الوحدة الأولى: الجبر ـ الأعداد والعمليات عليها

Algebra _ Numbers and Operations

قسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء

١ – ١: خواص نظام الأعداد الحقيقية

جزء ١: الأعداد الحقيقية.

جزء ٢: خواص عمليتي الجمع والضرب على الأعداد الحقيقية.

جزء ٣: ترتيب الأعداد الحقيقية.

جزء ٤: خاصية الكثافة.

جزء ٥: الفترات.

١ – ٢: استخدام الآلة الحاسبة

جزء ١: استخدام الآلة الحاسبة.

جزء ٢: إيجاد قيمة تقريبية للجذر النوني باستخدام الآلة الحاسبة.

١ – ٣: تقدير الجذر التربيعي

جزء ١: تقدير الجذور التربيعية.

١ – ٤: حل المتباينات

جزء ١: حل المتباينات.

جزء ٢: حل متباينات متعددة الخطوات.

١ – ٥: القيمة المطلقة

جزء ١: حل معادلات تتضمن قيمة مطلقة.

جزء ٢: حل متباينات تتضمن قيمة مطلقة.

١ – ٦: دالة القيمة المطلقة

جزء ١: رسم بيان دوال القيمة المطلقة باستخدام بعض التحويلات الهندسية.

١ – ٧: المستقيمات المتوازية والمتعامدة

جزء ١: المستقيمات المتوازية.

جزء ٢: المستقيمات المتعامدة.

١ –٨: حل نظام معادلتين خطيتين

جزء ١: تحليل الرسوم البيانية.

جزء ٢: حل نظام بطريقة الحذف.

جزء ٣: حل نظام بطريقة التعويض.

١ – ٩: حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد

جزء ١: حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد بإكمال المربع.

جزء ٢: استخدام القانون لحل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد.

جزء ٣: حل معادلة باستخدام القانون.

جزء ٤: استخدام المميز Δ.

جزء ٥: مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة التربيعية.

جزء ٦: إيجاد مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة.

جزء ٧: إيجاد المعادلة التربيعية إذا علم جذراها.

جزء ٨: حل معادلات ومتباينات من الدرجة الثانية بيانيًّا.

مقدمة الوحدة

تبدأ هذه الوحدة بمراجعة عامة لمجموعات الأعداد ولخواص الأعداد الحقيقية وبعض العمليات الجبرية. ويلي ترشيد لاستخدام الآلة الحاسبة. (مثل حل بعض العمليات الحسابية المعقدة أو تقدير لبعض الجذور). يحل الطلاب مسائل تتضمن معادلات ومتباينات وقيمًا مطلقة. ثم يرسمون دالة القيمة المطلقة ويستخدمون دوال المرجع والانسحاب لوضع بيان لدوال أخرى.
يتعرف الطلاب المستقيمات المتوازية والمتعامدة، ويستخدمون الميل لمعرفة توازي أو تعامد أو تقاطع مستقيمين.
يحل الطلاب أنظمة معادلات خطية جبريًّا أو بيانيًّا. (يمكن التحقق من صحة الحل الجبري بيانيًّا).
يحل الطلاب معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد، ويستخدمون طريقة إكمال المربع أو المميز والقانون، ثم يتعرفون مجموع وناتج ضرب جذري معادلة ويحلون بعض المعادلات والمتباينات من الدرجة الثانية في متغير واحد بيانيًّا.
اسأل الطلاب: ماذا يعني لكم نظام المتباينات؟ ناقش الإجابات واقبل المعقول منها.
ثم اطلب إليهم إعطاء أمثلة من الحياة اليومية تنمذج بأنظمة متباينات.


الوحدة الأولى

الجبر – الأعداد والعمليات عليها
Algebra - Numbers and Operations

مشروع الوحدة: شراء الأسهم

١ مقدمة المشروع: أثناء العمل على هذا المشروع سوف تجمع بيانات عن إحدى الشركات. وتستخدم الصيغ لتحليل البيانات. ثم عليك أن تقرر كيفية تنظيم النتائج وعرضها باستخدام الرسوم البيانية وجداول البرمجة.

٢ الهدف: فهم كيف يدرس المحللون الاقتصاديون حركة الأسهم المالية لتحديد أي أسهم يشترون.

٣ اللوازم: آلة حاسبة – صحيفة محلية – أوراق رسم بياني.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ اختر شركة للبحث. اجمع المعلومات حول المنتجات التي تبيعها الشركة أو الاستشارات التي تقدمها، وتاريخ الشركة والممارسات الإدارية.

ب اطلع على صفحة الأوراق المالية في الصحيفة. اختر أحد الأسهم المتداولة في الأسواق المالية.
ما كان سعر الإغلاق لهذا السهم؟
ما كان أعلى سعر لهذا السهم خلال العام الماضي؟
أنشئ جدولًا يعرض أعلى سعر وأدنى سعر للسهم الواحد لعدة أيام.

جـ افترض أن لديك ٥٠٠٠ دينار استثمرتها في الأسهم المالية التي اخترتها. يشمل سعر الشراء ثمن السهم زائد ٩,٩٥ دنانير كرسوم في ختام هذا المشروع، بعت الأسهم الخاصة بك. هل حققت ربحًا أم تكبدت خسارة؟ اشرح.

٥ التقرير: ضعْ تقريرًا مفصلًا تبين فيه كيف استفدت من خواص نظام الأعداد الحقيقية لتنفيذ المشروع وللإجابة عن الأسئلة.

دروس الوحدة

خواص نظام الأعداد الحقيقية	استخدام الآلة الحاسبة	تقدير الجذر التربيعي	حل المتباينات	القيمة المطلقة
١–١	١–٢	١–٣	١–٤	١–٥
دالة القيمة المطلقة	المستقيمات المتوازية والمتعامدة	حل نظام معادلتين خطيتين	حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد	
١–٦	١–٧	١–٨	١–٩	

١٠

مشروع الوحدة

أسئلة حول التطبيق:

(أ) تحقق من اختيار الشركة. يستحسن أن تكون شركة وطنية. راجع المعلومات التي جمعها الطلاب حول الشركة (المنتجات التي تبيعها، الاستشارات التي تقدمها).
(ب) تحقق من أن الطلاب قد راجعوا صفحة الأوراق المالية في الصحيفة. اسألهم عن سبب اختيارهم السهم. هل سعر السهم دقيق أو وهمي؟
شجّع الطلاب على وضع جدول دقيق وواضح يعرض تغير أسعار السهم لعدة أيام، ويفضل ألّا تقل عن الأسبوع. اطلب

إليهم وضع تمثيل بياني يبيّن هذا التغيّر في السعر.

(جـ) راجع مع الطلاب كيفية احتساب الربح أو الخسارة. يجب ألّا ينسوا الرسوم وقيمتها ٩,٩٥ دنانير على السهم. تحقق من دقة الحسابات ومن وضوحها.

التقرير

تضع كل مجموعة من الطلاب تقريرًا مفصلًا حول اختيار الشركة ثم اختيار السهم. اسأل الطلاب عرض تغير سعر السهم بوضوح مستخدمين الجدول والتمثيل البياني الموضوع. يجب أن يكون العرض واضحًا والحسابات دقيقة.

اطلب إلى المجموعات المقارنة بين جدولها وجداول بقية المجموعات.

اسألهم: ما هي في رأيكم الأسباب التي أدت إلى الربح أو الخسارة؟ وهل يمكن تجنب الخسارة قبل وقوعها؟

سلّم التقييم:	
٤.	يعرض الطالب المشروع بشكل كامل. المعلومات عن الشركة واضحة ودقيقة. جدول عرض تغير سعر السهم منظم. حسابات الربح والخسارة صحيحة.
٣.	يعرض الطالب المشروع بشكل كامل. المعلومات عن الشركة واضحة. جدول عرض تغير سعر السهم منظم. معظم حسابات الربح والخسارة صحيحة.
٢.	يعرض الطالب المشروع بشكل كامل. المعلومات عن الشركة عامة وتنقصها الدقة. جدول عرض تغير سعر السهم يلزمه تنظيم. حسابات الربح والخسارة تتضمن أخطاء كثيرة.
١.	معظم العناصر في المشروع غير واضحة أو ناقصة وحسابات الربح والخسارة تشوبها أخطاء كثيرة.

الوحدة الأولى

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعرفت الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية.
- قارنت الأعداد الحقيقية ورتبتها.
- تعرفت القيمة المطلقة.
- استخدمت الأسس للتعبير عن الأعداد الكبيرة والصغيرة.
- تعرفت الجذور التربيعية.
- مثلت الفترات على خط الأعداد.

أضف إلى معلوماتك

يعتمد الغرب الأرقام 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، في كتابة الأعداد وهي تدعى «الأرقام العربية».

يرتبط كل رقم منها بعدد من الزوايا. يبيّن الرسم أدناه هذه العلاقة.

ماذا سوف تتعلم؟

- سوف تتعرف خاصية الكثافة والترتيب والفترات.
- سوف تحل متباينات مستخدمًا الجمع والطرح والضرب والقسمة.
- سوف تحل معادلات ومتباينات تتضمن قيمًا مطلقة.
- سوف ترسم بيانيًّا دوال القيمة المطلقة.
- سوف تتعرف على خصائص المستقيمات المتوازية والمتعامدة.
- سوف تحل أنظمة معادلات خطية.
- سوف تحل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد.
- سوف تتعرف حل متباينات تربيعيّة بيانيًّا.

المصطلحات الأساسية

الأعداد النسبية – الأعداد غير النسبية – الخاصية الإبدالية – الخاصية التجميعية – الخاصية التوزيعية – المحايد – المعكوس – الفترات – المتباينات – القيمة المطلقة – الانسحاب – الحذف – التعويض – المميز.

١١

١ـ١ : خواص نظام الأعداد الحقيقية

١ الأهداف

- التذكير بمجموعة الأعداد الحقيقية.
- التذكير بخواص عمليتي الجمع والضرب على الأعداد الحقيقية.
- معرفة خواص ترتيب الأعداد الحقيقية.
- معرفة خاصية الكثافة.
- معرفة الفترات المحدودة والفترات غير المحدودة.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

الأعداد غير النسبية – مجموعة مرتبة – خاصية الكثافة – الفترات غير المحدودة.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة – بطاقات – مصورات – عناصر محسوسة.

٤ التمهيد

اطلب إلى الطلاب حل النشاط:

(١) قارن بين كل عددين في ما يلي: $\frac{١}{٣}$ ، $٠,\overline{٣}$

π ، $\sqrt{١٠}$

$١,١٠١١٠١١١$ ، $\sqrt{٢}$

(٢) مثّل الأعداد: ٣,٤ ، –٦,٢ ، $\frac{٧}{٤}$ ، $٢,\overline{١٦}$ على خط أعداد.

(٣) أعط ٣ أعداد بين ١,٥ ، ١,٦.

ناقش مع الطلاب في التمرين (١) كيف قارنوا بين $\frac{١}{٣}$ ، $٠,\overline{٣}$ ، وفي التمرين (٢) اسألهم كيف يمكن تمثيل $٢,\overline{١٦}$ على خط أعداد، ثم اسألهم: إذا كان لدينا عددان حقيقيان مختلفان، هل يمكن إيجاد أعداد حقيقية بين هذين العددين؟

١ـ١

خواص نظام الأعداد الحقيقية
Real Numbers System Properties

دعنا نفكر ونتناقش

شغل العدد π (النسبة بين طول الدائرة وطول قطرها) الباحثين في الرياضيات لآلاف السنين.

اعتمد أرخميدس على الدائرة المحوطة (الداخلية) والدائرة المحيطة (الخارجية) بمضلع منتظم من ٩٦ ضلعًا للوصول إلى $\frac{٢٢٣}{٧١} < \pi < \frac{٢٢}{٧}$ وتسمى متباينة أرخميدس.

واستخدم الصينيون الكسر $\frac{٣٥٥}{١١٣}$ كقيمة تقريبية لـِ π.

في بداية القرن الثامن عشر اعتمد الرمز اليوناني π.

استخدم آلتك الحاسبة:

١ أوجد ٣ قيم تقريبية لـِ π مستخدمًا متباينة أرخميدس.

٢ π هو عدد غير نسبي. تنحصر قيمته بين ٣,١٤ ، ٣,١٥.
إعطاء مثال لإحدى القيم: مثلًا: $\pi \simeq ٣,١٤١٥٩٢٦$.
هل يمكن تحديد عدد القيم التقريبية لـِ π ؟

سوف تتعلم
- خاصية الكثافة
- الترتيب
- القيمة المطلقة
- الفترات

يعد أرخميدس (القرن السادس قبل الميلاد) من أعظم علماء الرياضيات وأبو الهندسة، ومن أشهر اكتشافاته طرق حساب المساحات والأحجام.
حدّد قيمة π بدقة عالية $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

١ – الأعداد الحقيقية Real Numbers

تعلم أن الأعداد النسبية (ن) يمكن كتابتها في صورة أعداد عشرية أو (كسور عشرية منتهية مثل ٣,٢٥ ، ٠,٤٨٧ أو بصورة أعداد عشرية دورية (أو كسور عشرية دورية مثل $٢,\overline{١٦}$ ، $٠,\overline{٣}$ ، ...) وهناك مجموعة أخرى من الأعداد تسمى أعدادًا غير نسبية لا يمكن كتابتها على الصورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ، ب $\in$ ص، ب $\neq ٠$ مثل $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٢}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٧}}$ ، ...

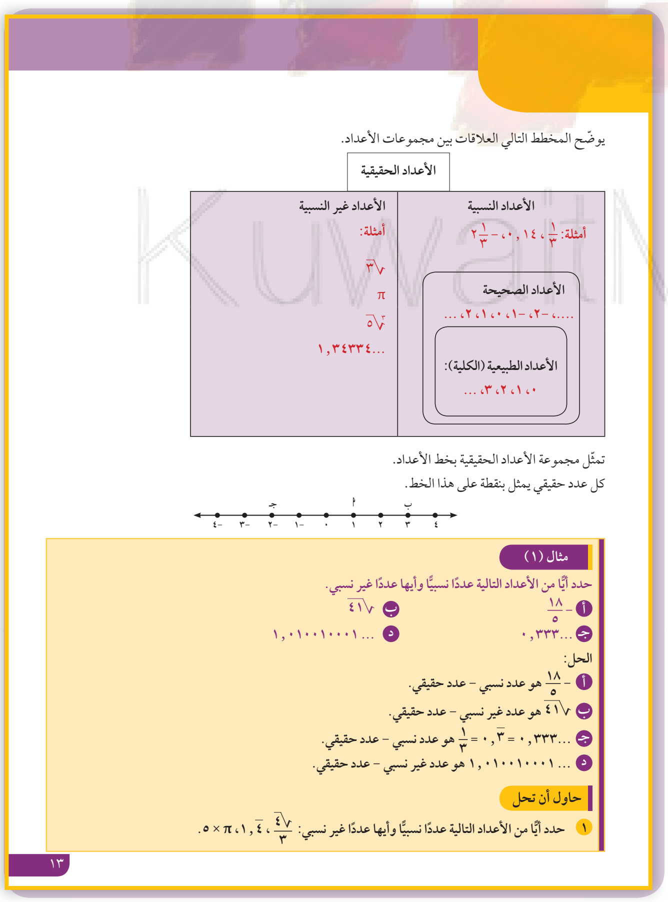
وكما الأعداد العشرية التي أرقامها العشرية لا تنتهي ولا تتكرر مثل $\pi \simeq ٣,١٤١٥٩٢٦٥٣٥٩...$ فالأرقام العشرية في π لا تنتهي ولا تتكرر.

والأعداد غير النسبية ($\bar{ن}$) من الممكن أن تتضمن كسورًا عشرية ذات نمط في كتابة أرقامها مثل ... ٠,٣٠٣٣٠٣٣٣

اتحاد مجموعتي الأعداد النسبية وغير النسبية يشكل مجموعة تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية أي أن ن $\cup$ $\bar{ن}$ = ح.

القراءة في الرياضيات:
$\sqrt{٢}$ هو الجذر التربيعي الموجب للعدد ٢.
– $\sqrt{٢}$ هو الجذر التربيعي السالب للعدد ٢.

١٢



يوضّح المخطط التالي العلاقات بين مجموعات الأعداد.

تمثّل مجموعة الأعداد الحقيقية بخط الأعداد.

كل عدد حقيقي يمثل بنقطة على هذا الخط.

مثال (١)

حدد أيًا من الأعداد التالية عددًا نسبيًا وأيها عددًا غير نسبي.

أ $-\frac{١٨}{٥}$ ب $\sqrt{٤١}$

جـ ٠,٣٣٣... د ١,٠١٠٠١٠٠٠١ ...

الحل:

أ $-\frac{١٨}{٥}$ هو عدد نسبي – عدد حقيقي.

ب $\sqrt{٤١}$ هو عدد غير نسبي – عدد حقيقي.

جـ $٠,٣٣٣... = ٠,\overline{٣} = \frac{١}{٣}$ هو عدد نسبي – عدد حقيقي.

د ١,٠١٠٠١٠٠٠١ ... هو عدد غير نسبي – عدد حقيقي.

حاول أن تحل

١ حدد أيًا من الأعداد التالية عددًا نسبيًا وأيها عددًا غير نسبي: $\frac{\sqrt{٤}}{٣}$ ، $١,\overline{٤}$ ، $\pi \times ٥$.

١٣

٥ التدريس

اعرض على السبورة مخطط الأعداد الحقيقية. أشر إلى أن الكسور العشرية الدورية ليست أعدادًا غير نسبية لأنه يمكن كتابتها في صورة كسور. أشر في المخطط إلى أن مجموعة الأعداد الحقيقية ح تتضمن مجموعة الأعداد النسبية ن ومجموعة الأعداد غير النسبية نَ. ذكر الطلاب بأنه يمكن تمثيل الأعداد الحقيقية على خط الأعداد. أشر إلى أنه يتعذر تمثيل بعض الأعداد بدقة.

راجع مع الطلاب خواص عمليتي الجمع والضرب.

اسألهم: هل عملية الطرح إبدالية؟ ناقش الإجابات، ثم اسأل: هل يمكن توزيع الضرب على الطرح:

أ × (ب − جـ) ≟ (أ × ب) − (أ × جـ).

اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا أمثلة خاصة عن خواص عمليتي الجمع والضرب.

اعرض معهم جدول ترتيب الأعداد الحقيقية، ثم اطلب إليهم وضع أمثلة تطبيقية.

قد يجد الطلاب صعوبة في فهم خاصية الكثافة. ارسم على السبورة قسمًا من خط الأعداد.

ناقش معهم فكرة أنه يوجد عدد غير منته من الأعداد بين ١، ٢ كذلك يوجد عدد غير منته من الأعداد بين ٢، ٣.

يعمل الطلاب أزواجًا يكتب أحدهم متباينة ثم يكتب الآخر رمز الفترة وتمثيلًا بيانيًّا ثم يتبادلون الأدوار. اختر بعض الأمثلة لتعرض على السبورة.

٦ الربط

اعتمد أرخميدس على الدائرة المحوطة والدائرة المحيطة بمضلع منتظم من ٩٦ ضلعًا لإيجاد قيمة تقريبية لـ π.

استخدم البابليون الكسر $\frac{٢٥}{٨}$ والمصريون $\frac{٢٥٦}{٨١}$. ووصل غياث الدين الكاشي إلى قيمة تقريبية صحيحة حتى ١٦ رقمًا عشريًّا ٣,١٤١٥٩٢٦٥٣٥٨٩٧٩٣٢ وكان ذلك في القرن الخامس عشر.

---

٢ – خواص عمليتي الجمع والضرب على الأعداد الحقيقية

Properties of Addition and Multiplication of Real Numbers

لكل أ، ب، جـ ∈ ح فإن:

الخاصية	الجمع	الضرب
الإبدالية	أ + ب = ب + أ	أ × ب = ب × أ
التجميعية	(أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ)	(أ × ب) × جـ = أ × (ب × جـ)
المحايد	أ + ٠ = ٠ + أ = أ	أ × ١ = ١ × أ = أ
المعكوس (النظير)	أ + (−أ) = (−أ) + أ = ٠	أ × $\frac{١}{أ}$ = $\frac{١}{أ}$ × أ = ١ (أ ≠ ٠)
التوزيعية	أ × (ب + جـ) = أ × ب + أ × جـ (ب + جـ) × أ = ب × أ + جـ × أ	

٣ – ترتيب الأعداد الحقيقية

Order of Real Numbers

مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة مرتبة، هذا يعني أننا نستطيع مقارنة أي عددين حقيقيين باستخدام رموز علاقات الترتيب (> أو < أو =). والقول أن عددًا ما هو «أصغر من» أو «أكبر من» أو «يساوي» الآخر.

الترتيب وخواصه

Properties of Order

ترتيب الأعداد الحقيقية

ليكن أ، ب عددين حقيقيين

الكتابة بالرموز	التعريف	القراءة
أ > ب	أ − ب موجب	أ أكبر من ب
أ < ب	أ − ب سالب	أ أصغر من ب
أ ≥ ب	أ − ب موجب أو صفر	أ أكبر من أو يساوي ب
أ ≤ ب	أ − ب سالب أو صفر	أ أصغر من أو يساوي ب

حقيقة هامة:

لأي عددين حقيقيين أ، ب.
تعبير واحد فقط مما يلي هو صحيح:
أ > ب
أ = ب
أ < ب

لتكن أ، ب، جـ أعداد حقيقية.

الخاصية	القاعدة	ملاحظة
التعدي	إذا كان أ ≤ ب، ب ≤ جـ فإن أ ≤ جـ	
الجمع	إذا كان أ ≤ ب، فإن أ + جـ ≤ ب + جـ	
الطرح	إذا كان أ ≤ ب، فإن أ − جـ ≤ ب − جـ	
الضرب	إذا كان أ ≤ ب، جـ > ٠، فإن أجـ ≤ ب جـ إذا كان أ ≤ ب، جـ < ٠، فإن أجـ ≥ ب جـ	لاحظ أن علاقة الترتيب تنعكس عندما يكون العدد جـ سالبًا.
القسمة	إذا كان أ ≤ ب، جـ > ٠، فإن $\frac{أ}{جـ} \le \frac{ب}{جـ}$ إذا كان أ ≤ ب، جـ < ٠، فإن $\frac{أ}{جـ} \ge \frac{ب}{جـ}$	لاحظ أن علاقة الترتيب تنعكس عندما يكون العدد جـ سالبًا.

٤ – خاصية الكثافة

Density Property

يتسع وعاء لعدد محدد من الحجارة (تبقى فراغات كبيرة). كما أنّه يتسع لعدد أكبر من الحصى الصغيرة (تقل الفراغات) ويمكن ملؤه كذلك بعدد أكبر بكثير من الرمل (تصبح الفراغات نادرة).

وماذا إذا مُلئ الوعاء بأجسام أصغر حجمًا من الرمل؟

كلما صغر حجم الأجسام المستخدمة لملء الوعاء زادت الكثافة.

يمكن تشبيه سعة الوعاء بطول فترة على خط الأعداد.

معلومة مفيدة:

تعتمد كثافة الجسم على شدة تراص جزيئات المادة فيه.

يوجد بين أي نقطتين مختلفتين على خط الأعداد عدد لا نهائي من النقاط، وبالتالي بين أي عددين حقيقيين مختلفين يوجد عدد لانهائي من الأعداد الحقيقية.

مثال (٢)

أعط خمسة أعداد حقيقية بين ٣,١٤ ، ٣,١٥.

الحل: تعلم أن ٣,١٤ = ٣,١٤٠ ، ٣,١٥ = ٣,١٥٠

∴ الأعداد الحقيقية مثل: ٣,١٤١ ، ٣,١٤٢ ، ٣,١٤٥٦ ، ٣,١٤٤٤٨ ، π.

حاول أن تحل

٢ أعط ستة أعداد حقيقية بين ١,٤١٤، ١,٤١٥.


Intervals

٥ – الفترات

الفترة مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

لاحظ أن ليس كل مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية تمثل فترة. لماذا؟

يمكن استخدام المتباينات للتعبير عن الفترات في مجموعة الأعداد الحقيقية، وكذلك يمكن تمثيل الفترات على خط الأعداد.

مثلًا: يعبّر عن الفترة: (−∞، ٣) بالمتباينة، س < ٣.

وهي مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من ٣، وتمثّل بيانيًا كما يلي:

سوف نميز بين نوعين من الفترات: **الفترات المحدودة والفترات غير المحدودة.**

أولًا: الفترات المحدودة

الجدول التالي يوضح أنواع الفترات المحدودة: لتكن ٲ، ب أعدادًا حقيقية.

رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني
[ٲ، ب]	مغلقة	ٲ ⩽ س ⩽ ب	ٲ ب
(ٲ، ب)	مفتوحة	ٲ < س < ب	ٲ ب
[ٲ، ب)	نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	ٲ ⩽ س < ب	ٲ ب
(ٲ، ب]	نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	ٲ < س ⩽ ب	ٲ ب
الأعداد ٲ، ب هما نقطتا الحدود لكل فترة حيث ٲ الحد الأدنى للفترة، ب الحد الأعلى للفترة.			

١٦


ثانيا: الفترات غير المحدودة

الجدول التالي يوضح بعض الفترات غير المحدودة: ليكن ٲ، ب ∈ ح.

رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني
[ٲ، ∞)	نصف مغلقة وغير محدودة من الأعلى	س ⩾ ٲ	ٲ
(ٲ، ∞)	مفتوحة وغير محدودة	س > ٲ	ٲ
(−∞، ب]	نصف مفتوحة وغير محدودة من الأسفل	س ⩽ ب	ب
(−∞، ب)	مفتوحة وغير محدودة من الأسفل	س < ب	ب

مثال (٣)

اكتب نوع الفترة ورمز المتباينة والتمثيل البياني لكل من الفترات التالية:

أ (−١، ٣] ب [٤، ٥] ج (−∞، ٢) د [٤، +∞)

الحل:

نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني
أ فترة نصف مفتوحة (أو نصف مغلقة)	−١ < س ≤ ٣	−١ ٠ ١ ٢ ٣
ب فترة مغلقة	٤ ≤ س ≤ ٥	٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥
ج فترة مفتوحة وغير محدودة من أسفل	س < ٢	−٢ −١ ٠ ١ ٢ ٣
د فترة نصف مغلقة وغير محدودة من أعلى	س ≥ ٤	−١ ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦

حاول أن تحل

٣ اكتب نوع الفترة ورمز المتباينة والتمثيل البياني لكل من الفترات التالية:

أ (−٢، ١) ب (−∞، ٣]

٤ مثل كلًّا مما يلي على خط الأعداد:

أ [٢، ∞) ∪ (−∞، −٣) ب [−١، ∞) ∪ (−∞، −٥]

١٧

أضف إلى معلوماتك

اعتمد الرياضيون طرقًا عديدة لإيجاد قيمة π. منها:

طريقة أولى: عند قسمة ١ على ١ + س^{٢} يكون الناتج

$$١ - س^{٢} + س^{٤} - س^{٦} + \dots$$

$$١ \;\big)\; ١ + س^{٢}$$

$$-١ - س^{٢}$$

$$- س^{٢}$$

$$+ س^{٢} + س^{٤}$$

$$+ س^{٤}$$

$$- س^{٤} - س^{٦}$$

$$- س^{٦}$$

... وهكذا.

فيكون $\frac{١}{١ + س^{٢}} = ١ - س^{٢} + س^{٤} - س^{٦} + \dots$

وباستخدام التكامل المحدود:

$$\int_{٠}^{س} \frac{ءت}{١ + ت^{٢}} = \int_{٠}^{س} (١ - ت^{٢} + ت^{٤} - ت^{٦} + \dots)\, ءت$$

$$ظا^{-١}(س) = س - \frac{س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٥}}{٥} - \frac{س^{٧}}{٧} + \dots$$

بوضع س = ١

$$ظا^{-١}(١) = ١ - \frac{١}{٣} + \frac{١}{٥} - \frac{١}{٧} + \dots$$

$$\therefore \frac{\pi}{٤} = ١ - \frac{١}{٣} + \frac{١}{٥} - \frac{١}{٧} + \dots$$

$$\therefore \pi = ٤ - \frac{٤}{٣} + \frac{٤}{٥} - \frac{٤}{٧} + \dots$$

طريقة ثانية: باستخدام متسلسلة ماكلورين:

$$ظا^{-١}(س) = \sum_{ن=٠}^{\infty} (-١)^{ن} \times \frac{س^{٢ن+١}}{٢ن + ١}$$

صحيحة لكل قيم س إذا كانت س = ١

$$\text{يكون: } ظا^{-١}(١) = \sum_{ن=٠}^{\infty} (-١)^{ن} \times \frac{١}{٢ن + ١}$$

$$\therefore \frac{\pi}{٤} = ١ - \frac{١}{٣} + \frac{١}{٥} - \frac{١}{٧} + \dots$$

$$\therefore \pi = ٤ - \frac{٤}{٣} + \frac{٤}{٥} - \frac{٤}{٧} + \dots$$

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في كتابة علاقة الترتيب عند الضرب في عدد سالب أو القسمة على عدد سالب. شدد على أن علاقة الترتيب تنعكس عند الضرب أو القسمة في عدد سالب.

مثال (١)

١ < ٣، اطلب إلى أحد الطلاب رسم خط أعداد ووضع ١، ٣ على الخط ثم ضرب المتباينة في (–٢). اطلب إلى الطالب وضع –٢، –٦ على خط الأعداد ثم إكمال: –٢ ... –٦ بعد أن تسأل أيهما أقرب إلى الصفر.

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يحلون فقرات «حاول أن تحل». تأكد من استيعابهم لمفهوم القيمة المطلقة واستخدامهم خواص نظام الأعداد الحقيقية بطريقة صحيحة.

اختبار سريع

١ (أ) مثّل الأعداد: $-\frac{٣}{٤}$، $\sqrt{٧}$، ٣,٦ على خط أعداد.

(ب) اكتب نوع الفترة ورمزها والتمثيل البياني للفترة [–٣، ∞).

٢ اكتب الخاصية التي استخدمت في كتابة كلّ من العبارات التالية:

(أ) –٧ × (٢ × ٥) = –٧ × (٥ × ٢) الخاصية الإبدالية

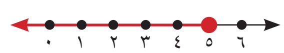
(ب) ٣ × (٤ + ٠) = ٣ × ٤ خاصية المحايد الجمعي.

(جـ) $\frac{٢}{٥} \times \left(\frac{٤}{٧} + \frac{١}{٤}\right) = \frac{٢}{٥} \times \frac{١}{٤} + \frac{٢}{٥} \times \frac{٤}{٧}$ الخاصية التوزيعية

٣ اكتب نوع الفترة، رمز المتباينة والتمثيل البياني لكل من الفترتين: [–٢، ٤)، (–∞، ٥]

نصف مفتوحة، –٢ ≤ س < ٤،

نصف مغلقة وغير محدودة من الأسفل، س ≤ ٥



التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ ١-١

خواص نظام الأعداد الحقيقية
Real Numbers System Properties

المجموعة أ تمارين أساسية

حدد أي من الأعداد التالية عدد نسبي وأي منها عدد غير نسبي.

(١) ٤

(٢) π

(٣) $-\sqrt{٠,٤}$

استخدم علاقة > أو < أو = لملء الفراغ بحيث تصبح كل عبارة مما يلي صحيحة.

(٤) ٣,١٤ ☐ π (٥) ٠,١٤ ☐ $\sqrt{١٠}$ (٦) $٠,\overline{٣}$ ☐ ٠,٣

(٧) اكتب أربعة أعداد بين العددين ٥,١٣ ، ٥,١٤.

(٨) **سؤال مفتوح**: اكتب متباينة يتوافق حلها مع الرسم البياني.

(أ)

(ب)

(٩) **تفكير ناقد**: في النظام س < ٨ و س > أ.

(أ) هل هناك أي قيم لِـ أ بحيث يكون للنظام حل في مجموعة الأعداد الحقيقية؟ في حالة الإيجاب، ما هي هذه القيم؟

(ب) هل هناك أي قيم لِـ أ بحيث لا توجد حلول حقيقية للنظام؟ في حالة الإيجاب، ما هي هذه القيم؟

(جـ) كرّر السؤالين (أ)، (ب) مع المتباينتين س < ٨ أو س > أ.

(أ)

(ب)

٩

(١٠) **التعليل**: ما أكبر عدد من الأناشيد التي يتراوح زمنها بين ٣، ٥ دقائق يمكن وضعها على قرص مدمج من ٩٠ دقيقة؟ وما أصغر عدد؟ فسّر إجابتك.

(١١) **الاختيار من متعدد**: مثلث متطابق الأضلاع، طول ضلعه ٤. فإن ارتفاع هذا المثلث هو: ______

(أ) $٢\sqrt{٣}$ (ب) $٤\sqrt{٣}$

(جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (د) ٤

(١٢) **التحدّي**: هل يمكن إيجاد عددين صحيحين ناتج ضربهما –١٢ ومجموعهما –٣؟ فسّر.

(١٣) إذا كان ب من مضاعفات العدد ٣، ك من مضاعفات العدد ٥ فأي مما يلي صحيح؟ ______

(أ) ب + ك هو عدد زوجي. (ب) ب × ك هو عدد فردي.

(جـ) ٥ب + ٣ك هو من مضاعفات العدد ١٥. (د) ٣ب + ٥ك هو من مضاعفات العدد ١٥.

(١٤) **أكمل الجدول التالي:**

التعبير	رمز المتباينة	رمز الفترة	التمثيل البياني
ص أصغر من ٥	ص		٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥
ت أصغر من أو تساوي ٦	ت ٦		٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧
ز	ز > –٤		–٥ –٤ –٣ –٢ –١ ٠
س			–٢ ٠ ٢

(١٥) عبّر عن كلٍّ مما يلي باستخدام رموز المتباينة:

(أ) س عدد حقيقي غير سالب.

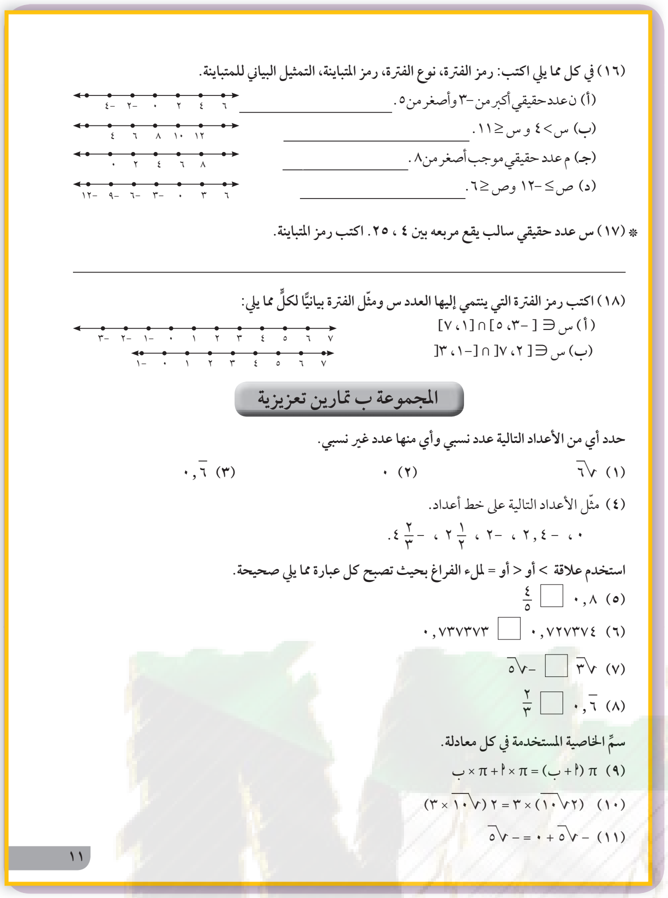
(ب) ص عدد حقيقي أصغر من الصفر.

(جـ) س عدد حقيقي أكبر من أو يساوي –٢ وأصغر من ٤.

(د) س عدد حقيقي أكبر من ٣ أو أصغر من –١.

(هـ) ص عدد حقيقي أكبر من أو يساوي ٥ أو أصغر من ٣.

١٠


(١٦) في كل مما يلي اكتب: رمز الفترة، نوع الفترة، رمز المتباينة، التمثيل البياني للمتباينة.

(أ) ن عدد حقيقي أكبر من -٣ وأصغر من ٥. ______

(ب) س > ٤ و س ≤ ١١. ______

(جـ) م عدد حقيقي موجب أصغر من ٨. ______

(د) ص ≤ -١٢ وص ≤ ٦. ______

* (١٧) س عدد حقيقي سالب يقع مربعه بين ٤ ، ٢٥. اكتب رمز المتباينة.

(١٨) اكتب رمز الفترة التي ينتمي إليها العدد س ومثّل الفترة بيانيًّا لكلٍّ مما يلي:

(أ) س ∈ [-٣، ٥] ∩ [١، ٧]

(ب) س ∈]٢، ٧[∩ [-١، ٣[

المجموعة ب تمارين تعزيزية

حدد أي من الأعداد التالية عدد نسبي وأي منها عدد غير نسبي.

(١) $\sqrt{٦}$ (٢) ٠ (٣) ٠,$\overline{٦}$

(٤) مثّل الأعداد التالية على خط أعداد.

٠ ، -٤,٢ ، -٢ ، $٢\frac{١}{٢}$ ، $-٤\frac{٢}{٣}$.

استخدم علاقة > أو < أو = لملء الفراغ بحيث تصبح كل عبارة مما يلي صحيحة.

(٥) ٠,٨ ☐ $\frac{٤}{٥}$

(٦) ٠,٧٢٧٣٧٤ ☐ ٠,٧٣٧٣٧٣

(٧) $\sqrt{٣}$ ☐ $-\sqrt{٥}$

(٨) ٠,$\overline{٦}$ ☐ $\frac{٢}{٣}$

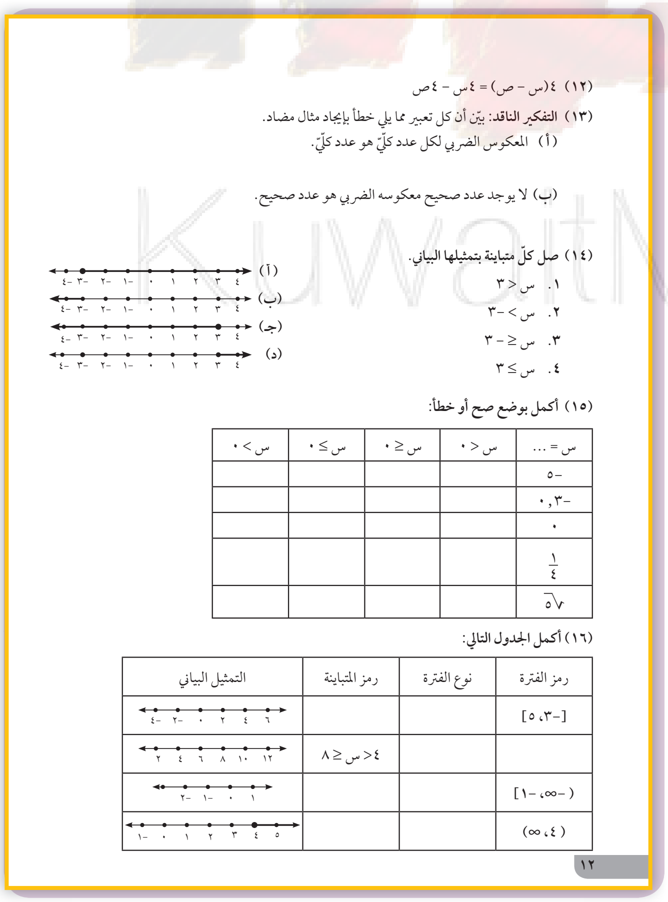
سمِّ الخاصية المستخدمة في كل معادلة.

