الوحدة السادسة: الجبر المتقطع (الإحصاء)

Discrete Algebra (Statistics)

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

1 – 6: المجتمع الإحصائي والمعاينة

جزء 1: المجتمع الإحصائي.

جزء 2: أساليب جمع البيانات.

جزء 3: أنواع البيانات.

2 – 6: العينات

جزء 1: العينة العشوائية.

3 – 6: أساليب عرض البيانات

جزء 1: القطاعات الدائرية.

جزء 2: المنحنى التكراري والمدرج التكراري.

4 – 6: الانحراف المعياري

5 – 6: القاعدة التجريبية

جزء 1: التوزيع الطبيعي.

جزء 2: القاعدة التجريبية.

6 – 6: القيمة المعيارية

جزء 1: القيمة المعيارية.

KuwaitMath.com

مقدمة الوحدة

الوحدة السادسة

الجبر المتقطع (الإحصاء)

Discrete Algebra (Statistics)

مشروع الوحدة: زحمة السير

1 مقدمة المشروع: أظهرت الإحصاءات أن أكثر المشاكل التي تواجه الأشخاص في تنقلاتهم يوميًا هي زحمة السير الخانقة على الطرقات. لذلك كانت الدراسات ولا زالت حتى اليوم تتركز على كيفية إيجاد وسائل نقل أسرع وأكثر أمانًا وأقل تكلفة ومناسبة لبيئة سليمة وصحية.

2 الهدف: في هذا المشروع سوف تحدد مشاكل النقل والسفر، ثم تقدم تصميمًا لوسيلة نقل جديدة أو عرضًا لخدمة تستطيع من خلالها حل المشكلة، وتقوم باستطلاع لتقرر ما إذا كان تصميمك أو خدمتك قابلين للتسويق.

3 اللوازم: ورق رسم بياني – آلة حاسبة علمية.

4 أسئلة حول التطبيق:

a ما أسباب زحمة السير؟

b كيف ستختار عينة الاستطلاع؟

c ما نوع الأسئلة التي ستطرحها على الأشخاص؟

d ما هي وسائل النقل المستخدمة؟

e ما نوع الخدمة التي يفضلونها؟

f نظم المعلومات التي حصلت عليها ومثلها بيانيًا، ثم قم بتحليلها. ما أكبر مشكلة ظهرت في الإجابات؟ اقترح منتجًا أو خدمة تعتقد أنهما يساهمان في حل المشكلة، تأكد من أن الأفكار التي عرضتها قابلة للتطبيق. نفذ نموذجًا أو اكتب وصفًا لوسيلة النقل أو الخدمة المقترحة متضمنين التكلفة التي تراها مناسبة.

استطلع آراء عدد من الأشخاص في سوق العمل حول منتجك أو خدمتك الجديدة. مثل البيانات التي حصلت عليها وقم بتحليلها. هل منتجك أو خدمتك المقترحة قابلان للتسويق؟

5 التقرير: اكتب تقريرًا مفصلًا عن منتجك أو خدمتك المقترحة. اعرض ما توصلت إليه على زملائك في غرفة الصف. أعد النظر ببعض الاقتراحات إذا كان ذلك ضروريًا. ناقش معهم قرارك في إمكانية التسويق للمنتج أو للخدمة مستندًا إلى نتائج استطلاعك.

دروس الوحدة

6–1	6–2	6–3	6–4	6–5	6–6
المجتمع الإحصائي والمعاينة	العينات	أساليب عرض البيانات	الانحراف المعياري	القاعدة التجريبية	القيمة المعيارية

196

أصبح علم الإحصاء في عصرنا الحاضر من أهم العلوم التطبيقية التي تعتمد عليها الدول لدراسة كل ما له علاقة بالفرد في المجتمعات، لذا كان في كل دولة إدارة مركزية للإحصاء.

وهذه الإدارة المركزية لها مهمات متعددة الجوانب تطال كل النواحي الحياتية للمواطن من إنتاج، واستهلاك، وحوادث طرقات، ووفيات، وولادات...

من إحدى المهمات التي تقوم بها «الإدارة المركزية للإحصاء» في دولة الكويت دراسة الأرقام القياسية لأسعار المستهلك وتغيرها شهريًّا، ثم إصدار نشرة دورية عن نسبة هذا التغير وأسبابه.

وللدلالة على ذلك، نورد فقرة أخذت من تقرير عن شهر يونيو سنة 2012:

«إن عملية جمع بيانات الأسعار شهريًّا لأصناف متنوعة من السلع من أكثر من 400 مصدر من أنحاء البلاد كافة تحتاج إلى تعاون مخلص من مدراء الجمعيات التعاونية والأسواق المركزية ومحلات التجزئة الأخرى بجميع أنشطتها الاقتصادية والتجارية».

بالنظر إلى هذا النص، يتبيّن لنا مدى الأهمية التي تعتمدها الإدارة المركزية للإحصاء في التعاون المخلص مع العينات الإحصائية لتكون الجداول التي تنشرها، معبرة بنسبة كبيرة عن التغيرات الحاصلة في الأسعار صعودًا أو هبوطًا.

KuwaitMath.com

مشروع الوحدة

زحمة المرور، حوادث المرور القاتلة على الطرقات، مشاكل قيادة السيارات، إنها معاناة تعيشها أثناء تنقلاتك من مكان إلى آخر، وتسمع دائمًا في وسائل الإعلام عن مشاريع وأفكار وتصاميم يطلقها أصحاب الاختصاص والمسؤولون لمحاولة التخفيف من هذه الأزمات.

تبنى الجسور، تفتح طرقات جديدة، تشق الأنفاق، تسن القوانين الصارمة، تحدد السرعة. ولكن، ما النتيجة؟

والأهم من كل ذلك، أين البيئة من مشاكل انبعاث ثاني أوكسيد الكربون نتيجة احتراق الوقود؟

في الأسئلة عن تطبيق المشروع، شجّع الطلاب على دراسة أسباب زحمة المرور. اطلب إليهم دراسة حركة المرور على عدد من الدوارات وعلى عدد من التقاطعات الرئيسة في المدينة، ثمّ تسجيل ملاحظاتهم. اطلب إليهم أيضًا دراسة قوانين المرور وما إذا كان لديهم آراء معينة لتحديثها.

شجعهم على زيارة إدارة المرور للاطلاع على كيفية العمل فيها.

التقرير

يجب أن يكون التقرير كافيًا ومفصلًا يعكس جهد المجموعات التي قامت بالعمل، ويحدّد بشكل جلي وواضح الاقتراحات والحلول التي توصلوا إليها أو الخدمة التي يرونها مناسبة. ناقش مع زملاءك في غرفة الصف النتائج التي توصلت إليها والاقتراحات التي وضعتها. أعد النظر ببعضها إذا كان ذلك ضروريًّا.

سلّم التقييم

4	نظمت البيانات بالكامل – التمثيل البياني واضح ومعبّر – التحليل والنتائج دقيقة – التقرير مفصل ويعكس جهد العمل.
3	معظم البيانات منظمة – التمثيل البياني واضح – التحليل والنتائج يشوبها بعض الارتباك – معظم عناصر التقرير مفصلة.
2	بعض البيانات منظمة – أخطاء في التمثيل البياني – التحليل والنتائج غير سليمة – التقرير بحاجة إلى صياغة أفضل.
1	معظم عناصر المشروع غير مكتملة وبحاجة إلى إعادة.

KuwaitMath.com

1–6: المجتمع الإحصائي والمعاينة

1 الأهداف

- يتعرف المجتمع الإحصائي.
- يتعرف المجتمعات المنتهية وغير المنتهية.
- يتعرف المتغير.
- يتعرف الحصر الشامل.
- يتعرف أنواع البيانات.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

إحصاء – مجتمع إحصائي – الحصر الشامل – المعاينة – بيانات كيفية – متغير – بيانات كمية.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) تريد استطلاع الرأي حول الانتخابات النيابية في دولتك، هل ستقوم بطرح الأسئلة على السكان كافة؟

(b) كيف يمكنك جمع معلومات حول مسحوق معيّن للغسيل؟

(c) ما هو المسلسل التلفزيوني الأكثر مشاهدة؟

(d) هل استخدمت كلمة «متغير» قبل الآن؟ وأين كان ذلك؟

5 التدريس

عند القيام بأي عملية استطلاع، يجب تحديد المجتمع الإحصائي، والهدف من الدراسة، والمواضيع التي يراد التطرق إليها، وتسجيل الأسئلة الواجب طرحها، وذلك لاستخلاص صورة واضحة تساعد على اتخاذ قرارات صائبة.

6–1

المجتمع الإحصائي والمعاينة

Statistical Population and Sampling

سوف تتعلم
- المجتمع الإحصائي.
- المجتمعات المنتهية وغير المنتهية.
- المتغير.
- الحصر الشامل.
- المعاينة.
- أنواع البيانات.

المفردات والمصطلحات:
- إحصاء Statistic
- مجتمع إحصائي Statistical Population
- متغير Variable
- الحصر الشامل Comprehensive Inventory
- المعاينة Sampling
- متغير Variable
- بيانات كيفية Qualitative Data
- بيانات كمية Quantitative Data

عمل تعاوني

تجرى في كلّ سنة عملية استطلاع لتحديد أفضل لاعب كرة قدم في دولة الكويت. تريد أنت وزملاؤك القيام بهذه المهمة.

