عن المتوسط الحسابي لهذه البيانات ويعطى بالقاعدة:

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{\sum_{\text{ت}=1}^{\text{ن}} \text{ت}_\text{ت}(\text{س}_\text{ت} - \overline{\text{س}})^2}{\sum_{\text{ت}=1}^{\text{ن}} \text{ت}_\text{ت}}}$$

إذا كبر الانحراف المعياري يكون التشتت كبيرًا وبعيدًا عن المتوسط الحسابي وإذا صغر الانحراف المعياري يكون التشتت قريبًا من المتوسط الحسابي.

* المدى الأرباعي = الأرباعي الأعلى (ر_3) – الأرباعي الأدنى (ر_1)

– **الشجرة البيانية**: إذا كان عدد الإمكانيات صغيرًا بما يكفي، فإن الشجرة البيانية يمكن أن تساعد في تنظيم مهمة العد.

– **التباديل**: عندما يكون الترتيب مهمًّا ومعتمداً يسمى بالتباديل، عامة عدد تباديل من الأشياء هو ن! (مضروب ن).

– **قانون التباديل**: إذا كان ن، ر عددان صحيحان غير سالبين بحيث ر ≤ ن، فإن عدد التباديل المكوّن من أشياء عددها ر والمأخوذة من بين ن من الأشياء هو: $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \frac{\text{ن}!}{(\text{ن} - \text{ر})!}$

– **التوافيق**: عندما تريد إيجاد عدد المجموعات الجزئية والمكوّن كل منها من ر عنصر، والتي يمكن اختيارها من مجموعة مكوّنة من ن عنصر دون اعتماد النظر عن الترتيب فنحن نحسب التوافيق.

– **قانون التوافيق**: إذا كان ن، ر عددان صحيحان غير سالبين، حيث ر ≤ ن فإن عدد التوافيق المكوّنة كل منها من ر من الأشياء والمختارة من بين ن من العناصر في الوقت نفسه هو: $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \frac{\text{ن}!}{\text{ر}!(\text{ن} - \text{ر})!}$.

– احتمال الحدث أ هو: $\text{ل}(\text{أ}) = \frac{\text{عدد النواتج في الحدث أ}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$

– خواص الاحتمال لحدث ما:

ليكن أ حدث في فضاء عينة منته وغير خالٍ ف فإن:

– ٠ ≤ ل(أ) ≤ ١

– إذا كان أ = { } فإن ل(أ) = ٠، أ يسمى الحدث المستحيل.

– إذا كان أ = ف فإن ل(أ) = ١، أ يسمى الحدث المؤكد.

– مجموع احتمالات النواتج في فضاء العينة يساوي ١.

– تقاطع حدثين أ، ب هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في أ وفي ب في آن معًا ويرمز إليه بـ أ ∩ ب.

– اتحاد حدثين أ، ب هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في أ أو في ب ويرمز إليه بـ أ ∪ ب.

– الحدثان أ، ب هما متنافيان إذا لم يكن لديهما ناتج مشترك أي أ ∩ ب = ∅.

– متمم حدث أ يرمز إليه بـ $\overline{\text{أ}}$ وهو الحدث الذي يتألف من كل النواتج الموجودة في فضاء العينة وغير موجودة في أ.

– الأحداث المستقلة: يكون حدثان مستقلان إذا كان حدوث أحدهما ليس له تأثير على احتمال حدوث الآخر.

– قاعدة الضرب للأحداث المستقلة:

إذا كان أ، ب حدثان مستقلان فإن احتمال وقوع الحدثين معًا هو: ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب)

– **الحدث التابع**: يكون الحدث تابعًا عندما يتأثر ظهور هذا الحدث بحدث سابق.

– الاحتمال المشروط:

ليكن لدينا حدثين أ، ب ونفترض أن ل(أ) ≠ ٠.

احتمال وقوع الحدث ب بشرط وقوع الحدث أ يسمى الاحتمال المشروط ويكتب ل(ب|أ) ويقرأ «احتمال الحدث ب بشرط أ».