(٩) π (أ + ب) = π × أ + π × ب

(١٠) (٢$\sqrt{١٠}$) × ٣ = ٢ ($\sqrt{١٠}$ × ٣)

(١١) $-\sqrt{٥}$ + ٠ = $-\sqrt{٥}$

١١


(١٢) ٤(س - ص) = ٤س - ٤ص

(١٣) **التفكير الناقد:** بيّن أن كل تعبير مما يلي خطأ بإيجاد مثال مضاد.

(أ) المعكوس الضربي لكل عدد كلّيّ هو عدد كلّيّ.

(ب) لا يوجد عدد صحيح معكوسه الضربي هو عدد صحيح.

(١٤) صل كلّ متباينة بتمثيلها البياني.

١. س < ٣

٢. س > -٣

٣. س ≤ -٣

٤. س ≥ ٣

(أ) (ب) (جـ) (د)

(١٥) أكمل بوضع صح أو خطأ:

س = ...	س > ٠	س ≤ ٠	س ≥ ٠	س < ٠
-٥				
-٣,٠				
٠				
$\frac{١}{٤}$				
$\sqrt{٥}$				

(١٦) أكمل الجدول التالي:

رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني
[-٣، ٥]			
		٤ < س ≤ ٨	
(-∞، -١]			
(٤، ∞)			

١٢

٩ إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

١ ، ٢ تتنوع الإجابات، تحقق من عمل الطلاب.

٣ كلا، لا يمكن تحديد القيم التقريبية.

«حاول أن تحل»

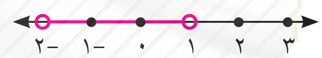
١ $\frac{\sqrt{٤}}{٣}$: عدد نسبي، عدد حقيقي.

١,$\overline{٤}$: عدد نسبي، عدد حقيقي.

٥ × π : عدد غير نسبي، عدد حقيقي.

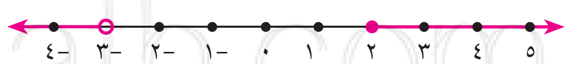
٢ قد تختلف الإجابات مثال: ١,٤١٤١ ، ١,٤١٤٢ ، ١,٤١٤٥ ، ١,٤١٤٧ ، ١,٤١٤٨ ، ١,٤١٤٩.

٣ (أ) (-٢، ١) فترة مفتوحة، -٢ < س < ١

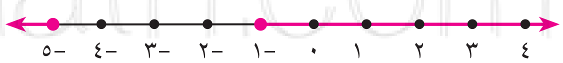


(ب) (-∞، ٣]، فترة نصف مغلقة وغير محدودة من الأسفل، س ≤ ٣

٤ (أ)



(ب)



١ـ٢: استخدام الآلة الحاسبة

١ الأهداف

- يتعرف رموز بعض التعليمات.
- يستخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيم تعابير تحوي أكثر من عملية.
- يستخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة تقريبية للجذر النوني.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

البايت – البت.

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

٤ التمهيد

اسأل الطلاب: كيف كان الأقدمون يوجدون الجذر التربيعي لعدد موجب؟ (قبل ظهور الآلة الحاسبة).

أخبرهم عن أنظمة العد مع التركيز على نظام العد الثنائي.

أرقام النظام العشري هي ٠، ١، ٢، ٣، ... ، ٩. والنظام الثنائي Binairy system يستخدم فقط الرقمين ٠، ١.

مثلًا:

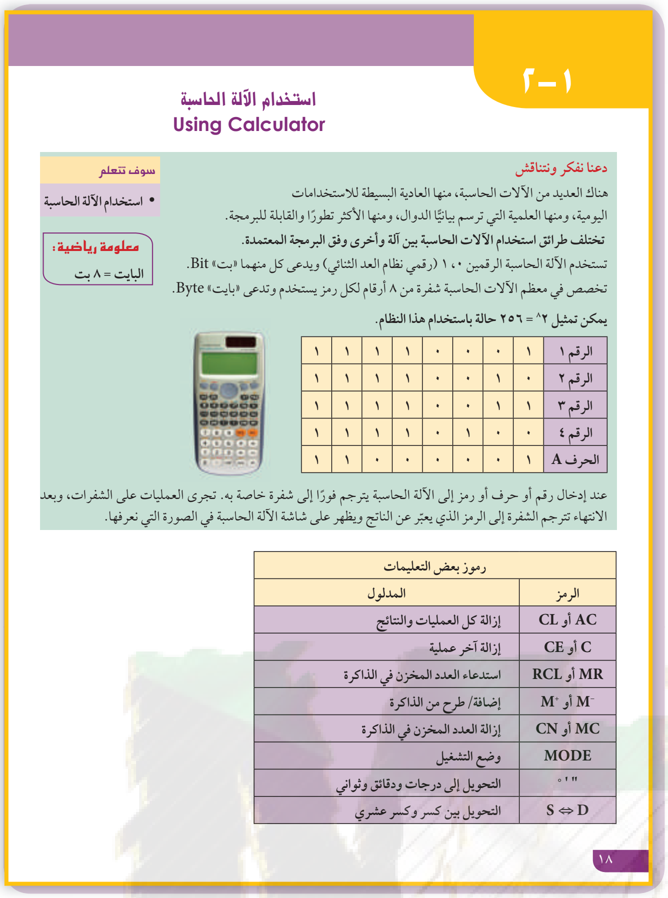
العدد من النظام العشري	العدد من النظام الثنائي
٠	٠
١	١
٢	١٠
٣	١١
٤	١٠٠
⋮	⋮

وعند إيجاد العدد من النظام الثنائي الذي يقابل العدد ١٣ مثلًا نتبع إحدى الطرق ومنها إجراء عملية القسمة على ٢ وأخذ الباقي كالتالي:

١٣ ÷ ٢ = ٦ والباقي ١

٦ ÷ ٢ = ٣ والباقي ٠

٣ ÷ ٢ = ١ والباقي ١



١ـ٢

استخدام الآلة الحاسبة
Using Calculator

دعنا نفكر ونتناقش

هناك العديد من الآلات الحاسبة، منها العادية البسيطة للاستخدامات اليومية، ومنها العلمية التي ترسم بيانيًا الدوال، ومنها الأكثر تطورًا والقابلة للبرمجة.

تختلف طرائق استخدام الآلات الحاسبة بين آلة وأخرى وفق البرمجة المعتمدة.

تستخدم الآلة الحاسبة الرقمين ٠، ١ (رقمي نظام العد الثنائي) ويدعى كل منهما «بت» Bit.

تخصص في معظم الآلات الحاسبة شفرة من ٨ أرقام لكل رمز يستخدم وتدعى «بايت» Byte.

يمكن تمثيل ٢^٨ = ٢٥٦ حالة باستخدام هذا النظام.

الرقم ١	١	٠	٠	٠	١	١	١	١
الرقم ٢	٠	١	٠	٠	١	١	١	١
الرقم ٣	١	١	٠	٠	١	١	١	١
الرقم ٤	٠	٠	١	٠	١	١	١	١
الحرف A	١	٠	٠	٠	٠	٠	١	١

عند إدخال رقم أو حرف أو رمز إلى الآلة الحاسبة يترجم فورًا إلى شفرة خاصة به. تجرى العمليات على الشفرات، وبعد الانتهاء تترجم الشفرة إلى الرمز الذي يعبّر عن الناتج ويظهر على شاشة الآلة الحاسبة في الصورة التي نعرفها.

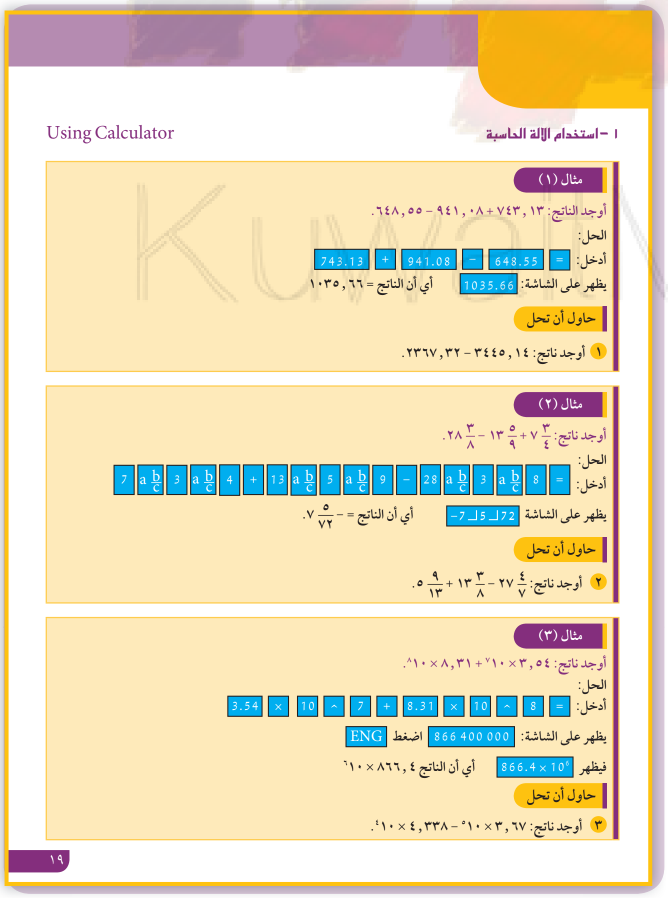
سوف تتعلم

- استخدام الآلة الحاسبة

معلومة رياضية:
البايت = ٨ بت

رموز بعض التعليمات	
الرمز	**المدلول**
AC أو CL	إزالة كل العمليات والنتائج
C أو CE	إزالة آخر عملية
MR أو RCL	استدعاء العدد المخزن في الذاكرة
M^- أو M^+	إضافة/ طرح من الذاكرة
MC أو CN	إزالة العدد المخزن في الذاكرة
MODE	وضع التشغيل
° ' "	التحويل إلى درجات ودقائق وثواني
S ⇔ D	التحويل بين كسر وكسر عشري

١٨



١ – استخدام الآلة الحاسبة — Using Calculator

مثال (١)

أوجد الناتج: ١٣,٧٤٣ + ٠٨,٩٤١ − ٥٥,٦٤٨.

الحل:

أدخل: 743.13 + 941.08 − 648.55 =

يظهر على الشاشة: 1035.66 أي أن الناتج = ٦٦,١٠٣٥

حاول أن تحل

١ أوجد ناتج: ١٤,٣٤٤٥ − ٣٢,٢٣٦٧.

مثال (٢)

أوجد ناتج: $٧\frac{٣}{٤} + ١٣\frac{٥}{٩} - ٢٨\frac{٣}{٨}$.

الحل:

أدخل: 7 a b/c 3 a b/c 4 + 13 a b/c 5 a b/c 9 − 28 a b/c 3 a b/c 8 =

يظهر على الشاشة −7 ⌟5 ⌟72 أي أن الناتج = $-٧\frac{٥}{٧٢}$.

حاول أن تحل

٢ أوجد ناتج: $٢٧\frac{٤}{٧} - ١٣\frac{٣}{٨} + ٥\frac{٩}{١٣}$.

مثال (٣)

أوجد ناتج: $٣,٥٤ \times ١٠^{٧} + ٨,٣١ \times ١٠^{٨}$.

الحل:

أدخل: 3.54 × 10 ^ 7 + 8.31 × 10 ^ 8 =

يظهر على الشاشة: 866 400 000 اضغط ENG

فيظهر 866.4×10^6 أي أن الناتج $٨٦٦,٤ \times ١٠^{٦}$

حاول أن تحل

٣ أوجد ناتج: $٣,٦٧ \times ١٠^{٥} - ٤,٣٣٨ \times ١٠^{٤}$.

١٩

١ ÷ ٢ = ٠ والباقي ١

فيكون ١٣ يقابل $(١١٠١)_{٢}$. شدد على المحافظة على ترتيب الأرقام.

والعكس: لتحويل العدد $(١١٠١)_{٢}$ من النظام الثنائي إلى النظام العشري نتبع التالي:

$$١ \times (٢)^{٠} + ٠ \times (٢)^{١} + ١ \times (٢)^{٢} + ١ \times (٢)^{٣}$$

$$= ١ + ٤ + ٨ = ١٣$$

نبه الطلاب إلى أن الكيلوبايت يساوي ١٠٢٤ بايتًا وليس ١٠٠٠ كما يعتقد. ذلك أن الكيلوبايت يساوي: $(٢)^{١٠} = ١٠٢٤$.

٥ التدريس

راجع مع الطلاب معنى بعض المفاتيح. شدد على أهمية استخدام المفتاح $\boxed{a\frac{b}{c}}$ أو $\frac{\square}{\square}$ في عمليات القسمة بهدف التقليل من أخطاء التقريب في العمليات الحسابية. ذكر الطلاب بأن الجذر النوني $(\sqrt[ن]{\square})$ لعدد يكتب $(\square)^{\frac{١}{ن}}$ أي أن العدد يرفع إلى القوة $\frac{١}{ن}$.

راجع مع الطلاب «ترتيب العمليات» واستخدام الأقواس في إدخال الأعداد. سوف يستخدم الطلاب الآلة الحاسبة لاحقًا في حل أنظمة معادلات خطية ومعادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد. يمكن إعطاء بعض الأمثلة.

٦ الربط

لا يوجد.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

معظم الأخطاء ناتجة عن سوء استخدام الآلة الحاسبة، (ترتيب العمليات أو البرمجة).

شدّد على أن البرمجة تختلف من آلة حاسبة إلى أخرى وبالتالي على كل طالب التعرف على آلته الحاسبة وقراءة الدليل (أو القرص) المرفق.

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يحلون فقرات «حاول أن تحل». تأكد من صحة استخدامهم الآلة الحاسبة.

مثال (٤)

أوجد ناتج:

أ $\sqrt[٥]{٣٢}$ ب $\frac{٥٦,٤ + ٢}{٣١,٣ \times ٠,٨}$

الحل:

أ اضغط: = 32 $\sqrt[x]{\ }$ 5 يظهر على الشاشة 2 وبالتالي $\sqrt[٥]{٣٢} = ٢$

ب اضغط: = (0.8 × 31.3) ÷ (2 + 56.4)

يظهر على الشاشة 2.332 268 371 الإجابة: ٢,٣٣٢ تقريبًا

حاول أن تحل

٤ أوجد: أ $\sqrt[٤]{٢٤٠١}$ ب $١٣,٨ + \frac{٤}{٨,١ \times ١,٢}$

٢ - إيجاد قيمة تقريبية للجذر النوني باستخدام الآلة الحاسبة:

Estimating nth Root Using Calculator

مثال (٥)

أوجد: $\sqrt[٥]{٢٢٥}$، مقربًا الناتج إلى أقرب عدد كلي.

الحل:

اضغط: = 225 $\sqrt[x]{\ }$ 5

يظهر على الشاشة 2.954 176 939 أي أن الناتج = ٣ تقريبًا.

حاول أن تحل

٥ أوجد الناتج مقربًا إلى أقرب عدد كلي: أ $\sqrt[٧]{١٢٤٦}$ ب $\sqrt[٤]{٥٤٦,١}$

مثال (٦)

أوجد: $\sqrt[٣]{\frac{٢١٤}{٢٣}}$ مقربًا الناتج إلى أقرب عدد كلي.

الحل:

اضغط: = (23 $a\frac{b}{c}$ 214) $\sqrt[3]{\ }$. يظهر على الشاشة 2.103 271 381 أي أن الناتج = ٢ تقريبًا.

حاول أن تحل

٦ أوجد: $\sqrt[٣]{\frac{٤١٢٤}{٥٧}}$ مقربًا الناتج إلى أقرب عدد كلي.

٢٠

اختبار سريع

أوجد الناتج:

❶ $\frac{(٣,٧٠٥)^{٤} \times \sqrt[٣]{٨}}{(١,٧)^{٤}}$ ٤٥,١٢١٨٧٧

❷ $\sqrt[٣]{\frac{٣٢٧,٤}{٨٤,٥}} \simeq ١,٥٧$

❾ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

❶ ١٠٧٧,٨٢

❷ $\frac{١٤٤٧٩}{٧٢٨}$

❸ ٣٢٣ ٦٢٠

❹ (أ) ٧

(ب) ١٤,٢١١٥

❺ (أ) ٣ (ب) ٥

❻ ٤

تمرَّنْ ١-٢

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

استخدام الآلة الحاسبة
Using Calculator

المجموعة أ تمارين أساسية

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد كل ناتج.

(١) $١ + ٣\left[\left(\frac{٢٢}{١٣} + ٨\right) \div ٥\right]$ ____________

(٢) $٩ + [٤ - (١٢ - ٩)^{٢}]^{٣}$ ____________

(٣) $\left(\frac{٧}{٨} + \frac{٣}{٤}\right)^{٢} + \left(\frac{٥}{٦} - \frac{١}{٤}\right)^{٣}$ اكتب الناتج في صورة كسر ____________

(٤) $٣,٠١٥ \times |٤ - \pi| + ٨,١٤ \times \frac{٧}{٣}$ ____________

(٥) $\sqrt[٣]{-٨٠٤ \times ٣١٥}$ ____________

(٦) $\sqrt[٤]{\frac{٣,٠٤}{١٢٥}} \times (٥,٣٠١)^{٢}$ ____________

المجموعة ب تمارين تعزيزية

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد كل ناتج.

(١) $٢٧ \times [٥^{٢} \div (٤^{٢} \times ٣^{٢}) + ٢]$

(٢) $\frac{٤\pi \times (٤,٦)^{٣}}{٣}$

(٣) $\sqrt{٢} + (\sqrt{٣} + \sqrt{٥}) \times (\sqrt{٧} - \sqrt{٢})$

(٤) $٧\frac{٣}{٤} - ٥\frac{٢}{٥} + ٣\frac{٤}{٧} \times ٦\frac{١}{٣}$

(٥) $٦,٤١٨ \times ١٠^{٥} + ٣,١٤١٥ \times ١٠^{٤} - ١,٦٠٦ \times ١٠^{٣}$

(٦) $\sqrt[٥]{(٣١٤ + ٦٠٢)^{٣}}$

(٧) $(\sqrt{٢} \times \sqrt{٣} + \sqrt{٤} \times \sqrt{٥}) \times \sqrt{٦}$

(٨) $٣\pi - ٨١,١٤ + \frac{\pi^{٢}}{٣,١٤}$

١٣

١ـ٣: تقدير الجذر التربيعي

١ الأهداف

- تعرف الجذر التربيعي.
- تعرف خصائص الجذور التربيعية.
- إيجاد الجذر التربيعي لعدد حقيقي.
- تقدير الجذر التربيعي لعدد حقيقي.
- استخدام الجذر التربيعي في حل المسائل.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

جذر تربيعي.

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show) – مصورات.

٤ التمهيد

اسأل الطلاب أن يشرحوا ما يمثل $\sqrt{س}$، $-\sqrt{س}$، عندما يكون س عددًا حقيقيًا موجبًا.

اسأل: متى يكون لعددين المربع نفسه؟ اطلب إليهم إعطاء بعض الأمثلة.

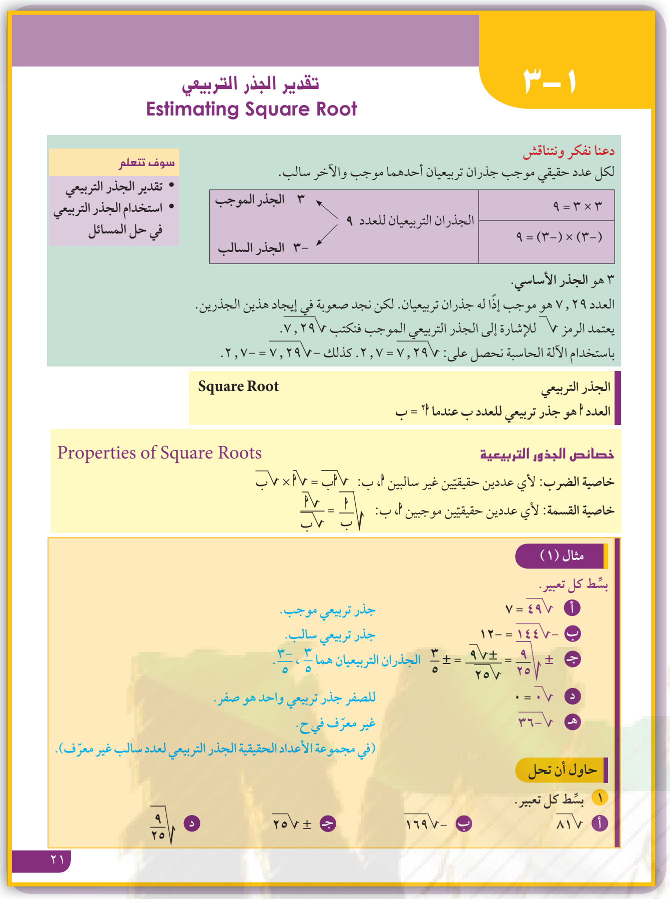
- ما الفرق بين $(-١١)^٢$، $-(١١)^٢$؟
- هل $\left(\frac{أ}{ب}\right)^٢ = \frac{أ^٢}{ب^٢}$، ب $\neq$ ٠؟
- استخدم ورقة مربعات لتبيّن للطلاب العلاقة بين مربع عدد موجب ومساحة مربع طول ضلعه يساوي هذا العدد.
- راجع مع الطلاب عمليات ضرب الكسور، واطلب إليهم إعطاء أمثلة عددية.

٥ التدريس

شدد على التمييز بين مربع عدد وجذره التربيعي.

كرّر توضيح وجود جذرين تربيعين لكل عدد موجب، أحد الجذرين موجب والآخر سالب. الصفر له جذر تربيعي واحد. الأعداد الحقيقية السالبة لا جذر تربيعي لها.

- إذا كان $أ^٢ =$ ب فإن أ جذر تربيعي للعدد ب. أشر إلى أن أ هو أحد الجذرين.


١ـ٣

تقدير الجذر التربيعي
Estimating Square Root

دعنا نفكر ونتناقش

لكل عدد حقيقي موجب جذران تربيعيان أحدهما موجب والآخر سالب.

٣ × ٣ = ٩	الجذران التربيعيان للعدد ٩: ٣ الجذر الموجب، −٣ الجذر السالب
(−٣) × (−٣) = ٩	

سوف تتعلم
- تقدير الجذر التربيعي
- استخدام الجذر التربيعي في حل المسائل

٣ هو الجذر الأساسي.

العدد ٧,٢٩ هو موجب إذًا له جذران تربيعيان. لكن نجد صعوبة في إيجاد هذين الجذرين.

يعتمد الرمز $\sqrt{}$ للإشارة إلى الجذر التربيعي الموجب فنكتب $\sqrt{٧,٢٩}$.

باستخدام الآلة الحاسبة نحصل على: $\sqrt{٧,٢٩} = ٢,٧$. كذلك $-\sqrt{٧,٢٩} = -٢,٧$.

الجذر التربيعي — Square Root

العدد أ هو جذر تربيعي للعدد ب عندما $أ^٢ =$ ب

خصائص الجذور التربيعية — Properties of Square Roots

خاصية الضرب: لأي عددين حقيقيّين غير سالبين أ، ب: $\sqrt{أب} = \sqrt{أ} \times \sqrt{ب}$

خاصية القسمة: لأي عددين حقيقيّين موجبين أ، ب: $\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$

مثال (١)

بسِّط كل تعبير.

أ $\sqrt{٤٩} = ٧$ جذر تربيعي موجب.

ب $-\sqrt{١٤٤} = -١٢$ جذر تربيعي سالب.

ج $\pm\sqrt{\frac{٩}{٢٥}} = \frac{\pm\sqrt{٩}}{\sqrt{٢٥}} = \pm\frac{٣}{٥}$ الجذران التربيعيان هما $\frac{٣}{٥}$، $\frac{-٣}{٥}$.

د $\sqrt{٠} = ٠$ للصفر جذر تربيعي واحد هو صفر.

هـ $\sqrt{-٣٦}$ غير معرّف في ح.

(في مجموعة الأعداد الحقيقية الجذر التربيعي لعدد سالب غير معرّف).

حاول أن تحل

١ بسِّط كل تعبير.

أ $\sqrt{٨١}$ ب $-\sqrt{١٦٩}$ ج $\pm\sqrt{٢٥}$ د $\sqrt{\frac{٩}{٢٥}}$

٢١


بعض الجذور التربيعية هي أعداد نسبية، وبعضها الآخر أعداد غير نسبية.

فمثلًا من الجذور النسبية: $\sqrt{١٢١} = ١١$، $-\sqrt{١,٢١} = -١,١$، $\pm\sqrt{\frac{٨١}{١٠٠}} = \pm\frac{٩}{١٠}$

من الجذور غير النسبية: $\sqrt{٥} \simeq ٢,٢٣٦$، $\sqrt{\frac{٣}{٧}} \simeq ٠,٦٥٤٧$

مثال (٢)

حدّد ما إذا كان كل عدد مما يلي عددًا نسبيًا أو غير نسبي.

أ $\sqrt{٦٤} = ٨$ عدد نسبي

ب باستخدام الآلة الحاسبة $-\sqrt{٤,٩} \simeq -٢,٢١٣٥٩٤٣...$ عدد غير نسبي

ج باستخدام الآلة الحاسبة $\sqrt{\frac{١}{٧}} \simeq ٠,٣٧٧٩٦٤٤٧٣$ عدد غير نسبي

مصطلح رياضي:
في الصيغة العشرية:
العدد النسبي هو عدد منته أو متكرر (دوري).
العدد غير النسبي هو عدد غير منته دون تكرار.

حاول أن تحل

٢ حدّد ما إن كان كل عدد مما يلي عددًا نسبيًا أو غير نسبي.

أ $\sqrt{١٣}$

ب $-\sqrt{٦٢٥}$

ج $-\sqrt{١٠٠٠}$

د $\sqrt{\frac{٢}{١٥}}$

١ – تقدير الجذور التربيعية — Estimating Square Roots

مربعات الأعداد الطبيعية تسمى مربعات كاملة Perfect Squares.

العدد الطبيعي	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
المربع الكامل	١	٤	٩	١٦	٢٥	٣٦	٤٩	٦٤	٨١	١٠٠	١٢١	١٤٤

يمكن استخدام المربعات الكاملة لتقدير قيمة بعض الجذور التربيعية دون استخدام الآلة الحاسبة.

٢٢

مثال (١)

$(-١٢)^٢ = ١٤٤$ إذًا (-١٢) هو جذر تربيعي للعدد ١٤٤

ويوجد جذر آخر هو ‎+١٢.

اطلب إليهم إعطاء أمثلة عددية عن خصائص الجذور التربيعية. اسألهم: هل $\sqrt{\frac{أ \times ب}{جـ}} = \frac{\sqrt{أ} \times \sqrt{ب}}{\sqrt{جـ}}$ ؟

أشر إلى الشرط أن يكون كلّ من أ، ب، جـ عددًا موجبًا.

ناقش مع الطلاب الفرق بين $\sqrt{س^٢}$، $(\sqrt{س})^٢$ ؟

اسأل: متى يتساوى العددان $\sqrt{س^٢}$، $(\sqrt{س})^٢$ ؟

ومتى يختلفان؟

أكمل: $\sqrt{(\pi - ٤)^٢} = |\pi - ٤| = ٤ - \pi$

مثال (١ «جـ»)

أشر أن للعددين $+\frac{٣}{٥}$، $-\frac{٣}{٥}$ المربع نفسه.

اسأل الطلاب: هل $\sqrt{أ \times ب} = \sqrt{أ} \times \sqrt{ب}$ ؟

الصيغة صحيحة إذا كان العددان غير سالبين.

اطلب إليهم إعطاء أمثلة مضادة.

في المثال (٣) أشر إلى أن $\sqrt{١٥,٤١}$ هو عدد موجب، وبالتالي العددان المتتاليان هما موجبان.

اسأل: بين أي عددين صحيحين يوجد $-\sqrt{٢٨,٣٤}$؟

بين −٦، −٥

اطلب إلى الطلاب إيجاد الجذر التربيعي الموجب لأعداد أكبر من ١ ثم لأعداد بين ٠، ١. سوف يكتشفون أن الجذر التربيعي لكسر بين ٠، ١ هو أكبر من الكسر نفسه.

أمثلة بديلة

(١) حدد ما إذا كان كل عدد نسبيًّا أم غير نسبي.

(أ) $\sqrt{١٤٤}$ نسبي (ب) $-\sqrt{\frac{١}{٥}}$ غير نسبي

(جـ) $\sqrt{٦,٢٥}$ نسبي (د) $\sqrt{\pi}$ غير نسبي

(٢) الصيغة $م = \sqrt{س^٢ + (٣س)^٢}$ تعطي طول قطر مستطيل طوله يساوي ثلاثة أمثال عرضه. ماطول قطر المستطيل إذا كان س = ٦ سم؟ حوالى ١٨,٩٧ سم

(٣) أوجد قيمة $\sqrt{٢٨,٣٤}$ إلى أقرب جزء من عشرة. ٥,٣

مثال (٣)

حدّد بين أي عددين طبيعيين (كليين) متتاليين يوجد $\sqrt{١٥,٤١}$، ثم قدّر قيمته.

الحل:

$٩ < ١٥,٤١ < ١٦$ ١٥,٤١ هو بين المربعين الكاملين المتتاليين ٩، ١٦.

$\sqrt{٩} < \sqrt{١٥,٤١} < \sqrt{١٦}$ باستخراج الجذر التربيعي لكل عدد

$٣ < \sqrt{١٥,٤١} < ٤$ تبسيط

إذًا $\sqrt{١٥,٤١}$ هو بين ٣، ٤. وحيث إن العدد ١٥,٤١ أقرب إلى ١٦ فإن $\sqrt{١٥,٤١}$ يكون قريبًا من ٤ وهو يساوي تقريبًا ٣,٨ أو ٣,٩.

معلومة رياضية:

لأي أعداد موجبة وجذورها التربيعية الموجبة الترتيب نفسه.

حاول أن تحل

٣ حدّد بين أي عددين صحيحين يوجد العدد $-\sqrt{٣٠,٨}$، ثم قدّر قيمته.

يمكن إيجاد قيمة تقريبية للجذور التربيعية باستخدام الآلة الحاسبة.

مثال (٤)

حدّد بين أي عددين كليين متتاليين يقع $\sqrt{٢٨,٦٣}$، ثم أوجد قيمته لأقرب جزء من عشرة مستخدمًا الآلة الحاسبة.

الحل:

$٢٥ < ٢٨,٦٣ < ٣٦$ ٢٨,٦٣ هو بين المربعين الكاملين المتتاليين ٢٥، ٣٦.

$\sqrt{٢٥} < \sqrt{٢٨,٦٣} < \sqrt{٣٦}$ باستخراج الجذر التربيعي لكل عدد

$٥ < \sqrt{٢٨,٦٣} < ٦$ تبسيط

إذًا $\sqrt{٢٨,٦٣}$ هو بين ٥، ٦.

باستخدام الآلة الحاسبة: √ 28.63 = 5.350 700 889

أي أن $\sqrt{٢٨,٦٣}$ يساوي تقريبًا ٥,٤.

حاول أن تحل

٤ حدّد بين أي عددين كليين متتاليين يقع $\sqrt{١٣,٧}$، ثم أوجد قيمته لأقرب جزء من عشرة مستخدمًا الآلة الحاسبة.

٢٣

مثال (٥) تطبيقات حياتية

يساعد تقدير الجذور التربيعية على إيجاد طول وتر مثلث قائم الزاوية. أوجد طول وتر مثلث، طولا ضلعي زاويته القائمة هما ٥ سم، ٧ سم.

الحل:

$٥^٢ + ٧^٢ = ٢٥ + ٤٩ = ٧٤$ نظرية فيثاغورث

٧٤ يقع بين المربعين الكاملين المتتاليين ٦٤، ٨١.

∴ طول وتر المثلث هو بين ٨، ٩ سم.

باستخدام الآلة الحاسبة $\sqrt{٥^٢ + ٧^٢} \simeq ٨,٦٠٢٣$

طول وتر المثلث $\simeq ٨,٦$ سم.

تذكر:

في المثلث قائم الزاوية، مربع الوتر = مجموع مربعي طولي ضلعي الزاوية القائمة.

حاول أن تحل

٥ أوجد طول وتر مثلث قائم الزاوية، طولا ضلعي زاويته القائمة هما ٩ سم، ١٣ سم.

مثال (٦)

يسقط جسم من ارتفاع ٩ أمتار. تبين المعادلة $ع = ٤,٩ن^٢$ العلاقة بين الارتفاع ع بالأمتار والزمن ن بالثواني المستغرق للوصول إلى سطح الأرض. ما الزمن اللازم ليصل إلى الأرض؟

الحل:

$ع = ٤,٩ن^٢$

$ن^٢ = \frac{٩}{٤,٩}$

$ن = \sqrt{\frac{٩}{٤,٩}}$ أو $ن = -\sqrt{\frac{٩}{٤,٩}}$ مرفوضة

$ن \simeq ١,٣٥٥$ ثانية باستخدام الآلة الحاسبة

أي يلزم حوالى ثانية ونصف ليصل الجسم إلى الأرض.

حاول أن تحل

٦ من مثال (٦)، ما الزمن اللازم لوصول جسم إلى الأرض إذا سقط عن ارتفاع ١٤ مترًا؟

٢٤

٦ الربط

المثالان (٥)، (٦) يؤمنان الربط بين استخدام الآلة الحاسبة ومسائل حياتية بحاجة إلى إيجاد الحلول لها.

المثال (٥): القيمة الدقيقة لطول الوتر هي $\sqrt{٤٧}$ سم، ولكن في التطبيق علينا معرفة قيمة تقريبية دقيقة قدر الإمكان لطول الوتر، لذلك نستخدم الآلة الحاسبة.

المثال (٦): لا يعطي الجواب الرياضي $\sqrt{\frac{٩}{٤,٩}}$ فكرة واضحة عن الزمن لإيجاد قيمة تقريبية للزمن اللازم. توجد قيمة $\sqrt{\frac{٩}{٤,٩}}$ مستخدمين الآلة الحاسبة. ١,٣٥٥ ثانية تعطي فكرة أوضح بكثير من $\sqrt{\frac{٩}{٤,٩}}$

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ بعض الطلاب عند مقارنة جذر تربيعي سالب بعددين سالبين. أعطِ أمثلة متعددة لتركيز هذه المقارنة ($٧- > \sqrt{٧٤}- > ٦-$).

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يحلون فقرات «حاول أن تحل»، تأكد من أنهم قادرين على مقارنة الجذور التربيعية للأعداد الصماء مع عددين كليين.

اختبار سريع

١ حدد بين أي عددين طبيعيين يوجد $\sqrt{١٤,٥}$. ٤،٣

أكمل:

٢ $٣ > \sqrt{٧}$

٣ $٤- < \sqrt{٨}-$

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ ١-٣

تقدير الجذر التربيعي

Estimating Square Root

المجموعة أ تمارين أساسية

بسِّط كل تعبير.

(١) $\sqrt{١٢١}$

(٢) $\sqrt{\frac{٠,٠١}{١,٢١}}$

(٣) $\sqrt{١١٠٢٥}$

حدد بين أي عددين صحيحين متتاليين يقع كل جذر تربيعي، ثمّ قدر قيمته.

(٤) $\sqrt{٢٤}$

(٥) $\sqrt{٣\pi}$

(٦) $-\sqrt{٢٠٣}$

(٧) $-\sqrt{١٦,٤٢}$

أوجد الجذر التربيعي لكل عدد.

(٨) ٤٠٠

(٩) ٧٢٩

(١٠) ٤٠٨٠٤

(١١) **التفكير الناقد:** أي عدد غير الصفر يساوي جذره التربيعي الأساسي (الموجب)؟

(١٢) **السؤال المفتوح:** أوجد عددين أ، ب بين ١، ٢٠ بحيث يكون $أ^{٢} + ب^{٢}$ مربعًا كاملًا.

١٤

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ (أ) ٩

(ب) −١٣

(ج) ±٥

(د) $\frac{\text{٣}}{\text{٥}}$

٢ (أ) غير نسبي

(ب) نسبي

(ج) غير نسبي

(د) غير نسبي

٣ $-\text{٦} < -\sqrt{\text{٣٠,٨}} < -\text{٥}$

٤ $\text{٣} < \sqrt{\text{١٣,٧}} < \text{٤}$ ، ٣,٧

٥ طول الوتر: ١٥,٨ سم.

٦ ع = ٤,٩ $\text{ن}^{\text{٢}}$ ن ≃ ١,٧ ثانية.

(١٣) **الفيزياء**: عند إلقاء جسم من مكان مرتفع، فإن الزمن ن بالثواني اللازم ليقطع مسافة ف بالأمتار يعطى بالصيغة: ن = $\sqrt{\frac{\text{ف}}{\text{٥}}}$.

(أ) أوجد الزمن اللازم ليسقط جسم من ارتفاع ١٢٠ مترًا.

(ب) **التفكير المنطقي**: إذا سقط جسم من ارتفاع يساوي ٤ أمثال الارتفاع في السؤال (أ)، فهل الزمن اللازم للسقوط هو ٤ أمثال الزمن المستغرق في (أ)؟ فسِّر.

في التمارين (١٤-١٩) أجب بصح أو خطأ. في حالة الخطأ أعط مثالًا مضادًا.

(١٤) لكل عدد غير سالب جذران تربيعيان.

(١٥) الجذر التربيعي لكل عدد موجب هو دائمًا أصغر من هذا العدد.

(١٦) الجذر التربيعي لكل مربع كامل زوجي هو أيضًا عدد زوجي.

(١٧) $\sqrt{\text{أ} + \text{ب}} = \sqrt{\text{أ}} + \sqrt{\text{ب}}$.

(١٨) $\sqrt{\text{أ}^{\text{٢}} + \text{ب}^{\text{٢}}} = \text{أ} + \text{ب}$.

(١٩) $\sqrt{\text{أ} \times \text{ب}} = \sqrt{\text{أ}} \times \sqrt{\text{ب}}$ حيث أ، ب ∈ ح.

المجموعة ب تمارين تعزيزية

بسِّط كل تعبير.

(١) $\sqrt{\text{٦٢٥}}$

(٢) $\sqrt{\frac{\text{٤٩}}{\text{٦٤}}}$

(٣) $\sqrt{\text{١٨} \times \text{٩٨}}$

حدد بين أي عددين صحيحين متتاليين يقع كل جذر تربيعي، ثمّ قدر قيمته.

(٤) $\sqrt{\text{١٠١}}$

(٥) $-\sqrt{\text{١٣٠}}$

(٦) $\sqrt{\text{١٧٥}}$

أوجد الجذر التربيعي لكل عدد.

(٧) ٥٧٦

(٨) $\frac{\text{٦٤}}{\text{٨١}}$

(٩) ١,٦٩

* (١٠) ثلاث قطع أرض مربعة الشكل أطوال أضلاعها س − ١ ، س ، س + ١ بالأمتار. مجموع مساحات القطع الثلاث يساوي ١٥١٢٠ مترًا مربعًا.

(أ) اكتب معادلة وحلها لمعرفة قيمة $\text{س}^{\text{٢}}$.

(ب) قدّر طول ضلع كل قطعة أرض.

١-٤: حل المتباينات

١ الأهداف

- يستخدم خاصية المعكوس الجمعي في حل المتباينات.
- يستخدم خاصية المعكوس الضربي في حل المتباينات.
- ينمذج متباينات من الدرجة الأولى ويحلها.
- يحل متباينات من الدرجة الأولى في متغيّر واحد، ويمثل الحل على خط الأعداد.
- يحل متباينات متعددة الخطوات.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

متباينة – دائرة مغلقة – دائرة مفتوحة.

٣ الأدوات والوسائل

بلاطات جبرية – مسطرة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show) – مصورات.