1. حدّد مع زملائك عدد الأشخاص الذين سوف تستطلعون آرائهم.
2. ما هي المعايير التي يجب اتباعها في هذا الاستطلاع لتحديد أفضل لاعب كرة قدم؟
3. ما الطرائق التي يجب اتباعها في إجراء هذا الاستطلاع؟

علم الإحصاء Statistical Science

الإحصاء هو علم أساسي في مجال الرياضيات التطبيقية حيث إنه يهتم بجمع البيانات وفرزها وتنظيمها وتصنيفها وعرضها جدوليًا أو بيانيًا وتحليلها واستقراء النتائج بهدف اتخاذ قرارات مناسبة مبنية على استنتاجات.

مراحل البحث الإحصائي هي:
1. جمع البيانات.
2. عرض البيانات (جدوليًا وبيانيًا).
3. وصف البيانات وتحليلها.
4. تفسير النتائج واتخاذ قرارات.

المجتمع الإحصائي Statistic Population

هو مجموعة كل المفردات (الوحدات) قيد الدراسة ولها خصائص مشتركة، ويمكن أن تكون مفردات المجتمع الإحصائي بشرية أو غير بشرية.

كما أن المجتمع الإحصائي يمكن أن يكون منتهيًا (عدد وحداته محدود) أو غير منته (عدد وحداته غير محدود). ويشترط أن يعرّف مجتمع الدراسة تعريفًا محددًا وواضحًا ولا يحمل أي تأويل.

مثال (1)

في كل من المجتمعات الإحصائية التالية حدد نوع المجتمع (منته أو غير منته) ووحدة الدراسة.
- a طلاب الصف الحادي عشر في مدارس دولة الكويت.
- b الطيور على سطح الأرض.

198

الحل:
- a مجتمع طلاب الصف الحادي عشر في مدارس دولة الكويت:
  نوعه: مجتمع منته.
  وحدة الدراسة: طالب
- b مجتمع الطيور على سطح الأرض:
  نوعه: غير منته.
  وحدة الدراسة: طير.

حاول أن تحل

1. في كل من المجتمعات الإحصائية التالية حدد نوع المجتمع (منته أو غير منته) ووحدة الدراسة.
   - a لاعبو فرق كرة السلة في دولة الكويت.
   - b مجتمع الأسماك في مياه الخليج العربي.

المتغير Variable

هو **الصفة (أو الصفات)** محور الدراسة في مجتمع إحصائي معيّن. فمثلًا في دراسة عن طلاب الصف الحادي عشر في دولة الكويت، قد يختلف الطلاب من حيث الفرع: أدبي أو علمي، الجنس: أنثى أو ذكر، الجنسية: كويتي أو غير كويتي، الطول، الوزن، لون العيون، ... وهذه الصفة **تتغير** من وحدة إلى أخرى في مجتمع الدراسة.

أساليب جمع البيانات Ways to Collect Data

عند القيام بدراسة إحصائية يقوم الباحث بتحديد المجتمع محل الدراسة ثم يبدأ بجمع البيانات.

هناك أساليب مختلفة لجمع البيانات تعتمد على نوع الدراسة وخصائص المجتمع ومن هذه الأساليب:

1 – الحصر الشامل Comprehensive Inventory

هو عملية جمع بيانات جميع مفردات المجتمع الإحصائي محل الدراسة. يتميز الحصر الشامل بدقة نتائجه وخلوه من الأخطاء، (مثل: نتائج الطلاب في الصف الحادي عشر علمي نهاية العام الدراسي). ومن عيوب الحصر الشامل أنه يتطلب وقت وجهد كبيرين وفرق عمل ونفقات وتكاليف مرتفعة. كما أن الحصر الشامل لا يمكن إجراؤه في المجتمعات غير المنتهية (مثل مجتمع الطيور) وأكثر من ذلك لا يمكن استخدامه في حالة تدمير جميع وحدات الدراسة (مثل: عملية سحب الدم لمعرفة كمية السكر الموجودة فيه).

مثال (2)

هل يمكن استخدام الحصر الشامل في دراسة المجتمعات الإحصائية التالية أم لا؟ اذكر السبب.
- a دراسة كمية الدهون الموجودة في الدم.
- b دراسة نسبة عدد الطلاب الذين لون عيونهم أزرق إلى عدد طلاب صفك.

199

KuwaitMath.com

في المثال (1)

ناقش مع الطلاب المفردات الجديدة: مجتمع منته، مجتمع غير منته، وحدة الدراسة في المجتمع. اطلب إليهم عرض أمثلة بديلة عن المجتمعات الإحصائية، واسألهم ما إذا كانت منتهية أو غير منتهية، وما هي وحدة الدراسة في كل مجتمع.

في المثال (2)

ركّز على فكرة الحصر الشامل والحالات التي يمكن والتي لا يمكن استخدامه فيها بإيجابياته وسلبياته في عملية الإحصاء.

في المثال (3)

أعطِ أمثلة بديلة عن البيانات الكمية. اطلب إلى الطلاب تقديم بيانات معيّنة تمّ تعريف ما إذا كانت كيفية أو كمية.

6 الربط

الدراسات الإحصائية واستطلاع الرأي ترتبط مباشرة بنواحٍ حياتية حيث تحول الواقع إلى أرقام تساعد على اتخاذ قرارات في المجالات كلها.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يواجه الطلاب عدة مشاكل ويقعون في العديد من الأخطاء، مثلًا في تحديد مجتمع ما إذا كان منتهيًا أو غير منته أو في تعريف المتغير في مجال الدراسة. اعرض عليهم أمثلة توضح تعريف المجتمع المنتهي وكيفية تحديد المتغير المشترك في الصفات ضمن أفراد المجتمع.

8 التقييم

تابع الطلاب في عملهم ضمن فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من مدى استيعابهم لما ورد في هذا الدرس.

الحل:

a لا يمكن استخدام الحصر الشامل، لأنه لا يمكن استخدام كافة كمية الدم الموجودة في جسم الشخص فذلك سوف يؤدي إلى نهاية حياته.

b يمكن استخدام الحصر الشامل لأن عدد الطلاب في الصف محدد ويمكن إيجاد النسبة المطلوبة.

حاول أن تحل

2 اكتب مثالًا يبين:

a دراسة في مجتمع إحصائي يمكن استخدام الحصر الشامل فيها.

b دراسة في مجتمع إحصائي لا يمكن استخدام الحصر الشامل فيها.

2 – المعاينة Sampling

هي عملية اختيار جزء من مفردات المجتمع بطريقة مدروسة تجعل هذه المفردات تمثل المجتمع وتحقق أهداف الدراسة.

أنواع البيانات Types of Data

يمكن تصنيف البيانات إلى نوعين: كمية وكيفية كما يبيّن الجدول التالي:

أنواع البيانات	الصفات	أمثلة
بيانات كيفية	اسمية	لون العيون – لون الشعر
	مرتبة	المستوى العلمي – الدرجات التقديرية
بيانات كمية	متقطعة	عدد طلاب الفصل – نقاط مباراة كرة السلة
	مستمرة	أطوال القامات – الأوزان – درجات الحرارة

مثال (3)

حدّد نوع البيانات لكل مما يلي:

a عدد أهداف الدوري العام لكرة القدم في أحد المواسم.

b ترتيب الدول بحسب الميداليات التي حصلت عليها في دورة من دورات الألعاب الأولمبية.

c درجات الحرارة في شهر سبتمبر في مطار الكويت.

d لون سيارات معلمي مدرسة ما.

200

تمرّنْ 6–1

المجتمع الإحصائي والمعاينة

Statistical Population and Sampling

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أذكر مراحل البحث الإحصائي الأربعة مرتّبة.

(2) ما هي أساليب جمع البيانات.

في التمرينين (4–3)، اذكر ما نوع البيانات التي تصف كلًّا من الحالات التالية:

(3) عدد التذاكر المباعة لإحدى المسرحيات.

(4) أنواع منتجات معجون الأسنان المباعة للمستهلك.

(5) حدّد نوع البيانات لكل مما يلي:

(a) أوزان طلّاب الصف الحادي عشر في مدرستك. (b) أنواع الكتب في مكتبة المدرسة.

(c) الدخل الشهري للأسرة في دولة ما. (d) ألوان أحذية الطلّاب في صفك.

(6) عرف المجتمع المنتهي والمجتمع غير المنتهي.

(7) عرّف كلًّا من:

(a) علم الإحصاء. (b) المجتمع الإحصائي. (c) الحصر الشامل.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) المواليد في العالم سنة 2010 عبارة عن مجتمع غير منته. (a) (b)

(2) وحدة الدراسة لعدد زوار مركز علمي في يوم واحد هي أي زائر. (a) (b)

(3) يمكن استخدام الحصر الشامل في دراسة أنواع السمك الموجودة في أحد المحيطات. (a) (b)

(4) عدد الصفحات في كتاب ما هو بيانات كمية مستمرة. (a) (b)

(5) عند ترتيب الأشياء نستخدم بيانات كيفية مرتبة. (a) (b)

85

الحل:

a كمية منقطعة.

b كيفية مرتبة.

c كمية مستمرة.

d كيفية اسمية.