– قاعدة الاحتمال المشروط:

إذا كان وقوع الحدث ب مشروطًا بوقوع الحدث أ (ل(أ) ≠ ٠)

ل(ب|أ) = $\frac{\text{ل(أ ∩ ب)}}{\text{ل(أ)}}$ ، ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب|أ) .

مراجعة الوحدة العاشرة

(١) يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لعدد الرجال غير المتزوجين في إحدى الدول.

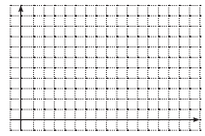
الفئة (العمر)	الرجال
٢٠–	٤٥٠٠
٣٠–	٤٨٠
٤٠–	٣٧٠
٥٠–	٢٩٠
٦٠–	١٨٠
٧٠–	١١٠
٨٠–	٣٠

(أ) أكمل الجدول بإضافة مراكز الفئات والتكرار المتجمع الصاعد.

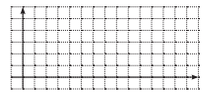
الفئة (العمر)	الرجال	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد	مركز الفئة
٢٠–	٤٥٠٠			
٣٠–	٤٨٠			
٤٠–	٣٧٠			
٥٠–	٢٩٠			
٦٠–	١٨٠			
٧٠–	١١٠			
٨٠–	٣٠			

(ب) أوجد المتوسط الحسابي لأعمار الرجال.

(جـ) أوجد الوسيط لأعمار الرجال مستخدمًا منحنى التكرار المتجمع الصاعد.



(د) أوجد المنوال لأعمار الرجال باستخدام المدرج التكراري.



(٢) جاءت درجات أحد السنة الماضية في اختبار مادة العلوم حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة كما يلي:

١٧، ١٠، ١٥، ١٢، ١٣، ٩، ١٦، ٨، ١٤، ١٦.

(أ) أوجد المتوسط الحسابي لهذه الدرجات $\bar{س}$.

(ب) أوجد مجمل الأعداد الخمسة لهذه الدرجات.

(جـ) ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين.

ماذا تلاحظ؟

(د) أوجد الانحراف المعياري لهذه الدرجات ع.

تمارين إثرائية

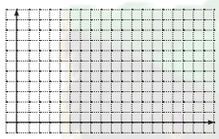
(١) يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لأوزان ٧٥ رأسًا من قطيع المها العربية بالكيلوجرام.

الفئة	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-
التكرار	١	٧	٥	٨	١١	٢٢	١٧	٤

(أ) أكمل الجدول بإضافة التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل.

الفئة	التكرار	أقل من الحدود العليا للفئة	التكرار المتجمع الصاعد	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
١٠-	١				
٢٠-	٧				
٣٠-	٥				
٤٠-	٨				
٥٠-	١١				
٦٠-	٢٢				
٧٠-	١٧				
٨٠-	٤				

(ب) أوجد الوسيط لقيم هذه الأوزان باستخدام منحنى التكرار المتجمع الصاعد ومنحنى التكرار المتجمع النازل معًا.

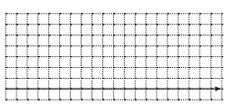


(٣) إذا كانت درجات أحد الطلاب في اختبارات مادة الرياضيات على مدار السنة حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة كما يلي: ٧، ١٠، ١٢، ٩، ١٤، ١٦، ١٥، ٨، ١٧.

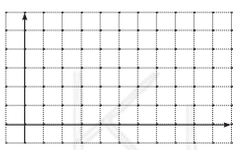
(أ) أوجد مجمل الأعداد الخمسة لقيم هذه الدرجات.

(ب) ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين لتمثيل قيم هذه الدرجات.

ماذا تلاحظ؟



(جـ) أوجد المنوال لقيم هذه الأوزان باستخدام قانون الرافعة وباستخدام المدرج التكراري.



(د) أوجد المتوسط الحسابي لقيم هذه الأوزان.

(٢) سجل أحد الاشخاص أسعار الحاسوب بالدينار الكويتي من عدة محلات لبيع هذه الأجهزة كما يلي:

٢٥٠، ٢٤٥، ٢٦٠، ٢٥٥، ٢٤٠، ٢٦٥، ٢٦٥، ٢٣٥، ٢٧٠، ٢٦٥.