٤ التمهيد

اسأل الطلاب:

(أ) كيف تقارن بين عددين؟

(ب) كيف ترتب الأعداد تصاعديًّا أو تنازليًّا؟

(جـ) ما هو حل المعادلة: ٣س – ٧ = ٥س + ٣؟

(د) في المعادلة ٣ س – ٧ = ٥س + ٣، كيف ستكون العلاقة بين طرفيها إذا عوضنا عن س = –٨؟

(هـ) في المعادلة ٣س – ٧ = ٥س + ٣، كيف ستكون العلاقة بين طرفيها إذا عوضنا عن س = ٤؟

٥ التدريس

عندما نريد حل معادلة من الدرجة الأولى من متغير واحد، نبدأ أولًا بعزل المتغير في طرف واحد من المعادلة والقيمة الثابتة في الطرف الآخر. وهذا العمل ينطبق تمامًا عندما نريد إيجاد مجموعة حلول متباينة من الدرجة الأولى مع متغير واحد.

ركز مع الطلاب مسألة معامل المتغيّر في المتباينة عندما تكون قيمته سالبة. أعط أمثلة متعددة لتتأكد من فهمهم. اعرض أمثلة عددية تبين الفرق في هذه الحالة بين حل المعادلة وحل المتباينة.

مثال بديل

‎−٦س = ١٨، س = $\frac{١٨}{−٦}$ = −٣ ولكن −٦س < ١٨.

نضرب الطرفين بالعدد $\left(\frac{−١}{٦}\right)$ فتنعكس علاقة الترتيب

$\left(\frac{−١}{٦}\right)$ (−٦س) > $\left(−\frac{١}{٦}\right)$ (١٨).

س > −٣ أي أن مجموعة الحل هي (−∞ ، −٣).

وبالتطبيق العددي نجد:

إذا كانت س = −٤ نحصل على (−٦)(−٤) = ٢٤ > ١٨ وهذا صحيح.

أما إذا أخذنا س = −٢ فنحصل على ١٢ > ١٨ وهذا غير صحيح.

٦ الربط

المثالان (٤)، (٦) يمثلان الربط بين المسائل الحياتية والمتباينات.

المثال (٤): يعطي فكرة عن استخدام المتباينات لحل مسائل حياتية. يجب الانتباه إلى أن ن ≥ ٩٠٠ تعني في الرياضيات ن ∈ [٩٠٠، ∞)، ولكن في الواقع ن تأخذ فقط قيمًا كلية بأن تمثل عدد المشتركين.

المثال (٦): مسألة حياتية بامتياز تسمح بمقارنة المعطيات وحل مسألة المتباينات ثم اتخاذ القرار. لاحظ أن قيمة س هنا هي أيضًا عدد كلي.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

إن أكثر ما يمكن أن يقع فيه الطلاب من أخطاء، هو عدم عكس علاقة الترتيب في الاختصار عندما يكون معامل المتغير سالبًا. أعط أمثلة متنوعة لتساعدهم على تخطي هذه المشكلة.

٨ التقييم

راقب الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من أنهم قد توصلوا إلى فهم كيفية إيجاد مجموعة الحلول.

مثال (٣)

أوجد مجموعة حل المتباينة $\frac{س}{−٢}$ < ١، ومثل الحلول بيانيًّا على خط الأعداد.

الحل: $\frac{س}{−٢}$ < ١

−٢ × $\left(\frac{س}{−٢}\right)$ > ١ × (−٢) اضرب كلًّا من الطرفين في المعكوس الضربي (−٢) واعكس علاقة الترتيب

س > −٢ بسط

مثل بيانيًّا

مجموعة الحل = (−٢، ∞)

معلومة مفيدة:

إذا كان أ < ب، جـ > ٠، فإن أجـ < ب جـ، $\frac{أ}{جـ}$ < $\frac{ب}{جـ}$.

إذا كان أ < ب، جـ < ٠، فإن أجـ > ب جـ، $\frac{أ}{جـ}$ > $\frac{ب}{جـ}$.

حاول أن تحل

٣ أوجد مجموعة حل المتباينة $\frac{ب}{٤}$ ≤ ١، ومثل الحلول بيانيًّا على خط الأعداد.

مثال (٤)

عمل تجاري: تعلن شركة لتوصيل خدمات الإنترنت عن الفرصة التالية الموضحة. هدف الشركة هو تحقيق مبلغ إضافي على الأقل ٤٥٠٠ دينار شهريًّا. كم مشتركًا جديدًا يلزم أن تجتذبهم الشركة؟

الحل:

الألفاظ: عدد المشتركين الجدد مضروبًا بـ ٥ دنانير يكون على الأقل ٤٥٠٠ دينار.

ليكن ن = عدد المشتركين الجدد

المتباينة ن × ٥ ≥ ٤٥٠٠

٥ن ≥ ٤٥٠٠

$\frac{٥ن}{٥}$ ≥ $\frac{٤٥٠٠}{٥}$ اقسم طرفي المتباينة على ٥

ن ≥ ٩٠٠ بسط

يلزم أن تجتذب ٩٠٠ مشترك جديد على الأقل.

التحقق من معقولية الإجابة: الإجابة معقولة لأن ٥ × ٩٠٠ هو ٤٥٠٠، وأي عدد أكبر من ٩٠٠ مضروبًا بـ ٥ ينتج عددًا أكبر من ٤٥٠٠.

حاول أن تحل

٤ الحد الأقصى لحمولة مصعد في فندق ١٠٠٠ كجم. افرض أن متوسط وزن النزيل ٨٠ كجم، فكم نزيلًا يمكن للمصعد أن يحملهم بأمان؟

٢٧

حل متباينات متعددة الخطوات:

يتطلب حل المتباينات أحيانًا استخدام أكثر من خطوة. وسنستخدم بلاطات الجبر في نمذجة متباينات من الدرجة الأولى حتى نفهم حلها. اعتبر أن ▮ تمثل المجهول س، البلاطة الحمراء ■ تمثل −١، البلاطة الصفراء ■ تمثل +١

أ حل المتباينة س − ٢ < ٣.

س − ٢ < ٣ نمذجة المتباينة باستخدام البلاطات

س − ٢ + ٢ < ٣ + ٢ إضافة +٢ إلى طرفي المتباينة

س < ٥ التبسيط بحذف أزواج البلاطات الصفرية

كل بلاطة خضراء أصغر من ٥ بلاطات صفراء، إذًا س < ٥.

ب حل المتباينة ٢س + ٣ > −١.

٢س + ٣ > −١ نمذجة المتباينة باستخدام البلاطات

٢س + ٣ − ٣ > −١ − ٣ إضافة −٣ إلى طرفي المتباينة

٢س > −٤ التبسيط بحذف أزواج البلاطات الصفرية

$\frac{٢س}{٢}$ > $\frac{−٤}{٢}$ قسم كل طرف إلى مجموعتين متساويتين

س > −٢

كل بلاطة خضراء أكبر من بلاطتين حمراوين. إذًا س > −٢

٢٨


مثال (٥)

أوجد مجموعة حل المتباينة: ٢(م + ٢) − ٣م ≤ ١ ومثّل مجموعة الحل على خط الأعداد.

الحل:

٢(م + ٢) − ٣م ≤ ١

٢م + ٤ − ٣م ≤ ١ خاصيّة التوزيع

٢م − ٣م + ٤ ≤ ١ خاصيّة الإبدال

−م + ٤ ≤ ١ تبسيط

−م + ٤ − ٤ ≤ ١ − ٤ طرح ٤ من طرفي المتباينة

−م ≤ −٣

م ≥ ٣ تنعكس علاقة الترتيب

مجموعة الحل = (−∞، ٣].

تذكر: المتباينة أ ≥ س ≥ ب تكافئ س ≤ أ و س ≥ ب

حاول أن تحل

٥ أوجد مجموعة حل المتباينة ثم مثّل الحل على خط الأعداد: (أ) ٣ (س + ٤) + ٥ س ≥ ٢.

(ب) −٣ ≥ −١ − ٢س > ٣

مثال (٦) تطبيقات حياتية

يشتري أحد المخازن أكثر من ٣٠ عبوة شامبو في الشهر. يدفع ٣ دنانير ثمن العبوة الواحدة، ٢٥ دينارًا كلفة تسليم البضاعة. عرضت شركة منافسة على صاحب المخزن عبوات بسعر ٤ دنانير للواحدة، ٥ دنانير فقط كلفة تسليم البضاعة، مدعية أن أسعارها هي الأرخص. هل هذا صحيح؟

الحل:

ليكن س عدد العبوات التي يشتريها المخزن في الشهر.

تبلغ كلفة الشراء: ٣س + ٢٥

تبلغ كلفة الشراء من الشركة المنافسة: ٤س + ٥

للتحقق، نحل المتباينة ٤س + ٥ < ٣س + ٢٥.

٤س + ٥ − ٣س < ٣س + ٢٥ − ٣س طرح ٣س من طرفي المتباينة

س + ٥ < ٢٥ تبسيط

س + ٥ − ٥ < ٢٥ − ٥ طرح ٥ من طرفي المتباينة

س < ٢٠

٢٩


أي أن الشركة المنافسة تكون أفضل عندما يكون عدد العبوات أقل من ٢٠ عبوة بينما يشتري المخزن أكثر من ٣٠ عبوة في الشهر.

∴ ما تعرضه الشركة المنافسة ليس أفضل عرض، لذا على صاحب المخزن أن يُبقي تعامله مع الشركة الأولى.

حاول أن تحل

٦ في مثال (٦)، هل يصبح عرض الشركة المنافسة أفضل إذا لم تقبض أموالًا كلفة تسليم البضاعة؟

مثال (٧)

أوجد مجموعة حل المتباينة ٦س − ١٥ > ٤س + ١ ومثّل الحلّ على خط الأعداد.

الحل:

٦س − ١٥ > ٤س + ١

٦س − ١٥ − ٤س > ٤س + ١ − ٤س طرح ٤س من طرفي المتباينة

٢س − ١٥ > ١ تبسيط

٢س − ١٥ + ١٥ > ١ + ١٥ إضافة ١٥ إلى طرفي المتباينة

٢س > ١٦ تبسيط

س > ٨

مجموعة الحل = (٨، ∞).

انتبه: في حالة حل المتباينات مثل: ٢س > ٢س − ١، ٢س − ٢س > −١، ٠ × س > −١ مجموعة حلها ح.

حاول أن تحل

٧ أوجد مجموعة حل المتباينات التالية، ومثلها على خط الأعداد إن أمكن.

(أ) ٢(٢س − ٨) > ٤س + ٢

(ب) ٣س + ٧ > ٣(س − ٣)

٨ هل المتباينتان ٢س > ٢س − ١ ، ٢س < ٢س − ١ لهما مجموعة الحل نفسها؟ فسّر إجابتك.

٣٠

اختبار سريع

١ حل المتباينة −٥(٤ − س) > ٣س س > ١٠ ، ثم مثل الحل على خط أعداد

٢ مثل على خط أعداد حل: ٣س + ٤ ≤ ١، −٢س + ٧ ≥ ٥

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ (أ) ص ≤ ٥

(ب) س ≤ ١٧

٢ س + ٨٩ ≤ ٣٠٠، س ≤ ٢١١ يجب أن يكون عدد الطلاب أصغر من أو يساوي ٢١١ طالبًا.

٣ ب ≤ ٤

٤ ليكن س عدد النزلاء: ٨٠س ≤ ١٠٠٠

س ≤ ١٢,٥ يمكن أن يحمل المصعد على الأكثر ١٢ شخصًا.

٥ (أ) س ≥ −١,٢٥

(ب) −١ > س ≥ ٢

٦ ٤س < ٣س + ٢٥، س < ٢٥ ما زال عدد العبوات أصغر من ٣٠ وبالتالي العرض ليس أفضل.

٧ (أ) ٠ × س > ١٨ ليس لها حلول.

(ب) ٠ × س > −١٦، الحل هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

٨ كلا المتباينة الأولى ٠ × س > −١، الحل هو مجموعة الأعداد الحقيقية بينما المتباينة الثانية: ٠ × س < −١ ليس لها حلول.

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

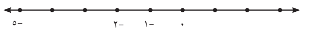
تمرَّنْ ٤-١

حل المتباينات
Solving Inequalities

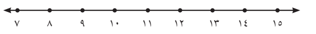
المجموعة أ تمارين أساسية

حل كلًّا من المتباينات التالية. مثّل الحل على خط أعداد.

(١) -٨ ≤ ٢٤ س



(٢) ٨ك - ١٥ > ٧٣



(٣) ٦س - ١٣ > ٦ (س - ٢)

في المسألتين (٤ - ٥) اكتب متباينة وأوجد مجموعة حلها.

(٤) يزيد طول إطار صورة ٣ سم عن عرضها. طول الإطار هو أصغر من ٥٢ سم. صف أبعاد الإطار.

(٥) تبلغ كلفة التحضيرات لرحلة مدرسية ٢٢٠ دينارًا ويضاف إليها ٧ دنانير ثمن وجبتي طعام لكل طالب. رصدت إدارة المدرسة مبلغًا لا يزيد عن ٥٥٠ دينارًا لهذه الرحلة. ما عدد الطلاب الذين يمكنهم الذهاب في الرحلة؟

(٦) أوجد مجموعة حلّ كل زوج من المتباينات. مثّل الحل على خط أعداد.

(أ) ٧س > - ٣٥ و ٥س ≤ ٣٠

(ب) ٩س ≤ -٢٧ أو ٤س ≤ ٣٦

في التمرينين (٧ - ٨) أوجد مجموعة حل كلّ من المتباينات التالية. مثّل الحل على خط أعداد.

(٧) ١٧ - ١٢ص ≥ ٥(٧ - ٣ص) - ١٥

(٨) ٦[٥ص - (٣ص - ١)] ≤ ٤(٣ص - ٧)

(٩) **الكتابة في الرياضيات:** اكتب مسألة حياتية يمكن حلّها باستخدام المتباينة س + ٥ , ٠س ≥ ٦٠.

(١٠) مجموع طولي أي ضلعين في مثلث هو أكبر من طول الضلع الثالث. في المثلث أب جـ، أب = ٤، أجـ = ٨ - أب. ما الذي يمكن استنتاجه حول جـ ب؟

(١١) **تحليل الخطأ:**

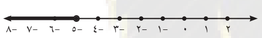
(أ) كتب أحد الطلاب ص ≥ ٢٠ على أنه حل المتباينة $\frac{١}{٢}$ (ص - ١٦) ≤ ص + ٢. أثبت أن إجابة الطالب خطأ، وذلك بالتحقق باستخدام عدد أصغر من ٢٠. (اختر عددًا مناسبًا).

(ب) حلّ المتباينة $\frac{١}{٢}$ (ص - ١٦) ≤ ص + ٢

(١٢) يريد متعهد تعبئة ما بين ١٥٠٠ متر مكعب و١٦٠٠ متر مكعب من التراب من قطعة أرض. تستطيع شاحنات المتعهد تعبئة ١٠٠ متر مكعب في اليوم و١٠٥٠ مترًا مكعبًا قد تم نقلها.

ما عدد الأيام اللازمة لإنهاء عملية تعبئة التراب ونقلها؟

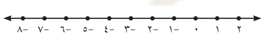
(١٣) أكمل المتباينة ٤ + ٣ (١ - ٢س) > ... بحيث يكون حلّها كما هو بيانيًّا.



المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمارين (١ - ٣) أوجد مجموعة حلّ كلّ من المتباينات التالية. مثّل الحل على خط أعداد.

(١) -٥م > ٧



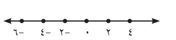
(٢) ٢(م - ٣) + ٧ > ٢١

(٣) -٦(٢ل - ١٠) + ١٢ل ≥ ١٨٠

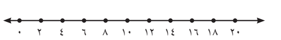
(٤) ما أصغر عددين طبيعيين متتاليين مجموعهما أكبر من ١٦؟(استخدم المتباينات عند الحل)

(٥) أوجد مجموعة حلّ كل زوج من المتباينات ثمّ مثّل الحل على خط أعداد.

(أ) ٢س > - ١٠ و ٩س > ١٨

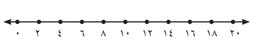


(ب) ٤س > ١٦ أو ١٢س > ١٤٤



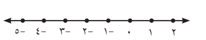
في التمارين (٦ - ٩) أوجد مجموعة حلّ كلّ من المتباينات التالية، ثمّ مثّل الحل على خط أعداد.

(٦) ٢ - ٣ت ≤ ٧(٨ - ٢ت) + ١٢



(٧) ٣[٤س - (٢س - ٧)] > ٢(٣س - ٥)

(٨) -٥ > ٢س + ٥ > ٣



(٩) -٢٧ ≥ ٣(١ - ٢س) ≥ ٣

(١٠) أوجد قيم س الصحيحة التي تحقق -٤ ≥ ٣ - ٢س ≥ ٤.

(١١) يريد أحمد زيارة صديقه في منزله مستخدمًا سيارة أجرة ومن ثم العودة إلى منزله. تعرفة السيارة ١٥٠ فلسًا ثم ٥٠ فلسًا لكل كيلومتر. مع أحمد ديناران (تكفيه للذهاب والعودة). اكتب متباينة وحلها لمعرفة المسافة الممكنة بين منزل أحمد ومنزل صديقه.

(١٢) في بداية الصيف كان لدى هشام ٥٠٠ دينار في حساب التوفير. يجب أن يبقى في حسابه ما لا يقل عن ٢٠٠ دينار في آخر الصيف. يسحب هشام أسبوعيًّا ٤٥ دينارًا.

(أ) اكتب متباينة تمثل المسألة.

(ب) بعد كم أسبوع يجب على هشام أن يتوقف عن السحب؟

١ـ٥: القيمة المطلقة

١ الأهداف

- يتعرف القيمة المطلقة.
- يتعرف بعض خواص القيمة المطلقة للأعداد الحقيقية.
- يحل معادلات تتضمن قيمة مطلقة بطريقة المساواة أو بطريقة تربيع الطرفين.
- يحل متباينات تتضمن قيمة مطلقة.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

قيمة مطلقة – معادلات تتضمن قيمة مطلقة – متباينات تتضمن قيمة مطلقة.

٣ الأدوات والوسائل

ورق رسم بياني – مسطرة مدرجة.

٤ التمهيد

اطلب إلى الطلاب:

- إيجاد حل معادلات من الدرجة الأولى مع متغير.
- إيجاد مجموعة حلول لمتباينات من الدرجة الأولى مع متغير واستخدام خط الأعداد لتمثيل هذه الحلول.
- اسأل: هل يمكن أن تكون المسافة بين موقعين سالبة؟

٥ التدريس

ناقش الطلاب حول فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» وأيضًا المثال (١) لتركيز فكرة القيمة المطلقة قبل الدخول في إيجاد مجموعة الحلول لمعادلات ومتباينات تتضمن قيمة مطلقة.

ساعدهم على فهم أن |ﺃ – ب| تمثل المسافة بين ﺃ، ب حيث ﺃ، ب أعداد حقيقية.

اشرح لهم أن |٣س – ٤| = ١٢ يمكن قراءتها كما يلي: المسافة بين ٣ أمثال عدد والعدد ٤ هي ١٢، ثم اطلب إليهم استخدام هذه الجملة الرياضية لرسم خط الأعداد، ثم إيجاد مجموعة الحلول لهذه المعادلة. وعمومًا لإيجاد مجموعة حلول معادلة أو متباينة، من الممكن إعادة كتابة كل منها على شكل معادلتين أو متباينتين وذلك بتطبيق تعريف القيمة المطلقة من جهة واحدة ثم ابدأ العمل. في المعادلة من الممكن إيجاد قيمتين

١ـ٥

القيمة المطلقة
Absolute Value

سوف تتعلم
- حل معادلات تتضمن قيمة مطلقة
- حل متباينات تتضمن قيمة مطلقة

دعنا نفكر ونتناقش

عرفت سابقًا أن القيمة المطلقة لعدد حقيقي هي بُعد هذا العدد عن الصفر على خط أعداد. ولمّا كان البعد عددًا موجبًا، فالقيمة المطلقة لعدد حقيقي سالب هي معكوسه الجمعي. الرمز المستخدم للقيمة المطلقة للعدد س هو |س|.

تعريف:
لكل عدد حقيقي س يكون: |س| = { س إذا كان س > ٠ ؛ ٠ إذا كان س = ٠ ؛ –س إذا كان س < ٠ }

معلومة:
(–س) ليس بالضرورة عددًا سالبًا. (–س) هو المعكوس الجمعي للعدد س.

نلاحظ أن العدد إذا كان موجبًا أو صفرًا فإن قيمته المطلقة تساويه، أما إذا كان العدد سالبًا فإن قيمته المطلقة تساوي معكوسه الجمعي.

بعض خواص القيمة المطلقة للأعداد الحقيقية

ليكن ﺃ، ب ∈ ح
١ |ﺃ| ≥ ٠
٢ |–ﺃ| = |ﺃ|
٣ |ﺃ×ب| = |ﺃ|×|ب|
٤ |ﺃ/ب| = |ﺃ|/|ب|، حيث ب ≠ ٠
٥ |ﺃ| ≥ ﺃ
٦ |ﺃ – ب| = |ب – ﺃ|

مثال (١)
أعد تعريف |س – ٤| دون استخدام رمز القيمة المطلقة.
الحل:
|س – ٤| = { س – ٤ حيث س – ٤ > ٠ ؛ ٠ حيث س – ٤ = ٠ ؛ –(س – ٤) حيث س – ٤ < ٠ }
= { س – ٤ : س ≥ ٤ ؛ ٤ – س : س < ٤ }

حاول أن تحل
١ أعد تعريف كلّ مما يلي دون استخدام رمز القيمة المطلقة.
أ |س + ٣|
ب |٤ – ٢س|

٣١

حل معادلات تتضمن قيمة مطلقة

يمكن استخدام خط أعداد لحل معادلات تتضمن قيمة مطلقة.
يبيّن التمثيل البياني المقابل حلول المعادلة |س| = ٣.
حيث المسافة بين س، صفر تساوي ٣ وحدات
إذًا الحل: س = ٣ أو س = –٣

٣ وحدات ٣ وحدات
–٤ –٣ –٢ –١ ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥

نتيجة
١ إذا كان ﺃ عددًا حقيقيًّا موجبًا فإن حل المعادلة |س| = ﺃ هو: س = ﺃ أو س = –ﺃ وتكون مجموعة الحل {–ﺃ، ﺃ}.
٢ إذا كان ﺃ عددًا حقيقيًّا سالبًا فإن المعادلة |س| = ﺃ مجموعة حلها ∅

معلومة مفيدة:
المجموعة الخالية نعبر عنها بأحد الرمزين { } أو ∅

مثال (٢)
أوجد مجموعة حل المعادلة: |٢ص – ٣| = ٧، ثم تحقق من صحة الحل.
الحل: |٢ص – ٣| = ٧
٢ص – ٣ = ٧ أو ٢ص – ٣ = –٧ — قيمة ٢ص – ٣ يمكن أن تكون ٧ أو –٧.
٢ص = ١٠ | ٢ص = –٤ — إضافة +٣ إلى طرفي المعادلة.
ص = ٥ | ص = –٢ — قسمة كل طرف على ٢.
مجموعة الحل = {–٢، ٥}
تحقق: عندما ص = ٥ | وعندما ص = –٢
|٢ص – ٣| = ٧ | |٢ص – ٣| = ٧
|٢(٥) – ٣| = ٧ | |٢(–٢) – ٣| = ٧
|٧| = ٧ ✓ | |–٧| = ٧ ✓

حاول أن تحل
٢ أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلتين، ثم تحقق من صحة الحل.
أ |٥س + ٣| = ٨
ب |٢س – ١| = ٠

٣٢

تحققان المعادلة. أما في المتباينة فيوجد حلول على صورة فترات.

٦ الربط

التطبيقات الحياتية في المثالين (٩)، (١٠).

في الأساس القيمة المطلقة تمثل مسافة بين نقطتين. ويظهر دور القيمة المطلقة في التطبيقات الحياتية كما في المثالين.

في مثال (٩) كل القيم بين ٤٤ سم، ٤٦ سم تعتبر مقبولة. لاحظ أنه من الصعب في الواقع تنفيذ دائرة بقطر ٤٥ سم دون هامش خطأ.

كذلك في مثال (١٠). الوزن النموذجي لا نجده إلا على الورق، وهناك دائمًا فروقات صغيرة بأوزان العبوات. يمكن للمعلم مناقشة الموضوع مع الطلاب أو الطلب إليهم إحضار بعض العبوات من صنف واحد وإيجاد وزنها في الصف بدقة.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في إيجاد الحلول في المعادلة أو في المتباينة. اطلب إليهم التحقق من صحة الحلول بتعويض بعض القيم.

٨ التقييم

لاحظ الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» تأكد من حُسن أدائهم في حل المعادلات والمتباينات حيث تتضمن قيمة مطلقة.

اختبار سريع

١ حل: $|٣س + ١| = ٤$ ، $-\frac{٥}{٣}$ ، ١.

٢ حل المتباينة $|-٢س + ٣| + ٧ > ٩$

$س < \frac{١}{٢}$ أو $س > \frac{٥}{٢}$. مثل الحل على خط أعداد.

٣ يريد صناعي حفر ثقب يتراوح قطره بين ١,١٦ سم، ١,١٩ سم. اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة تعبر عن المسألة.

$|س - ١,١٧٥| \le ٠,٠١٥$

عند حل مسائل متعددة الخطوات، ابدأ بوضع التعبير الذي يتضمن القيمة المطلقة في طرف واحد.

مثال (٣)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $|٢س + ١| + ٣ = ٠$

الحل: $|٢س + ١| + ٣ = ٠$

$|٢س + ١| = -٣$

وحيث إن $-٣ < ٠$ (عدد سالب)

∴ مجموعة الحل = ∅

حاول أن تحل

٣ أوجد مجموعة حل المعادلة: $٥ + |-٢س + ٤| = ٠$

مثال (٤)

أوجد مجموعة حل المعادلة $٤|٢س + ٣| - ٥ = ١١$

الحل: $٤|٢س + ٣| - ٥ = ١١$

$٤|٢س + ٣| = ١٦$ إضافة ٥ إلى طرفي المعادلة

$|٢س + ٣| = ٤$ قسمة كل طرف على ٤

$٢س + ٣ = ٤$ أو $٢س + ٣ = -٤$

$٢س = ١$ | $٢س = -٧$ إضافة −٣ إلى طرفي المعادلة

$س = \frac{١}{٢}$ | $س = \frac{-٧}{٢}$ قسمة كل طرف على ٢

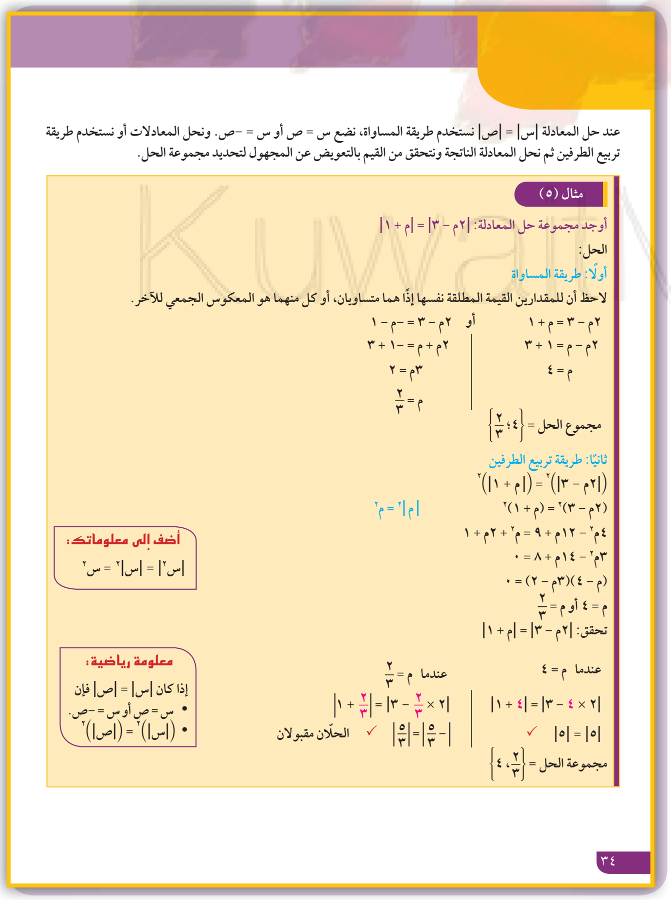
مجموعة الحل = $\left\{\frac{١}{٢}، \frac{-٧}{٢}\right\}$

حاول أن تحل

٤ أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلتين:

أ $٣|٢س + ٤| - ٦ = ٠$ ب $|٥س - ٤| + ٣ = ٠$

٣٣



عند حل المعادلة $|س| = |ص|$ نستخدم طريقة المساواة، نضع $س = ص$ أو $س = -ص$. ونحل المعادلات أو نستخدم طريقة تربيع الطرفين ثم نحل المعادلة الناتجة ونتحقق من القيم بالتعويض عن المجهول لتحديد مجموعة الحل.

مثال (٥)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $|٢م - ٣| = |م + ١|$

الحل:

أولًا: طريقة المساواة

لاحظ أن للمقدارين القيمة المطلقة نفسها إذًا هما متساويان، أو كل منهما هو المعكوس الجمعي للآخر.

$٢م - ٣ = م + ١$ أو $٢م - ٣ = -م - ١$

$٢م - م = ١ + ٣$ | $٢م + م = -١ + ٣$

$م = ٤$ | $٣م = ٢$

$م = \frac{٢}{٣}$

مجموع الحل = $\left\{٤؛ \frac{٢}{٣}\right\}$

ثانيًا: طريقة تربيع الطرفين

$(|٢م - ٣|)^٢ = (|م + ١|)^٢$

$(٢م - ٣)^٢ = (م + ١)^٢$ $|م|^٢ = م^٢$

$٤م^٢ - ١٢م + ٩ = م^٢ + ٢م + ١$

$٣م^٢ - ١٤م + ٨ = ٠$

$(م - ٤)(٣م - ٢) = ٠$

$م = ٤$ أو $م = \frac{٢}{٣}$

تحقق: $|٢م - ٣| = |م + ١|$

عندما $م = ٤$ | عندما $م = \frac{٢}{٣}$

$|٢ \times ٤ - ٣| = |٤ + ١|$ | $|٢ \times \frac{٢}{٣} - ٣| = |\frac{٢}{٣} + ١|$

$|٥| = |٥|$ ✓ | $|-\frac{٥}{٣}| = |\frac{٥}{٣}|$ ✓ الحلّان مقبولان

مجموعة الحل = $\left\{\frac{٢}{٣}، ٤\right\}$

أضف إلى معلوماتك:

$|س^٢| = |س|^٢ = س^٢$

معلومة رياضية:

إذا كان $|س| = |ص|$ فإن

- $س = ص$ أو $س = -ص$.
- $(|س|)^٢ = (|ص|)^٢$

٣٤

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ (أ) |س + ٣| =
- س + ٣ : س > −٣
- ٠ : س = −٣
- −(س + ٣) : س < −٣

(ب) |٤ − ٢س| =
- ٤ − ٢س : ٤ − ٢س > ٠
- ٠ : ٤ − ٢س = ٠
- −(٤ − ٢س) : ٤ − ٢س < ٠

=
- ٤ − ٢س : س < ٢
- ٠ : س = ٢
- −٤ + ٢س : س > ٢

ملاحظة: يمكن الاستفادة من الخاصية |٤ − ٢س| = |٢س − ٤|.

٢ (أ) ٥س + ٣ = ٨ أو ٥س + ٣ = −٨

٥س = ٥	٥س = −١١
س = ١	س = −$\frac{١١}{٥}$

مجموعة الحل = {١ ، −$\frac{١١}{٥}$}

(ب) ٢س − ١ = ٠   س = $\frac{١}{٢}$

مجموعة الحل: {$\frac{١}{٢}$}

٣ |−٢س + ٤| = −٥ لا حلول لها.

مجموعة الحل = φ

٤ (أ) ٢س + ٤ = ٢ أو ٢س + ٤ = −٢

س = −١	س = −٣

مجموعة الحل = {−١، −٣}.

(ب) |٥س − ٤| = −٣

لا يوجد حلول لهذه المعادلة.

مجموعة الحل = φ

٥ طريقة المساواة:

(أ) ص − ٥ = ٢ص + ٣ أو ص − ٥ = −٢ص − ٣

ص = −٨	ص = $\frac{٢}{٣}$

حاول أن تحل

٥ أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين التاليتين:

أ |ص − ٥| = |٢ص + ٣| ب |س − ٥| = |س − ٧|

استخدم طريقة المساواة ثم طريقة التربيع.

يمكننا كذلك حل معادلات تتضمن قيمة مطلقة في أحد طرفيها على النحو التالي:

مثال (٦)

أوجد مجموعة حل المعادلة: |٢س + ٣| = ٣س − ٢

الحل: |٢س + ٣| = ٣س − ٢

نعلم أن الطرف الأيمن للمعادلة غير سالب نتيجة وجود القيمة المطلقة، إذًا يجب أن يكون الطرف الأيسر للمعادلة غير سالب. لذلك نضيف الشرط:

٣س − ٢ ≥ ٠ أي س ≥ $\frac{٢}{٣}$ (تقبل كل قيم س أكبر من أو تساوي $\frac{٢}{٣}$)

أي أن مجموعة التعويض هي [$\frac{٢}{٣}$ ، ∞)

	أو	
٢س + ٣ = ٣س − ٢		٢س + ٣ = −٣س + ٢
٢س − ٣س = −٢ − ٣		٢س + ٣س = ٢ − ٣
−س = −٥		٥س = −١
س = ٥		س = $\frac{-١}{٥}$

∵ ٥ ∈ [$\frac{٢}{٣}$ ، ∞)   ∵ −$\frac{١}{٥}$ ∉ [$\frac{٢}{٣}$ ، ∞)

∴ الحل س = ٥ مقبول   ∴ الحل س = −$\frac{١}{٥}$ مرفوض

مجموعة الحل = {٥}

أضف إلى معلوماتك:

$\sqrt{س^٢}$ = |س|

$(\sqrt{س})^٢$ = س (حيث س ≥ ٠)

معلومة مفيدة:

مجموعة الحل هي مجموعة جزئية من مجموعة التعويض

حاول أن تحل

٦ أوجد مجموعة حل المعادلة: |٤س − ١| = س + ٢.

٣٥

حل متباينات تتضمن قيمة مطلقة

يمكن أيضًا حل متباينات تتضمن قيمًا مطلقة باستخدام خط أعداد.

يبيّن التمثيل البياني الأول حلول المتباينة |س| ≤ ١.

يبيّن التمثيل البياني الثاني حلول المتباينة |س| ≥ ١.

تذكر:

|س| ≤ ١ تعني أن بعد س عن الصفر هو أصغر من أو يساوي ١.

تعميم

ليكن أ عددًا حقيقيًا موجبًا.

١ |س| ≤ أ تكافئ −أ ≤ س ≤ أ

٢ |س| ≥ أ تكافئ س ≥ أ أو س ≤ −أ

مثال (٧)

أوجد مجموعة حل المتباينة ٤|٢س + ١| + ٤ ≤ ١٢، ومثّل مجموعة الحل على خط أعداد.

الحل: ٤|٢س + ١| + ٤ ≤ ١٢

٤|٢س + ١| ≤ ٨	إضافة (−٤) إلى طرفي المعادلة
|٢س + ١| ≤ ٢	قسمة كل طرف على ٤
−٢ ≤ ٢س + ١ ≤ ٢	كتابة المتباينة المكافئة
−٣ ≤ ٢س ≤ ١	إضافة (−١)
$\frac{-٣}{٢}$ ≤ س ≤ $\frac{١}{٢}$	القسمة على ٢

مجموعة الحل = [−$\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$]

حاول أن تحل

٧ أوجد مجموعة حل المتباينة |$\frac{١}{٢}$ س − $\frac{٤}{٥}$| > ٦ , ٠ ومثّل مجموعة الحل على خط أعداد.

٣٦

مجموعة الحل = $\{-٨، \frac{٢}{٣}\}$.

(ب) س − ٥ = س − ٧ أو س − ٥ = −س + ٧

٠ × س = −٢	س = ٦
لا حلول	

مجموعة الحل = {٦}.

طريقة التربيع:

(أ) $(ص - ٥)^٢ = (٢ص + ٣)^٢$

$٣ص^٢ + ٢٢ ص - ١٦ = ٠$

ص = −٨، ص = $\frac{٢}{٣}$

مجموعة الحل = $\{-٨، \frac{٢}{٣}\}$.

(ب) $(س - ٥)^٢ = (س - ٧)^٢$

٤ س = ٢٤

س = ٦

مجموعة الحل = {٦}.

٦ يوجد حل بشرط س ≥ −٢

٤س − ١ = س + ٢ أو ٤ س − ١ = −س − ٢

س = ١	٥س = $-\frac{١}{٥}$
١ ≥ −٢	$-\frac{١}{٥} > -٢$
س = ١ قيمة مقبولة	س = $-\frac{١}{٥}$ قيمة مقبولة

مجموعة الحل = $\{١، -\frac{١}{٥}\}$.

طريقة أخرى للحل:

|٤س − ١| = س + ٢

عندما س ≥ $\frac{١}{٤}$ أو س < $\frac{١}{٤}$

٤س − ١ = س + ٢	−٤س + ١ = −س + ٢
٣س = ٣	٥س = −١
س = ١	س = $-\frac{١}{٥}$
١ ≥ $\frac{١}{٤}$ مقبولة	$-\frac{١}{٥} < \frac{١}{٤}$ مقبولة

مجموعة الحل = $\{١، -\frac{١}{٥}\}$.

مثال (٨)

أوجد مجموعة حل المتباينة: ٢|٣م − ٤| − ١ > ٥، ومثّل الحل على خط أعداد.

الحل: ٢|٣م − ٤| − ١ > ٥

٢|٣م − ٤| > ٦ إضافة ١ إلى طرفي المتباينة

|٣م − ٤| > ٣ قسمة كل طرف على ٢

٣م − ٤ > ٣ أو ٣م − ٤ < −٣ كتابة المتباينة المكافئة

٣م > ٧ | ٣م < ١ بسِّط

م > $\frac{٧}{٣}$ | م < $\frac{١}{٣}$ قسمة كل طرف على ٣

مجموعة الحل = $(\frac{٧}{٣}، \infty) \cup (-\infty، \frac{١}{٣})$

حاول أن تحل

٨ أوجد مجموعة حل المتباينة: $|\frac{٣}{٤} - س| \le \frac{٧}{٨}$ ومثّل الحل على خط أعداد.

مثال (٩) تطبيقات حياتية

رياضة: يبلغ طول قطر دائرة مرمى كرة السلة ٤٥ سم مع هامش خطأ لا يزيد على ١ سم.

أ اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة تعبر عن قطر دائرة مرمى تحقق هذا الشرط.

ب أوجد قيم طول القطر المقبولة ومثّلها على خط أعداد.

الحل:

ليكن س طول قطر دائرة مرمى كرة سلة، وحيث إن س لا يزيد أو ينقص عن ٤٥ سم بأكثر من ١ سم، فإن قيم س تحقق |س − ٤٥| ≤ ١.