حاول أن تحل

3 حدد نوع البيانات في كل مما يأتي:

a عدد أعضاء فريق كرة القدم.

b الوظيفة (ضابط، محاسب، محام، تاجر، مدرس، ...)

c أطوال قامات طلاب الصف الحادي عشر.

d تقديرات الطلاب في مادة اللغة الإنجليزية في جامعة الكويت.

طرق جمع البيانات Ways To Collect Data

عند جمع البيانات يمكن استخدام طرائق متنوعة وذلك بحسب ما هو متوفر وما هو أسهل وهي:

- المشاهدة والملاحظة
- الاستبانة
- البريد العادي أو البريد الإلكتروني
- الهاتف المنزلي أو الهاتف النقال
- المقابلة الشخصية
- الوثائق والسجلات
- الأبحاث التاريخية والأرشيف
- قواعد البيانات
- مواقع التواصل الإجتماعي

201

في التمارين (10–6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) البيانات الكيفية تكون:

(a) اسمية أو مرتبة (b) مرتبة فقط

(c) متقطعة (d) اسمية فقط

(7) البيانات المستمرة هي بيانات:

(a) اسمية (b) مرتبة (c) كمية (d) كيفية

(8) عند إجراء تحاليل الدم نستخدم:

(a) الحصر الشامل (b) المعاينة

(c) الحصر الشامل والمعاينة (d) ليس أيًا مما سبق

(9) البيانات الكمية تكون:

(a) اسمية أو مرتبة (b) مرتبة فقط

(c) متقطعة أو مستمرة (d) مستمرة فقط

(10) عدد المشاهدين في مباراة كرة قدم هو عبارة عن بيانات:

(a) كيفية اسمية (b) كيفية مرتبة

(c) كمية متقطعة (d) كمية مستمرة

86

اختبار سريع

في دراسة لوسائل النقل التي يستخدمها طلاب المرحلة الثانوية في إحدى مدارس الدولة، أجب عن الاسئلة التالية:

(a) ما هو المجتمع محل الدراسة؟

طلاب المرحلة الثانوية في إحدى مدارس الدولة.

(b) هل هذا المجتمع منتهٍ أو غير منتهٍ؟ لماذا؟

مجتمع منته، لأن عدد الطلاب محدد.

(c) ما هو المتغير محل الدراسة؟

وسيلة النقل المستخدمة في الذهاب والإياب.

(d) إذا شمل السؤال كافة طلاب المرحلة الثانوية في الدولة، فهل يعتبر ذلك حصرًا شاملًا؟

نعم.

9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

3 – 1 تحقق من إجابات الطلاب.

«حاول أن تحل»

1 **(a)** نوعه: مجتمع منته

وحدة الدراسة: لاعب

(b) نوعه: غير منته

وحدة الدراسة: سمكة

2 **(a)** تتنوع الإجابات: إجابة ممكنة:

المعلمون في إحدى مدارس الدولة.

(b) تتنوع الإجابات: إجابة ممكنة:

الأعشاب في ملعب كرة القدم.

3 **(a)** كمية، متقطعة

(b) كيفية إسمية

(c) كمية مستمرة

(d) كيفية مرتبة

KuwaitMath.com

2–6: العينات

1 الأهداف

- يتعرف العينة العشوائية البسيطة ويطبقها.
- يتعرف العينة العشوائية الطبقية ويطبقها.
- يتعرف العينة العشوائية المنتظمة ويطبقها.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

عينة – عينة عشوائية – عينة عشوائية بسيطة – عينة عشوائية طبقية – عينة عشوائية منتظمة – كسر المعاينة.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) هل يمكن استخدام الحصر الشامل لمعرفة البرامج التلفزيونية المفضلة لدى سكان دولة الكويت؟

(b) اعرض بعض المتغيرات التي يمكن دراستها في غرفة الصف.

(c) أعطِ أمثلة عن بيانات كمية وبيانات كيفية.

6–2

العينات

Samples

سوف تتعلم
- العينة العشوائية البسيطة.
- العينة العشوائية الطبقية.
- العينة العشوائية المنتظمة.

المفردات والمصطلحات:
- عينة Sample
- عينة عشوائية Random Sample
- عينة عشوائية بسيطة Simple Random Sample
- عينة عشوائية طبقية Stratified Random Sample
- عينة عشوائية منتظمة Systematic Random Sample
- كسر المعاينة Sampling Fraction

دعنا نفكر ونناقش

تتكون أسرة إحدى المستشفيات من 100 إداريًا، 150 طبيبًا، 250 ممرضًا.

1 أراد مدير المستشفى اختيار 25 ممرضًا للالتحاق ببرنامج تدريبي، وضّح كيفية اختيار الممرضين دون تحيز.

2 يساعد مدير المستشفى فريق عمل مكون من 10 أعضاء من مختلف فئات العاملين. وضّح كيفية اختيارهم بشكل عادل يتناسب مع أعداد كل فئة من العاملين.

العينة العشوائية Random Sample

هي جزء من المجتمع الإحصائي يتم اختيارها عشوائيًا بطريقة علمية دون تحيز كي تمثل هذا المجتمع أفضل تمثيل بأقل تكلفة ممكنة. تختلف العينة بحسب طبيعة المجتمع الإحصائي محل الدراسة. في ما يلي بعض من العينات العشوائية:

1 – العينة العشوائية البسيطة Simple Random Sample

إذا تضمن المجتمع الإحصائي عددًا n من المفردات المتجانسة وأردنا دراسته انطلاقًا من عينة عشوائية عدد مفرداتها (حجمها) m، يكون لدينا عينة عشوائية بسيطة والشيء الأساس في العينة العشوائية البسيطة هو أن لكل مفردة من مفردات المجتمع الإحصائي الفرصة نفسها لتكون ضمن العيّنة.

توجد طرائق متعددة لاختيار عينة عشوائية بسيطة مثل: جدول الأعداد العشوائية، آلات حاسبة متخصصة، برامج إحصائية في الحاسوب مثل (IRT, SPSS, Microsoft Excel).

مثال توضيحي

في إحدى المؤسسات التعليمية يوجد 80 طالبًا مرقمين من 1 إلى 80.

المطلوب سحب عينة عشوائية بسيطة حجمها 7 طلاب لدراسة بعض الأمور في المؤسسة باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الأول والعمود الثاني.

الحل:

بما أن حجم المجتمع 80 فإننا نأخذ أول رقمين لجهة اليسار من الصف الأول والعمود الثاني ثم نتحرك رأسيًا إلى الأسفل نجد الأعداد التالية: 41 , 86 , 37 , 96 , 31 , 53 , 28.

ولكن يوجد عددان 96 , 86 لا يوجد مقابل لهما في ترقيم الطلاب لذا يبقى لدينا:

41 , 37 , 31 , 53 , 28

فنكمل لنجد العددين الاخرين على ألا يكون تكرارًا لما سبق فنجد: 35 , 02.

وبذلك يصبح لدينا الطلاب بحسب الترقيم التالي: 35 , 02 , 41 , 37 , 31 , 53 , 28

معلومة:
يتم اختيار الصف الأول والعمود الأول من جدول الأعداد العشوائية إذا لم يتم التحديد.

202

تمرّنْ 6–2

العينات

Samples

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أوجد كسر المعاينة عندما يكون حجم العينة 8 وحجم المجتمع 100.

(2) أوجد حجم المجتمع الإحصائي إذا كان طول الفترة 5 وحجم العينة 100.

(3) ما الفرق بين العينة العشوائية البسيطة والعينة العشوائية الطبقية؟

(4) شركة دراسات تريد استقتاء العمّال وأصحاب العمل في منطقة معيّنة. يبلغ عدد العمّال 200 عامل وأصحاب العمل 40.

(a) أي نوع عينة عشوائية تستخدم في هذه الحالة؟

(b) كم يساوي كسر المعاينة إذا كنا نريد عينة من 60 شخص؟

(c) هل نستخدم جدول الأعداد العشوائية في هذه الدراسة؟

(d) نرقّم العمّال من 1 إلى 200 وأصحاب العمل من 201 إلى 240.

استخدم الصف السادس والعمود السادس وعدّد أوّل 5 أعداد للسحب العشوائي من كل طبقة.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) للحصول على أفضل تمثيل للمجتمع نختار العينة بطريقة عشوائية. (a) (b)

(2) لا يوجد فرق بين العينة العشوائية البسيطة والعينة العشوائية الطبقية. (a) (b)

(3) حجم المجتمع = كسر المعاينة / حجم العينة (a) (b)

(4) حجم المجتمع الإحصائي = طول الفترة × حجم العينة (a) (b)

(5) إذا كان طول الفترة يساوي 70، والمفردة الأولى تساوي 43، فالمفردة الخامسة تساوي 322 (a) (b)

87

KuwaitMath.com

5 التدريس

إن إجراء دراسات عن مجتمعات إحصائية كبيرة العدد لا يمكن أن يتم عمليًّا إلا عن طريق المعاينة، وبالتالي على جزء محدود من هذا المجتمع الذي يتكون من مفردات تمثله وتحقق أهداف هذه الدراسات.