(أ) أوجد المتوسط الحسابي لقيم هذه الأسعار $\bar{س}$.

(ب) أوجد الانحراف المعياري لقيم هذه الأسعار ع.

(٣) **حلوى محشوة بالفول السوداني:** ينتج مصنع حلوى محشوة بالفول السوداني مشكلة بالألوان، كما يوضح الجدول التالي:

اللون	البني	الأحمر	الأصفر	الأخضر	البرتقالي
الاحتمال	٠,٣	٠,٢	٠,٢	٠,٢	٠,١

إذا أخذت ثلاث قطع من علبة واحدة، فكم عدد الألوان التي يحتمل الحصول عليها؟

(٤) **تسلية:** في إحدى الألعاب يتم رمي خمسة أحجار نرد متمايزة في وقت واحد وملاحظة الوجه العلوي لها. كم عدد النواتج التي يمكن تمييزها إذا كان لكل حجر لون مختلف؟

(٥) **المعلم والامتحان النهائي**: أعطى معلم طلابه ٢٠ سؤالًا للاستذكار على أن يحتوي الامتحان النهائي على ثمانية أسئلة منها. كم عدد الامتحانات النهائية المختلفة التي يمكن وضعها؟

(٦) **مسح للخريجين**: اختارت إحدى الكليات عددًا من دفعة عام ١٩٩٦ المكونة من ٢٥٤ خريجًا من بينهم ١٧٢ سيدة، حيث التحق ١٢٤ سيدة بالدراسات الجامعية و٥٨ رجلًا. فما احتمال كل من الأحداث التالية؟

(أ) أن يكون الخريج سيدة.

(ب) أن يلتحق الخريج بالدراسات الجامعية.

(جـ) أن يكون الخريج سيدة وقد التحقت بالدراسات الجامعية.

(٧) **تحديد نوع الطفل**: افترض أن احتمال أن يكون الطفل المولود حديثًا من نوع معين هو ٥٠٪، في عائلة مكونة من أربعة أطفال. فما احتمال كل حدث معطى؟

(أ) كل الأطفال إناث.

(ب) كل الأطفال من نوع مختلف.

(جـ) كل الأطفال إما ذكور أو إناث.

(٨) عند إشارة المرور التي تتألف من ثلاثة ألوان لاحظنا أن:

٢٪ من السيارات تتوقف عند الإشارة الخضراء.

٦٥٪ من السيارات تتوقف عند الإشارة الصفراء (كما يطلب قانون المرور).

٩٧٪ من السيارات تتوقف عند الإشارة الحمراء.

قررنا مراقبة سلوك سيارة عند إشارة المرور. لنفترض أنه عند وصول السيارة إلى الإشارة، لون الإشارة عشوائي وأن احتمال أن يكون اللون هو الأخضر ٠,٦، احتمال أن يكون اللون هو الأصفر ٠,١، احتمال أن يكون اللون هو الأحمر ٠,٣.

(أ) ما احتمال أن تكون السيارة المراقبة قد توقفت؟

(ب) تجاوزت السيارة الإشارة. فما احتمال أن تكون قد تجاوزت الإشارة عندما كان لونها أحمرًا.

(٩) **أرقام الهاتف**: ما احتمال أن يتم بشكل عشوائي اختيار رقم هاتف مكوّن من سبعة أرقام دون تكرار أي منها؟

(١٠) ما احتمال اختيار رقم واحد عشوائي من ١ إلى ٩ يحقق الشروط التالية: عدد فردي أو من مضاعفات العدد ٤؟

(١١) في فصل الشتاء، أصابت موجة زكام ربع المواطنين. ثلث المواطنين تلقوا لقاحًا ضد الزكام، ولسبب عدم فاعلية اللقاح ١٠٠٪ نفترض أن مريضًا مصابًا بالزكام من ١٠ قد تلقى لقاحًا.

ما احتمال أن يكون مواطن من بين الذين تلقوا اللقاح مصابًا بالزكام؟