−١ ≤ س − ٤٥ ≤ ١

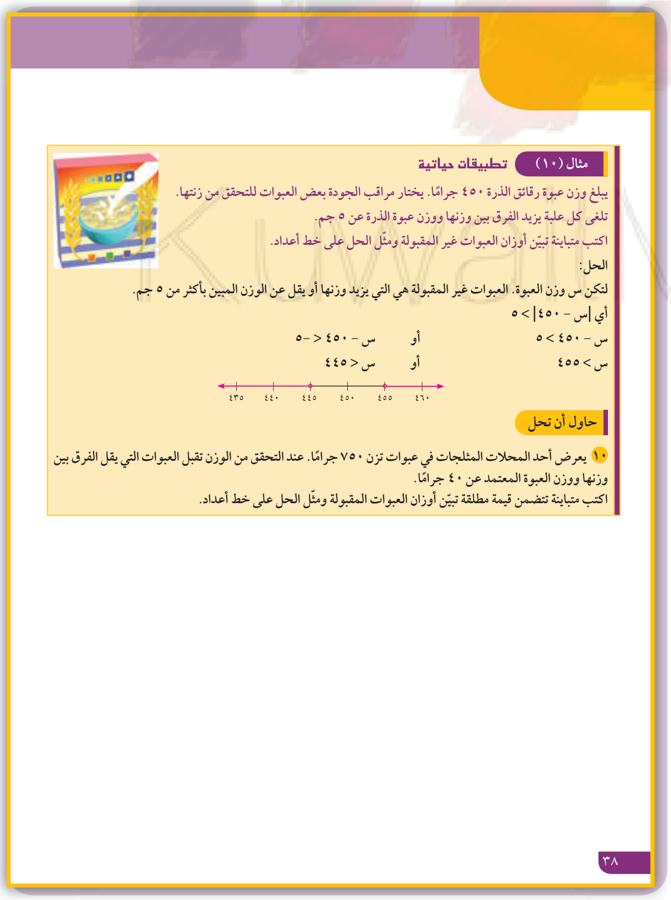
٤٤ ≤ س ≤ ٤٦

مجموعة الحل = [٤٤، ٤٦] أي أن قيم طول القطر المقبولة تنتمي إلى [٤٤، ٤٦]

حاول أن تحل

٩ درجة حموضة عصير الطماطم هي ٤ مع هامش سماح ٠,٢. اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة تعبر عن درجات الحموضة المقبولة. وحلها ثم بيّن الحل على خط أعداد.

٣٧



مثال (١٠) تطبيقات حياتية

يبلغ وزن عبوة رقائق الذرة ٤٥٠ جرامًا. يختار مراقب الجودة بعض العبوات للتحقق من زنتها.

تلغى كل علبة يزيد الفرق بين وزنها ووزن عبوة الذرة عن ٥ جم.

اكتب متباينة تبيّن أوزان العبوات غير المقبولة ومثّل الحل على خط أعداد.

الحل:

لتكن س وزن العبوة. العبوات غير المقبولة هي التي يزيد وزنها أو يقل عن الوزن المبين بأكثر من ٥ جم.

أي |س − ٤٥٠| > ٥

س − ٤٥٠ > ٥ أو س − ٤٥٠ < −٥

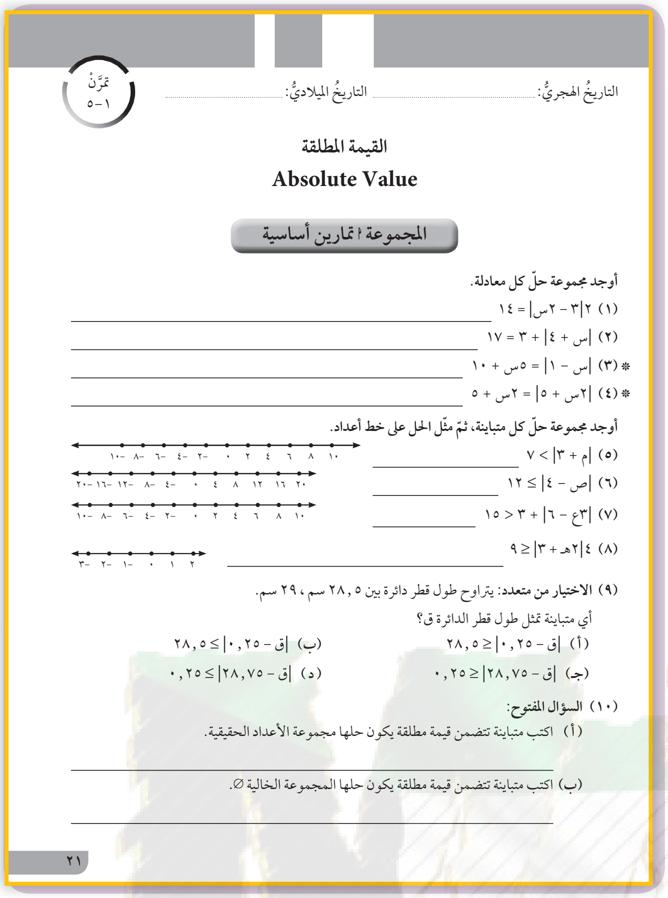
س > ٤٥٥ أو س < ٤٤٥

حاول أن تحل

١٠ يعرض أحد المحلات المثلجات في عبوات تزن ٧٥٠ جرامًا. عند التحقق من الوزن تقبل العبوات التي يقل الفرق بين وزنها ووزن العبوة المعتمد عن ٤٠ جرامًا.

اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة تبيّن أوزان العبوات المقبولة ومثّل الحل على خط أعداد.

٣٨



تمرَّنْ ١-٥

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

القيمة المطلقة

Absolute Value

المجموعة أ تمارين أساسية

أوجد مجموعة حلّ كل معادلة.

(١) $٢|٣ - ٢س| = ١٤$

(٢) $|س + ٤| + ٣ = ١٧$

❋ (٣) $|س - ١| = ٥س + ١٠$

❋ (٤) $|٢س + ٥| = ٢س + ٥$

أوجد مجموعة حلّ كل متباينة، ثمّ مثّل الحل على خط أعداد.

(٥) $|م + ٣| > ٧$

(٦) $|ص - ٤| \ge ١٢$

(٧) $|٣ع - ٦| + ٣ < ١٥$

(٨) $٤|٢هـ + ٣| \le ٩$

(٩) **الاختيار من متعدد:** يتراوح طول قطر دائرة بين ٢٨,٥ سم ، ٢٩ سم.

أي متباينة تمثل طول قطر الدائرة ق؟

(أ) $|ق - ٠,٢٥| \le ٢٨,٥$ (ب) $|ق - ٠,٢٥| \ge ٢٨,٥$

(جـ) $|ق - ٢٨,٧٥| \le ٠,٢٥$ (د) $|ق - ٢٨,٧٥| \ge ٠,٢٥$

(١٠) **السؤال المفتوح:**

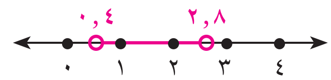
(أ) اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة يكون حلها مجموعة الأعداد الحقيقية.

(ب) اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة يكون حلها المجموعة الخالية $\varnothing$.

٢١

٧ $-٠,٦ < \frac{١}{٢}س - \frac{٤}{٥} < ٠,٦$

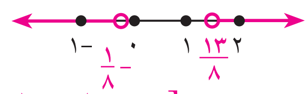
$٠,٤ < س < ٢,٨$



مجموعة الحل = $\{٠,٤ ، ٢,٨\}$.

٨ $\frac{٣}{٤} - س \le -\frac{٧}{٨}$ أو $\frac{٣}{٤} - س \ge \frac{٧}{٨}$

$س \ge \frac{١٣}{٨}$ أو $س \le -\frac{١}{٨}$

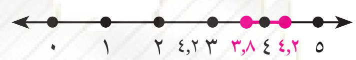


مجموعة الحل = $[\frac{٣}{٨} ، \infty) \cup (-\infty ، -\frac{١}{٨}]$.

٩ $|س - ٤| \le ٠,٢$

$-٠,٢ \le س - ٤ \le ٠,٢$

$٣,٨ \le س \le ٤,٢$



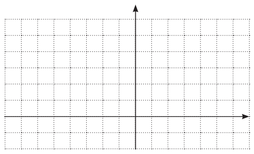
١٠ $|س - ٧٥٠| < ٤٠$

$٧١٠ < س < ٧٩٠$

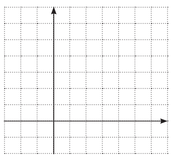
(٨) $\frac{١}{١١}$ |٢م − ٤| + ١٠ ≥ ١١

(٩) أوجد مجموعة حل كل معادلة، ثم تحقق من إجابتك بيانيًّا.

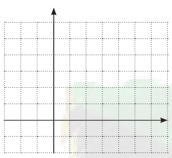
(أ) |٢ س − ٣| = |س + ١|



(ب) |٤ − ٥ س| + |٣ س + ١| = ٠



(جـ) |٣ص − ٧| = ٢ص − ٥.



(١١) **الاختيار من متعدد:** أي عدد هو أحد حلول المعادلة |س − ٣| = س − ٣

(أ) −٣ (ب) ٠

(جـ) ١ (د) ٣

※ (١٢) أي متباينات مما يلي لها مجموعة الحل نفسها؟

(I) |٥س − ٧| ≤ ٨ **(II)** −٨ ≤ ٥س − ٧ أو ٥س − ٧ ≤ ٨

(III) ٨ ≥ ٥س − ٧ و ٥س − ٧ ≥ −٨ **(IV)** −٨ ≥ ٥س − ٧ و ٥س − ٧ ≥ ٨

(أ) I، II (ب) I، III

(جـ) I، IV (د) I، III، IV

(١٣) **التفكير المنطقي:** دون حل المتباينة |س − ٣| ≤ ٥، أوجد الأعداد الصحيحة س التي تحقق المتباينة.

المجموعة ب تمارين تعزيزية

أوجد مجموعة حلّ كل معادلة، ثمّ تحقق من إجابتك.

(١) |٢م − ٥| + ٤ = ٤

(٢) |٤م + ٣| = −٣

(٣) |٢ز − ٣| = ٤ز − ١

(٤) |٣ل + ٥| = ٥ل + ٢

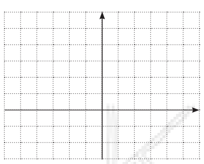
أوجد مجموعة حلّ كل متباينة، ثمّ مثّل الحل على خط أعداد.

(٥) |٢ب + ١| ≥ −٤

(٦) ٣|٢ص − ١| ≥ ٢١

(٧) |$\frac{\text{س} - ٤}{٢}$| + ٢ < ٦

(د) |٤م + ١| = ٤م + ١



(١٠) أي مما يلي هو مجموعة حل المعادلة |٣س − ٢| = ٣س − ٢

(أ) [$\frac{٢}{٣}$ ، +∞) (ب) ($\frac{٢}{٣}$ ، +∞) (جـ) (−∞ ، $\frac{٢}{٣}$) (د) (−∞ ، $\frac{٢}{٣}$]

(١١) أي مما يلي هو حل للمتباينة |$\frac{٣ - \text{س}}{٢}$| < ٤؟

(أ) −٥ < س < ١١ (ب) −١١ < س < −٥

(جـ) ٥ < س < ١١ (د) −١ < س < ١١

(١٢) يضع مزارع ٢٥ تفاحة في كل صندوق. من الممكن أن يزيد عدد التفاحات في أحد الصناديق أو أن ينقص حتى ٣ تفاحات عن ٢٥ تفاحة.

(أ) اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة تبين عدد التفاحات في الصندوق.

(ب) مثّل الحل على خط أعداد.

١-٦: دالة القيمة المطلقة

١ الأهداف

- يتعرف إحداثيات رأس منحنى الدالة ص = |أس + ب|.
- يرسم بيانيًّا دالة القيمة المطلقة.
- يستخدم دالة المرجع والانسحاب الأفقي والرأسي ليرسم بعض دوال القيمة المطلقة.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

دالة القيمة المطلقة – تحويلات هندسية – دالة المرجع.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة مدرجة – ورقة رسم بياني – جهاز إسقاط – حاسوب – مصورات – آلة حاسبة.

٤ التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(أ) مثّل على المستوى الإحداثي النقاط: أ(٣، −٣)، ب(٤، ٢)، جـ(١، ٣).

(ب) أوجد إحداثيات المثلث أ'ب'جـ' صورة المثلث أ ب جـ في الانسحاب ٥ وحدات إلى اليسار ثم وحدة واحدة إلى الأسفل.

(جـ) مثّل على المستوى الإحداثي بيان الدالة ص معرفة كما يلي:

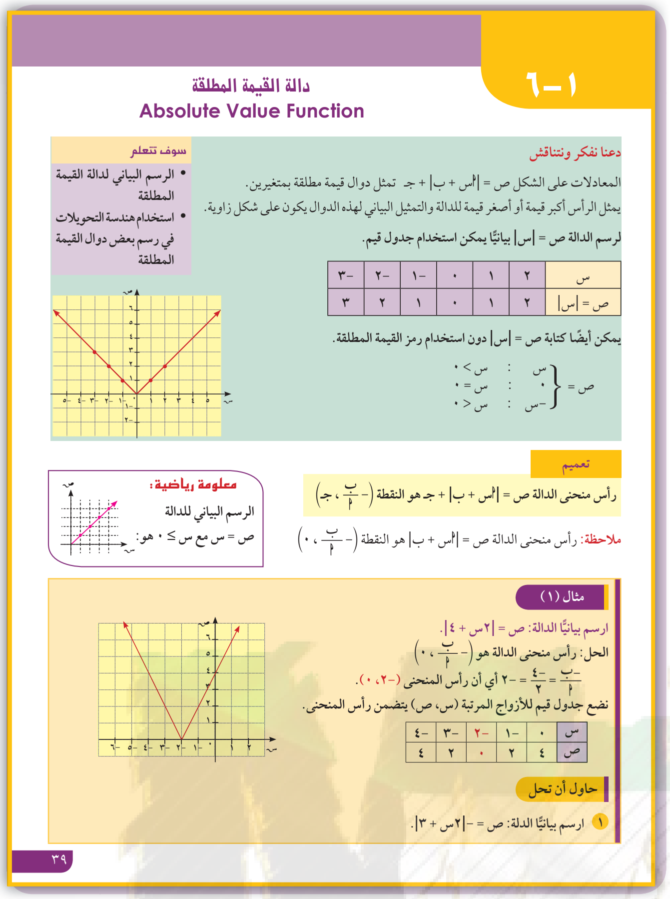
$$\begin{cases} ص = س - ٣ & \text{عند } س \geq ٤ \\ ص = -س + ٥ & \text{عند } س < ٤ \end{cases}$$

٥ التدريس

تعتبر دالة القيمة المطلقة حالة خاصة من الدوال ذات التعريفات المجزأة، يمكن تحديد هذه الفترات الجزئية في تعريفها من خلال تطبيق تعريف القيمة المطلقة.

من المهم جدًّا التوقف عند فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» والمثال (١)، لفهم كيفية التعامل مع رسم بياني لدالة قيمة مطلقة وخاصة أن هذا الرسم البياني لن يكون خطًّا مستقيمًا بل خطًّا منكسرًا.

ركّز مع الطلاب على فهم الرسم البياني لدوال القيمة المطلقة باستخدام التحويلات الهندسية، وبخاصة ربط الرسم البياني لأي دالة بدالة المرجع. أعطِ أمثلة متعددة تساهم في إغناء هذه الفكرة.



١-٦

دالة القيمة المطلقة
Absolute Value Function

دعنا نفكر ونتناقش

المعادلات على الشكل ص = |أس + ب| + جـ تمثل دوال قيمة مطلقة بمتغيرين.
يمثل الرأس أكبر قيمة أو أصغر قيمة للدالة والتمثيل البياني لهذه الدوال يكون على شكل زاوية.

لرسم الدالة ص = |س| بيانيًّا يمكن استخدام جدول قيم.

س	٢	١	٠	−١	−٢	−٣
ص = |س|	٢	١	٠	١	٢	٣

يمكن أيضًا كتابة ص = |س| دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

$$ص = \begin{cases} س & : س > ٠ \\ ٠ & : س = ٠ \\ -س & : س < ٠ \end{cases}$$

سوف تتعلم
- الرسم البياني لدالة القيمة المطلقة
- استخدام هندسة التحويلات في رسم بعض دوال القيمة المطلقة

تعميم

رأس منحنى الدالة ص = |أس + ب| + جـ هو النقطة $(-\frac{ب}{أ}، جـ)$

ملاحظة: رأس منحنى الدالة ص = |أس + ب| هو النقطة $(-\frac{ب}{أ}، ٠)$

معلومة رياضية:
الرسم البياني للدالة ص = س مع س ≥ ٠ هو:

مثال (١)

ارسم بيانيًّا الدالة: ص = |٢س + ٤|.

الحل: رأس منحنى الدالة هو $(-\frac{ب}{أ}، ٠)$

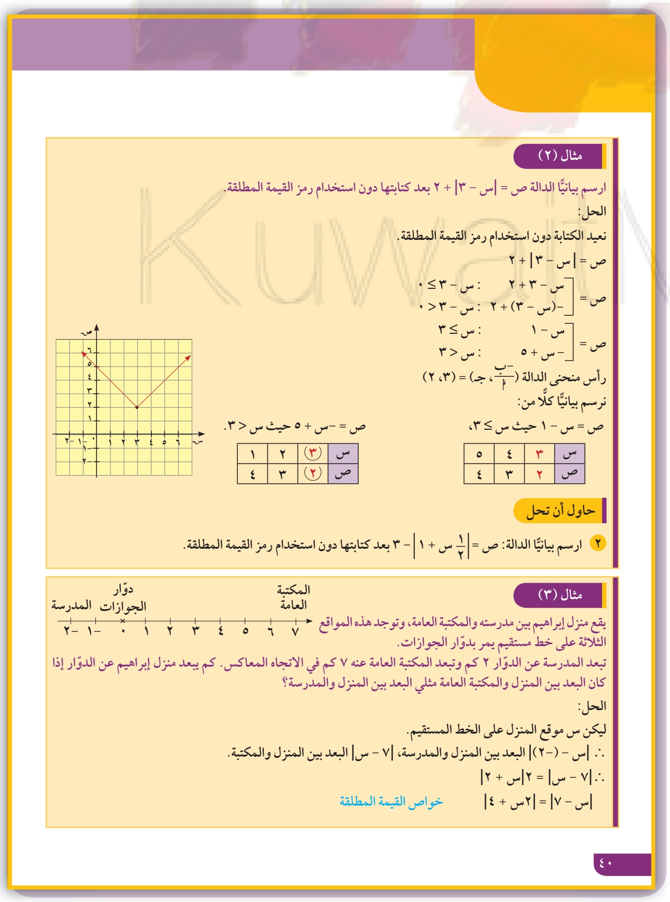
$\frac{-ب}{أ} = \frac{-٤}{٢} = -٢$ أي أن رأس المنحنى (−٢، ٠).

نضع جدول قيم للأزواج المرتبة (س، ص) يتضمن رأس المنحنى.

س	٠	−١	−٢	−٣	−٤
ص	٤	٢	٠	٢	٤

حاول أن تحل

١ ارسم بيانيًّا الدلة: ص = −|٢س + ٣|.



مثال (٢)

ارسم بيانيًّا الدالة ص = |س − ٣| + ٢ بعد كتابتها دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

الحل:

نعيد الكتابة دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

ص = |س − ٣| + ٢

$$ص = \begin{cases} س - ٣ + ٢ & : س - ٣ \geq ٠ \\ -(س - ٣) + ٢ & : س - ٣ < ٠ \end{cases}$$

$$ص = \begin{cases} س - ١ & : س \geq ٣ \\ -س + ٥ & : س < ٣ \end{cases}$$

رأس منحنى الدالة $(\frac{-ب}{أ}، جـ) = (٣، ٢)$

نرسم بيانيًّا كلًّا من:

ص = س − ١ حيث س ≥ ٣،

س	٣	٤	٥
ص	٢	٣	٤

ص = −س + ٥ حيث س < ٣.

س	٣	٢	١
ص	٢	٣	٤

حاول أن تحل

٢ ارسم بيانيًّا الدالة: ص = $|\frac{١}{٢}$ س + ١| − ٣ بعد كتابتها دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

مثال (٣)

يقع منزل إبراهيم بين مدرسته والمكتبة العامة، وتوجد هذه المواقع الثلاثة على خط مستقيم يمر بدوّار الجوازات.

تبعد المدرسة عن الدوّار ٢ كم وتبعد المكتبة العامة عنه ٧ كم في الاتجاه المعاكس. كم يبعد منزل إبراهيم عن الدوّار إذا كان البعد بين المنزل والمكتبة العامة مثلي البعد بين المنزل والمدرسة؟

الحل:

ليكن س موقع المنزل على الخط المستقيم.

∴ |س − (−٢)| البعد بين المنزل والمدرسة، |٧ − س| البعد بين المنزل والمكتبة.

∴ |٧ − س| = ٢|س + ٢|

|س − ٧| = |٢س + ٤| خواص القيمة المطلقة

– الانسحاب الرأسي:

دالة المرجع: ص = |س| أو ص = – |س| وتكون على الصورة:

ص = |س| ± ك أو ص = –|س| ± ك حيث ك > ٠

– الانسحاب الأفقي:

دالة المرجع: ص = |س| أو ص = –|س| وتكون على الصورة:

ص = |س ± ل| أو ص = – |س ± ل| حيث ل > ٠.

– الانسحاب المزدوج: رأسي وأفقي أو أفقي ورأسي

ص = |س ± ل| ± ك أو ص = –|س ± ل| ± ك

الأمثلة (٤)، (٥)، (٦)، (٧) تعبّر بوضوح عن هذه الحالات.

٦ الربط

المثال (٣)

يبيّن للطلاب الخطوات التالية في الحل:

١) اختيار المجهول س.

٢) التعبير عن المسافات باستخدام القيمة المطلقة.

٣) كتابة المعادلة.

٤) الحل جبريًّا والتحقق بيانيًّا.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

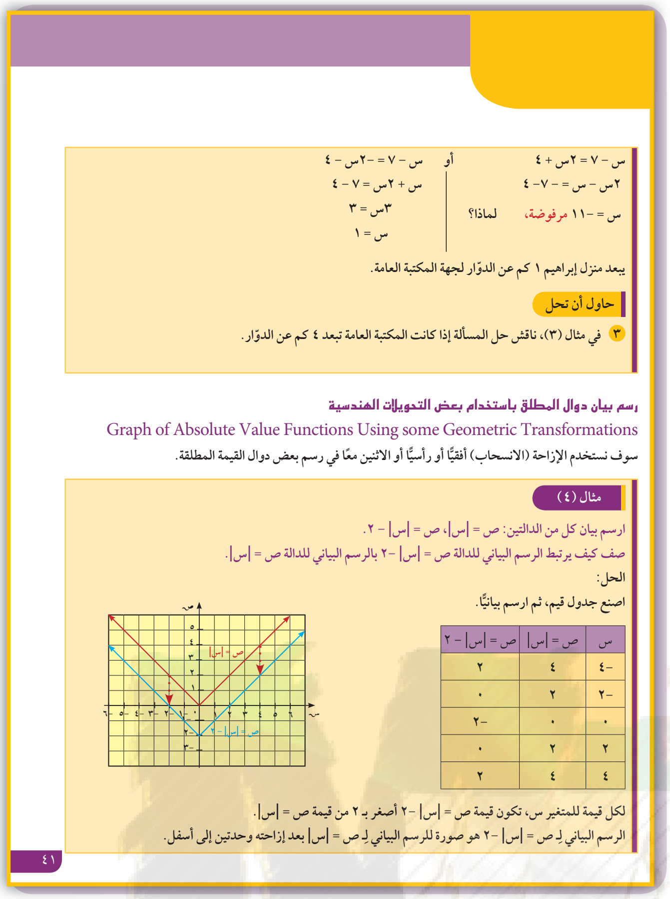
قد يخطئ الطلاب في رسم بيان الدالة المطلقة.

ساعدهم، بإعطاء أمثلة متعددة، على تحديد الفترات لرسم الخط المنكسر بشكل دقيق.

٨ التقييم

لاحظ الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل».

تأكد من أنهم يكتبون الدالة بشكل صحيح بتعريفاتها الجزئية من دون استخدام القيمة المطلقة.


س – ٧ = ٢س + ٤
٢س – س = – ٧ – ٤
س = –١١ مرفوضة، لماذا؟

أو
س – ٧ = –٢س – ٤
س + ٢س = ٧ – ٤
٣س = ٣
س = ١

يبعد منزل إبراهيم ١ كم عن الدوّار لجهة المكتبة العامة.

حاول أن تحل

٣ في مثال (٣)، ناقش حل المسألة إذا كانت المكتبة العامة تبعد ٤ كم عن الدوّار.

رسم بيان دوال المطلق باستخدام بعض التحويلات الهندسية

Graph of Absolute Value Functions Using some Geometric Transformations

سوف نستخدم الإزاحة (الانسحاب) أفقيًّا أو رأسيًّا أو الاثنين معًا في رسم بعض دوال القيمة المطلقة.

مثال (٤)

ارسم بيان كل من الدالتين: ص = |س|، ص = |س| – ٢.

صف كيف يرتبط الرسم البياني للدالة ص = |س| –٢ بالرسم البياني للدالة ص = |س|.

الحل:

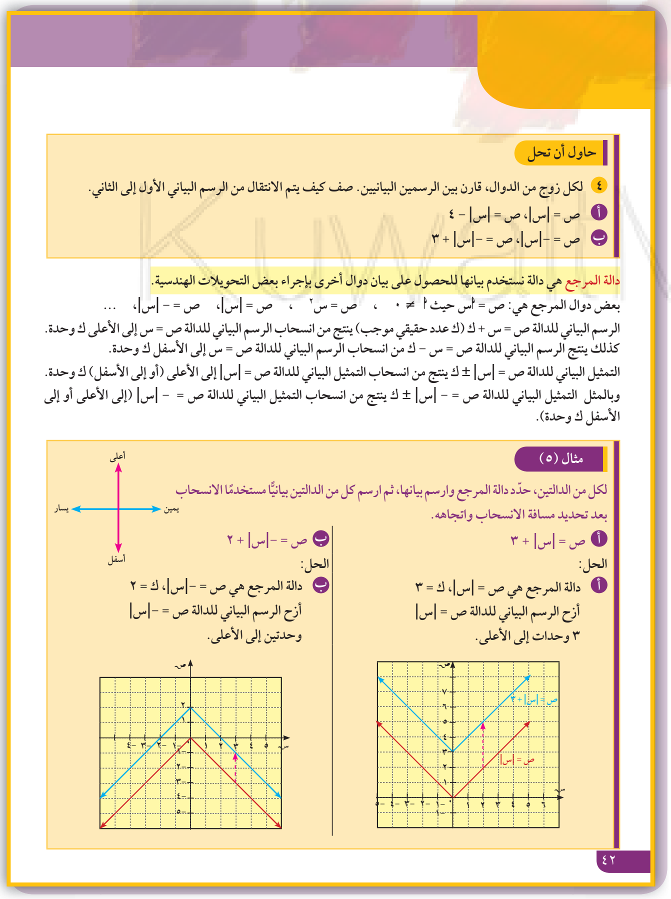
اصنع جدول قيم، ثم ارسم بيانيًّا.

س	ص = |س|	ص = |س| – ٢
–٤	٤	٢
–٢	٢	٠
٠	٠	–٢
٢	٢	٠
٤	٤	٢

لكل قيمة للمتغير س، تكون قيمة ص = |س| –٢ أصغر بـ ٢ من قيمة ص = |س|.

الرسم البياني لِـ ص = |س| –٢ هو صورة للرسم البياني لِـ ص = |س| بعد إزاحته وحدتين إلى أسفل.

٤١


حاول أن تحل

٤ لكل زوج من الدوال، قارن بين الرسمين البيانيين. صف كيف يتم الانتقال من الرسم البياني الأول إلى الثاني.

أ ص = |س|، ص = |س| – ٤

ب ص = –|س|، ص = –|س| + ٣

دالة المرجع هي دالة نستخدم بيانها للحصول على بيان دوال أخرى بإجراء بعض التحويلات الهندسية.

بعض دوال المرجع هي: ص = أس حيث أ ≠ ٠ ، ص = س٢ ، ص = |س|، ص = – |س|، ...

الرسم البياني للدالة ص = س + ك (ك عدد حقيقي موجب) ينتج من انسحاب الرسم البياني للدالة ص = س إلى الأعلى ك وحدة.

كذلك ينتج الرسم البياني للدالة ص = س – ك من انسحاب الرسم البياني للدالة ص = س إلى الأسفل ك وحدة.

التمثيل البياني للدالة ص = |س| ± ك ينتج من انسحاب التمثيل البياني للدالة ص = |س| إلى الأعلى (أو إلى الأسفل) ك وحدة.

وبالمثل التمثيل البياني للدالة ص = – |س| ± ك ينتج من انسحاب التمثيل البياني للدالة ص = – |س| (إلى الأعلى أو إلى الأسفل ك وحدة).

مثال (٥)

لكل من الدالتين، حدّد دالة المرجع وارسم بيانها، ثم ارسم كل من الدالتين بيانيًّا مستخدمًا الانسحاب بعد تحديد مسافة الانسحاب واتجاهه.

أ ص = |س| + ٣

الحل:

أ دالة المرجع هي ص = |س|، ك = ٣

أزح الرسم البياني للدالة ص = |س| ٣ وحدات إلى الأعلى.

ب ص = –|س| + ٢

الحل:

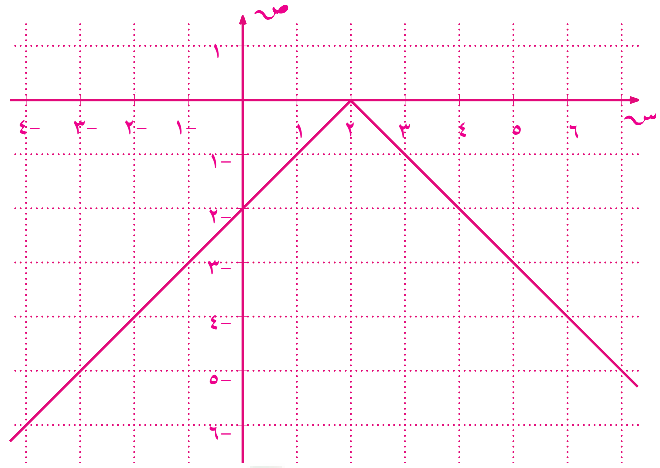
ب دالة المرجع هي ص = –|س|، ك = ٢

أزح الرسم البياني للدالة ص = –|س| وحدتين إلى الأعلى.

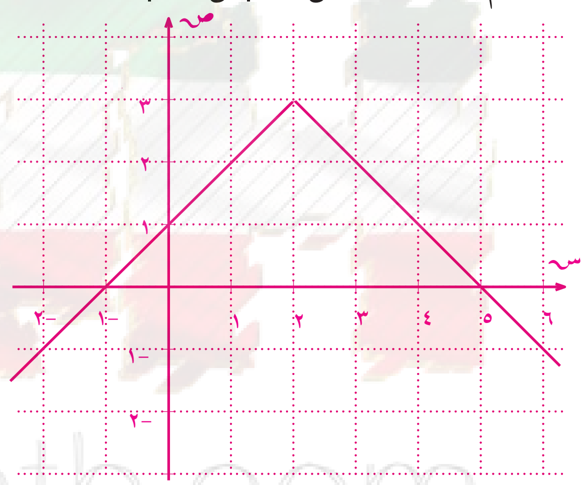
٤٢

اختبار سريع

❶ ارسم بيانيًّا الدالة ص = −|س − ٢|

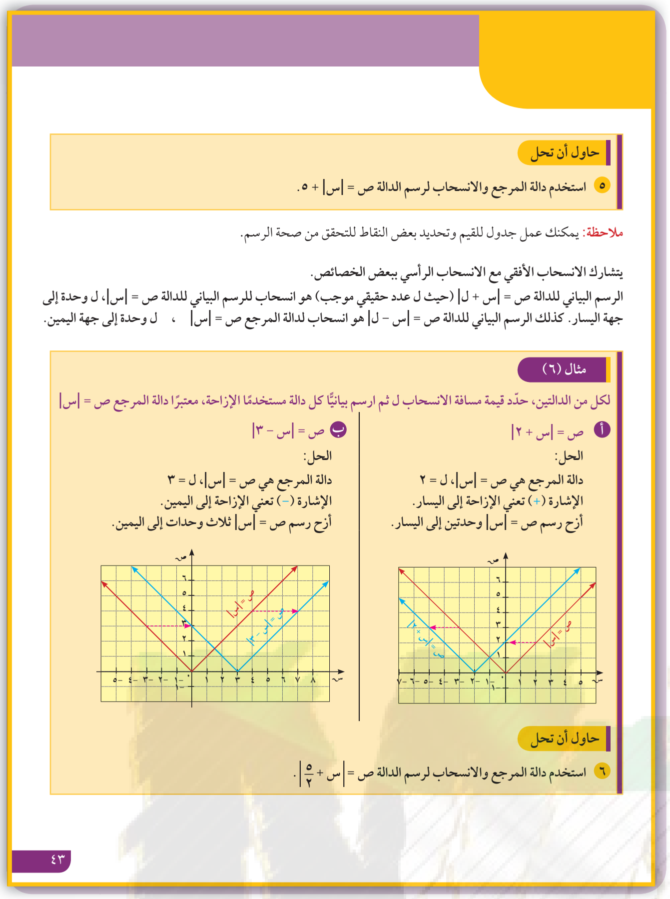


❷ ارسم بيانيًّا الدالة ص = −|س − ٢| + ٣.



❸ صف كيف يرتبط الرسم البياني للدالة ص = −|س − ٢| + ٣ بالرسم البياني للدالة ص = −|س − ٢|.

انسحاب أفقي ٣ وحدات إلى اليمين



حاول أن تحل

٥ استخدم دالة المرجع والانسحاب لرسم الدالة ص = |س| + ٥.

ملاحظة: يمكنك عمل جدول للقيم وتحديد بعض النقاط للتحقق من صحة الرسم.

يتشارك الانسحاب الأفقي مع الانسحاب الرأسي ببعض الخصائص.

الرسم البياني للدالة ص = |س + ل| (حيث ل عدد حقيقي موجب) هو انسحاب للرسم البياني للدالة ص = |س|، ل وحدة إلى جهة اليسار. كذلك الرسم البياني للدالة ص = |س − ل| هو انسحاب لدالة المرجع ص = |س|، ل وحدة إلى جهة اليمين.

مثال (٦)

لكل من الدالتين، حدّد قيمة مسافة الانسحاب ل ثم ارسم بيانيًّا كل دالة مستخدمًا الإزاحة، معتبرًا دالة المرجع ص = |س|

أ ص = |س + ٢|

الحل:

دالة المرجع هي ص = |س|، ل = ٢

الإشارة (+) تعني الإزاحة إلى اليسار.

أزح رسم ص = |س| وحدتين إلى اليسار.

ب ص = |س − ٣|

الحل:

دالة المرجع هي ص = |س|، ل = ٣

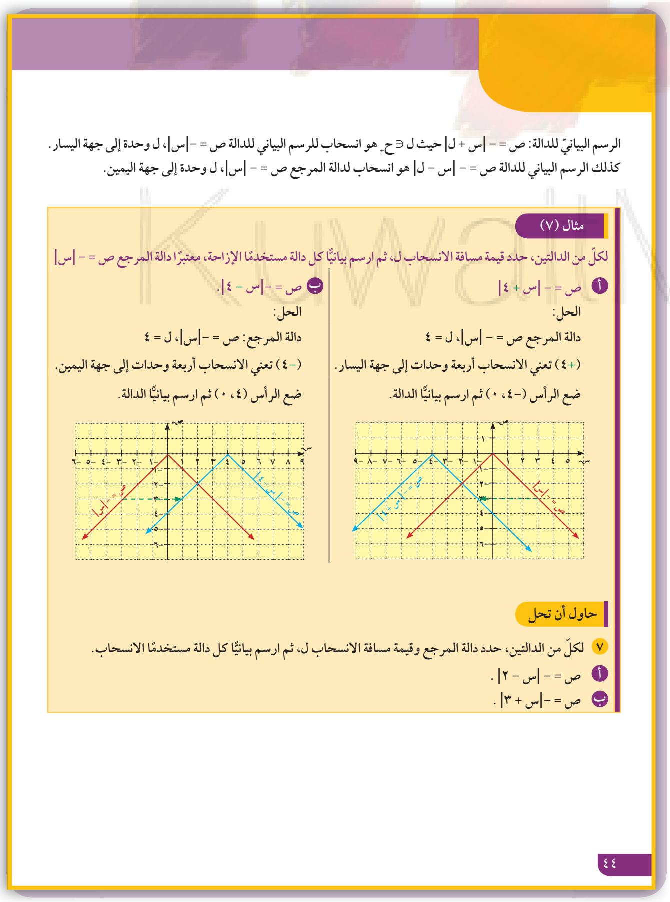
الإشارة (−) تعني الإزاحة إلى اليمين.

أزح رسم ص = |س| ثلاث وحدات إلى اليمين.

حاول أن تحل

٦ استخدم دالة المرجع والانسحاب لرسم الدالة ص = |س + $\frac{٥}{٢}$|.

٤٣



الرسم البيانيّ للدالة: ص = − |س + ل| حيث ل ∈ ح+ هو انسحاب للرسم البياني للدالة ص = −|س|، ل وحدة إلى جهة اليسار.

كذلك الرسم البياني للدالة ص = − |س − ل| هو انسحاب لدالة المرجع ص = − |س|، ل وحدة إلى جهة اليمين.

مثال (٧)

لكلّ من الدالتين، حدد قيمة مسافة الانسحاب ل، ثم ارسم بيانيًّا كل دالة مستخدمًا الإزاحة، معتبرًا دالة المرجع ص = − |س|

أ ص = − |س + ٤|

الحل:

دالة المرجع ص = − |س|، ل = ٤

(+٤) تعني الانسحاب أربعة وحدات إلى جهة اليسار.

ضع الرأس (−٤، ٠) ثم ارسم بيانيًّا الدالة.

ب ص = −|س − ٤|.

الحل:

دالة المرجع: ص = −|س|، ل = ٤

(−٤) تعني الانسحاب أربعة وحدات إلى جهة اليمين.

ضع الرأس (٤، ٠) ثم ارسم بيانيًّا الدالة.

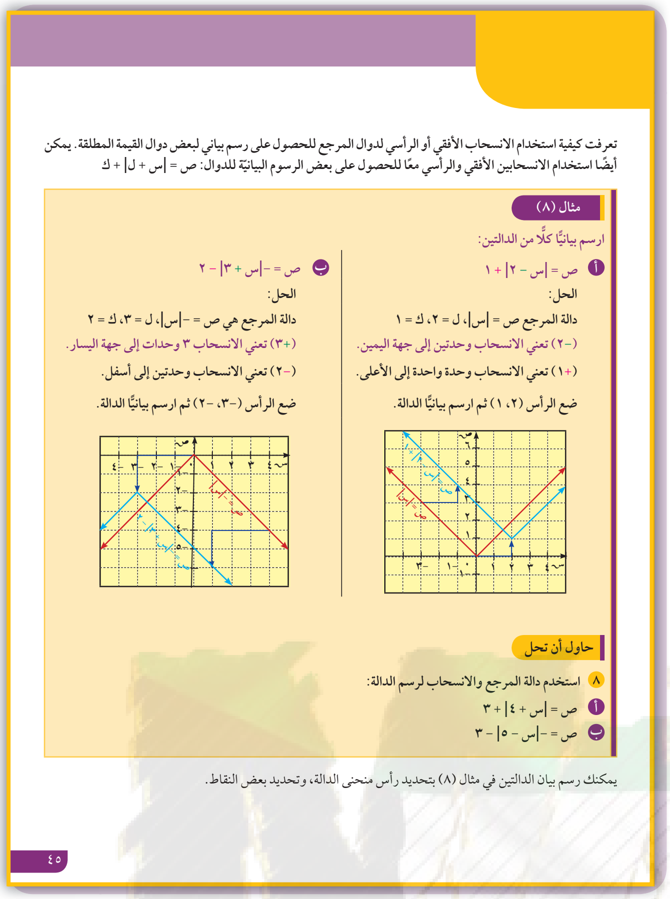
حاول أن تحل

٧ لكلّ من الدالتين، حدد دالة المرجع وقيمة مسافة الانسحاب ل، ثم ارسم بيانيًّا كل دالة مستخدمًا الانسحاب.

أ ص = − |س − ٢| .

ب ص = −|س + ٣| .

٤٤


تعرفت كيفية استخدام الانسحاب الأفقي أو الرأسي لدوال المرجع للحصول على رسم بياني لبعض دوال القيمة المطلقة. يمكن أيضًا استخدام الانسحابين الأفقي والرأسي معًا للحصول على بعض الرسوم البيانيّة للدوال: ص = |س + ل| + ك

مثال (٨)

ارسم بيانيًّا كلًّا من الدالتين:

أ ص = |س − ٢| + ١

الحل:

دالة المرجع ص = |س|، ل = ٢، ك = ١

(−٢) تعني الانسحاب وحدتين إلى جهة اليمين.