في المثال (1)

اشرح للطلاب أن استخدام العينة العشوائية البسيطة يعود إلى أن كل فرد في هذه المؤسسة له الفرصة ليكون واحدًا من 7 لهم الحظ بالذهاب لأداء فريضة الحج على نفقة المؤسسة. نستخدم جدول الأعداد العشوائية البسيطة ابتداءً من الصف الأول والعمود الأول ما لم يحدد.

في المثالين (3) , (2)

ناقش مع الطلاب الفرق بين المجتمع الإحصائي في المثال (1) والمجتمع الإحصائي في المثالين (3) , (2). أكّد لهم أن العينة العشوائية البسيطة لا يصح استخدامها. فالمجتمع الإحصائي في المثالين (3) , (2) يتكون من فئات مختلفة، ويجب التعرف على أدائهم وكفاءتهم. لذا كان لا بد من إيجاد كسر المعاينة، ثم إيجاد حجم العينة من كل طبقة في المجتمع الإحصائي محل الدراسة، وبعد ذلك نستخدم جدول الأعداد العشوائية.

في المثالين (5) , (4)

أخبر الطلاب أنه في البدء، يجب احتساب طول الفترة في العينة العشوائية المنتظمة علمًا بأن جميع أفراد هذه العينة يجب أن يكون لهم الفرصة نفسها، وبالتالي فإن العينة العشوائية المنتظمة مشابهة للعينة العشوائية البسيطة إلى حد ما ولكنهما يختلفان من حيث التركيب، إذ في العينة البسيطة نختار الأعداد العشوائية بحسب الترقيم في العينة، أما في العينة المنتظمة فيضاف طول الفترة بالتتابع انطلاقًا من أول عدد على جدول الأعداد العشوائية على أن يكون أصغر من طول الفترة.

مثال (1)

عدد العاملين في مؤسسة هو 90 موظفًا مرقمين من 1 إلى 90. يراد اختيار 7 موظفين لأداء فريضة الحج على نفقة المؤسسة ويتم اختيارهم بطريقة عشوائية. المطلوب سحب عينة عشوائية بسيطة باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف السادس والعمود الرابع.

الحل:

بما أن حجم المجتمع = 90

فإننا نأخذ أوّل رقمين لجهة اليسار من الصف السادس والعمود الرابع ثم نتحرك رأسيًا إلى الأسفل ونختار الأرقام بحيث لا يتجاوز العدد 90 ولا يتكرر.

وبذلك يصبح لدينا الموظفين الذين أرقامهم: 59 , 61 , 3 , 24 , 77 , 70 , 10

حاول أن تحل

1 في مثال (1) إذا كان المطلوب سحب العينة من جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف العاشر والعمود الخامس فما هي الأعداد التي سوف يحصل عليها؟

2 – العينة العشوائية الطبقية **Stratified Random Sample**

يوجد مجتمعات إحصائية تتكون من مجموعات لا تتقاطع مع بعضها بعضًا لذا نأخذ عينة عشوائية بسيطة من كل مجموعة فنحصل على عينة عشوائية طبقية تمثل المجتمع الإحصائي محل الدراسة.

لسحب عينة عشوائية طبقية حجمها m من مجتمع إحصائي حجمه n، حيث $m \leq n$ يكون:

$$\frac{m}{n} = \frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع الإحصائي}} = \text{كسر المعاينة}$$

حجم العينة من كل طبقة = كسر المعاينة × حجم الطبقة المناظرة

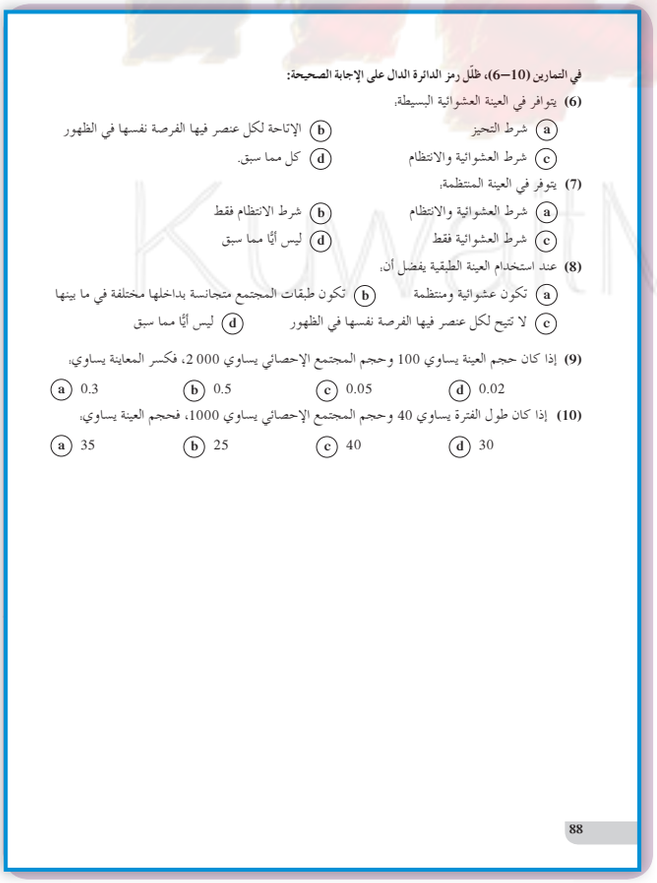
مثال (2)

لدراسة الأداء الوظيفي والكفاءة عند الموظفين في إحدى المؤسسات، تم سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 80 فردًا من أصل 1 600 موظف موزعين كما يبين الجدول التالي:

المجموع	عمال ومستخدمون	تقنيون وفنيون	إداريون
1 600	1 200	300	100

ما حجم كل عينة عشوائية بسيطة مسحوبة من كل طبقة؟

203



في التمارين (10–6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

(6) يتوافر في العينة العشوائية البسيطة:

(a) شرط التحيز (b) الإتاحة لكل عنصر فيها الفرصة نفسها في الظهور

(c) شرط العشوائية والانتظام (d) كل مما سبق.

(7) يتوفر في العينة المنتظمة:

(a) شرط العشوائية والانتظام (b) شرط الانتظام فقط

(c) شرط العشوائية فقط (d) ليس أيًّا مما سبق

(8) عند استخدام العينة الطبقية يفضل أن:

(a) تكون عشوائية ومنتظمة (b) تكون طبقات المجتمع متجانسة بداخلها مختلفة في ما بينها

(c) لا تتيح لكل عنصر فيها الفرصة نفسها في الظهور (d) ليس أيًّا مما سبق

(9) إذا كان حجم العينة يساوي 100 وحجم المجتمع الإحصائي يساوي 2 000، فكسر المعاينة يساوي:

(a) 0.3 (b) 0.5 (c) 0.05 (d) 0.02

(10) إذا كان طول الفترة يساوي 40 وحجم المجتمع الإحصائي يساوي 1000، فحجم العينة يساوي:

(a) 35 (b) 25 (c) 40 (d) 30

88

6 الربط

جميع الأمثلة الموجودة في هذا الدرس ترتبط مباشرة بحالات حياتية.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

تكمن الأخطاء في تحديد الأعداد على جدول الأعداد العشوائية.

ساعد الطلاب على التعامل بدقة عند تحديد الصف والعمود، ومن ثم كتابة الأعداد المطلوبة بحسب الشروط.

8 التقييم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لتقف على حسن أدائهم في مفاهيم هذا الدرس ومهارته.

اختبار سريع

في أحد الفنادق 80 نزيلًا. أرادت إدارة الفندق تقديم وجبة طعام مجانية لـِ 8 منهم.

المطلوب سحب عينة عشوائية منتظمة تمثل هؤلاء النزلاء علمًا بأنه جرى ترقيم كافة النزلاء من 1 إلى 80 وذلك باستخدام جدول الأعداد العشوائية.

نوجد طول الفترة: $\frac{80}{8} = 10$

بما أنه لم يتم تحديد الصف والعمود، لذا نأخذ الصف الأول والعمود الأول من جدول الأعداد العشوائية، ثم نأخذ عددًا من رقمين لجهة اليسار على أن يكون العدد أصغر من 10، فنجد النزلاء حاملي الأرقام التالية:

1 , 11 , 21 , 31 , 41 , 51 , 61 , 71

الحل:

$$\text{كسر المعاينة} = \frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع الإحصائي}} = \frac{80}{1\,600} = 0.05$$

لإيجاد حجم العينة الطبقية نأخذ القاعدة:

حجم العينة الطبقية = كسر المعاينة × حجم الطبقة المناظرة.

نوجد إذًا حجم العينة لكل طبقة في المؤسسة:

حجم عينة الإداريين: $100 \times 0.05 = 5$

حجم عينة التقنيين والفنيين: $300 \times 0.05 = 15$

حجم عينة العمال والمستخدمين: $1\,200 \times 0.05 = 60$

وبالتالي تكون العينة العشوائية الطبقية مكونة من: 5 (إداريين)، 15 (تقنيًا وفنيًا)، 60 (عاملًا ومستخدمًا).