(+١) تعني الانسحاب وحدة واحدة إلى الأعلى.

ضع الرأس (٢، ١) ثم ارسم بيانيًّا الدالة.

ب ص = −|س + ٣| − ٢

الحل:

دالة المرجع هي ص = −|س|، ل = ٣، ك = ٢

(+٣) تعني الانسحاب ٣ وحدات إلى جهة اليسار.

(−٢) تعني الانسحاب وحدتين إلى أسفل.

ضع الرأس (−٣، −٢) ثم ارسم بيانيًّا الدالة.

حاول أن تحل

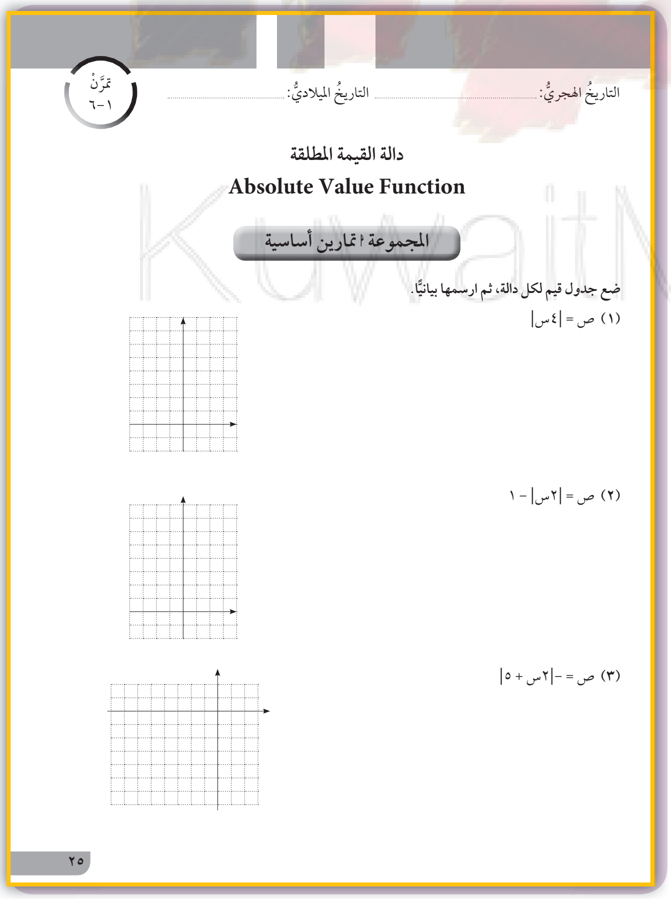
٨ استخدم دالة المرجع والانسحاب لرسم الدالة:

أ ص = |س + ٤| + ٣

ب ص = −|س − ٥| − ٣

يمكنك رسم بيان الدالتين في مثال (٨) بتحديد رأس منحنى الدالة، وتحديد بعض النقاط.

٤٥


تمرّن ١-٦

التاريخ الهجري: .... التاريخ الميلادي: ....

دالة القيمة المطلقة

Absolute Value Function

المجموعة أ تمارين أساسية

ضع جدول قيم لكل دالة، ثم ارسمها بيانيًّا.

(١) ص = |٤س|

(٢) ص = |٢س| − ١

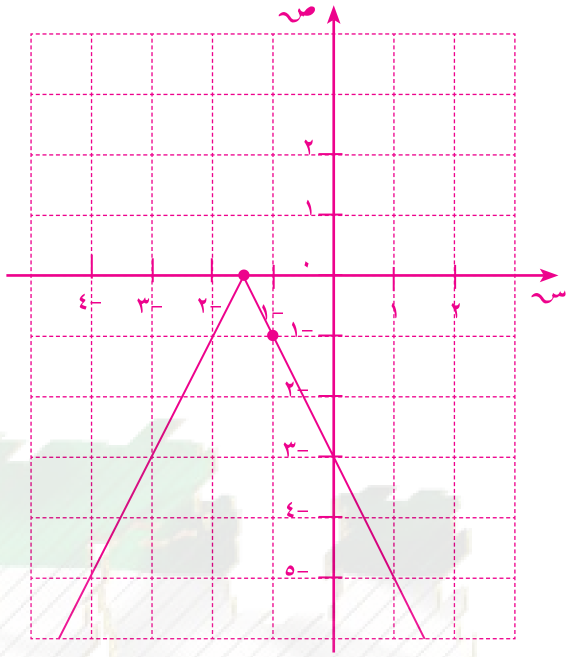
(٣) ص = −|٢س + ٥|

٢٥

٩ إجابات وحلول

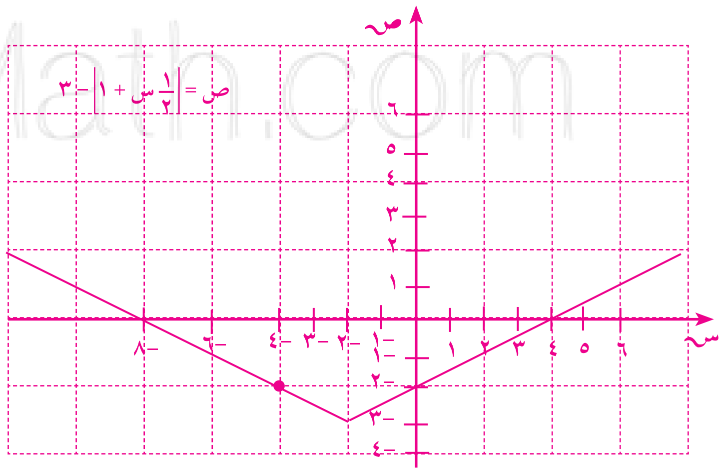
«حاول أن تحل»

١ ص = −|٢س + ٣|



٢ ص = $\frac{١}{٢}$ س − ٢، س ≥ −٢

أو ص = −$\frac{١}{٢}$ س − ٤، س < −٢



٣ ص = ٢|س + ٢|، ص = |س − ٤|

|س − ٤| = ٢|س + ٢|

|س − ٤| = |٢س + ٤|

س − ٤ = ٢س + ٤ أو س − ٤ = −٢س − ٤

س = −٨ مرفوضة أو س = ٠

أي أن منزل إبراهيم هو عند دوار الجوازات. ناقش مع الطلاب إمكانية وجود منزل عند الدوار.

٤ (أ) يبيّن الرسم البياني للدالة ص = |س| − ٤

إزاحة ٤ وحدات إلى الأسفل لبيان الدالة

ص = |س|.

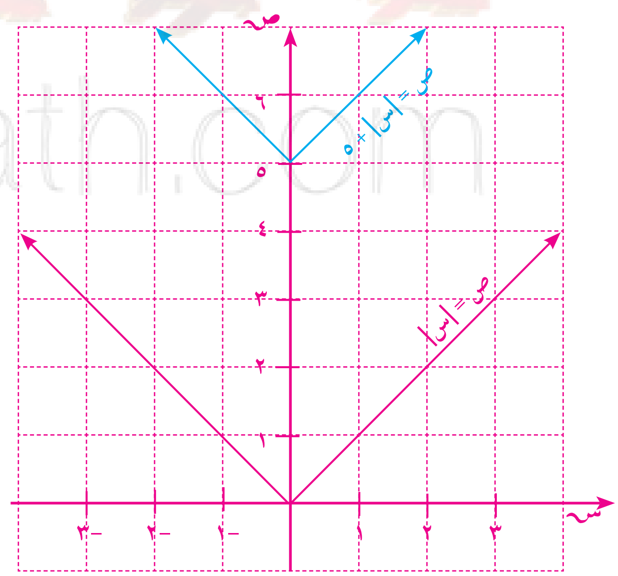
(ب) يبيّن الرسم البياني للدالة ص = −|س| + ٣

إزاحة ٣ وحدات إلى الأعلى لبيان الدالة

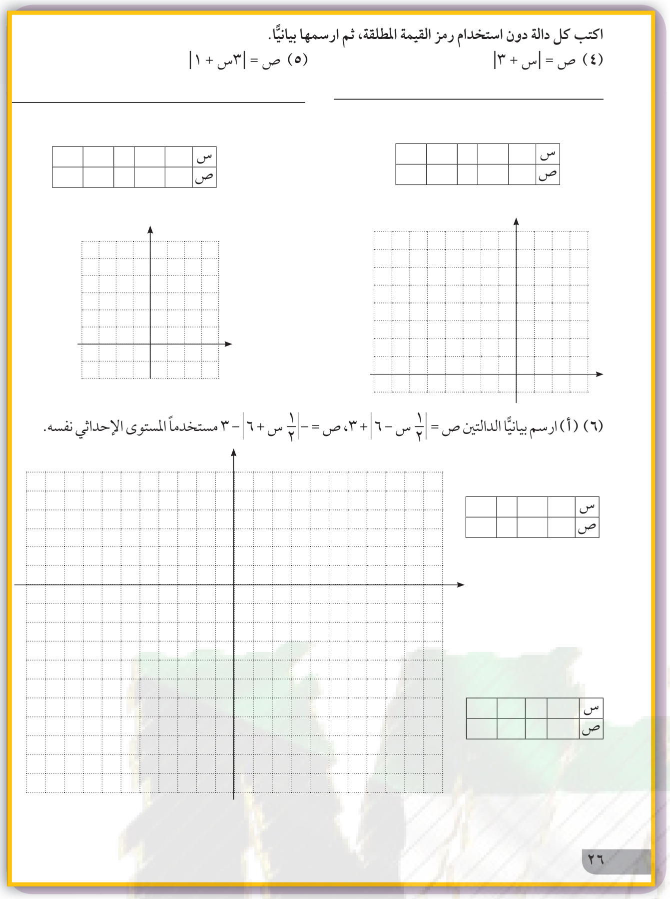
ص = −|س|.

٥ دالة المرجع ص = |س|

الدالة ص = |س| + ٥ لها رسم بياني هو إزاحة للرسم البياني للدالة ص = |س|، ٥ وحدات إلى الأعلى.



٦ الرسم البياني للدالة ص = |س + $\frac{٥}{٢}$| هو إزاحة للرسم البياني لدالة المرجع ص = |س| وحدتين ونصف إلى اليسار.


اكتب كل دالة دون استخدام رمز القيمة المطلقة، ثم ارسمها بيانيًا.

(٤) ص = |س + ٣|

(٥) ص = |٣س + ١|

س					
ص					

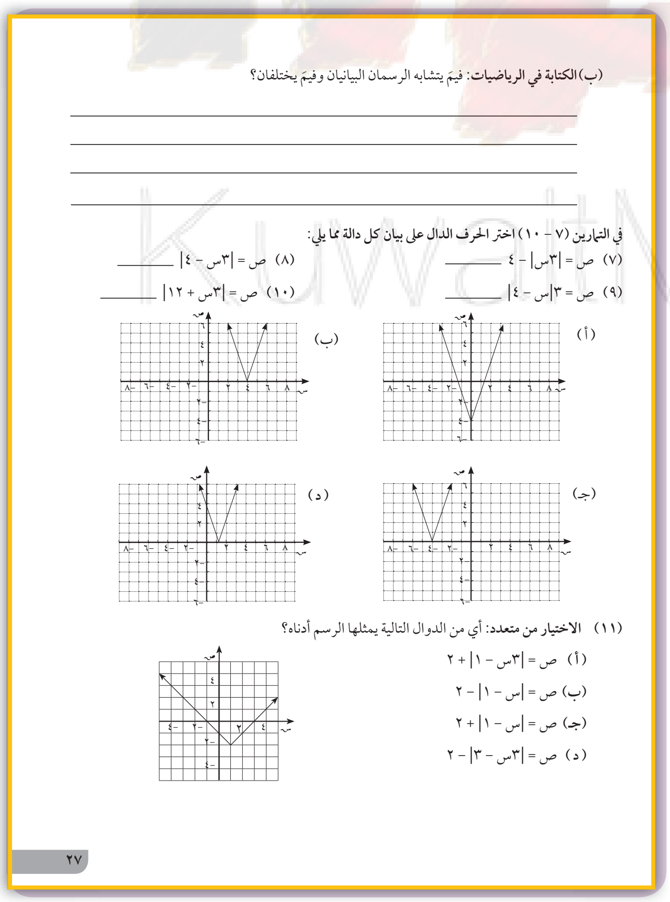
س					
ص					

(٦) (أ) ارسم بيانيًّا الدالتين ص = |$\frac{١}{٢}$ س − ٦| + ٣، ص = −|$\frac{١}{٢}$ س + ٦| − ٣ مستخدماً المستوى الإحداثي نفسه.

س				
ص				

س				
ص				

٢٦


(ب) الكتابة في الرياضيات: فيمَ يتشابه الرسمان البيانيان وفيمَ يختلفان؟

في التمارين (٧ − ١٠) اختر الحرف الدال على بيان كل دالة مما يلي:

(٧) ص = |٣س| − ٤ ______

(٨) ص = |٣س − ٤| ______

(٩) ص = ٣|س − ٤| ______

(١٠) ص = |٣س + ١٢| ______

(أ) (ب) (جـ) (د)

(١١) الاختيار من متعدد: أي من الدوال التالية يمثلها الرسم أدناه؟

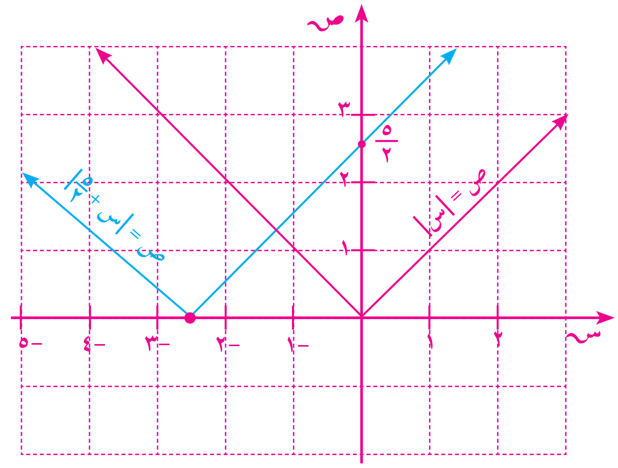
(أ) ص = |٣س − ١| + ٢

(ب) ص = |س − ١| − ٢

(جـ) ص = |س − ١| + ٢

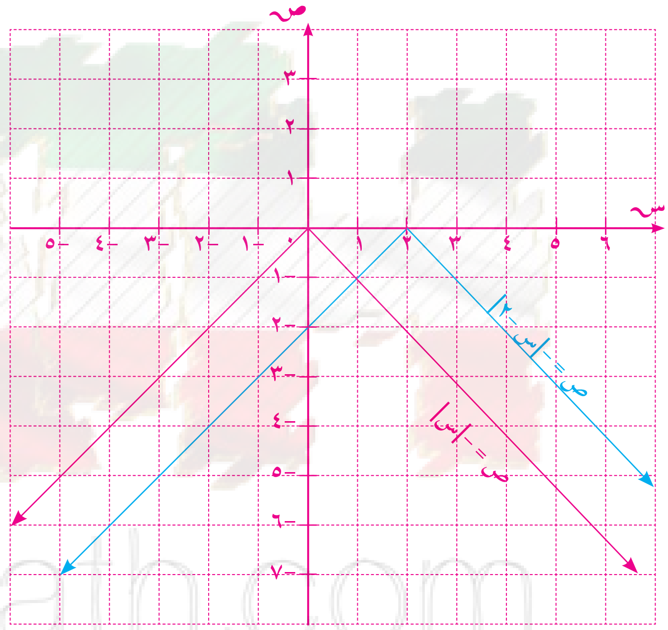
(د) ص = |٣س − ٣| − ٢

٢٧

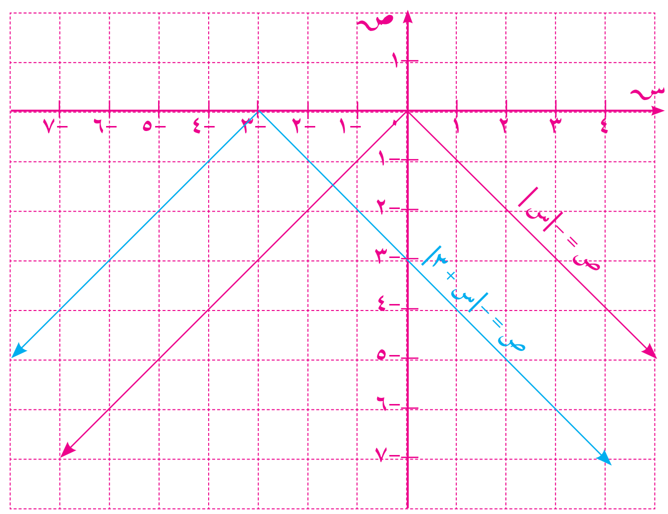


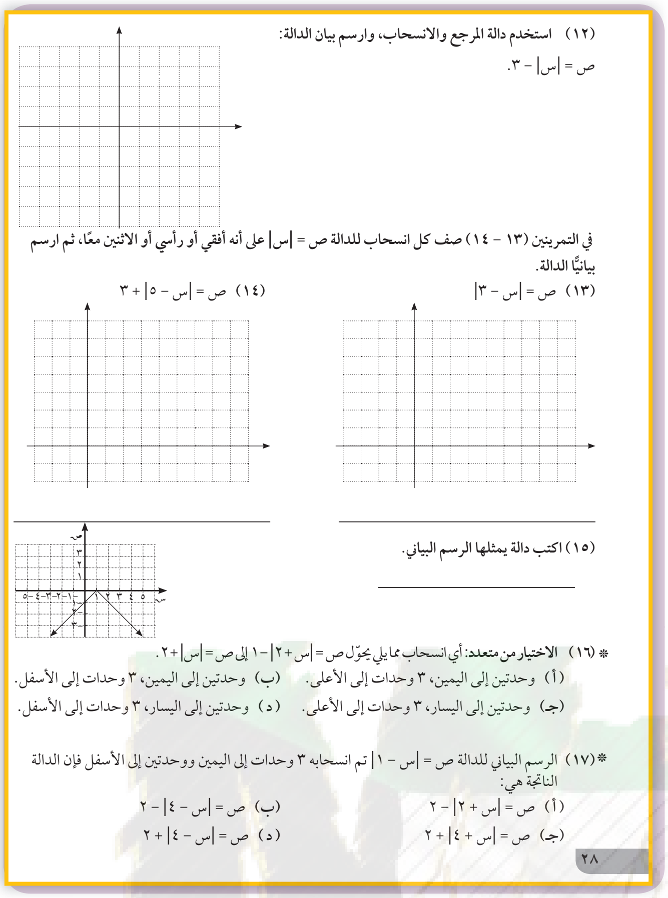
٧ (أ) دالة المرجع ص = −|س|

مسافة الانسحاب ل = ٢ واتجاهه إلى اليمين.



(ب) دالة المرجع ص = −|س| مسافة الانسحاب ل = ٣ واتجاهه لليسار





(١٢) استخدم دالة المرجع والانسحاب، وارسم بيان الدالة:

ص = |س| − ٣.

في التمرينين (١٣ − ١٤) صف كل انسحاب للدالة ص = |س| على أنه أفقي أو رأسي أو الاثنين معًا، ثم ارسم بيانيًّا الدالة.

(١٣) ص = |س − ٣| (١٤) ص = |س − ٥| + ٣

(١٥) اكتب دالة يمثلها الرسم البياني.

* (١٦) **الاختيار من متعدد:** أي انسحاب مما يلي يحوّل ص = |س + ٢| − ١ إلى ص = |س| + ٢.

(أ) وحدتين إلى اليمين، ٣ وحدات إلى الأعلى. (ب) وحدتين إلى اليمين، ٣ وحدات إلى الأسفل.

(جـ) وحدتين إلى اليسار، ٣ وحدات إلى الأعلى. (د) وحدتين إلى اليسار، ٣ وحدات إلى الأسفل.

* (١٧) الرسم البياني للدالة ص = |س − ١| تم انسحابه ٣ وحدات إلى اليمين ووحدتين إلى الأسفل فإن الدالة الناتجة هي:

(أ) ص = |س + ٢| − ٢ (ب) ص = |س − ٤| − ٢

(جـ) ص = |س + ٤| + ٢ (د) ص = |س − ٤| + ٢

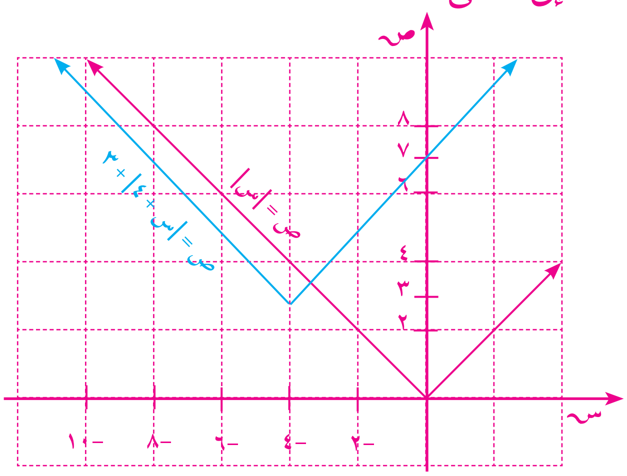
٢٨

٨ (أ) دالة المرجع ص = |س|. الرسم البياني للدالة

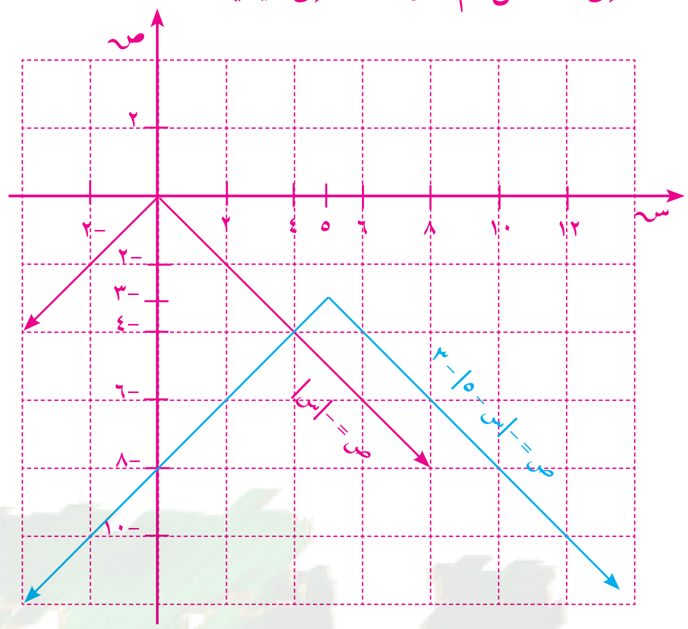
ص = |س + ٤| + ٣ هو إزاحة للرسم البياني

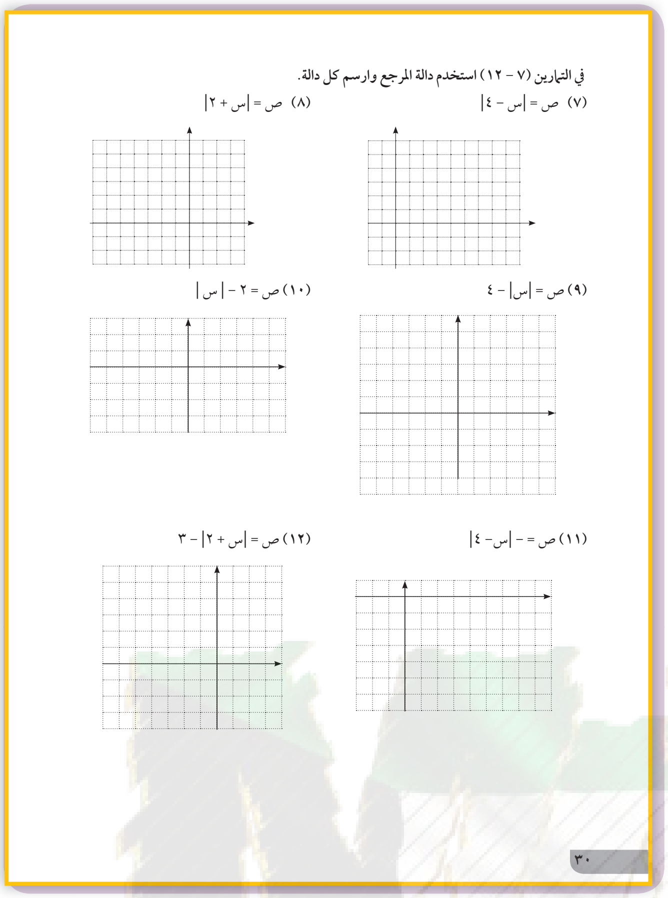
لدالة المرجع ٤ وحدات إلى اليسار ثم ٣ وحدات

إلى الأعلى.



(ب) الرسم البياني للدالة ص = -|س - ٥| - ٣ هو إزاحة للرسم البياني لدالة المرجع ص = -|س|، ٣ وحدات إلى الأسفل ثم ٥ وحدات إلى اليمين.





في التمارين (٧ - ١٢) استخدم دالة المرجع وارسم كل دالة.

(٧) ص = |س - ٤|

(٨) ص = |س + ٢|

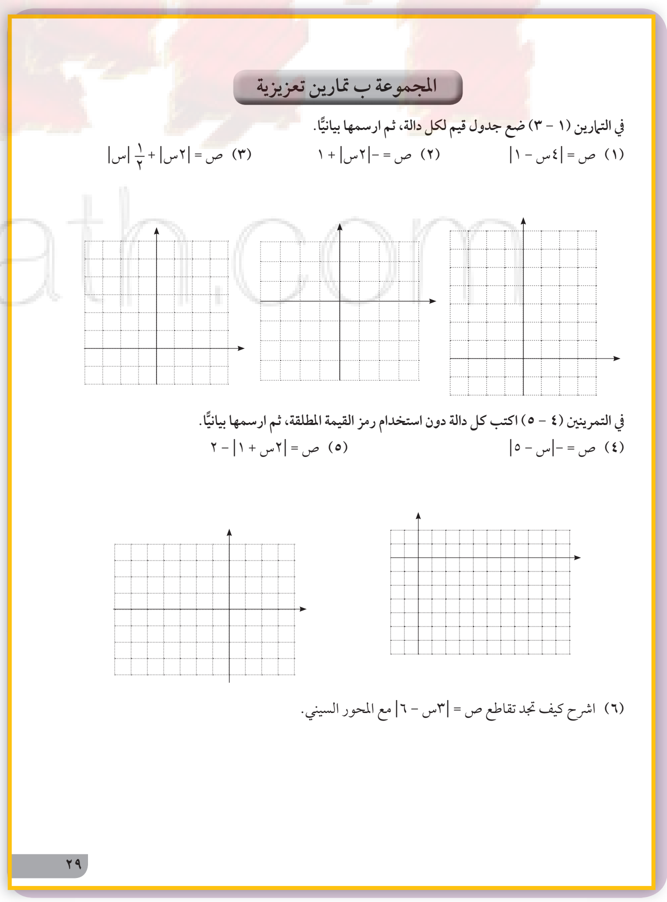
(٩) ص = |س| - ٤

(١٠) ص = ٢ - |س|

(١١) ص = - |س - ٤|

(١٢) ص = |س + ٢| - ٣

٣٠



المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمارين (١ - ٣) ضع جدول قيم لكل دالة، ثم ارسمها بيانيًّا.

(١) ص = |٤س - ١|

(٢) ص = -|٢س| + ١

(٣) ص = |٢س| + $\frac{١}{٢}$ |س|

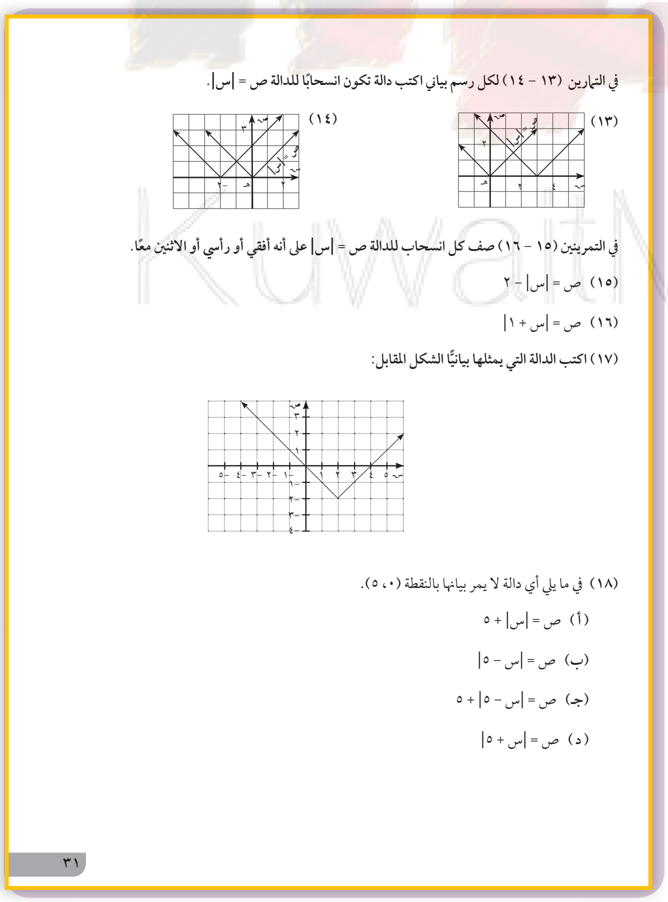
في التمرينين (٤ - ٥) اكتب كل دالة دون استخدام رمز القيمة المطلقة، ثم ارسمها بيانيًّا.

(٤) ص = -|س - ٥|

(٥) ص = |٢س + ١| - ٢

(٦) اشرح كيف تجد تقاطع ص = |٣س - ٦| مع المحور السيني.

٢٩



في التمارين (١٣ - ١٤) لكل رسم بياني اكتب دالة تكون انسحابًا للدالة ص = |س|.

(١٣)

(١٤)

في التمرينين (١٥ - ١٦) صف كل انسحاب للدالة ص = |س| على أنه أفقي أو رأسي أو الاثنين معًا.

(١٥) ص = |س| - ٢

(١٦) ص = |س + ١|

(١٧) اكتب الدالة التي يمثلها بيانيًّا الشكل المقابل:

(١٨) في ما يلي أي دالة لا يمر بيانها بالنقطة (٠، ٥).

(أ) ص = |س| + ٥

(ب) ص = |س - ٥|

(جـ) ص = |س - ٥| + ٥

(د) ص = |س + ٥|

٣١

١-٧: المستقيمات المتوازية والمتعامدة

١ الأهداف

- يتعرف توازي مستقيمين.
- يتعرف تعامد مستقيمين.
- يستخدم الميل ليعرف توازي أو تعامد مستقيمين.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

توازي – تعامد – ميل المستقيم – معادلة مستقيم.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة مدرجة – ورق رسم بياني – جهاز إسقاط – حاسوب – مصورات – آلة حاسبة.

٤ التمهيد

يتم تذكير الطالب ببعض قوانين الميل ومنها:

* ميل المستقيم المار بالنقطتين أ$(س_١، ص_١)$، ب$(س_٢، ص_٢)$ يعطى بالقانون: $م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ حيث $س_١ \neq س_٢$

* المستقيم الذي معادلته: ص = أ س + ب:
ميله = أ ويقطع المحور الصادي بالنقطة (٠، ب).

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(أ) ارسم بيانيًا المستقيمات:

ص = ٢س – ٣، ص = –س + ٣

ص = $-\frac{١}{٢}$ س + ٢، ص = س – ١

(ب) ما ميل كل مستقيم من المستقيمات السابقة؟

(جـ) أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين: أ(٣، ٤)، ب(–١، –٢).

(د) أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين: جـ(–٢، ٥)، د(٣، –١).

٥ التدريس

المستقيمات المتوازية والمتعامدة نجدها في كل الأشكال الموجودة أمامنا وحولنا، وقد رأيناها سابقًا في أشكال هندسية كثيرة.

اعرض أمام الطلاب تصاميم وأشكالاً للزينة حيث توجد

١-٧

المستقيمات المتوازية والمتعامدة
Parallel and Perpendicular Lines

فلنعمل معًا

١ طابق كل قصة مع رسمها البياني. علّل اختيارك.

يتسابق عبدالله مع أخويه فيصل وسعود في الركض.

أ قطع سعود بعض الأمتار قبل أن يبدأ عبدالله بالركض لكنهما ركضا بالسرعة نفسها.

ب عند انطلاق عبدالله كان فيصل قد قطع عدة أمتار لكن عبدالله ركض أسرع من أخيه.

٢ أ في الرسم السابق أ كيف يبدو البعد بين سعود وعبد الله بعد ثانيتين؟ ٤ ثوانٍ؟ ٦ ثوانٍ؟

ب أفرض أن طول السباق هو أكبر، هل يلتقي المستقيمان في الرسم أ ؟

جـ ما ميل كل مستقيم في الرسم أ ؟

٣ أ في الرسم ب كيف يبدو البعد بين فيصل وعبد الله بعد ثانيتين؟ ٤ ثوانٍ؟ ٦ ثوانٍ؟

ب كيف تعرف من وصل قبل الآخر إلى خط النهاية؟

سوف تتعلم

- معرفة ما إذا كان مستقيمان متوازيين
- معرفة ما إذا كان مستقيمان متعامدين
- استخدام الميل لمعرفة توازي أو تعامد أو تقاطع مستقيمين

ملاحظة: في الرسمين البيانيين: الميل يمثل السرعة لأن السرعة هي ناتج قسمة المسافة المقطوعة على الزمن المستغرق. أي كلما زادت سرعة الركض كبر ميل المستقيم.

معلومة رياضية: يعتبر المستقيمان المنطبقان متوازيين

المستقيمات المتوازية Parallele Lines

يكون المستقيمان غير الرأسيين متوازيين إذا كان لهما الميل نفسه.

كل مستقيمان رأسيان متوازيان.

فمثلًا: ميل كل من ص = ٢س + ٣، ص = ٢س – ٥ هو ٢.

الرسمان البيانيان لهاتين المعادلتين هما مستقيمان متوازيان.

ملاحظة: يكون المستقيمان المتوازيان غير الرأسيان منطبقين إذا كان كل منهما يقطع المحور الصادي عند النقطة نفسها.

٤٦

مثال (١)

يوضّح الشكل المقابل التمثيل البياني للمستقيمين:

ص = $-\frac{١}{٣}$ س + ٢ ، ٢س + ٦ص = ٨

هل المستقيمان متوازيان؟

هل المستقيمان منطبقان؟ فسّر إجابتك.

الحل:

نكتب المعادلتين على الشكل ص = م س + ن (معادلة الميل والجزء المقطوع)

في المعادلة ص = $-\frac{١}{٣}$ س + ٢

الميل = $-\frac{١}{٣}$ والجزء المقطوع من المحور الصادي = ٢

في المعادلة ٢س + ٦ص = ٨

٦ص = –٢س + ٨

ص = $-\frac{١}{٣}$ س + $\frac{٤}{٣}$

الميل = $-\frac{١}{٣}$ والجزء المقطوع من المحور الصادي = $\frac{٤}{٣}$

∵ للمستقيمين الميل نفسه $-\frac{١}{٣}$

∴ المستقيمان متوازيان.

∵ الجزء المقطوع من المحور الصادي مختلف

∴ المستقيمان غير منطبقين (مختلفان)

حاول أن تحل

١ هل المستقيمان ص = $\frac{٣}{٤}$ س – ١، –٦س + ٨ص = ١٢ متوازيان؟ فسّر إجابتك.

يمكنك استخدام حقيقة أن لمستقيمين متوازيين الميل نفسه لكتابة معادلة مستقيم موازٍ لمستقيم معطى بمعادلته ويمر بنقطة ما.

مثال (٢)

أوجد معادلة المستقيم $(ل_١)$ الذي يمر بالنقطة (١، ٠) وموازٍ للمستقيم $(ل_٢)$ الذي معادلته ص = ٢س + ١.

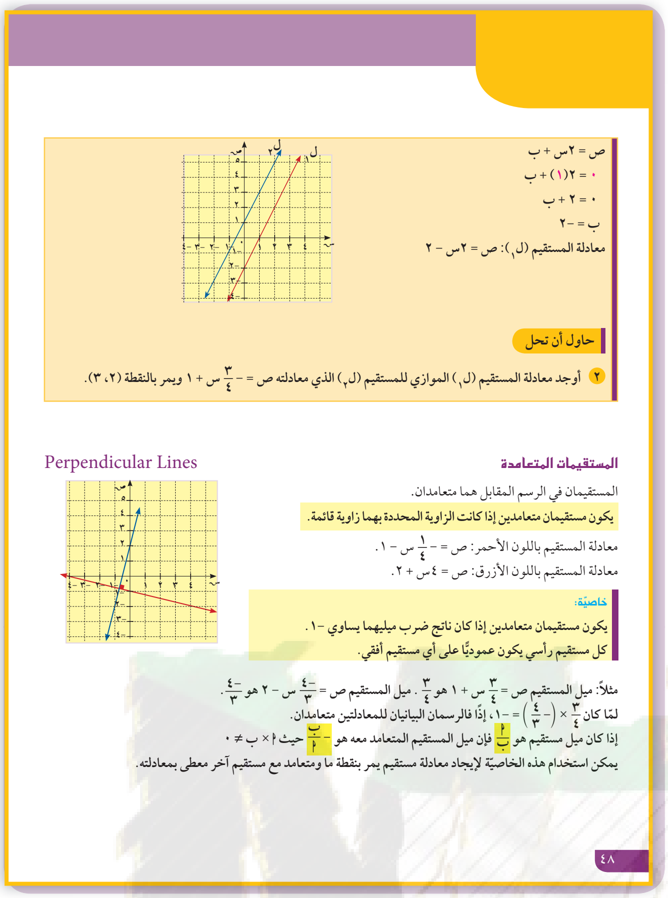
الحل:

ميل المستقيم $(ل_٢)$: ص = ٢س + ١ هو ٢.

تكتب معادلة المستقيم $(ل_١)$ على الصورة ص = ٢س + ب

لإيجاد قيمة ب عوّض عن (س، ص) بـ (١، ٠)

٤٧


ص = ٢س + ب

$٠ = ٢(١) + ب$

$٠ = ٢ + ب$

ب = −٢

معادلة المستقيم ($ل_١$): ص = ٢س − ٢

حاول أن تحل

٢ أوجد معادلة المستقيم ($ل_١$) الموازي للمستقيم ($ل_٢$) الذي معادلته ص = $-\frac{٣}{٤}$ س + ١ ويمر بالنقطة (٢، ٣).

المستقيمات المتعامدة　Perpendicular Lines

المستقيمان في الرسم المقابل هما متعامدان.

يكون مستقيمان متعامدين إذا كانت الزاوية المحددة بهما زاوية قائمة.

معادلة المستقيم باللون الأحمر: ص = $-\frac{١}{٤}$ س − ١.

معادلة المستقيم باللون الأزرق: ص = ٤س + ٢.

خاصيّة:

يكون مستقيمان متعامدين إذا كان ناتج ضرب ميليهما يساوي −١.

كل مستقيم رأسي يكون عموديًا على أي مستقيم أفقي.

مثلاً: ميل المستقيم ص = $\frac{٣}{٤}$ س + ١ هو $\frac{٣}{٤}$. ميل المستقيم ص = $\frac{-٤}{٣}$ س − ٢ هو $\frac{-٤}{٣}$.

لمّا كان $\frac{٣}{٤} \times \left(-\frac{٤}{٣}\right) = -١$، إذًا فالرسمان البيانيان للمعادلتين متعامدان.

إذا كان ميل مستقيم هو $\frac{أ}{ب}$ فإن ميل المستقيم المتعامد معه هو $-\frac{ب}{أ}$ حيث أ × ب ≠ ٠

يمكن استخدام هذه الخاصيّة لإيجاد معادلة مستقيم يمر بنقطة ما ومتعامد مع مستقيم آخر معطى بمعادلته.

٤٨


مثال (٣)

أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٤، ١) والعمودي على المستقيم الذي معادلته ص = ٢س + ٥.

الحل:

ميل المستقيم المعطى هو ٢.

ميل المستقيم العمودي عليه هو $\left(-\frac{١}{٢}\right)$.

معادلة هذا المستقيم هي على الصورة:

ص = $-\frac{١}{٢}$ س + ب

عوّض عن (س، ص) بالزوج المرتب (٤، ١).

$١ = -\frac{١}{٢}(٤) + ب$

١ = −٢ + ب

ب = ٣

∴ ص = $-\frac{١}{٢}$ س + ٣ وهي المعادلة المطلوبة.

إرشاد: بعد إيجاد ميل المستقيم المتعامد، أوجد ناتج ضرب الميلين وتحقق أنه يساوي −١.

حاول أن تحل

٣ أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٣، ٤) والعمودي على المستقيم الذي معادلته ص = $\frac{٣}{٥}$ س + ٦.

درست فيما سبق أن الرياضيين يستخدمون مصطلح الميل ليصفوا انحدار الخط. هذا يربط التغيّر الرأسي بالتغيّر الأفقي. ويسميّان غالبًا الارتفاع الرأسيّ the rise والامتداد الأفقي the run.

– المستقيم الذي يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يكون ميله موجبًا.

– المستقيم الذي يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يكون ميله سالبًا.

– المستقيم الرأسي ليس له ميل.

– المستقيم الأفقي ميله يساوي صفرًا.

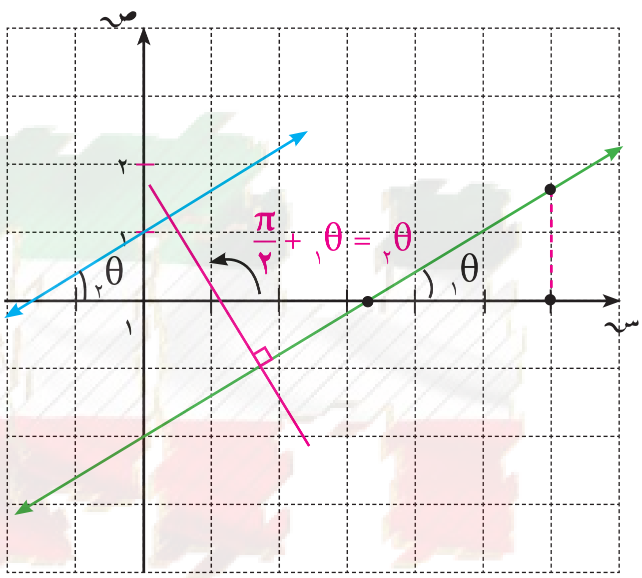
٤٩

الخطوط المستقيمة المتوازية أو المتعامدة.

ناقش معهم معنى الميل في المستقيم وأهميته في إيجاد العلاقة بين مستقيمين أو أكثر.

اعرض لهم أمثلة متعددة تريهم كيفية إيجاد الميل بتطبيق القاعدة: $\frac{\text{الارتفاع الرأسي}}{\text{الامتداد الأفقي}}$

أضف إلى معلوماتك:



إذا كان مستقيمان متوازيين، يتساوى قياسا الزاويتين اللتين يصنعانهما مع القسم الموجب من المحور السيني.

$\theta_١ = \theta_٢$ ∴ ظا $\theta_١$ = ظا $\theta_٢$

في المثلث قائم الزاوية، ظا θ = $\frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المجاور}}$

$= \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = الميل

∴ ميل المستقيم م = ميل المستقيم ل.

أما في حالة التعامد، فإن $\theta_٢ = \theta_١ + \frac{\pi}{٢}$.

ظا $\left(\theta_١ + \frac{\pi}{٢}\right)$ = − ظتا $\theta_١$.

ظا $\theta_١$ × ظا $\theta_٢$ = ظا $\theta_١$ × (− ظتا $\theta_١$) = −١

∴ ناتج ضرب الميلين = −١

٦ الربط

المثالان (٤)، (٥) يشكلان ترابطًا للمستقيمات المتعامدة.

يشدد المعلم على طريقة استخدام المربعات في الشبكة لرسم المستقيم وتمثيل الميل.

الميل = ٢ : خطوة جهة اليمين ثم خطوتين إلى الأعلى.

أما في المثال (٥)، يطرح المعلم الفكرة: إن طول العمود هو أصغر بعد بين نقطة ومستقيم (أقصر مسافة).

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ بعض الطلاب في تحديد المستقيمين المتعامدين.

ساعدهم بأمثلة تبيّن كيف أنه يجب أن يكون:

ميل المستقيم الأول × ميل المستقيم الثاني = −١ .

(إذا كانا غير رأسيين)

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يجيبون عن الأسئلة في فقرات «حاول أن تحل» تأكد من أنهم يفهمون جيدًا شروط التوازي والتعامد بين المستقيمين.

اختبار سريع

١ أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بنقطة الأصل والعمودي على المستقيم الذي معادلته :

ص = ٢س − ١ . ص = $-\frac{١}{٢}$ س.

٢ أوجد معادلة المستقيم الموازي للمستقيم الذي معادلته ٢س − ٣ص = ٤ والمار بالنقطة (٣، ٤)

ص = $\frac{٢}{٣}$ س + ٢ .

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ ١-٧

المستقيمات المتوازية والمتعامدة

Parallel and Perpendicular Lines

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمرينين (١ – ٢) أوجد ميل المستقيم الموازي لبيان كل معادلة.

(١) ص = $-\frac{٣}{٢}$ س + ٣

(٢) ٣س – ٢ص = ١

في التمرينين (٣ – ٤) أي مما يلي يمثل معادلتي مستقيمين متوازيين؟ فسِّر.

(٣) ص = ٣س + ١
٢ص – ٣س = ١

(٤) ص = $\frac{١}{٣}$ س – ٢
س – ٣ص = ١

في التمرينين (٥ – ٦) اكتب معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة المبينة والموازي للمستقيم المعطى معادلته.

(٥) ٢ص + ٣س = ٤
(٠، ٣)

(٦) س = ٣ص – ٦
(–٢، ١)

في التمارين (٧– ١٠) أوجد ميل المستقيم المتعامد مع بيان كل معادلة إن وجد.

(٧) ص = $\frac{٢}{٣}$ س+ ٤

(٨) ص = ٢

(٩) ٢س – ٥ص = ١

(١٠) س = ٥ – ٤ص

في التمارين (١١– ١٤) اكتب معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة المبينة ويكون متعامدًا مع المستقيم المعطى معادلته.

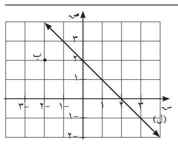
(١١) ص = –٣س + ١
(٠،٠)

(١٢) ص – س = ١
(١، ١)

(١٣) ٣س – ٥ص = ٤
(–٢، ٣)

(١٤) س = –٣
(٣، ٤)

(١٥) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة ب والمتعامد مع المستقيم (ل).



* (١٦) **التفكير المنطقي**: هل يمكن إيجاد مستقيمين متعامدين يكون ميل كل منهما عددًا موجبًا؟ فسِّر.

(١٧) **الاختيار من متعدد**: أي مما يلي يمثل معادلتي مستقيمين متعامدين؟

(أ) ص = ٤س – $\frac{١}{٢}$
ص = –٤س + $\frac{١}{٢}$

(ب) ص = $\frac{٢}{٣}$ س + ٥
ص = ٣س – ٢

(جـ) ص = –$\frac{٣}{٤}$ س + ٢
ص = $\frac{٣}{٤}$ س – ٢

(د) ص = –$\frac{٢}{٥}$ س
ص = $\frac{٥}{٢}$ س – ١

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ معادلة المستقيم الأول: ص = $\frac{٣}{٤}$ س − ١

معادلة المستقيم الثاني: ص = $\frac{٣}{٤}$ س + $\frac{٣}{٢}$

ميل الأول = ميل الثاني = $\frac{٣}{٤}$ لذا المستقيمان متوازيان.

٢ المستقيمان متوازيان لذا لهما الميل نفسه.

المعادلة: ص = − $\frac{٣}{٤}$ س + $\frac{٩}{٢}$

٣ يجب أن يكون: ميل الأول × ميل الثاني = −١

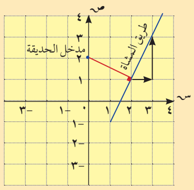
لكي يكون المستقيمان متعامدين.

لذا $\frac{٣}{٥}$ × ميل الثاني = −١ أي أن ميل الثاني سوف يكون − $\frac{٥}{٣}$

معادلة المستقيم ص = − $\frac{٥}{٣}$ س + ٩.

مثال (٤) **تطبيقات حياتية**

قررت إدارة الحديقة العامة في السالمية إنشاء طريق للدراجات الهوائية يبدأ من مدخل الحديقة ويكون متعامدًا مع الطريق الرئيسي للمشاة داخل الحديقة. أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمثل طريق الدراجات. (انظر الشكل).



الحل:

ميل خط المشاة = $\frac{٢}{١}$ = ٢

ميل خط الدراجات = − $\frac{١}{٢}$

معادلة خط الدراجات هي على الصورة ص = − $\frac{١}{٢}$ س + ب

يمر هذا الخط بالنقطة (٠ ، ٢)

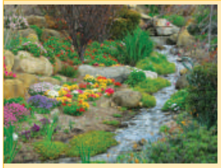
∴ ٢ = − $\frac{١}{٢}$ (٠) + ب

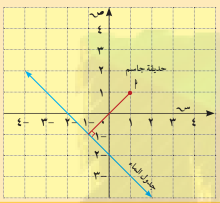
٢ = ب

معادلة خط الدراجات هي ص = − $\frac{١}{٢}$ س + ٢

مثال (٥)

يمر جدول ماء بالقرب من حديقة جاسم. يريد جاسم مد خرطوم ماء لري الحديقة بحيث يكون طوله أقصر ما يمكن. ساعد جاسم على تحقيق ذلك. (انظر الشكل)





الحل:

يبيّن الرسم جدول الماء (باللون الأزرق) وحديقة جاسم (النقطة أ).

ميل جدول الماء = $\frac{٢}{-٢}$ = −١

∴ ميل المستقيم من حديقة جاسم إلى الجدول هو: $\frac{-١}{-١}$ = ١

ومعادلته: ص = ١س + ب

نعوّض عن (س، ص) بإحداثيات الحديقة (١ ، ١)

١ = ١(١) + ب أي ب = ٠ ومنه ص = س.

نرسم بيانيًّا المستقيم الذي معادلته ص = س.

يمثل هذا المستقيم الخط حيث يمر خرطوم المياه.

٥٠

---

(١٨) لأي قيمة لِـ ك يكون المستقيمان ص = ٣س − ٤، ص = ك س + ١

(أ) متعامدين؟ (ب) متوازيين؟

* (١٩) **الكتابة في الرياضيات:** $م_١$ ، $م_٢$ مستقيمان معطيان. بأي حالة يمكن إيجاد مستقيم متعامد مع $م_١$ وموازٍ لـ $م_٢$؟ فسِّر.

المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمارين (١ − ٣) أوجد ميل المستقيم الموازي للمستقيم الذي معادلته:

(١) ص = $\frac{٢}{٥}$ س + ٤ (٢) ص + س = −٢ (٣) س − ص = $\frac{١}{٢}$

في التمرينين (٤ − ٥) هل الرسمان البيانيان لكل مستقيمين متوازيان؟ فسِّر.

(٤) ص = $\frac{٢}{٥}$ س + ٢
٥ص − ٢س = ٤

(٥) ص = س
ص + س = ٣

في التمرينين (٦ − ٧) اكتب معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة المبينة والموازي للمستقيم المعطى.

(٦) ص = ٢س + ١
(١ ، ٢)

(٧) ص = −٣س − ١
(٤ ، ٤)

في التمرينين (٨ − ٩) أوجد ميل المستقيم المتعامد مع بيان كل معادلة.

(٨) س + ص = ٢ (٩) ٢س + ٤ص = ٥

في التمارين (١٠ − ١٢) اكتب معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة المبينة ويكون متعامدًا مع المستقيم المعطى.

(١٠) ص + ٤س = ٢
(٣ ، ٢)

(١١) ص = ٢
(١ ، ١)

(١٢) ٢س − ٣ص = ٤
(١ ، ٥)

(١٣) أي معادلة بيانها مستقيم متعامد مع المستقيم الذي ميله $\frac{٢}{٣}$؟

(أ) ص = $\frac{٢}{٣}$ س + ١ (ب) ص = − $\frac{٣}{٢}$ س

(جـ) ٢ص − ٣س = ٤ (د) ٣ص + ٢س = ١

٣٤

١-٨: حل نظام معادلتين خطيتين

١ الأهداف

- يتعرف النظام الخطي.
- يحل نظامًا من معادلتين خطيتين بيانيًّا.
- يحل نظامًا من معادلتين خطيتين بطريقة الحذف.
- يحل نظامًا من معادلتين خطيتين بطريقة التعويض.
- يحل مسائل حياتية مستخدمًا النظام الخطي.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

نظام من معادلتين – الحل بيانيًّا – الحل بالحذف – الحل بالتعويض.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة – ورق رسم بياني – آلة حاسبة – جهاز إسقاط – حاسوب – مصورات.

٤ التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

لديك المستقيم (ل) الذي معادلته: ٢س + ٣ص = ٦

(أ) ارسم على ورقة رسم بياني المستقيم (ل).

(ب) إذا كانت س = ٤، فما قيمة ص؟

(جـ) إذا كانت ص = ٦، فما قيمة س؟

(د) أوجد قيمة ص بدلالة س.

(هـ) ما عدد حلول المعادلة؟

٥ التدريس

يعتبر إيجاد الحل لنظام معادلتين خطيتين بيانيًّا ذا أهمية كبرى لأنه يعتمد أساسًا على دقة في الرسم ثم تقدير الإجابة وهذه مهارة تساعد لاحقًا على تقدير إحداثيات نقطة التقاطع بين منحنيات سوف يراها الطالب لاحقًا.

من المفيد التركيز أولًا على هذه الطريقة في الحل، ثم الانتقال بعد ذلك إلى الطرائق الأخرى إن كان بطريقة الحذف أو بطريقة التعويض أو باستخدام الآلة الحاسبة.

في كل حالة، شجع الطلاب على التحقق من صحة الحلول التي وجدوها.

٦ الربط

انظر المثال (٥)، ترابط حياتي. إن اختيار المجهولين أمر أساسي في حل المسألة يشدد على أن قيم س، ص موجبة لأنها تمثل

١–٨

حل نظام معادلتين خطيتين
Solving a System of Two Linear Equations

سوف تتعلم
- حل نظام معادلتين خطيتين بيانيًّا
- حل نظام معادلتين خطيتين باستخدام طريقة الحذف
- حل نظام معادلتين خطيتين بيانيًّا باستخدام طريقة التعويض

معلومة مفيدة (تكنولوجيا)

لإدخال البيانات في الآلة الحاسبة، نعتمد الصيغة:

١ MODE EQN $a_nx + b_ny = c_n$

أو

٢ MODE MODE EQN 2 Unknowns

يظهر على الشاشة

$$\begin{array}{c} \\ ١ \\ ٢ \end{array}\begin{bmatrix} a & b & c \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

ملاحظة: ١ معظم الآلات الحاسبة تعتمد الصيغة
أس + ب ص = جـ ، $ax + by = c$
٢ تختلف صيغة إدخال البيانات من آلة حاسبة إلى أخرى لذلك ينصح بمراجعة الدليل المرفق بكل آلة حاسبة.

معلومة رياضية: نستخدم الأقواس الكبيرة { قبل كتابة نظام المعادلات.

استكشاف: تحليل الرسوم البيانية

١ (أ) {ص = ٢س + ٣ ، ص = −س + ١ (ب) {ص = ٢س + ١ ، ص = ٢س (جـ) {ص = ٢س + ٢ ، ٤س − ٢ص + ٤ = ٠

٢ لكل زوج من المعادلات أجب عن الأسئلة التالية:
(أ) هل للرسوم البيانية نقاط مشتركة؟ ما عددها؟
(ب) قارن بين ميلي كل زوج من المعادلات الخطية. ما العلاقة بين عدد النقاط المشتركة والميلين؟

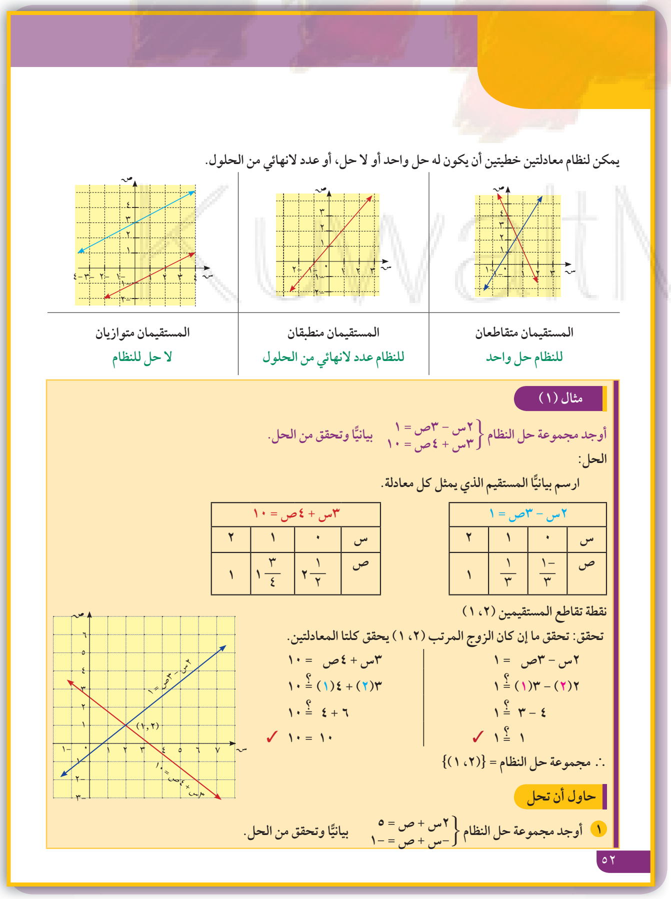
نظام معادلات هو مجموعة من معادلتين أو أكثر تستخدم المتغيرات نفسها. إذا كان الرسم البياني لكل معادلة في نظام من معادلتين هو خط مستقيم، فإن النظام يدعى نظامًا خطيًّا.

فمثلًا {٢س + ٣ص = ٤ ، −س + ٢ص = ٣ هو نظام خطي

حل نظام معادلات هو إيجاد قيم المتغيرات التي تحقق كل معادلات النظام.

يمكن حل نظام معادلتين خطيتين هندسيًّا بتمثيل معادلاتهما بيانيًّا.

٥١



يمكن لنظام معادلتين خطيتين أن يكون له حل واحد أو لا حل، أو عدد لانهائي من الحلول.

مثال (١)

أوجد مجموعة حل النظام {٢س − ٣ص = ١ ، ٣س + ٤ص = ١٠ بيانيًّا وتحقق من الحل.

الحل:

ارسم بيانيًّا المستقيم الذي يمثل كل معادلة.

٢س − ٣ص = ١			
س	٠	١	٢
ص	$-\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	١

٣س + ٤ص = ١٠			
س	٠	١	٢
ص	$٢\frac{١}{٢}$	$١\frac{٣}{٤}$	١

نقطة تقاطع المستقيمين (٢، ١)

تحقق: تحقق ما إن كان الزوج المرتب (٢، ١) يحقق كلتا المعادلتين.

٢س − ٣ص = ١
٢(٢) − ٣(١) ≟ ١
٤ − ٣ ≟ ١
١ ≟ ١ ✓

٣س + ٤ص = ١٠
٣(٢) + ٤(١) ≟ ١٠
٦ + ٤ ≟ ١٠
١٠ = ١٠ ✓

∴ مجموعة حل النظام = {(٢، ١)}

حاول أن تحل

١ أوجد مجموعة حل النظام {٢س + ص = ٥ ، −س + ص = −١ بيانيًّا وتحقق من الحل.

٥٢

أسعارًا. القراءة المتأنية للمسألة أمر مهم. أشر إلى أنه يمكن التحقق بيانيًّا من الحل.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يكون التقدير لإيجاد إحداثيات تقاطع المستقيمين غير صحيح. اطلب إلى الطلاب استخدام المسطرة وأوراق الرسم البياني لرسم المستقيمين من نظام المعادلتين، ثم التحقق من الحل بعد ذلك.

٨ التقييم

لاحظ عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لتقرر ما إذا كانوا قادرين على الربط بين الرسم البياني والحلول بالطرائق الأخرى البديلة.

اختبار سريع

١ حل النظام { −٢س + ٥ص = −٢ ، س − ٣ص = ٣ } بطريقة التعويض.
(−٩، −٤)

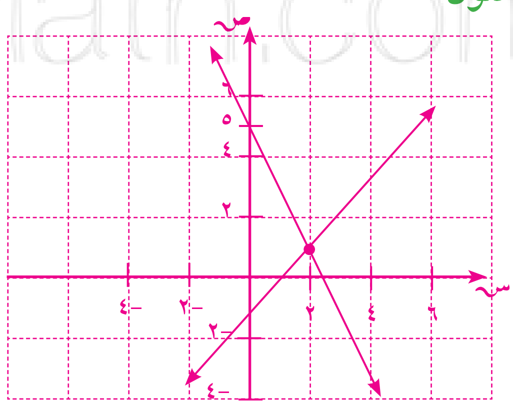
٢ حل النظام { ١٠س + ٦ص = ٠ ، −٧س + ٢ص = ٣١ } بطريقة الحذف.
(−٣، ٥)

٣ باعت مكتبة ٥ نسخ من كتاب مدرسي و٣ نسخ من كتاب مطالعة بسعر ٧٨ دينارًا وفي اليوم التالي، باعت المكتبة ٣ نسخ من الكتاب المدرسي نفسه ونسخة واحدة من كتاب المطالعة نفسه بسعر ٤٢ دينار. ١٢، ٦.

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١



يبيّن الرسم البياني أن مجموعة حل النظام هي {(٢، ١)}.
وللتأكد نعوض س = ٢، ص = ١ في كل معادلة:
٢(٢) + ١ = ٥
٥ = ٥ ✓
ثم −٢ + ١ = −١
−١ = −١ ✓

يمكن حل نظام معادلتين خطيتين جبريًّا **بطريقة الحذف**. نستخدم خاصية الجمع والضرب في المعادلات.

مثال (٢)

استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام { ٢س − ص = ١٣ ، ٣س + ص = ٧ }

الحل:
٢س − ص = ١٣ ① معامل ص في المعادلة الثانية هو المعكوس الجمعي
٣س + ص = ٧ ② لمعامل ص في المعادلة الأولى لذلك نجمع المعادلتين
٥س = ٢٠
س = ٤
٣س + ص = ٧ اختر إحدى المعادلتين
٣(٤) + ص = ٧ عوّض عن س بـ ٤ في المعادلة ②
١٢ + ص = ٧ بسِّط
ص = −٥
مجموعة الحل = {(٤، −٥)}.

ملاحظة: يمكن معرفة ما إذا كان للنظام حل واحد بمقارنة ميلي المستقيمين: إذا اختلف ميلا المستقيمين، فيكون للنظام حل واحد.

حاول أن تحل

٢ استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام { ٢س + ٣ص = ١١ ، −٢س + ٤ص = ١٠ }

يمكن أن تحوّل صيغ معادلتي النظام بحيث يصبح معاملا ص (أو س) كل منهما المعكوس الجمعي للآخر باستخدام خاصيّة الضرب في المعادلات.

مثال (٣)

استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام { ٢س + ٣ص = ٣ ، ٣س − ٥ص = ١٤ }

الحل: ٢س + ٣ص = ٣ ①
٣س − ٥ص = ١٤ ②
٢س + ٣ص = ٣... اضرب المعادلة ① في ٥ ← ١٠س + ١٥ص = ١٥
٣س − ٥ص = ١٤... اضرب المعادلة ② في ٣ ← ٩س − ١٥ص = ٤٢
اجمع
١٩س = ٥٧
س = ٣

٢س + ٣ص = ٣ اختر إحدى المعادلتين
٢(٣) + ٣ص = ٣ عوّض عن س بـ ٣ في المعادلة ①
٦ + ٣ص = ٣
٣ص = −٣
ص = −١
مجموعة الحل = {(٣، −١)}

حاول أن تحل

٣ استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام { ٢م + ٣ل = ١٢ ، ٥م − ل = ١٣ }

يمكن أيضًا حل نظام معادلتين جبريًّا **بطريقة التعويض**.
حدّد قيمة أحد المتغيرين بدلالة الآخر في إحدى المعادلتين، وعوّض عنه بقيمته في المعادلة الثانية.

مثال (٤)

استخدم طريقة التعويض لإيجاد مجموعة حل النظام { ٣س − ص = ١ ، ٣س − ٢ص = ٥ }.

الحل: في المعادلة الأولى (تم اختيارها لأنها أسهل)، حدّد قيمة ص بدلالة س.
٣س − ص = ١
ص = ٣س − ١
في المعادلة الثانية عوّض عن ص بقيمتها:
٣س − ٢(٣س − ١) = ٥
٣س − ٦س + ٢ = ٥ بسِّط
−٣س = ٣
س = −١
عوّض عن س بـ (−١) في ص = ٣س − ١
ص = ٣(−١) − ١
ص = −٤
مجموعة الحل: {(−١؛ −٤)}

حاول أن تحل

٤ أوجد مجموعة حل النظام { ت = ٢ر + ٣ ، ٥ر − ٤ت = ٦ } مستخدمًا طريقة التعويض.

٢
٢س + ٣ص = ١١
−٢س + ٤ص = ١٠
٧ص = ٢١، ص = ٣
س = ١   مجموعة الحل = {(١، ٣)}

٣
٢م + ٣ل = ١٢
١٥م − ٣ل = ٣٩
١٧م = ٥١، م = ٣
ل = ٢
مجموعة الحل = {(م، ل)} = {(٣، ٢)}

٤
٥ر − ٤(٢ر + ٣) = ٦
ر = −٦
ت = −٩
مجموعة الحل = {(ر، ت)} = {(−٦، −٩)}

٥
س + ص = ١٤
٠,٥ س + ٠,٣٧٥ ص = ٦
س = ٦، ص = ٨
مجموعة الحل = {(٦، ٨)}

ملاحظة حول التمرين رقم ٥ في كراسة التمارين:

للنظام عدد لانهائي من الحلول.

يكتب الحل: {(س، −٣س + ٤): س ∈ ح}


مثال (٥) تطبيقات حياتية

دفع محمد ٢,٨٠٠ دينار ثمن ٦ أكواب شاي وقطعتي حلوى، ودفع سالم في المكان نفسه ٥,٢٠٠ دنانير ثمن كوبين من الشاي و٦ قطع حلوى. ما سعر كوب الشاي وما سعر قطعة الحلوى؟

الحل:

ليكن ش سعر كوب الشاي، حـ سعر قطعة الحلوى

محمد	٦ أكواب شاي ٦ × ش	و +	قطعتا حلوى ٢ × حـ	دفع =	٢,٨٠٠ دينار = ٢,٨٠٠
سالم	كوبان من الشاي ٢ × ش	و +	٦ قطع حلوى ٦ × حـ	دفع =	٥,٢٠٠ دنانير = ٥,٢٠٠

لمعرفة الأسعار نحل النظام: {٦ش + ٢حـ = ٢,٨٠٠ ، ٢ش + ٦حـ = ٥,٢٠٠}

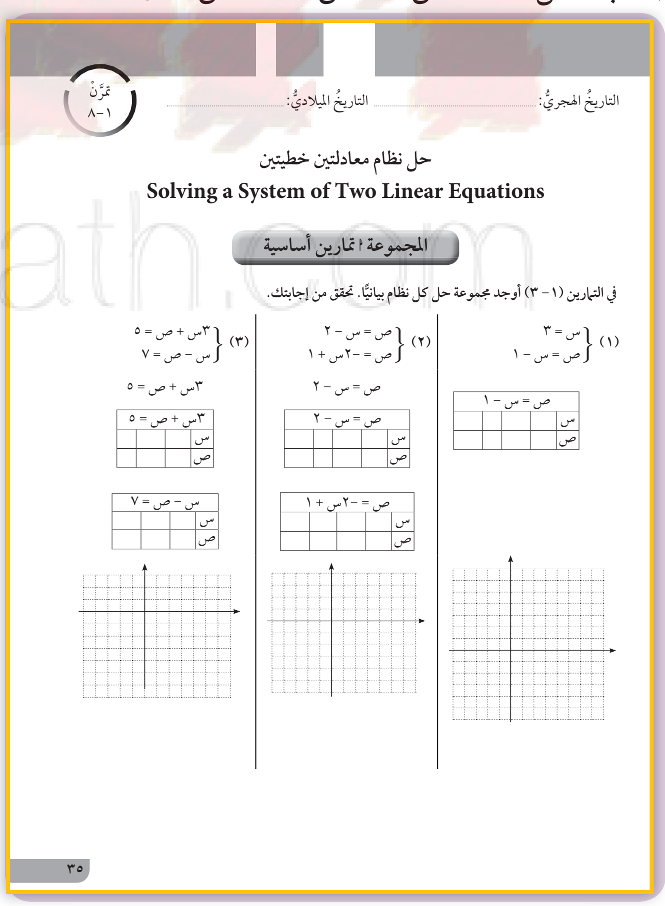
باستخدام أي من الطرائق التي سبق عرضها نحصل على: ش = ٠,٢٠٠، حـ = ٠,٨٠٠.

أي أن سعر كوب الشاي = ٠,٢٠٠ دينار، وسعر قطعة الحلوى = ٠,٨٠٠ دينار.

حاول أن تحل

٥ وزعت ٦ كجم من المربى في ١٤ عبوة، بعض العبوات يحتوي على ٥٠٠ جم وبعضها الآخر على ٣٧٥ جم .
ما عدد العبوات من كل نوع؟

٥٥


التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: .... تمرَّنْ ١-٨

حل نظام معادلتين خطيتين

Solving a System of Two Linear Equations

المجموعة أ تمارين أساسية

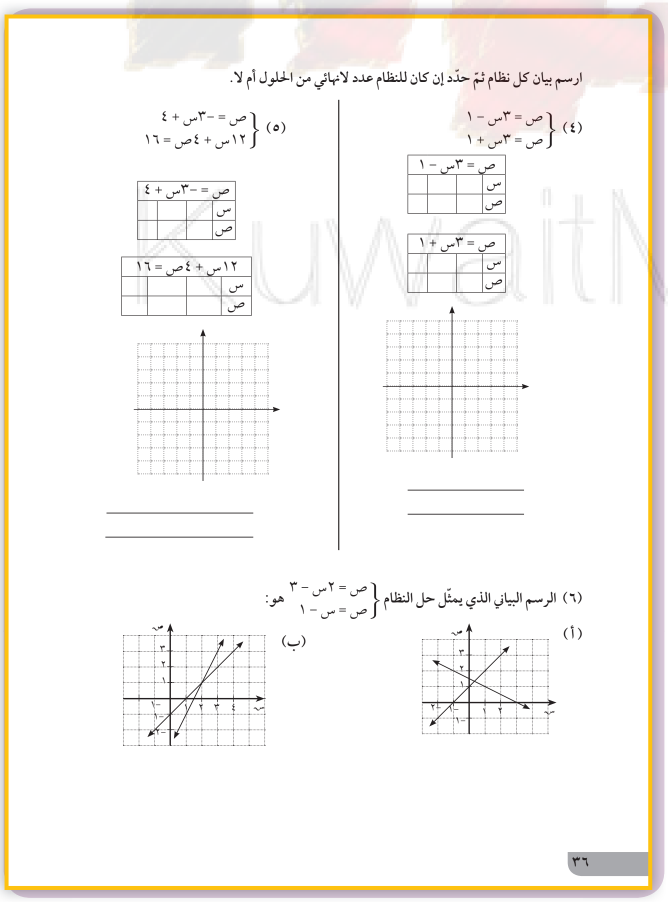
في التمارين (١ – ٣) أوجد مجموعة حل كل نظام بيانيًّا. تحقق من إجابتك.

(١) {س = ٣ ، ص = س − ١}

(٢) {ص = س − ٢ ، ص = −٢س + ١}

(٣) {٣س + ص = ٥ ، س − ص = ٧}

٣٥


ارسم بيان كل نظام ثمّ حدّد إن كان للنظام عدد لانهائي من الحلول أم لا.

(٤) {ص = ٣س − ١ ، ص = ٣س + ١}

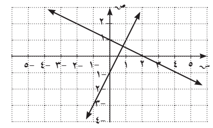
(٥) {ص = −٣س + ٤ ، ١٢س + ٤ص = ١٦}

(٦) الرسم البياني الذي يمثّل حل النظام {ص = ٢س − ٣ ، ص = س − ١} هو:

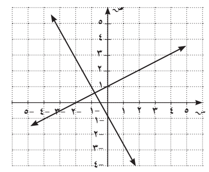
(أ) (ب)

٣٦

(جـ)



(د)



في التمارين (٧– ١٠) أوجد مجموعة حل كل نظام مما يلي مستخدمًا طريقة الحذف.

(٧) ٣أ + ٢و = ١٥ ، −٢أ + ٣و = −٥

(٨) ٢ر + ب = ٣ ، ٤ر − ب = ٩

(٩) ٥ك − ٢ت = −١٩ ، ٢ك + ٣ت = ٠

(١٠) ف = ٩ت + ٣٠ ، ف = ٧ت + ٤٠

في التمارين (١١– ١٤) أوجد مجموعة حل كل نظام مستخدمًا طريقة التعويض.

(١١) د + ٦ذ = ٢ ، ٥د + ٤ذ = ٣٦

(١٢) ت = ٢ر + ٣ ، ٥ر − ٤ت = ٦

(١٣) جـ + ب = ١٢ ، ٣جـ − ب = ٨

(١٤) س = ٣ص − ٤ ، ٢ص = ٣س − ٩

في التمارين (١٥– ١٧) لكل نظام مما يلي، اختر طريقة الحل التي تراها الأفضل لإيجاد مجموعة الحل.

(١٥) ٣س − ص = ٥ ، ص = ٤س + ٢

(١٦) ٢س − ٣ص = ٤ ، ٢س − ٥ص = −٦

(١٧) ص = ٣س + ١ ، ص = س − ٥

* (١٨) **السؤال المفتوح**: اكتب نظام معادلتين خطيتين يحقق المعطيات.
(أ) لا حل. إحدى المعادلتين: ص = ٤س + ٥.
(ب) له حل واحد والمستقيمان متعامدان.
(جـ) عدد لانهائي من الحلول وإحدى المعادلتين بيانها يقطع المحور الصادي عند النقطة (٠، ٣).

* (١٩) **التحديّ**: إذا كان ميل المستقيم الذي يصل النقطة ب بنقطة الأصل هو $\frac{٢}{٩}$. ميل المستقيم الذي يصل النقطة ب بالنقطة جـ (−٤، ٣) هو ١. أوجد إحداثيات النقطة ب.

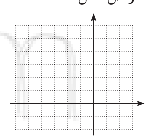
(٢٠) **مواصلات**: يخطط ٢٦ طالبًا للقيام برحلة تزلج مع خمسة إداريين. يقود كل إداري سيارة. هناك نوعان من السيارات: سيارات بخمسة مقاعد وسيارات بسبعة مقاعد. ما عدد السيارات من كل نوع لنقل الطلاب والإداريين؟

* (٢١) **التحديّ**: تربط المعادلة ف = $\frac{٩}{٥}$ س + ٣٢ بين درجات الحرارة بالقياس السيليزي (س) وقياس فهرنهايت (ف). هل هناك درجة حرارة هي نفسها بالقياسين؟ في حالة الإيجاب، ما هي؟

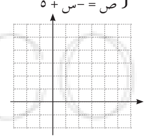
المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمارين (١– ٣) أوجد مجموعة حل كل نظام بيانيًّا.

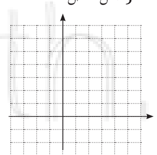
(١) س + ص = ٢ ، ص − س = ٦



(٢) ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٢ ، ص = −س + ٥

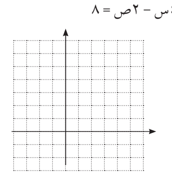


(٣) س + ٢ص − ٤ = ٠ ، ٣س − ص = ٥

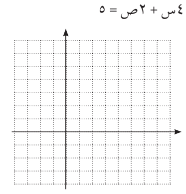


في التمرينين (٤– ٥) ارسم بيان كل نظام. ثم حدّد إن كان للنظام عدد لانهائي من الحلول أم لا.

(٤) ص = ٢س + ٦ ، ٤س − ٢ص = ٨



(٥) ٢س + ص = ٥ ، ٤س + ٢ص = ٥



في التمارين (٦– ٨) أوجد مجموعة حل كل نظام مما يلي مستخدمًا طريقة الحذف.

(٦) ٤س + ٢ص = ٤ ، ٦س + ٢ص = ٨

(٧) س − ١٤ = −ص ، س − ص = ٢

(٨) ٢م − ٣ن = −١ ، ٣م + ٤ن = ٨

في التمارين (٩– ١١) أوجد مجموعة حل كل نظام مما يلي مستخدمًا طريقة التعويض.

(٩) أ + ١٢ب = ٦٨ ، أ = ٨ب − ١٢

(١٠) ٤ك + ٢ت = ٨ ، ت = ٢ك + ١

(١١) ر + س = −١٢ ، ٢ر − ٣س = ٦

في التمارين (١٢– ١٥) أوجد مجموعة حل كل نظام مما يلي.

(١٢) ٨ك + ٦ل = ٨,٥ ، ١٠ك − ٤ل = ٢

(١٣) $\frac{١}{٢}$ س + ص = ٧ ، ٢س − ٣ص = ٧

(١٤) ٢ص = ٢س ، ٢س + ص = $\frac{ص}{٢}$ + ١

(١٥) ص = −٤ س + ١١ ، ص = ٣ س − ٣

(١٦) **الهندسة**: في مثلث قائم الزاوية يزيد قياس إحدى الزوايا الحادة ٣٠° عن مثلي قياس الزاوية الحادة الأخرى. أوجد قياسي هاتين الزاويتين.

(١٧) يتسع مسرح لِـ ٤٠٠ مقعد. تبلغ أسعار البطاقات ١٥ دينارًا للمقاعد الأمامية و١٢ دينارًا للمقاعد الباقية. إذا كان المسرح مليئًا فقيمة المبلغ لقاء التذاكر المباعة ٥ ٢٤٠ دينارًا. ما عدد المقاعد الأمامية وما عدد المقاعد الباقية؟

(١٨) لدى رجل عمره الآن ٤٦ عامًا ابنًا عمره ٢٦ عامًا، وابنة صغيرة. بعد عدة سنوات، يصبح عمر الأب مساويًا لمجموع عمريهما، كذلك يصبح مساويًا لثلاثة أمثال عمر الابنة. ما العمر الحالي للابنة؟

* (١٩) توجه أحمد وفهد إلى مركز تجاري لشراء هدية لصديقهما سلطان. إذا دفع أحمد $\frac{٢}{٥}$ مما يملكه من مال ودفع فهد $\frac{٣}{٤}$ مما يملكه يستطيعان شراء هدية جميلة بقيمة ٢١ دينارًا. عرض عليهم البائع تخفيض السعر ٤ دنانير، فدفع أحمد $\frac{٣}{٥}$ مما يملكه ودفع فهد $\frac{٢}{٥}$ مما يملكه. أوجد المبلغ الذي كان مع كل من أحمد وفهد.

١-٩: حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد

١ الأهداف

- يتعرف قانون حل المعادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد.
- يستخدم المميز ليحل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد.
- يقارن بين نوع جذري المعادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد باستخدام المميز مع الرسم البياني للدالة المناظرة لهذه المعادلة.
- يوجد مجموع وناتج ضرب جذري معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد.
- يوجد معادلة من الدرجة الثانية إذا عُلم جذراها.
- يتحقق من صحة حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد بيانيًّا.
- يحل بعض المتباينات التربيعية بيانيًّا.