حاول أن تحل

2 لدراسة الأداء الوظيفي والكفاءة لدى الموظفين في أحد المصارف، تم سحب عينة طبقية مكونة من 7 أفراد من 35 موظفًا موزعين كما يبين الجدول التالي:

المجموع	مستخدمون	محاسبون ومدققون	مدراء أقسام
35	5	20	10

ما حجم كل عينة عشوائية بسيطة مسحوبة من كل طبقة؟

ملاحظة:
يمكن استخدام جدول الأعداد العشوائية لسحب عينة عشوائية طبقية مكونة من عينات عشوائية بسيطة.

مثال (3)

في إحدى المؤسسات يوجد 100 إداري مرقمين من 100 إلى 199، 200 مهندس وتقني مرقمين من 200 إلى 399، 600 عامل ومستخدم مرقمين من 400 إلى 999. المطلوب سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 18 فردًا لدراسة كفاءة العاملين في هذه المؤسسة باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الرابع والعمود الرابع.

الحل:

أولًا: نوجد كسر المعاينة $= \frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع الإحصائي}} = \frac{18}{900} = 0.02$

ثانيًا: نوجد حجم كل عينة بسيطة.

حجم عينة الإداريين: $100 \times 0.02 = 2$

حجم عينة المهندسين والتقنيين: $200 \times 0.02 = 4$

حجم عينة العمال والمستخدمين: $600 \times 0.02 = 12$

فتكون العينة العشوائية الطبقية مكونة من عينات عشوائية بسيطة كما يلي:

2 (إداريين)، 4 (مهندسين وتقنيين)، 12 (عاملًا ومستخدمًا).

ثالثًا: نستخدم جدول الأعداد العشوائية لإيجاد أرقام:

2 إداريين من بين الأعداد 100 إلى 199

4 مهندسين وتقنيين من بين الأعداد 200 إلى 399

12 عاملًا ومستخدمًا من بين الأعداد 400 إلى 999

الإداريين: نأخذ الأرقام الثلاثة لجهة اليسار من الصف الرابع، والعمود الرابع ثم ننحرك نزولًا.

فنجد الأعداد: 159 , 103

المهندسين والتقنيين: نأخذ الأرقام الثلاثة لجهة اليسار من الصف الرابع والعمود الرابع ثم ننحرك نزولًا.

فنجد الأعداد: 246 , 383 , 349 , 341

العمال والمستخدمين: نأخذ الأرقام الثلاثة لجهة اليسار من الصف الرابع والعمود الرابع، ثم ننحرك نزولًا.

فنجد الأعداد: 780 , 595 , 617 , 770 , 926 , 709 , 447 , 690 , 652 , 803 , 465 , 531

فتكون العينة العشوائية الطبقية مكونة من عينات عشوائية بسيطة بحسب الترقيم التالي:

للإداريين: 159 , 103

للمهندسين والتقنيين: 246 , 383 , 349 , 341

للعمال والمستخدمين: 780 , 595 , 617 , 770 , 926 , 709 , 447 , 690 , 652 , 803 , 465 , 531

حاول أن تحل

3 في إحدى المستشفيات يوجد 80 إداريًا مرقمين من 1 إلى 80 ، 140 طبيبًا مرقمين من 81 إلى 220 ، 240 ممرضًا مرقمين من 221 إلى 460، 40 عاملًا مرقمين من 461 إلى 500.

المطلوب سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 25 فردًا لدراسة كفاءة العاملين وذلك بتكوين عينات عشوائية بسيطة باستخدام جدول الأعداد العشوائية.

3 – العينة العشوائية المنتظمة Systematic Random Sample

واحدة من العينات الأكثر استخدامًا هي العينة العشوائية المنتظمة حيث يتم سحب مفرداتها بحسب نظام ثابت ومنتظم. ترقم هذه المفردات ترقيمًا متسلسلًا ثم يقسم المجتمع الإحصائي إلى فترات متساوية الطول بعدد مفردات العينة تسمى **فترة المعاينة**. نستخدم العينة العشوائية المنتظمة في المجتمع الإحصائي حيث تكون جميع المفردة متجانسة، ولإيجاد طول الفترة نستخدم القاعدة التالية:

$$\text{طول الفترة} = \frac{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}{\text{حجم العينة}}$$

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

2 – 1 تحقق من إجابات الطلاب.

«حاول أن تحل»

1 58 , 12 , 49 , 01 , 46 , 64 , 17

2 كسر المعاينة $= \frac{7}{35} = 0.2$

حجم عينة مدراء الأقسام: $0.2 \times 10 = 2$

حجم عينة المحاسبين والمدققين: $0.2 \times 20 = 4$

حجم عينة المستخدمين: $0.2 \times 5 = 1$

3 كسر المعاينة $= \frac{25}{500} = 0.05$

لم يحدد الصف والعمود لذا نأخذ الصف الأول والعمود الأول.

حجم عينة الإداريين: $0.05 \times 80 = 4$

يحملون الأرقام: 79 , 59 , 01 , 28

حجم عينة الأطباء: $0.05 \times 140 = 7$

يحملون الأرقام: 96 , 135 , 161 , 212 , 85 , 209 , 201

حجم عينة الممرضين: $0.05 \times 240 = 12$

يحملون الأرقام:

234 , 414 , 359 , 360 , 227 , 315 , 412 , 281 , 415 , 444 , 274 , 280

حجم عينة العمال: $0.05 \times 40 = 2$

يحملون الأرقام: 462 , 468

4 طول الفترة $= \frac{900}{10} = 90$

نوجد العدد الأول أصغر من 90، فنحصل على الأعداد التالية:

705 , 615 , 525 , 435 , 345 , 255 , 165 , 75 , 885 , 795

5 نوجد طول الفترة $= \frac{140}{7} = 20$

نوجد العدد الأول أصغر من 20، فنحصل على الأعداد التالية: 135 , 115 , 95 , 75 , 55 , 35 , 15

يمكن سحب المفردة الأولى في العينة المنتظمة بطريقة عشوائية من جدول الأعداد العشوائية أو عن طريق المختبر الإحصائي ثم تسحب باقي المفردات بطريقة منتظمة تقضي بإضافة طول فترة المعاينة على المفردة الأولى للحصول على المفردة الثانية ثم إضافة طول الفترة على المفردة الثانية للحصول على المفردة الثالثة وهكذا...

مثال (4)

في أحد المصانع حيث عدد العمال 900 مرقمين من 1 إلى 900، أراد صاحب هذا المصنع مناقشة هؤلاء العمال حول كيفية تحسين الأداء وزيادة الإنتاج. المطلوب سحب عينة عشوائية منتظمة حجمها 15، مستخدمًا جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الثامن والعمود العاشر.

الحل:

نوجد: طول الفترة $= \frac{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}{\text{حجم العينة}} = \frac{900}{15} = 60$

نختار أول عدد عشوائي مؤلف من رقمين لجهة اليسار باستخدام جدول الأعداد العشوائية على ألا يزيد عن العدد 60

نجد العدد 31 على التقاطع بين الصف الثامن والعمود العاشر.

فتكون الأعداد كما يلي:

31
31 + 60 = 91
91 + 60 = 151
151 + 60 = 211
211 + 60 = 271
271 + 60 = 331
331 + 60 = 391
391 + 60 = 451
451 + 60 = 511
511 + 60 = 571
571 + 60 = 631
631 + 60 = 691
691 + 60 = 751
751 + 60 = 811
811 + 60 = 871

والعينة العشوائية المنتظمة تتكون من العمال حيث ترقيمهم بالأعداد التالية:

31 , 91 , 151 , 211 , 271 , 331 , 391 , 451 , 511 , 571 , 631 , 691 , 751 , 811 , 871

حاول أن تحل

4 في مثال (4) ما العينة العشوائية المنتظمة إذا أراد صاحب المصنع تشكيلها على أن يكون حجمها 10، مستخدمًا جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الثامن عشر والعمود السابع؟

206

مثال (5)

يبلغ عدد طلاب إحدى مدارس الكويت 700 طالب مرقمين من 1 إلى 700، أراد مدير المدرسة إرسال 10 طلاب لحضور ندوة حول «حماية الحيوانات المهددة بالانقراض». المطلوب سحب عينة عشوائية منتظمة حجمها 10 باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الثاني والعشرون والعمود الثالث.

الحل:

نوجد طول الفترة $= \frac{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}{\text{حجم العينة}} = \frac{700}{10} = 70$

نختار أوّل عدد عشوائي مؤلف من رقمين لجهة اليسار باستخدام جدول الأعداد العشوائية بحيث لا يزيد عن طول الفترة (70) ابتداءً من الصف الثاني والعشرون والعمود الثالث فنجد العدد 38.

38
38 + 70 = 108
108 + 70 = 178
178 + 70 = 248
248 + 70 = 318
318 + 70 = 388
338 + 70 = 458
458 + 70 = 528
528 + 70 = 598
598 + 70 = 668

تتكون العينة العشوائية من الطلاب حيث ترقيمهم بالأعداد التالية:

38 , 108 , 178 , 248 , 318 , 388 , 458 , 528 , 598 , 668.

حاول أن تحل

5 يبلغ عدد طلبة الصف الحادي عشر علمي في إحدى المدارس 140 طالبًا مرقمين من 1 إلى 140. المطلوب سحب عيّنة عشوائية منتظمة حجمها 7 لزيارة إحدى دور المسنين وتقديم الهدايا لهم بمناسبة حلول عيد الفطر السعيد باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف السادس والعمود التاسع.

207

KuwaitMath.com

3–6: أساليب عرض البيانات

1 الأهداف

- يوجد التكرار النسبي والنسبة المئوية للتكرار.
- يمثل البيانات بالقطاعات الدائرية.
- يمثل البيانات بالمدرج التكراري والمنحنى التكراري ويربط بينهما.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

التكرار – التكرار النسبي – التكرار المئوي – تمثيل بياني بالقطاعات الدائرية – المدرج التكراري – المنحنى التكراري – مركز الفئة.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – ورق رسم بياني – مسطرة – منقلة – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) في البيانات التالية: 7 , 5 , 6 , 8 , 7 , 9 , 7
أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

(b) أوجد النسبة المئوية للعدد 6 من 25

5 التدريس

يتابع الطالب بناء معارفه ومهاراته في علم الإحصاء، فيتعرف في هذا الدرس على أساليب جديدة في عرض البيانات تضاف إلى مكتسباته السابقة.

6–3

أساليب عرض البيانات

Ways to Display Data

سوف تتعلم
- إيجاد التكرار النسبي والنسبة المئوية للتكرار.
- تمثيل البيانات بالقطاعات الدائرية.
- تمثيل البيانات بالمدرج التكراري والمنحنى التكراري والربط بينهما.

المفردات والمصطلحات:
- التكرار Frequency
- التكرار النسبي Rational Frequency
- التكرار المئوي Percent Frequency
- تمثيل بياني بالقطاعات الدائرية Pie Chart
- المدرج التكراري Histogram
- المنحنى التكراري Frequency Curve
- مركز الفئة Center of Interval

عمل تعاوني

يمثل الجدول التالي التوزيع التكراري لأطوال قامات 50 طالبًا في المرحلة الثانوية بالسنتيمتر (cm)

الفئة	150–	155–	160–	165–	170–	175–	180–
التكرار	2	8	6	8	13	7	6

1 ما هي النسبة المئوية للطلاب الذين تقل أطوال قاماتهم عن 170 cm؟

2 ما هي النسبة المئوية للطلاب الذين أطوال قاماتهم 170 cm فأكثر؟

علمت فيما سبق أن البيانات التي يمكن الحصول عليها من مصادر مختلفة تصنف إلى نوعين: كيفية وكمية.

وهناك طرق متعددة لعرض البيانات مثل الجداول التكرارية والأعمدة والأعمدة المزدوجة والخط المنكسر والنقاط المجمعة...

القطاعات الدائرية Pie Chart

يمكن تمثيل البيانات الكيفية باستخدام القطاعات الدائرية.

نستخدم التمثيل البياني بالقطاعات الدائرية لعرض التوزيع التكراري لبيانات كيفية وتكون هذه البيانات مقسمة إلى فئات متعددة. عند صنع القطاعات الدائرية تقسّم الدائرة إلى قطاعات عددها يساوي عدد الفئات في البيانات ويمثل كل قطاع دائري واحدة من هذه الفئات، قياس الزاوية المركزية لكل قطاع يعطى بالقاعدة:

قياس الزاوية المركزية لقطاع = التكرار النسبي × 360°

حيث التكرار النسبي = تكرار القيمة (أو الفئة) / مجموع التكرارات

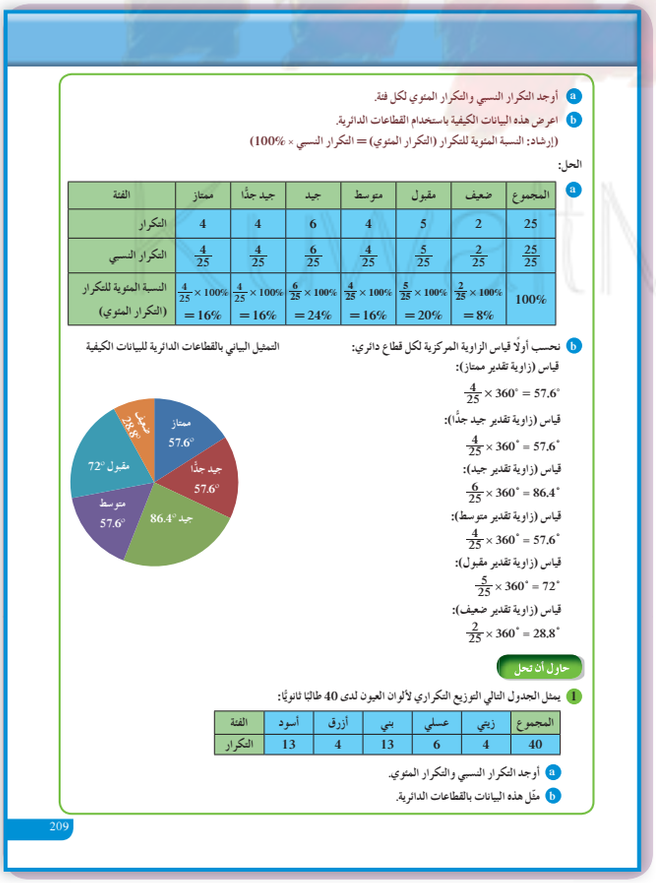
وكل قطاع من الدائرة يأخذ لونًا أو تظليلًا مختلفًا عن الآخر.

مثال (1)

في أحد الاختبارات لم يقتنع الأستاذ طلابه بالدرجات، بل استخدم مفردات تقديرية كما في الجدول التالي:

الفئة	ممتاز	جيد جدًا	جيد	متوسط	مقبول	ضعيف	المجموع
التكرار	4	4	6	4	5	2	25

208



a أوجد التكرار النسبي والتكرار المئوي لكل فئة.

b اعرض هذه البيانات الكيفية باستخدام القطاعات الدائرية.

(إرشاد: النسبة المئوية للتكرار (التكرار المئوي) = التكرار النسبي × 100%)

الحل:

a

الفئة	ممتاز	جيد جدًا	جيد	متوسط	مقبول	ضعيف	المجموع
التكرار	4	4	6	4	5	2	25
التكرار النسبي	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{25}{25}$
النسبة المئوية للتكرار (التكرار المئوي)	$\frac{4}{25}\times 100\% = 16\%$	$\frac{4}{25}\times 100\% = 16\%$	$\frac{6}{25}\times 100\% = 24\%$	$\frac{4}{25}\times 100\% = 16\%$	$\frac{5}{25}\times 100\% = 20\%$	$\frac{2}{25}\times 100\% = 8\%$	100%

b نحسب أولًا قياس الزاوية المركزية لكل قطاع دائري:

قياس (زاوية تقدير ممتاز):
$\frac{4}{25}\times 360^\circ = 57.6^\circ$

قياس (زاوية تقدير جيد جدًا):
$\frac{4}{25}\times 360^\circ = 57.6^\circ$

قياس (زاوية تقدير جيد):
$\frac{6}{25}\times 360^\circ = 86.4^\circ$

قياس (زاوية تقدير متوسط):
$\frac{4}{25}\times 360^\circ = 57.6^\circ$

قياس (زاوية تقدير مقبول):
$\frac{5}{25}\times 360^\circ = 72^\circ$

قياس (زاوية تقدير ضعيف):
$\frac{2}{25}\times 360^\circ = 28.8^\circ$

التمثيل البياني بالقطاعات الدائرية للبيانات الكيفية

حاول أن تحل

1 يمثل الجدول التالي التوزيع التكراري لألوان العيون لدى 40 طالبًا ثانويًا:

الفئة	أسود	أزرق	بني	عسلي	زيتي	المجموع
التكرار	13	4	13	6	4	40

a أوجد التكرار النسبي والتكرار المئوي.

b مثّل هذه البيانات بالقطاعات الدائرية.

209

المنحنى التكراري والمدرج التكراري

Frequency Curve and Histogram

يستخدم المدرج التكراري والمنحنى التكراري في تمثيل جدول تكراري ذي فئات بحيث إن كل مستطيل يمثل فئة من الفئات.

قاعدة المستطيل على الخط الأفقي هي طول الفئة، وارتفاعه الرأسي يساوي قيمة تكرار الفئة.

مثال (2)

يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لنتائج تحليل مادة البيترات في 40 وحدة ماء معدة للخدمات المشتركة في المنازل (غير الصالحة للشرب) وذلك خلال شهر واحد (mg/L).

الفئة	15–	20–	25–	30–	35–	40–	45–	50–	المجموع
التكرار	3	4	8	9	7	4	3	2	40

a أكمل الجدول بإضافة مراكز الفئات.

b ارسم المنحنى التكراري.

c ارسم المدرج التكراري ومنه المنحنى التكراري.