٢ المفردات والمفاهيم الجديدة

المميز - قانون حل المعادلة - المربع الكامل - مجموع الجذرين - ناتج ضرب الجذرين.

٣ الأدوات والوسائل

مسطرة - ورق رسم بياني - آلة حاسبة - حاسوب - جهاز إسقاط - مصورات.

٤ التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(أ) حل المعادلة: ٣س − ٥ = ٦س + ٤.

(ب) حل المعادلة: (٢س + ٧)(٤س − ٥) = ٠.

(جـ) اكتب المعادلة: س^{٢} − ٦س + ٩ = ٠ على شكل مربع كامل، ثم أوجد الحل.

(د) استخدم الحساب الذهني لتوجد عددين ناتج جمعهما ٢٧ وناتج ضربهما ٥٠.

١-٩

حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد
Solving Quadratic Equations in One Variable

دعنا نفكر ونتناقش

سبق أن قمت بحلّ بعض معادلات الدرجة الثانية بالتحليل، كما في المثال التالي:

حلّ المعادلة: س^{٢} − ٧س + ١٠ = ٠

الحل:

س^{٢} − ٧س + ١٠ = ٠

(س − ٢)(س − ٥) = ٠

∴ س − ٢ = ٠ أو س − ٥ = ٠

أي س = ٢ أو س = ٥

إذًا حلّ المعادلة هو س = ٢ أو س = ٥

لكن بعض المعادلات يصعب (أو لا يمكن) حلها بالتحليل.

لذلك نبحث عن طريقة أخرى هي بإكمال المربع، كما في المثال التالي:

حلّ المعادلة: س^{٢} + ٦س − ٥ = ٠

الحل: نأخذ المربع الكامل: (س + ص)^{٢} = س^{٢} + ٢س ص + ص^{٢}

وبالمقارنة مع المعادلة ٢س ص = ٦س

نحصل على ص = ٣، ص^{٢} = ٩

وعليه، لحل المعادلة نضيف للطرفين ص^{٢} = ٩ لنحصل على مربع كامل.

س^{٢} + ٦س = ٥

س^{٢} + ٦س + ٩ = ٥ + ٩ بإكمال المربع للمقدار س^{٢} + ٦س

(س + ٣)^{٢} = ١٤

س + ٣ = ±$\sqrt{١٤}$

س = −٣ + $\sqrt{١٤}$ أو س = −٣ − $\sqrt{١٤}$

إن طريقة إكمال المربع تصلح لحل أي معادلة من الدرجة الثانية.

سوف تتعلم

- قانون حل المعادلات من الدرجة الثانية
- استخدام المميز Δ
- المقارنة بين المعادلة والشكل البياني للدالة من الدرجة الثانية باستخدام Δ
- مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة
- إيجاد معادلة من الدرجة الثانية إذا علم جذراها

١- حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد بإكمال المربع:
Solving Quadratic Equation by Completing the Square

مثال (١)

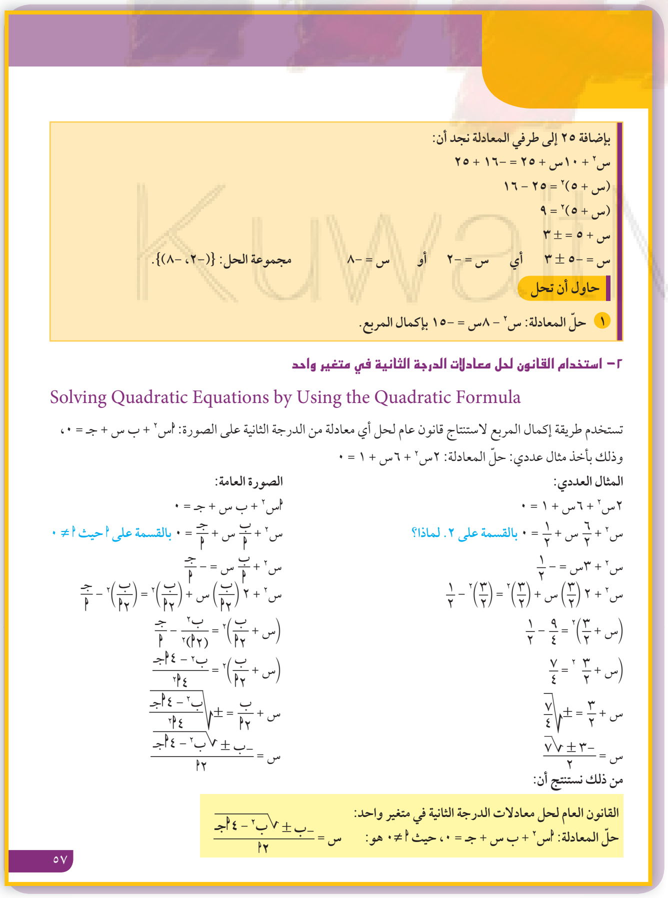
أوجد مجموعة حلّ المعادلة: س^{٢} + ١٠س = −١٦ بإكمال المربع.

الحل:

نكمل س^{٢} + ١٠س لتصبح مربعًا كاملًا،

إرشاد:
لإكمال المربع نضيف إلى الطرفين ($\frac{١}{٢}$ معامل س)^{٢}

٥٦



بإضافة ٢٥ إلى طرفي المعادلة نجد أن:

س^{٢} + ١٠س + ٢٥ = −١٦ + ٢٥

(س + ٥)^{٢} = ٢٥ − ١٦

(س + ٥)^{٢} = ٩

س + ٥ = ±٣

س = −٥ ± ٣ أي س = −٢ أو س = −٨ مجموعة الحل: {(−٢، −٨)}.

حاول أن تحل

١ حلّ المعادلة: س^{٢} − ٨س = −١٥ بإكمال المربع.

٢- استخدام القانون لحل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد
Solving Quadratic Equations by Using the Quadratic Formula

تستخدم طريقة إكمال المربع لاستنتاج قانون عام لحل أي معادلة من الدرجة الثانية على الصورة: أس^{٢} + ب س + جـ = ٠،

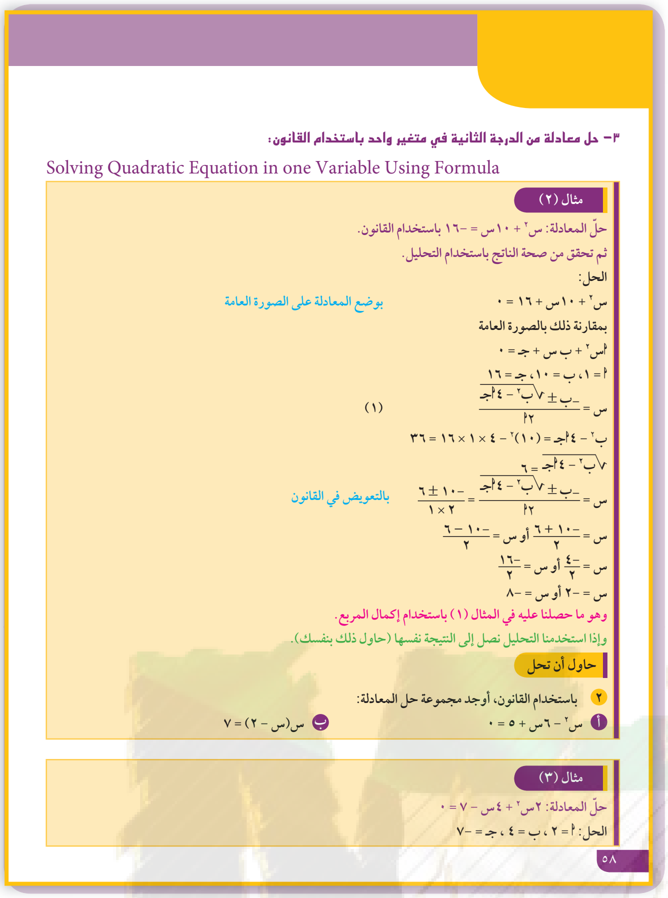
وذلك بأخذ مثال عددي: حلّ المعادلة: ٢س^{٢} + ٦س + ١ = ٠

الصورة العامة:	المثال العددي:
أس^{٢} + ب س + جـ = ٠	٢س^{٢} + ٦س + ١ = ٠
س^{٢} + $\frac{ب}{أ}$ س + $\frac{جـ}{أ}$ = ٠ بالقسمة على أ حيث أ ≠ ٠	س^{٢} + $\frac{٦}{٢}$ س + $\frac{١}{٢}$ = ٠ بالقسمة على ٢. لماذا؟
س^{٢} + $\frac{ب}{أ}$ س = −$\frac{جـ}{أ}$	س^{٢} + ٣س = −$\frac{١}{٢}$
س^{٢} + ٢$\left(\frac{ب}{٢أ}\right)$ س + $\left(\frac{ب}{٢أ}\right)^{٢}$ = $\left(\frac{ب}{٢أ}\right)^{٢}$ − $\frac{جـ}{أ}$	س^{٢} + ٢$\left(\frac{٣}{٢}\right)$ س + $\left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢}$ = $\left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢}$ − $\frac{١}{٢}$
$\left(س + \frac{ب}{٢أ}\right)^{٢}$ = $\frac{ب^{٢}}{(٢أ)^{٢}}$ − $\frac{جـ}{أ}$	$\left(س + \frac{٣}{٢}\right)^{٢}$ = $\frac{٩}{٤}$ − $\frac{١}{٢}$
$\left(س + \frac{ب}{٢أ}\right)^{٢}$ = $\frac{ب^{٢} − ٤أجـ}{٤أ^{٢}}$	$\left(س + \frac{٣}{٢}\right)^{٢}$ = $\frac{٧}{٤}$
س + $\frac{ب}{٢أ}$ = ±$\sqrt{\frac{ب^{٢} − ٤أجـ}{٤أ^{٢}}}$	س + $\frac{٣}{٢}$ = ±$\sqrt{\frac{٧}{٤}}$
س = $\frac{−ب ± \sqrt{ب^{٢} − ٤أجـ}}{٢أ}$	س = $\frac{−٣ ± \sqrt{٧}}{٢}$

من ذلك نستنتج أن:

القانون العام لحل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد:
حلّ المعادلة: أس^{٢} + ب س + جـ = ٠، حيث أ ≠ ٠ هو: س = $\frac{−ب ± \sqrt{ب^{٢} − ٤أجـ}}{٢أ}$

٥٧


٣- حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد باستخدام القانون:

Solving Quadratic Equation in one Variable Using Formula

مثال (٢)

حلّ المعادلة: $س^{٢} + ١٠س = -١٦$ باستخدام القانون.
ثم تحقق من صحة الناتج باستخدام التحليل.

الحل:

$س^{٢} + ١٠س + ١٦ = ٠$ بوضع المعادلة على الصورة العامة

بمقارنة ذلك بالصورة العامة

$أس^{٢} + ب س + جـ = ٠$

$أ = ١،\ ب = ١٠،\ جـ = ١٦$

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$ (١)

$ب^{٢} - ٤أجـ = (١٠)^{٢} - ٤ \times ١ \times ١٦ = ٣٦$

$\sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ} = ٦$

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{-١٠ \pm ٦}{٢ \times ١}$ بالتعويض في القانون

$س = \frac{-١٠ + ٦}{٢}$ أو $س = \frac{-١٠ - ٦}{٢}$

$س = \frac{-٤}{٢}$ أو $س = \frac{-١٦}{٢}$

$س = -٢$ أو $س = -٨$

وهو ما حصلنا عليه في المثال (١) باستخدام إكمال المربع.
وإذا استخدمنا التحليل نصل إلى النتيجة نفسها (حاول ذلك بنفسك).

حاول أن تحل

٢ باستخدام القانون، أوجد مجموعة حل المعادلة:

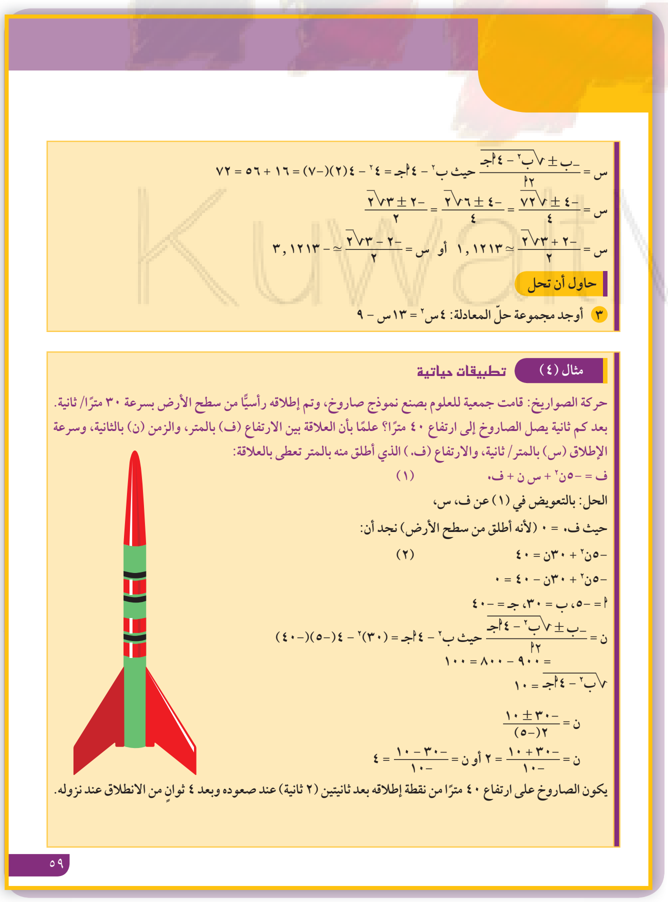
أ $س^{٢} - ٦س + ٥ = ٠$ ب $س(س - ٢) = ٧$

مثال (٣)

حلّ المعادلة: $٢س^{٢} + ٤س - ٧ = ٠$

الحل: $أ = ٢،\ ب = ٤،\ جـ = -٧$

٥٨


$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$ حيث $ب^{٢} - ٤أجـ = ٤^{٢} - ٤(٢)(-٧) = ١٦ + ٥٦ = ٧٢$

$س = \frac{-٤ \pm \sqrt{٧٢}}{٤} = \frac{-٤ \pm ٦\sqrt{٢}}{٤} = \frac{-٢ \pm ٣\sqrt{٢}}{٢}$

$س = \frac{-٢ + ٣\sqrt{٢}}{٢} \approx ١,١٢١٣$ أو $س = \frac{-٢ - ٣\sqrt{٢}}{٢} \approx -٣,١٢١٣$

حاول أن تحل

٣ أوجد مجموعة حلّ المعادلة: $٤س^{٢} = ١٣س - ٩$

مثال (٤) تطبيقات حياتية

حركة الصواريخ: قامت جمعية للعلوم بصنع نموذج صاروخ، وتم إطلاقه رأسيًا من سطح الأرض بسرعة ٣٠ مترًا/ ثانية. بعد كم ثانية يصل الصاروخ إلى ارتفاع ٤٠ مترًا؟ علمًا بأن العلاقة بين الارتفاع (ف) بالمتر، والزمن (ن) بالثانية، وسرعة الإطلاق (س) بالمتر/ ثانية، والارتفاع (ف.) الذي أطلق منه بالمتر تعطى بالعلاقة:

$ف = -٥ن^{٢} + س ن + ف.$ (١)

الحل: بالتعويض في (١) عن ف، س.

حيث ف. = ٠ (لأنه أطلق من سطح الأرض) نجد أن:

$-٥ن^{٢} + ٣٠ن = ٤٠$ (٢)

$-٥ن^{٢} + ٣٠ن - ٤٠ = ٠$

$أ = -٥،\ ب = ٣٠،\ جـ = -٤٠$

$ن = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$ حيث $ب^{٢} - ٤أجـ = (٣٠)^{٢} - ٤(-٥)(-٤٠)$

$= ٩٠٠ - ٨٠٠ = ١٠٠$

$\sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ} = ١٠$

$ن = \frac{-٣٠ \pm ١٠}{٢(-٥)}$

$ن = \frac{-٣٠ + ١٠}{-١٠} = ٢$ أو $ن = \frac{-٣٠ - ١٠}{-١٠} = ٤$

يكون الصاروخ على ارتفاع ٤٠ مترًا من نقطة إطلاقه بعد ثانيتين (٢ ثانية) عند صعوده وبعد ٤ ثوانٍ من الانطلاق عند نزوله.

٥٩

(هـ) أوجد مجموعة حل النظام: $\begin{cases} س ص = ٥١ \\ س + ص = ٢٠ \end{cases}$

٥ التدريس

تعتبر فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» والمثال (١) مقدمة هامة تساعد الطالب على التعامل مع المعادلات من الدرجة الثانية لإيجاد الحلول لها. فطريقة التحليل وطريقة إكمال المربع تصلحان في حالات خاصة من معادلات الدرجة الثانية، لذا يجب التعامل بشكل عميق ومركّز مع القانون العام حيث استخدام المميز يسهل أكثر في حل المعادلة من الدرجة الثانية، ويحدد مسبقًا إذا كان هناك حلول أم لا، وما هي أنواع هذه الحلول.

ركّز أفكار الطلاب على الشكل العام للمعادلة:

$أس^{٢} + ب س + جـ = ٠$ قبل البدء باستخدام المميز $\Delta = ب^{٢} - ٤أجـ$ لأنه من المهم جدًّا تعويض كل عدد ثابت بقيمته.

أعط تمارين متنوعة لتطبيق القانون: $س = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢أ}$

شجّعهم على إيجاد الترابط بين إشارة المميز Δ وتقاطع منحنى الدالة التربيعية مع محور السينات.

أشر إلى الأمثلة (٥)، (٦)، (٧) وناقش معهم هذا الترابط.

اطلب إليهم إعطاء أمثلة تحاكي كلًّا من الحالات الثلاث.

اشرح لهم فائدة إيجاد ناتج جمع جذري المعادلة وناتج ضرب جذريها إذ يساعد ذلك على كتابة معادلة من الدرجة الثانية إذا علم مجموع عددين وناتج ضرب هذين العددين. مثال ذلك: أوجد عددين ناتج جمعهما يساوي ٢١ وناتج ضربهما يساوي ٨٠.

نطبق على المعادلة من الدرجة الثانية

$س^{٢} - (\text{مجموع العددين})\, س + \text{ضرب العددين} = ٠$

بالتعويض: $س^{٢} - ٢١س + ٨٠ = ٠$ $س = \frac{٢١ \pm \sqrt{١٢١}}{٢}$

ومنه نحصل على عددين: ١٦، ٥.

تحقق: $٥ + ١٦ = ٢١$؛ $٥ \times ١٦ = ٨٠$

اشرح لهم كيفية استخدام الآلة الحاسبة لرسم بيان الدالة المناظرة للمعادلة من الدرجة الثانية وطريقة حل هذه المعادلة بيانيًّا، وذلك بقراءة الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات.

أعط أمثلة متعددة لتوضيح فكرة حل بعض المتباينات التربيعية (المتباينة من الدرجة الثانية بمتغيرين على الصورة

مثلًا: ص > أ س^٢ + ب س + جـ).

ركّز على مفهوم منطقة الحل.

٦ الربط

انظر المثال (٤). مسار القذيفة هو قطع مكافئ محدب. القيمة العظمى للدالة التربيعية هي أعلى نقطة تصلها القذيفة. أشر إلى أن الصاروخ يكون على ارتفاع ٤٠ مترًا صعودًا أو نزولًا.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ بعض الطلاب في استخدام المميز Δ = ب^٢ − ٤أجـ. ساعدهم على ترتيب المعادلة كما يجب لمعرفة قيمة أ، ب، جـ مع الإشارة إلى كل منها.

٨ التقييم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من حسن استخدامهم للقانون العام والنتائج والحالات المتفرعة.

اختبار سريع

١ حل المعادلة ٦س^٢ + ١٩س + ٨ = ٠ $\frac{-٨}{٣}$، $-\frac{١}{٢}$

٢ حل المعادلة س^٢ − س − ٦ = ٠ ثم تحقق بيانيًّا من الحل.   −٢، ٣

٣ اكتب معادلة من الدرجة الثانية بحيث يكون مجموع جذريها ٢ وناتج ضربها −٢٤.

س^٢ − ٢س − ٢٤ = ٠

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ س^٢ − ٨س + ١٦ = ١٦ − ١٥

(س − ٤)^٢ = ١ . ومنه نجد س = ٣ أو س = ٥

٢ (أ) Δ = (−٦)^٢ − ٤ × ١ × ٥ = ١٦

س = ١ أو س = ٥

مجموعة الحل = {(١، ٥)}

(ب) Δ = (−٢)^٢ − ٤ × (١) × (−٧) = ٣٢

س = ١ − ٢$\sqrt{٢}$ أو س = ١ + ٢$\sqrt{٢}$

حاول أن تحل

٤ قذفت رصاصة عموديًّا إلى أعلى بسرعة ٤٠ مترًا/ ثانية. أوجد الزمن (ن ثانية) الذي تستغرقه الرصاصة كي تصل إلى ارتفاع ٨٠ مترًا علمًا أن العلاقة بين الزمن (ن) والارتفاع (ف) والسرعة (ع) هي:
ف = −٥ن^٢ + ع ن، ع = السرعة بالمتر/ ث.

٤- استخدام المميز Δ: Using the Discriminant

من القانون العام لحل المعادلة: أب^٢ + ب س + جـ = ٠   حيث أ ≠ ٠

تكون الصورة العامة لجذري المعادلة كالتالي:

س = $\frac{-ب + \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$ ، س = $\frac{-ب - \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$

يسمى Δ = ب^٢ − ٤أجـ **المميز**، وقد يكون الناتج عددًا موجبًا أو صفرًا أو عددًا سالبًا لأنه يميّز لنا **نوع جذري** المعادلة من حيث كونهما: عددين حقيقيين مختلفين، إذا كان المميز موجبًا
أو عددين حقيقيين متساويين، إذا كان المميز يساوي صفرًا
أو عددين غير حقيقيين، إذا كان المميز سالبًا.

ويتضح ذلك من الأمثلة التالية:

مثال (٥)

أوجد نوع جذري المعادلة: س^٢ + ٢س − ٣ = ٠ وتحقق من نوع الجذرين جبريًّا باستخدام القانون وبيانيًّا.

الحل:

أ = ١ ، ب = ٢ ، جـ = −٣

المميز: Δ = ب^٢ − ٤أجـ = (٢)^٢ − ٤(١)(−٣) = ٤ + ١٢ = ١٦

وحيث إنه عدد موجب، إذًا الجذران هما عددان حقيقيان مختلفان.

• يمكن التحقق من ذلك بحل المعادلة جبريًّا:

س^٢ + ٢س − ٣ = ٠

س = $\frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢أ}$

س = $\frac{-٢ \pm \sqrt{١٦}}{٢}$ = $\frac{-٢ \pm ٤}{٢}$

س = +١ أو س = −٣

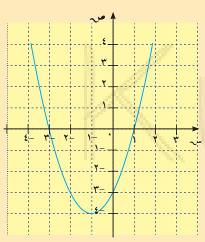
ومن الواضح أن الجذرين عددان حقيقيان مختلفان.

معلومة مفيدة:
عند رسم بيان
ص = أ س^٢ + ب س + جـ
حيث أ ≠ ٠، يكون رأس المنحنى
عند س = $\frac{-ب}{٢أ}$

٦٠

التحقق بيانيًّا:

س	−٣	−٢	−١	٠	١	٢
ص	٠	−٣	−٤	−٣	٠	٥



يبيّن الرسم البياني نقطتي تقاطع مع محور السينات.

تكتب المعادلة س^٢ + ٢س − ٣ = ٠ على الصورة (س + ١)^٢ − ٤ = ٠

∴ بيان الدالة ص = س^٢ + ٢س − ٣ هو انسحاب لدالة المرجع ص = س^٢ وحدة واحدة جهة اليسار، ٤ وحدات إلى الأسفل.

حاول أن تحل

٥ أوجد نوع جذري المعادلة: ٢س^٢ − ٥س + ٢ = ٠، تحقق من الحل جبريًّا وبيانيًّا.

مثال (٦)

أوجد نوع جذري المعادلة: ٤س^٢ + ٤س + ١ = ٠ . وتحقق من نوع الجذرين جبريًّا باستخدام القانون وبيانيًّا.

الحل: أ = ٤، ب = ٤، جـ = ١

المميز: Δ = ب^٢ − ٤أجـ = (٤)^٢ − ٤ × ٤ × ١ = ١٦ − ١٦ = ٠

وحيث إن المميز يساوي صفرًا، فالجذران حقيقيان ومتساويان

وللتحقق من ذلك جبريًّا:

س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$

س = $\frac{-٤ \pm ٠}{٢ \times ٤}$

س = $\frac{-٤ + ٠}{٨}$ = $-\frac{١}{٢}$

س = $\frac{-٤ - ٠}{٨}$ = $-\frac{١}{٢}$

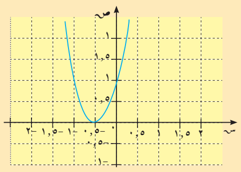
أي أن الجذرين متساويان وكل منهما يساوي $-\frac{١}{٢}$

التحقق بيانيًّا:

س	١	٠	−٠,٥	−١	−٢
ص	٩	١	٠	١	٩

يبيّن الرسم البياني نقطة تقاطع واحدة مع محور السينات.

معلومة مفيدة:
لحل معادلة تربيعية باستخدام الحاسبة نضغط على MODE ، EQN ثم QUAD أو $ax^2 + bx + c = 0$. يظهر على الشاشة [a b c] نعوّض بقيم أ، ب، جـ متبوعة كل مرة بالضغط على = فيظهر الجذران تباعًا.



حاول أن تحل

٦ أوجد نوع جذري المعادلة: س^٢ + ١٠س + ٢٥ = ٠، تحقق من الحل بيانيًّا.

٦١

مجموعة الحل = $\{(١ - ٢\sqrt{٢}) ، (١ + ٢\sqrt{٢})\}$

٣ $\Delta = (-١٣)^{٢} - ٤ \times ٤ \times (٤) \times ٩ = ٢٥$

س = ١ أو س = $\frac{٩}{٤}$

مجموعة الحل = $\{(١ ، \frac{٩}{٤})\}$

٤ ٨٠ = −٥ن^{٢} + ٤٠ن

المعادلة: −ن^{٢} + ٨ن − ١٦ = ٠

$\Delta = ٨^{٢} - ٤ \times (-١) \times (-١٦) = ٦٤ - ٦٤ = ٠$

ن = ٤ أي أن الرصاصة بحاجة إلى ٤ ثوانٍ لتصل إلى ارتفاع ٨٠ مترًا.

٥ $\Delta = (-٥)^{٢} - ٤ \times ٢ \times ٢ = ٢٥ - ١٦ = ٩$ وهذا عدد موجب ∴ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

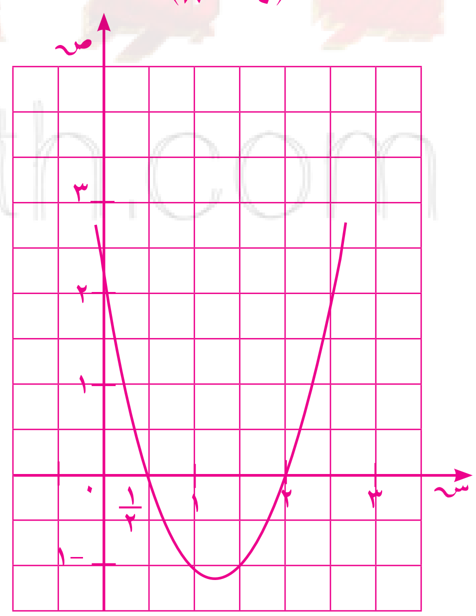
جذري المعادلة: س = $\frac{١}{٢}$ أو س = ٢.

بيان الدالة المناظرة ص = ٢س^{٢} − ٥س + ٢

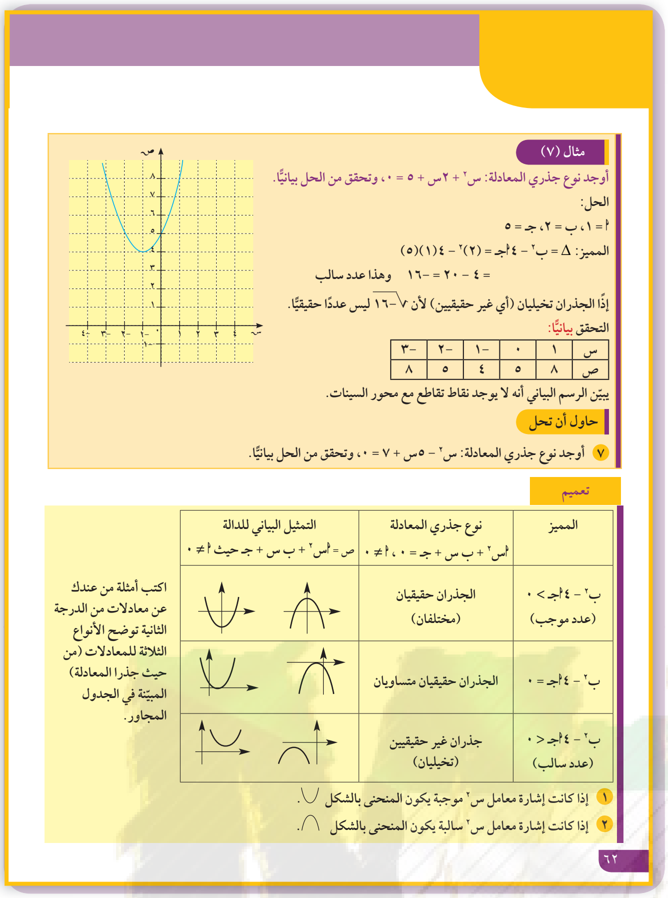
رأس المنحنى: س = $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{٥}{٤}$

∴ ص = $-\frac{٩}{٨}$

∴ رأس المنحنى $\left(\frac{٥}{٤} ، -\frac{٩}{٨}\right)$.



يقطع محور السينات في نقطتين.



مثال (٧)

أوجد نوع جذري المعادلة: س^{٢} + ٢س + ٥ = ٠، وتحقق من الحل بيانيًا.

الحل:

أ = ١، ب = ٢، جـ = ٥

المميز: Δ = ب^{٢} − ٤أجـ = (٢)^{٢} − ٤(١)(٥)

= ٤ − ٢٠ = −١٦ وهذا عدد سالب

إذًا الجذران تخيليان (أي غير حقيقيين) لأن $\sqrt{-١٦}$ ليس عددًا حقيقيًا.

التحقق بيانيًا:

س	١	٠	−١	−٢	−٣
ص	٨	٥	٤	٥	٨

يبيّن الرسم البياني أنه لا يوجد نقاط تقاطع مع محور السينات.

حاول أن تحل

٧ أوجد نوع جذري المعادلة: س^{٢} − ٥س + ٧ = ٠، وتحقق من الحل بيانيًا.

تعميم

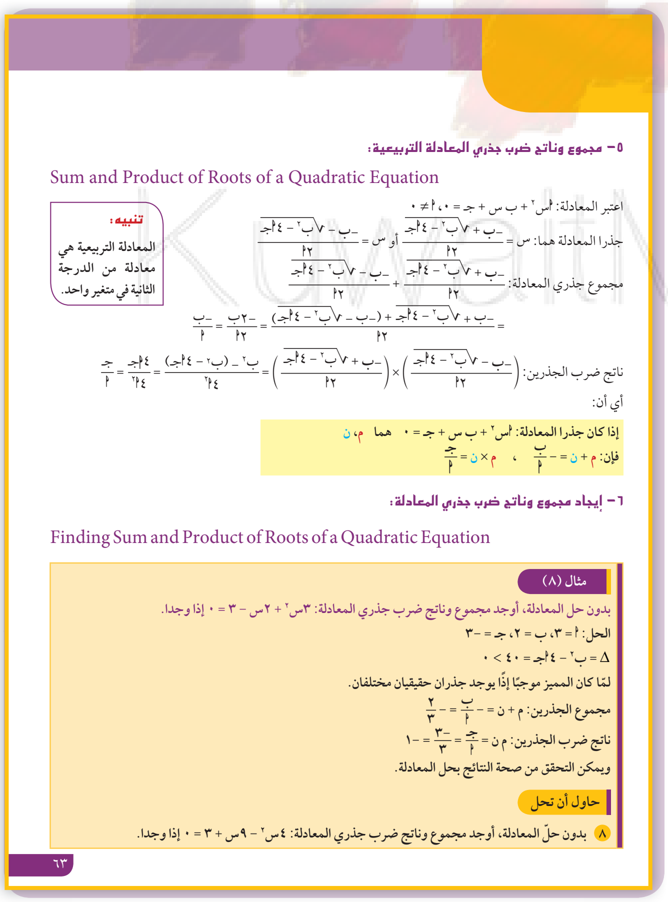
المميز	نوع جذري المعادلة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠، أ ≠ ٠	التمثيل البياني للدالة ص = أس^{٢} + ب س + جـ حيث أ ≠ ٠
ب^{٢} − ٤أجـ > ٠ (عدد موجب)	الجذران حقيقيان (مختلفان)	
ب^{٢} − ٤أجـ = ٠	الجذران حقيقيان متساويان	
ب^{٢} − ٤أجـ < ٠ (عدد سالب)	جذران غير حقيقيين (تخيليان)	

اكتب أمثلة من عندك عن معادلات من الدرجة الثانية توضح الأنواع الثلاثة للمعادلات (من حيث جذرا المعادلة) المبيّنة في الجدول المجاور.

١ إذا كانت إشارة معامل س^{٢} موجبة يكون المنحنى بالشكل.

٢ إذا كانت إشارة معامل س^{٢} سالبة يكون المنحنى بالشكل.

٦٢



٥− مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة التربيعية:

Sum and Product of Roots of a Quadratic Equation

اعتبر المعادلة: أس^{٢} + ب س + جـ = ٠، أ ≠ ٠

جذرا المعادلة هما: س = $\frac{-ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$ أو س = $\frac{-ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

مجموع جذري المعادلة: $\frac{-ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ} + \frac{-ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

$= \frac{-ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ} + (-ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ})}{٢أ} = \frac{-٢ب}{٢أ} = \frac{-ب}{أ}$

ناتج ضرب الجذرين: $\left(\frac{-ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}\right) \times \left(\frac{-ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}\right) = \frac{ب^{٢} - (ب^{٢} - ٤أجـ)}{٤أ^{٢}} = \frac{٤أجـ}{٤أ^{٢}} = \frac{جـ}{أ}$

أي أن:

إذا كان جذرا المعادلة: أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ هما م، ن

فإن: م + ن = $-\frac{ب}{أ}$ ، م × ن = $\frac{جـ}{أ}$

تنبيه: المعادلة التربيعية هي معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد.

٦− إيجاد مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة:

Finding Sum and Product of Roots of a Quadratic Equation

مثال (٨)

بدون حل المعادلة، أوجد مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة: ٣س^{٢} + ٢س − ٣ = ٠ إذا وجدا.

الحل: أ = ٣، ب = ٢، جـ = −٣

Δ = ب^{٢} − ٤أجـ = ٤٠ > ٠

لمّا كان المميز موجبًا إذًا يوجد جذران حقيقيان مختلفان.

مجموع الجذرين: م + ن = $-\frac{ب}{أ} = -\frac{٢}{٣}$

ناتج ضرب الجذرين: م ن = $\frac{جـ}{أ} = \frac{-٣}{٣} = -١$

ويمكن التحقق من صحة النتائج بحل المعادلة.

حاول أن تحل

٨ بدون حلّ المعادلة، أوجد مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة: ٤س^{٢} − ٩س + ٣ = ٠ إذا وجدا.

٦٣

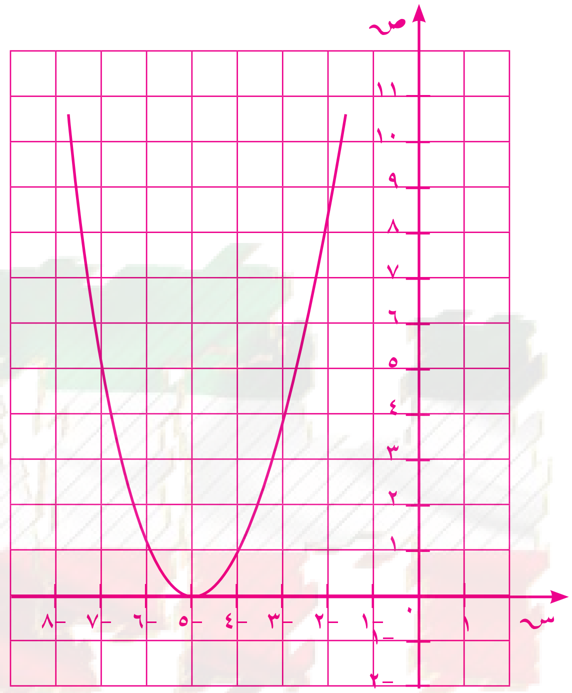
٦ $\Delta = (١٠)^{٢} - ٤ \times ١ \times ٢٥ = ٠$ للمعادلة جذر حقيقي واحد.

الدالة المناظرة: ص = $س^{٢} + ١٠س + ٢٥$.

رأس المنحنى: $س = \frac{-ب}{٢أ} = \frac{-١٠}{٢ \times ١} = -٥$

∴ ص = ٠

إحداثيات رأس المنحنى (−٥، ٠).



يقطع محور السينات في نقطة واحدة.

٧ $\Delta = (-٥)^{٢} - ٤ \times ١ \times ٧ = -٣$

لا يوجد جذور لهذه المعادلة حيث إن المميز سالب.

الدالة المناظرة: ص = $س^{٢} - ٥س + ٧$.

رأس المنحنى: $س = \frac{-ب}{٢أ} = \frac{٥}{٢}$

∴ $ص = \frac{٣}{٤}$

إحداثيات رأس المنحنى $\left(\frac{٥}{٢}، \frac{٣}{٤}\right)$.

مثال (٩)

إذا كان مجموع جذري المعادلة: $٢س^{٢} + ب س - ٥ = ٠$ يساوي ١. فأوجد قيمة ب، ثم حلّ المعادلة.

الحل:

مجموع جذري المعادلة: $م + ن = -\frac{ب}{أ} = -\frac{ب}{٢} = ١$، ب = −٢

المعادلة: $٢س^{٢} + ب س - ٥ = ٠$ تصبح: $٢س^{٢} - ٢س - ٥ = ٠$

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢أ}$

$\Delta = ب^{٢} - ٤أجـ = ٤ - ٤(٢)(-٥) = ٤٤$

$س = \frac{-(-٢) \pm ٢\sqrt{١١}}{٢ \times ٢}$

$س = \frac{١ \pm \sqrt{١١}}{٢}$

إذًا الجذران هما: $\frac{١ - \sqrt{١١}}{٢}$ أو $\frac{١ + \sqrt{١١}}{٢}$

فكر معي:

إذا كان أ، جـ مختلفي الإشارة في المعادلة: $أس^{٢} + ب س + جـ = ٠$ فإن للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان.

حاول أن تحل

٩ إذا كان ناتج ضرب جذري المعادلة: $أس^{٢} - ٥س + ٢ = ٠$ يساوي $\frac{٢}{٣}$. فأوجد أ، ثم حلّ المعادلة.

٧- إيجاد المعادلة التربيعية إذا علم جذراها:

Finding the Quadratic Equation Knowing its Roots

لتكن المعادلة: $أس^{٢} + ب س + جـ = ٠$، أ ≠ ٠ وليكن جذراها م، ن

$س^{٢} + \frac{ب}{أ} س + \frac{جـ}{أ} = ٠$

وحيث إن $م + ن = -\frac{ب}{أ}$، $م ن = \frac{جـ}{أ}$

إذًا **المعادلة على الصورة: $س^{٢} - (م + ن)س + م ن = ٠$**

هي معادلة بمعلومية مجموع الجذرين وناتج ضربهما.