الحل:

a نوجد مراكز الفئات:

مركز الفئة 15– هو: $\frac{15+20}{2} = 17.5$

مركز الفئة 20– هو: $\frac{20+25}{2} = 22.5$

مركز الفئة 25– هو: $\frac{25+30}{2} = 27.5$

مركز الفئة 30– هو: $\frac{30+35}{2} = 32.5$

مركز الفئة 35– هو: $\frac{35+40}{2} = 37.5$

مركز الفئة 40– هو: $\frac{40+45}{2} = 42.5$

مركز الفئة 45– هو: $\frac{45+50}{2} = 47.5$

مركز الفئة 50– هو: $\frac{50+55}{2} = 52.5$

معلومة:

يتأثر استهلاك مياه الخدمات المشتركة في دولة الكويت بالعوامل التالية:

1 – كمية المطر المتساقطة على مدار السنة هي شبه ثابتة حيث إنها تتراوح سنويًا بين 70 ملم – 130 ملم. وهذا يشكل جزءًا من رصيد المياه في الدولة.

2 – مصروف المياه هو تصاعدي وذلك نتيجة العوامل الاجتماعية والاقتصادية:

(a) عدد السكان في ازدياد حيث بلغت نسبة الزيادة السكانية في السنوات الأخيرة حوالي 4%.

(b) الرغبة في الإقامة داخل المدن وذلك يتطلب استهلاكًا أكثر لكمية المياه.

(c) نمو الصناعة والزراعة وري الحدائق العامة.

210

في المثال (1)

قد تكون البيانات الكيفية أكثر سهولة من البيانات الكمية عند فرزها، لذلك يمكن تنظيمها سريعًا وإيجاد التكرار النسبي والنسبة المئوية للتكرار، ومن ثم إيجاد قياس الزاوية المركزية للقطاع الدائري الذي يمثل كل متغير كيفي. تأكد من أنهم قادرون على استخدام القاعدة لإيجاد قياس الزاوية المركزية في القطاعات الدائرية . اطلب إلى أكثر من طالب الذهاب إلى السبورة وكتابة: قياس (الزاوية المركزية) = التكرار النسبي × 360°، ثم ساعدهم على استخدام المنقلة في رسم كل قطاع.

في المثال (2)

يساعد المدرج التكراري على المقارنة بين الفئات، وهو يشبه إلى حد كبير التمثيل البياني بالأعمدة، وأما هنا فنستخدم الفئات، لذا كانت المستطيلات متصلة ببعضها بعضًا. وعندما نرسم المنحنى التكراري نأخذ منتصف القطع المستقيمة العليا لكل مستطيل، ثم نوصلها بمنحنى قريب جدًّا من القطعة المستقيمة وتكون نهاية هذا المنحنى دائمًا عند منتصف الفئة ما قبل الفئة الأولى حيث تكرارها الصفر، وعند منتصف الفئة التي تلي مباشرة الفئة الأخيرة حيث تكرارها الصفر.

6 الربط

إن الأمثلة الموجودة في هذا الدرس هي ربط بين حالات حياتية وأساليب عرض البيانات.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطىء الطلاب في رسم المنحنى التكراري باستخدام المدرج التكراري. ركّز انتباه الطلاب إلى ضرورة ربط منتصفات الأضلاع العليا للمستطيلات بمنحنيات للحصول على المنحنى التكراري.

8 التقييم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لتقف على إمكانياتهم في التعامل مع أساليب عرض البيانات، وتحقق من فهمهم لما عليهم إيجاده.

KuwaitMath.com

اختبار سريع

سجلت إدارة الأرصاد الجوية في دولة الكويت لشهر يوليو من سنة 2012 أعلى درجة حرارة، إذ بلغت حوالى °48 مئوية، وكانت درجات الحرارة القصوى كما يلي:

47, 46, 45, 39, 42, 43, 40, 44, 47, 45, 48, 43, 40, 41, 38, 42, 47, 45, 46, 47, 43, 44, 46, 43, 45, 41, 46, 47, 42، 45, 48.

نظّم هذه البيانات في جدول مبينًا: التكرار، التكرار النسبي، النسبة المئوية للتكرار، ثم مثّلها على مدرج تكراري، ومنحنى تكراري، وبالقطاعات الدائرية.

نوجد المدى: $48 - 38 = 10$

نأخذ 5 فئات طول كل فئة 2.

الجدول:

الفئة	38–	40–	42–	44–	46–48
التكرار	2	4	7	7	11
التكرار النسبي	$\frac{2}{31}$	$\frac{4}{31}$	$\frac{7}{31}$	$\frac{7}{31}$	$\frac{11}{31}$
النسبة المئوية للتكرار	6.45%	12.9%	22.58%	22.58%	35.49%

$\frac{2}{31} \times 360° \approx 23°$

$\frac{4}{31} \times 360° \approx 46°$

$\frac{7}{31} \times 360° \approx 81.5°$

$\frac{7}{31} \times 360° \approx 81.5°$

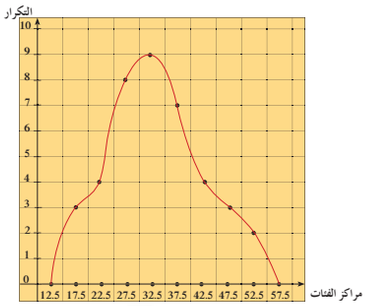
$\frac{11}{31} \times 360° \approx 128°$

الجدول:

الفئة	15–	20–	25–	30–	35–	40–	45–	50–	المجموع
التكرار	3	4	8	9	7	4	3	2	40
مركز الفئة	17.5	22.5	27.5	32.5	37.5	42.5	47.5	52.5	

b ارسم المنحنى التكراري نصل النقاط الممثلة للأزواج المرتبة التي تمثل مراكز الفئات وتكراراتها ونقفل المنحنى التكراري عند البداية في مركز فئة تكرارها صفر وعند النهاية في مركز فئة تكرارها صفر:

(12.5, 0), (17.5, 3), (22.5, 4), (27.5, 8), (32.5, 9), (37.5, 7), (42.5, 4), (47.5, 3), (52.5, 2) , (57.5, 0).



211

تمرّنْ 6–3

أساليب عرض البيانات
Ways to Display Data

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أثناء عمل الطلاب في مجموعات على نشاط معين في الصف سجل المعلم الملاحظات المبيّنة في الجدول التالي:

الفئة	يحاور ويناقش	يستمع فقط	يتخذ قرارًا	غير مشارك	المجموع
التكرار	5	7	4	6	22

(a) أوجد التكرار النسبي والتكرار المئوي لكل فئة.

(b) اعرض هذه البيانات باستخدام القطاعات الدائرية.

(2) يبيّن الجدول التالي وقت خروج السيارات من أحد المنتجات السياحية بعد ظهر أحد الأيام.

الفئة	4–	5–	6–	7–	8–	9–	المجموع
التكرار	17	31	25	14	7	6	100

(a) أكمل الجدول بإضافة مراكز الفئات.

(b) ارسم المنحنى التكراري.

(c) ارسم المدرج التكراري ومنه المنحنى التكراري.

(3) يعرض مدير أحد مطاعم الوجبات السريعة في الجدول التالي عدد الوجبات المرسلة إلى المنازل خلال أحد الأسابيع، وبُعد هذه المنازل عن المطعم.

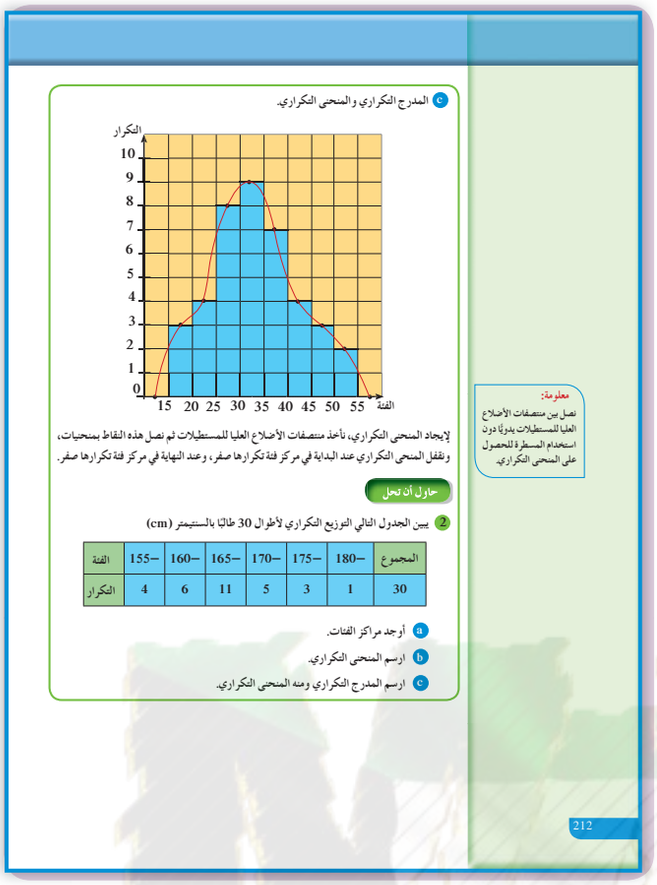
البعد (km)	0–	4–	8–	12–	16–	20–	24–	المجموع
التكرار	12	25	21	20	12	8	4	102

(a) أكمل الجدول بإضافة مراكز الفئات.

(b) ارسم المنحنى التكراري.

(c) ارسم المدرج التكراري ومنه المنحنى التكراري.

89


c المدرج التكراري والمنحنى التكراري.