حلّ آخر:

ليكن م، ن جذري المعادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد

∴ المعادلة تكون على الصورة: (س − م)(س − ن) = ٠

∴ $س^{٢} - (م + ن) س + م ن = ٠$

٦٤

مثال (١٠)

أوجد معادلة تربيعية جذراها ٣، ٥.

الحل:

بما أن الجذرين هما: ٣، ٥.

∴ المعادلة التربيعية على الصورة: $س^{٢}$ − (مجموع الجذرين) س + (ناتج ضرب الجذرين) = ٠

أي $س^{٢} - ٨س + ١٥ = ٠$

أو حلّ آخر: المعادلة على الصورة: (س − ٣)(س − ٥) = ٠

أي $س^{٢} - ٨س + ١٥ = ٠$

حاول أن تحل

١٠ إذا كان جذرا المعادلة $س^{٢} - ٥س + ٦ = ٠$ هما ل، م فكوّن معادلة تربيعية جذراها ٢ل، ٢م.

حالة عامة: General Case

يوجد عدد لا نهائي من المعادلات يكون جذرا كلّ منها م، ن

وكلّ منها على الصورة: $ك[س^{٢} - (م + ن)س + م ن] = ٠$

حيث (ك) أي عدد حقيقي ≠ صفرًا.

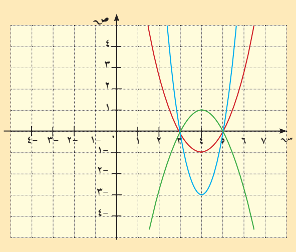
مثال (١١)

إذا كان الجذران هما ٣، ٥ فإن كلًّا من المعادلات التالية لها هذان الجذران نفسهما.

$س^{٢} - ٨س + ١٥ = ٠$

$٣(س^{٢} - ٨س + ١٥) = ٠$

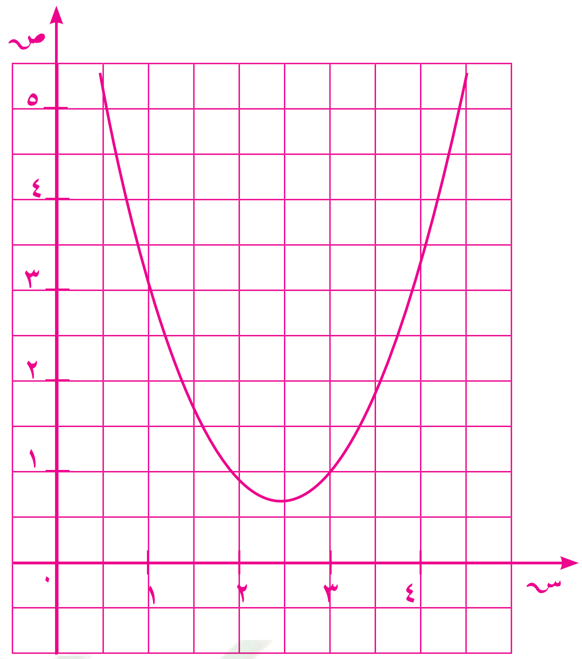
$-(س^{٢} - ٨س + ١٥) = ٠$ وهكذا (انظر الشكل المقابل).



حاول أن تحل

١١ أوجد معادلتين تربيعيتين جذرا كل منهما: −٤، −٣.

٦٥



لا يوجد تقاطع مع محور السينات.

٨ ناتج جمع جذري المعادلة يساوي: $\frac{٩}{٤}$، ناتج ضرب جذري المعادلة يساوي: $\frac{٣}{٤}$.

٩ $\frac{٢}{أ} = \frac{٢}{٣}$ ومنه نجد أ = ٣

تصبح المعادلة: ٣س^{٢} − ٥س + ٢ = ٠

Δ = ٢٥ − ٢٤ = ١

س = $\frac{٢}{٣}$ أو س = ١

١٠ ل + م = ٥، ل م = ٦

٢ل + ٢م = ٢(ل + م) = ٢ × ٥ = ١٠

٢ل × ٢م = ٤ل م = ٤ × ٦ = ٢٤

س^{٢} − (مجموع الجذرين) س + ناتج ضرب الجذرين = ٠

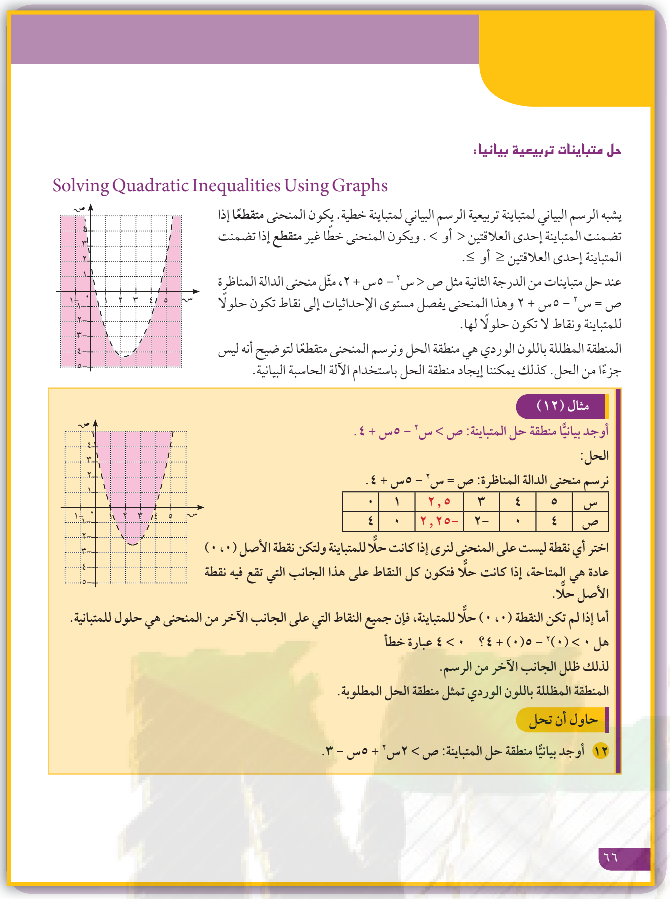
والمعادلة هي: س^{٢} − ١٠س + ٢٤ = ٠

١١ مجموع الجذرين: −٤ − ٣ = −٧

حاصل ضرب الجذرين: (−٤)(−٣) = ١٢

معادلة أولى: س^{٢} + ٧س + ١٢ = ٠

معادلة ثانية: ٥س^{٢} + ٣٥س + ٦٠ = ٠



حل متباينات تربيعية بيانيا:

Solving Quadratic Inequalities Using Graphs

يشبه الرسم البياني لمتباينة تربيعية الرسم البياني لمتباينة خطية. يكون المنحنى **متقطعًا** إذا تضمنت المتباينة إحدى العلاقتين < أو > . ويكون المنحنى خطًا غير **متقطع** إذا تضمنت المتباينة إحدى العلاقتين ≥ أو ≤.

عند حل متباينات من الدرجة الثانية مثل ص < س^{٢} − ٥س + ٢، مثّل منحنى الدالة المناظرة ص = س^{٢} − ٥س + ٢ وهذا المنحنى يفصل مستوى الإحداثيات إلى نقاط تكون حلولًا للمتباينة ونقاط لا تكون حلولًا لها.

المنطقة المظللة باللون الوردي هي منطقة الحل ونرسم المنحنى متقطعًا لتوضيح أنه ليس جزءًا من الحل. كذلك يمكننا إيجاد منطقة الحل باستخدام الآلة الحاسبة البيانية.

مثال (١٢)

أوجد بيانيًّا منطقة حل المتباينة: ص > س^{٢} − ٥س + ٤.

الحل:

نرسم منحنى الدالة المناظرة: ص = س^{٢} − ٥س + ٤.

س	٥	٤	٣	٢,٥	١	٠
ص	٤	٠	−٢	−٢,٢٥	٠	٤

اختر أي نقطة ليست على المنحنى لنرى إذا كانت حلًّا للمتباينة ولتكن نقطة الأصل (٠، ٠) عادة هي المتاحة، إذا كانت حلًّا فتكون كل النقاط على هذا الجانب التي تقع فيه نقطة الأصل حلًّا.

أما إذا لم تكن النقطة (٠، ٠) حلًّا للمتباينة، فإن جميع النقاط التي على الجانب الآخر من المنحنى هي حلول للمتباينة.

هل ٠ > (٠)^{٢} − ٥(٠) + ٤؟ ٠ > ٤ عبارة خطأ

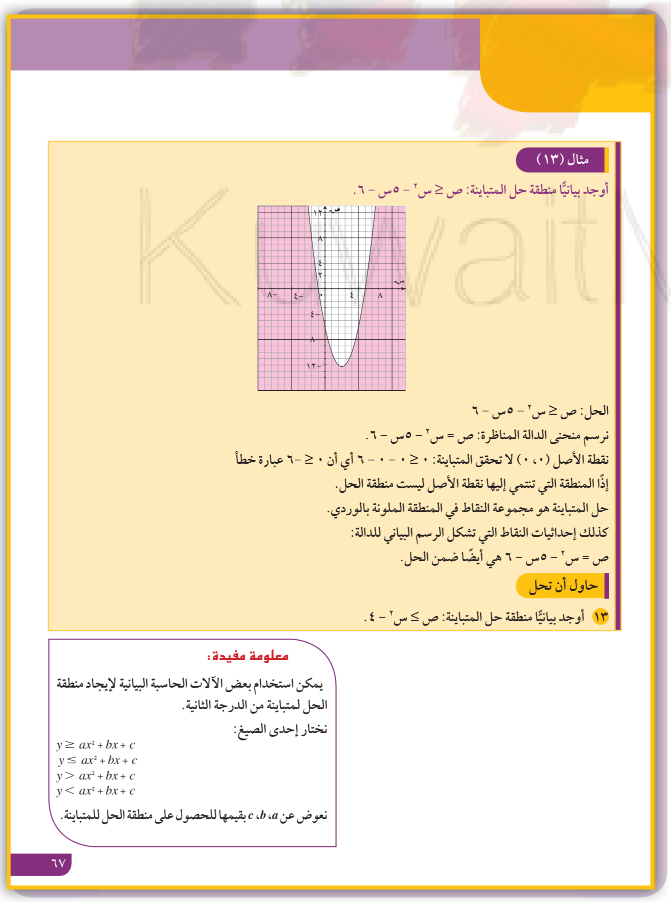
لذلك ظلل الجانب الآخر من الرسم.

المنطقة المظللة باللون الوردي تمثل منطقة الحل المطلوبة.

حاول أن تحل

١٢ أوجد بيانيًّا منطقة حل المتباينة: ص > ٢س^{٢} + ٥س − ٣.

٦٦



مثال (١٣)

أوجد بيانيًّا منطقة حل المتباينة: ص ≥ س^{٢} − ٥س − ٦.

الحل: ص ≥ س^{٢} − ٥س − ٦

نرسم منحنى الدالة المناظرة: ص = س^{٢} − ٥س − ٦.

نقطة الأصل (٠، ٠) لا تحقق المتباينة: ٠ ≥ ٠ − ٠ − ٦ أي أن ٠ ≥ −٦ عبارة خطأ

إذًا المنطقة التي تنتمي إليها نقطة الأصل ليست منطقة الحل.

حل المتباينة هو مجموعة النقاط في المنطقة الملونة بالوردي.

كذلك إحداثيات النقاط التي تشكل الرسم البياني للدالة:

ص = س^{٢} − ٥س − ٦ هي أيضًا ضمن الحل.

حاول أن تحل

١٣ أوجد بيانيًّا منطقة حل المتباينة: ص ≤ س^{٢} − ٤.

معلومة مفيدة:

يمكن استخدام بعض الآلات الحاسبة البيانية لإيجاد منطقة الحل لمتباينة من الدرجة الثانية.

نختار إحدى الصيغ:

$y \geq ax^2 + bx + c$

$y \leq ax^2 + bx + c$

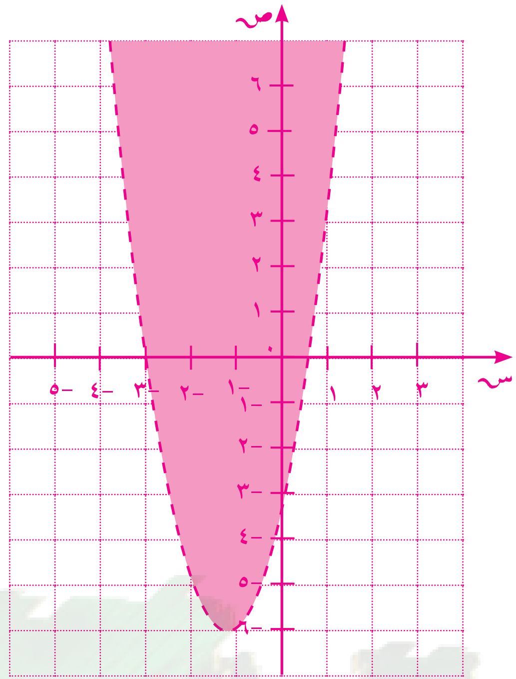
$y > ax^2 + bx + c$

$y < ax^2 + bx + c$

نعوض عن a، b، c بقيمها للحصول على منطقة الحل للمتباينة.

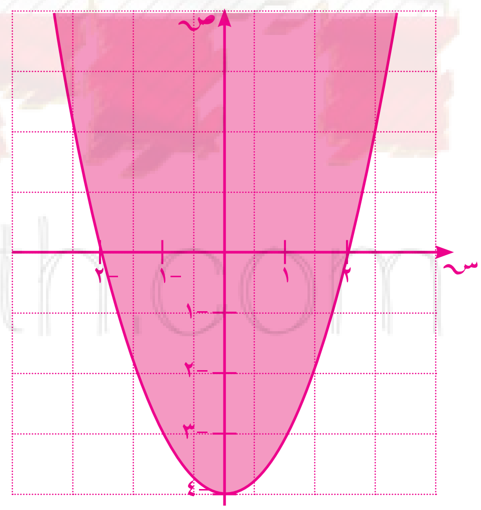
٦٧

١٢



الحل هو المنطقة المظلّلة. المنحنى ليس جزءًا من الحل.

١٣



الحل هو المنطقة المظلّلة. المنحنى جزء من الحل.

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

تمرَّنْ ٩-١

حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد

Solving Quadratic Equations in One Variable

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) أي تعبير مما يلي ليس مربعًا كاملًا؟ ____________

(أ) ت^{٢} − ١٤ت + ٤٩ (ب) ٩ب^{٢} + ٦٦ب + ١٢١

(جـ) ٤م^{٢} − ٢٤م + ٣٦ (د) ٨١م^{٢} − ١٢٠م + ١٠٠

في التمارين (٢ – ٧)، أوجد مجموعة حل كل معادلة مستخدمًا طريقة إكمال المربع. عند الضرورة قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من المئة.

(٢) ب^{٢} + ٨ب = ٤٨ ____________

(٣) س^{٢} − ١٠س = ٤٠ ____________

(٤) ك^{٢} + ٢٢ك + ٨٥ = ٠ ____________

(٥) و^{٢} + ٣و = ٥ ____________

(٦) م^{٢} + م − ٢٨ = ٠ ____________

(٧) ص^{٢} + ٩ص − ٦٨٢ = ٠ ____________

(٨) (أ) اكتب تعبيرًا جبريًّا يبيّن مساحة النموذج المرسوم.

____

(ب) إذا كانت مساحة النموذج المرسوم تساوي ٢٨ وحدة مربعة.

فاكتب معادلة تربيعية لإيجاد س بإكمال المربع.

____

(٩) **الكتابة في الرياضيّات:** اشرح لأحد زملائك كيف تحل س^{٢} + ٣٠س − ١ = ٠ بإكمال المربع.

____

(١٠) ما عدد حلول (جذور) كل معادلة؟

(أ) س^{٢} − ٣س + ٤ = ٠ (ب) م^{٢} − ٣م + ٢ = ٠ (جـ) ٩س^{٢} + ٦س + ١ = ٠

في التمارين (١١ – ١٦) لكل معادلة مما يلي:

(أ) أوجد قيمة المميز Δ.

(ب) حدّد إن كانت الجذور حقيقية أم غير حقيقية (تخيلية).

(١١) م^{٢} + ٤م + ٥ = ٠

(١٢) س^{٢} − ٤س − ٥ = ٠

(١٣) ٤س^{٢} + ٢٠س + ٢٥ = ٠

(١٤) ٢ص^{٢} + ٧ص = −٦

(١٥) م^{٢} − ١٢م + ٣٦ = ٠

(١٦) س^{٢} = ٨س − ١٦

في التمارين (١٧ – ٢٨) أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي:

(١٧) س^{٢} − ٤س + ٤ = ٠

(١٨) س^{٢} + ٨س + ١٢ = ٠

(١٩) ٢س^{٢} + ٥س − ٧ = ٠

(٢٠) م^{٢} = ٣م

(٢١) م^{٢} + ٦م − ٥ = ٠

(٢٢) ٣م^{٢} − ٤م − ٢ = ٠

(٢٣) ل^{٢} − ٦ل + ١١ = ٠

(٢٤) م^{٢} = ٢م − ٦

(٢٥) −ب^{٢} + ٥ب − ٧ = ٠

(٢٦) ٢س^{٢} + س = $\frac{١}{٢}$

ملاحظة: لا تطرح أسئلة عن «حل متباينات تربيعية بيانيًا» في الإختبارات.

أضف إلى معلوماتك:

(١) استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد الجذور التربيعية.

يمكن لمعظم الآلات الحاسبة العلمية إيجاد جذور المعادلة التربيعية. ويتم ذلك بالدخول إلى MODE واختيار EQN حيث تعرض عدة نماذج لمعادلات كثيرة الحدود. نختار الشكل $ax^2 + bx + c = 0$ ونعوض عن a، b، c بقيم أ، ب، جـ بالترتيب ثم ننقر على = للحصول على الجذرين.

نبه الطلاب إلى أن الآلات الحاسبة تعطي أيضًا الجذور التخيلية (غير الحقيقية) حيث يظهر الحرف i في الإجابة.

(٢) لإيجاد قيم ص بمعلومية س.

(أ) الدخول إلى MODE واختيار table .

(ب) انقر على ALPHA × ثم أدخل معادلة الدالة يليها =

(جـ) يظهر ?start اكتب عدد البداية يليه =

يظهر ?End اكتب عدد النهاية يليه =

يظهر ?step اكتب الخطوة (مثلاً ١، ٣, ٠، ...)

يليه =

يظهر على الشاشة الجدول المطلوب.

ملاحظة: يجب اختيار عدد البداية وعدد النهاية والخطوة بحيث تتضمن قيم س المراد إيجاد قيم ص لها.

(٢٧) $٢س^{٢} = ٥س + ١$

(٢٨) $\frac{س - ٣}{٢} = \frac{٦}{س - ٢}$

(٢٩) أوجد قيمة ك بحيث يكون كل جذر من جذري المعادلة $س^{٢} + ك س - ٥ك = ٠$ المعكوس الضربي للآخر.

(٣٠) أوجد عددين مجموعهما ٤ وناتج ضربهما ٢.

(٣١) اكتب معادلة تربيعية يكون جذراها:

(أ) ٣، −٢

(ب) ٠، $\frac{١}{٤}$

(جـ) $\frac{-٢}{٣}$ (جذر واحد).

(٣٢) أوجد مجموعة قيم ب التي تجعل المعادلة: $٨س^{٢} + ب س + ٢ = ٠$، ليست لها جذور حقيقية.

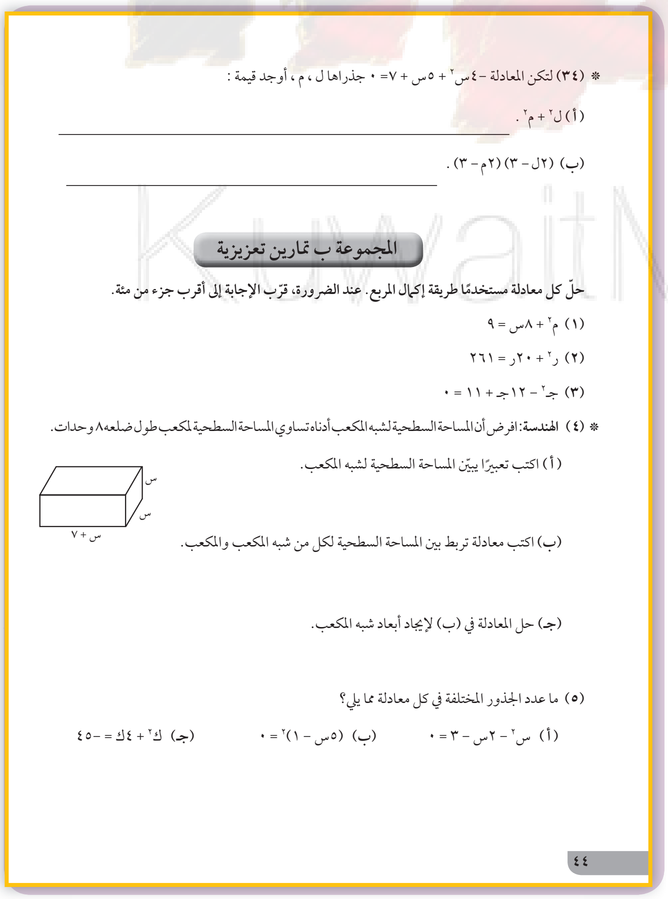
(٣٣) لتكن المعادلة $-٣س^{٢} + ٦س + ٥ = ٠$، جذراها ل، م

اكتب معادلة تربيعية يكون جذراها:

(أ) ٢ل، ٢م

(ب) ل + ١، م + ١

٤٣



* (٣٤) لتكن المعادلة $-٤س^{٢} + ٥س + ٧ = ٠$ جذراها ل، م، أوجد قيمة:

(أ) $ل^{٢} + م^{٢}$.

(ب) (٢ل − ٣) (٢م − ٣) .

المجموعة ب تمارين تعزيزية

حلّ كل معادلة مستخدمًا طريقة إكمال المربع. عند الضرورة، قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من مئة.

(١) $م^{٢} + ٨س = ٩$

(٢) $ر^{٢} + ٢٠ر = ٢٦١$

(٣) $جـ^{٢} - ١٢جـ + ١١ = ٠$

* (٤) **الهندسة:** افرض أن المساحة السطحية لشبه المكعب أدناه تساوي المساحة السطحية لمكعب طول ضلعه ٨ وحدات.

(أ) اكتب تعبيرًا يبيّن المساحة السطحية لشبه المكعب.

(ب) اكتب معادلة تربط بين المساحة السطحية لكل من شبه المكعب والمكعب.

(جـ) حل المعادلة في (ب) لإيجاد أبعاد شبه المكعب.

(٥) ما عدد الجذور المختلفة في كل معادلة مما يلي؟

(أ) $س^{٢} - ٢س - ٣ = ٠$　(ب) $(٥س - ١)^{٢} = ٠$　(جـ) $ك^{٢} + ٤ك = -٤٥$

٤٤

في التمارين (٦ – ٨) لكل معادلة مما يلي:

(أ) أوجد قيمة المميز Δ.

(ب) حدّد ما إذا كانت الجذور حقيقية أم غير حقيقية.

(٦) $٢س^{٢} + س + ٢٨ = ٠$

(٧) $٢م^{٢} + ٧م - ١٥ = ٠$

(٨) $٦ك^{٦} - ٢ك + ٥ = ٠$

حل كل معادلة مما يلي:

(٩) $٣س^{٢} + ٢س - ١ = ٠$ (١٠) $س^{٢} + ١٠س = -٢٥$ (١١) $٢س^{٢} + ٣س - ٥ = ٠$

(١٢) $٨ك^{٢} - ٢ك - ٣ = ٠$ (١٣) $ك(ك - ٥) = -٤$ (١٤) $٩ك^{٢} + ١٢ك - ٥ = ٠$

* (١٥) **التفكير المنطقي:** معادلة تربيعية مميزها مربع كامل، فهل جذور المعادلة هي أعداد نسبية أو غير نسبية ؟ فسِّر.

(١٦) **التفكير الناقد:** $س^{٢} + ك\,س + ٩ = ٠$، أعط قيمة لِـ ك بحيث يكون للمعادلة:

(أ) جذران غير حقيقيين.

(ب) جذران حقيقيان مختلفان.

(جـ) جذران حقيقيان متساويان.

اختبار الوحدة الأولى

(١) أي تعبير لا يصف $\sqrt{٦٢٥}$؟ ________

(أ) عدد كلّيّ (ب) عدد غير نسبي

(جـ) عدد صحيح (د) عدد نسبي

(٢) حل المتباينة $٨ - ٣س < -٣(١ + س) + ١$ هو: ________

(أ) كل الأعداد الحقيقية (ب) $س < -\frac{١١}{٦}$

(جـ) $س < \frac{٢}{٣}$ (د) ليس أيًّا مما سبق

(٣) حلّ المتباينة $-٥(٤ص + ١) < ٢٣$ ومثل الحل على خط أعداد.

____

(٤) حلّ: $٢ < ١٠ - ٤س < ٦$. ________

____

(٥) حلّ المعادلة: $٧|٣ - ٢م| = ٥٦$. ________

____

(٦) حلّ المعادلة: $\left|\frac{١}{٤}٤س + ٢\right| = ١ - ٢س$. ________

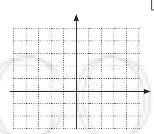
____

(٧) حلّ المتباينة: $٢|ك + ٣| \le ١٠$. ________

____

(٨) ضع جدول قيم، ثم ارسم بيانيًّا الدالة $ص = |٢س| - \frac{١}{٢}|س|$.

س					
ص					



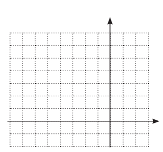
(٩) تم انسحاب بيان الدالة $ص = |س|$، ثلاث وحدات إلى الأسفل ووحدتين إلى اليمين.

ما معادلة الدالة الجديدة؟

(أ) $ص = |س + ٢| + ٣$ (ب) $ص = |س + ٢| - ٣$

(جـ) $ص = |س - ٢| + ٣$ (د) $ص = |س - ٢| - ٣$

(١٠) استخدم دالة المرجع والانسحاب لرسم بيان الدالة $ص = |س + ٤| + ٢$.



(١١) أي قيمة هي ضمن مجموعة حل: $-٤ < -٤س - ٢ < ٨$ و $٣ > ٤س > -١٠$؟

(أ) -٢ (ب) ١

(جـ) ٢ (د) ٤

(١٢) معادلتا المستقيمين المتوازيين في ما يلي هما:

(I) $ص = -٣س + ١$ **(II)** $ص = ٢س + ١$ **(III)** $ص = -٢س + ٧$ **(IV)** $ص = ٥ - ٣س$

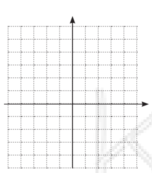
(أ) I، II (ب) I، III

(جـ) I، IV (د) II، IV

(١٣) المستقيم المتعامد مع المستقيم الذي معادلته $ص = ٣س + ٧$ هو:

(أ) $ص = -٣س + ٤$ (ب) $ص = -٤ - ٣س$

(جـ) $ص = -٢س + ١$ (د) $ص = ٤ - \frac{١}{٣}س$



(١٤) أوجد مجموعة حلّ النظام $\begin{cases} ص = ٢س + ١ \\ ص = ٤س + ٥ \end{cases}$ بيانيًّا.

____

(١٥) أوجد مجموعة حلّ النظام $\begin{cases} ٣م + ٢ن = ٩ \\ م + ن = ٤ \end{cases}$، مستخدمًا طريقة التعويض.

____

(١٦) أوجد مجموعة حلّ النظام $\begin{cases} ٤س + ٢ص = ٣ \\ ٢ص - ٤س = \frac{٣}{٢} \end{cases}$، مستخدمًا طريقة الحذف.

(١٧) اكتب معادلة بحيث يكون حل النظام $\begin{cases} ٢س + ص = ١٣ \\ ....؟........ \end{cases}$ هو (٣، ٧). ________

(١٨) أوجد مجموعة حلّ المعادلة مستخدمًا طريقة إكمال المربع: $٣س^{٢} - ٦س + ٢ = ٠$. ________

(١٩) أوجد قيمة المميز وبين نوع الجذور (حقيقية أو غير حقيقية) للمعادلة: $س^{٢} + ٣س + ٢ = ٠$.

____

(٢٠) أوجد مجموعة حلّ المعادلة: $-٣م^{٢} - ٢م + ٧ = ٠$ ________

(٢١) أوجد عددين مجموعهما ٢ وناتج ضربهما -٣٥. ________

(٢٢) قطعة أرض مستطيلة الشكل أبعادها ٢٢م، ٥٨م. يراد إقامة منشأة عليها، يتوجب على المالك التراجع س مترًا من كل جهة. أي صيغة مما يلي تمثل المساحة القصوى الممكن استخدامها؟

(أ) $ص = ٤س^{٢} - ١٦٠س + ١\,٢٧٦$ (ب) $ص = ١\,٢٧٦ - ١٦٠س - ٤س^{٢}$

(جـ) $ص = (٥٨ - س)(٢٢ - س)$ (د) $ص = ١\,٢٧٦ - س^{٢}$

(٢٣) اكتب معادلة من الدرجة الثانية يكون جذراها -٣، ٦.

____

____

المرشد لحل المسائل

المرشد لحل المسائل

عرض مدير أحد المنتجعات الأسعار التالية خلال الموسم.

العرض أ: يدفع الشخص ٦,٥٠٠ دنانير كل مرة يدخل المنتجع.

العرض ب: يدفع الشخص ٢٨ دينارًا ثم ٣ دنانير كل مرة يدخل المنتجع.

يحاول يوسف معرفة أي من العرضين أفضل.

بدأ يوسف بنمذجة العرضين.

العرض أ: ص = ٦,٥٠٠ س حيث س عدد مرات دخول المنتجع، ص مجموع ما سيدفعه.

العرض ب: ص = ٢٨ + ٣س.

فكّر يوسف: إذا حللت نظام المعادلتين $\begin{cases} ص = ٦,٥٠٠ س \\ ص = ٢٨ + ٣س \end{cases}$ أحصل على س = ٨، ص = ٥٢ أي أن العرضين يتساويان إذا دخلت ٨ مرات إلى المنتجع.

لكن يوسف لم يكتف بهذه النتيجة لأنه يريد أن يعرف بشكل عام ودون تحديد عدد مرات الدخول أي العرضين أفضل. لذلك استخدم حاسوبه ومثل بيانيًا المعادلتين.

ما استنتجه يوسف:

١ لمن يريد الدخول أقل من ٨ مرات إلى المنتجع العرض أ هو أفضل.

٢ لمن يريد الدخول أكثر من ٨ مرات إلى المنتجع العرض ب هو أفضل.

٣ يتساوى العرضان بالدخول ٨ مرات.

مسألة إضافية

يعرض على أحد المسارح للجمهور ١٢ عملًا فنيًا. يختار الجمهور أحد العرضين:

أ ١٠ دنانير لحضور كل عمل فني.

ب ٢٠ دينارًا ثم ٦ دنانير كل مرة يحضر عملًا فنيًا.

وضّح أي العرضين أفضل لمن يريد حضور ٤، ٦ أعمال فنية.

٦٨

حل «مسألة إضافية»

لتكن س عدد الأعمال الفنية.

العرض الأول: ص = ١٠ س

العرض الثاني: ص = ٦س + ٢٠

في حالة ٤ أعمال فنية:

$ص_١$ = ١٠ × ٤ = ٤٠ أي يدفع ٤٠ دينارًا.

$ص_٢$ = ٦ × ٤ + ٢٠ = ٤٤ أي يدفع ٤٤ دينارًا.

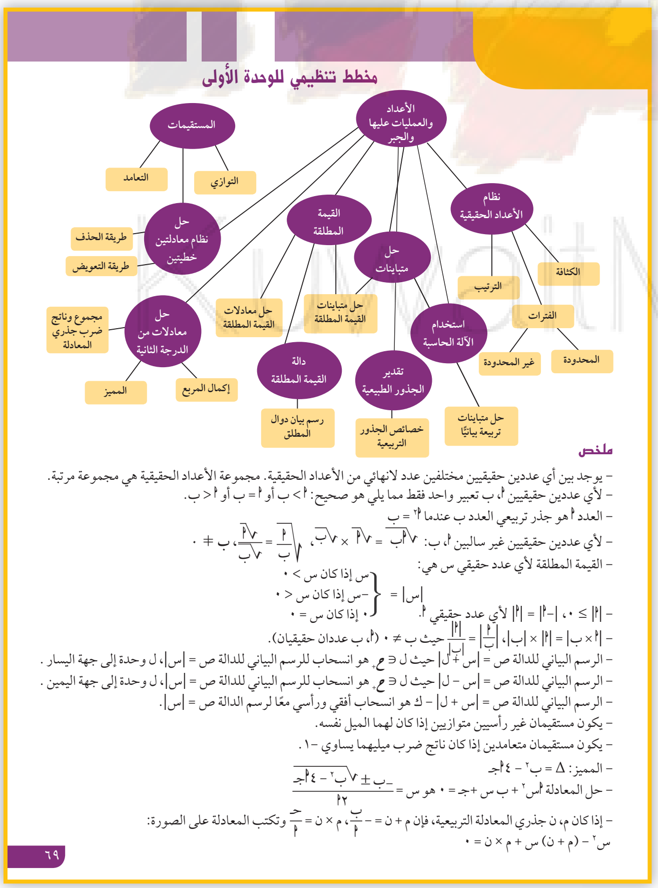
وبالتالي، يكون العرض الأول هو الأفضل.

في حالة ٦ أعمال فنية:

$ص_١$ = ١٠ × ٦ = ٦٠ أي يدفع ٦٠ دينارًا.

$ص_٢$ = ٦ × ٦ + ٢٠ = ٥٦ أي يدفع ٥٦ دينارًا.

وبالتالي، يصبح العرض الثاني هو الأفضل.

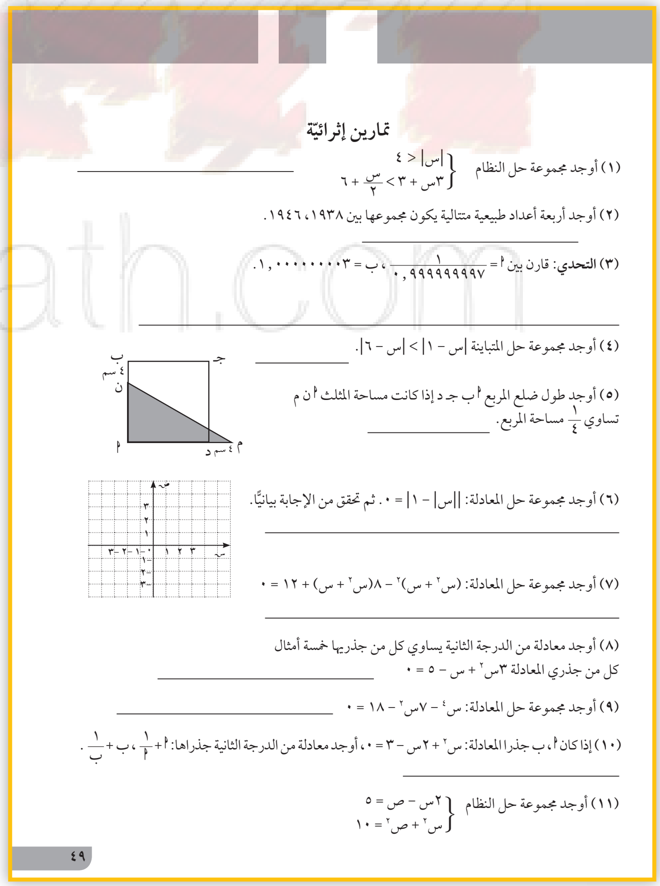


مخطط تنظيمي للوحدة الأولى

ملخص

- يوجد بين أي عددين حقيقيين مختلفين عدد لانهائي من الأعداد الحقيقية. مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة مرتبة.
- لأي عددين حقيقيين أ، ب تعبير واحد فقط مما يلي هو صحيح: أ < ب أو أ = ب أو أ > ب.
- العدد أ هو جذر تربيعي العدد ب عندما $أ^٢$ = ب
- لأي عددين حقيقيين غير سالبين أ، ب: $\sqrt{أب} = \sqrt{أ} \times \sqrt{ب}$، $\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$، ب ≠ ٠.
- القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي س هي: $|س| = \begin{cases} س & \text{إذا كان } س > ٠ \\ -س & \text{إذا كان } س < ٠ \\ ٠ & \text{إذا كان } س = ٠ \end{cases}$
- |أ| ≥ ٠، |−أ| = |أ| لأي عدد حقيقي أ.
- |أ × ب| = |أ| × |ب|، $\left|\frac{أ}{ب}\right| = \frac{|أ|}{|ب|}$ حيث ب ≠ ٠ (أ، ب عددان حقيقيان).
- الرسم البياني للدالة ص = |س + ل| حيث ل ∈ ح هو انسحاب للرسم البياني للدالة ص = |س|، ل وحدة إلى جهة اليسار.
- الرسم البياني للدالة ص = |س − ل| حيث ل ∈ ح هو انسحاب للرسم البياني للدالة ص = |س|، ل وحدة إلى جهة اليمين.
- الرسم البياني للدالة ص = |س + ل| − ك هو انسحاب أفقي ورأسي معًا لرسم الدالة ص = |س|.
- يكون مستقيمان غير رأسيين متوازيين إذا كان لهما الميل نفسه.
- يكون مستقيمان متعامدين إذا كان ناتج ضرب ميليهما يساوي −١.
- المميز: Δ = $ب^٢ − ٤أجـ$
- حل المعادلة $أس^٢$ + ب س + جـ = ٠ هو س = $\frac{−ب \pm \sqrt{ب^٢ − ٤أجـ}}{٢أ}$
- إذا كان م، ن جذري المعادلة التربيعية، فإن م + ن = $-\frac{ب}{أ}$، م × ن = $\frac{جـ}{أ}$ وتكتب المعادلة على الصورة: $س^٢$ − (م + ن) س + م × ن = ٠

٦٩



تمارين إثرائيّة

(١) أوجد مجموعة حل النظام $\begin{cases} |س| < ٤ \\ ٣س + ٣ < \frac{س}{٢} + ٦ \end{cases}$

(٢) أوجد أربعة أعداد طبيعية متتالية يكون مجموعها بين ١٩٣٨، ١٩٤٦.

(٣) التحدي: قارن بين أ = $\frac{١}{٠,٩٩٩٩٩٩٩٩٧}$، ب = ١,٠٠٠٠٠٠٠٠٣

(٤) أوجد مجموعة حل المتباينة |س − ١| < |س − ٦|.

(٥) أوجد طول ضلع المربع أ ب جـ د إذا كانت مساحة المثلث أ ن م تساوي $\frac{١}{٤}$ مساحة المربع.

(٦) أوجد مجموعة حل المعادلة: ||س| − ١| = ٠. ثم تحقق من الإجابة بيانيًا.

(٧) أوجد مجموعة حل المعادلة: $(س^٢ + س)^٢ − ٨(س^٢ + س) + ١٢ = ٠$

(٨) أوجد معادلة من الدرجة الثانية يساوي كل من جذريها خمسة أمثال كل من جذري المعادلة $٣س^٢ + س − ٥ = ٠$

(٩) أوجد مجموعة حل المعادلة: $س^٤ − ٧س^٢ − ١٨ = ٠$

(١٠) إذا كان أ، ب جذرا المعادلة: $س^٢ + ٢س − ٣ = ٠$، أوجد معادلة من الدرجة الثانية جذراها: أ + $\frac{١}{أ}$، ب + $\frac{١}{ب}$.

(١١) أوجد مجموعة حل النظام $\begin{cases} ٢س − ص = ٥ \\ س^٢ + ص^٢ = ١٠ \end{cases}$

٤٩