لإيجاد المنحنى التكراري، نأخذ منتصفات الأصلاع العليا للمستطيلات ثم نصل هذه النقاط بمنحنيات، ونقفل المنحنى التكراري عند البداية في مركز فئة تكرارها صفر، وعند النهاية في مركز فئة تكرارها صفر.

معلومة:
نصل بين منتصفات الأضلاع العليا للمستطيلات يدويًا دون استخدام المسطرة للحصول على المنحنى التكراري.

حاول أن تحل

2 يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لأطوال 30 طالبًا بالسنتيمتر (cm)

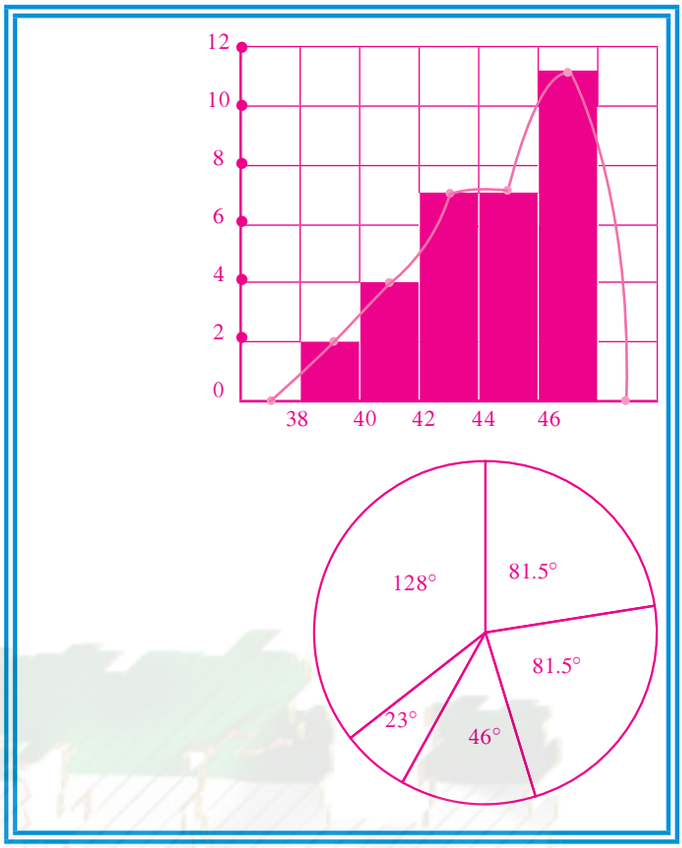
الفئة	155–	160–	165–	170–	175–	180–	المجموع
التكرار	4	6	11	5	3	1	30

a أوجد مراكز الفئات.

b ارسم المنحنى التكراري.

c ارسم المدرج التكراري ومنه المنحنى التكراري.

212



9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

1 النسبة: $\frac{24}{50}$،

النسبة المئوية: $\frac{24}{50} \times 100\% = 48\%$

2 النسبة: $\frac{26}{50}$،

النسبة المئوية: $\frac{26}{50} \times 100\% = 52\%$

«حاول أن تحل»

1 (a)

اللون	أسود	أزرق	بني	عسلي	زيتي	المجموع
التكرار	13	4	13	6	4	40
التكرار النسبي	$\frac{13}{40}$	$\frac{4}{40}$	$\frac{13}{40}$	$\frac{6}{40}$	$\frac{4}{40}$	1
النسبة المئوية للتكرار	32.5%	10%	32.5%	15%	10%	100%

$\frac{13}{40} \times 360° = 117°$

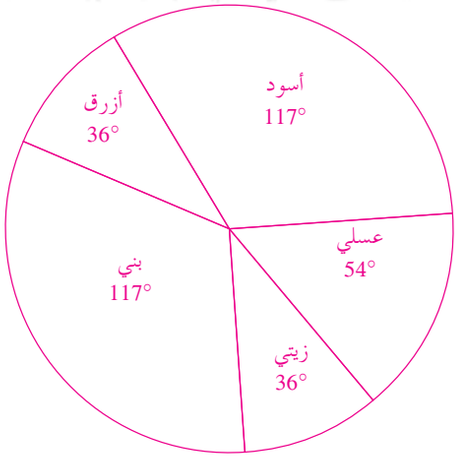
$\frac{4}{40} \times 360° = 36°$

$\frac{13}{40} \times 360° = 117°$

$\frac{6}{40} \times 360° = 54°$

$\frac{4}{40} \times 360° = 36°$

(b)

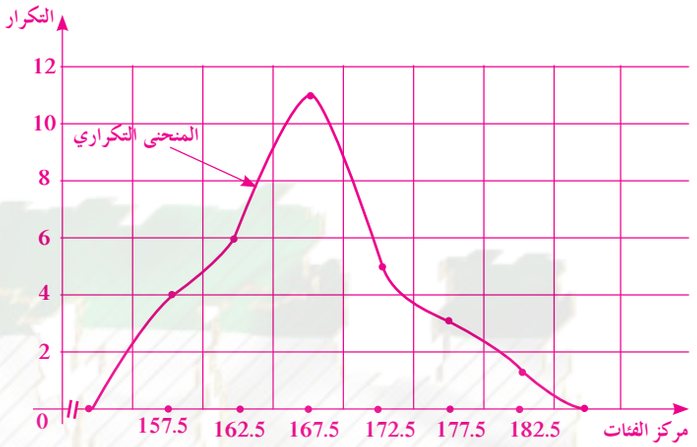


KuwaitMath.com

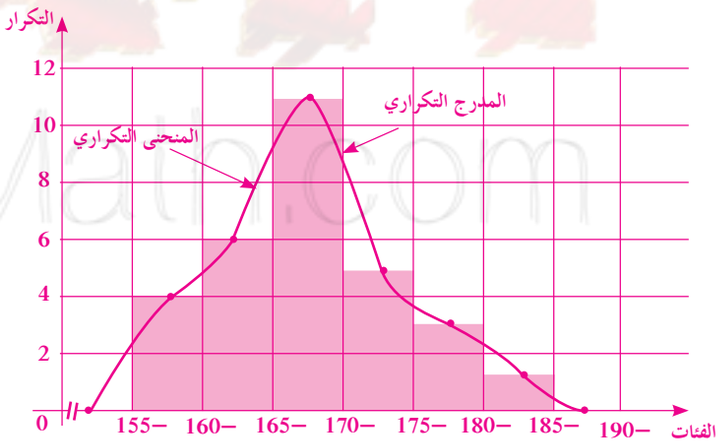
2 (a) الجدول مع مركز الفئات

الفئة	155–	160–	165–	170–	175–	180–	المجموع
التكرار	4	6	11	5	3	1	30
مركز الفئة	157.5	162.5	167.5	172.5	177.5	182.5	

(b) المنحنى التكراري باستخدام مراكز الفئات



(c) المدرج التكراري والمنحنى التكراري



المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) التكرار النسبي يساوي، قياس الزاوية المركزية لقطاع × 360° (a) (b)

(2) التكرار النسبي $= \frac{\text{مجموع التكرارات}}{\text{تكرار القيمة}}$ (a) (b)

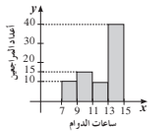
(3) مركز فئة 20– طولها 10 يساوي 30 (a) (b)

(4) لا يمكن رسم المنحنى التكراري قبل المدرج التكراري. (a) (b)

(5) يمكن تمثيل بيانات كمية مستمرة بالقطاعات الدائرية. (a) (b)

في التمارين (6–10)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

في التمرينين (6–7) استخدم المدرج التكراري المقابل الذي يمثل أعداد المراجعين في إحدى الوزارات خلال ساعات الدوام اليومي في دولة ما.



(6) إجمالي عدد المراجعين هو:

(a) 80 (b) 65 (c) 70 (d) 75

(7) طول الفترة يساوي:

(a) 4 (b) 3 (c) 2 (d) 1

في التمارين (8–10) استخدم الشكل البياني المقابل الذي يمثل المواد الاختيارية المفضّلة لدى طلّاب إحدى المدارس البالغ عددهم 200 طالب.

(8) كم يساوي قياس الزاوية المركزية لقطاع التربية البدنية؟

(a) 120° (b) 45° (c) 180° (d) 90°

(9) كم يبلغ عدد الطلّاب المسجّلين باللّغة الإنجليزية؟

(a) 30 (b) 25 (c) 35 (d) 40

(10) كم يبلغ عدد الطلّاب المسجلين بالمواد اللغويّة؟

(a) 50 (b) 40 (c) 55 (d) 60

90

KuwaitMath.com

6–4: الانحراف المعياري

1 الأهداف

- يوجد التباين والانحراف المعياري.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

المتوسط الحسابي – مقاييس التشتت – الانحراف المعياري – التباين.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

نأخذ البيانات التالية:

15 , 14 , 18 , 17 , 15 , 11 , 16 , 15 , 12 , 14 , 16 ,
12 , 13 , 11 , 10 , 13 , 14 , 12 , 15 , 17.

(a) كوّن جدولًا لهذه البيانات باستخدام فئات متساوية الطول من 2 تبيّن فيه : التكرار – التكرار النسبي – النسبة المئوية للتكرار (التكرار المئوي)–مراكز الفئات.

(b) مثّل هذه البيانات بالمدرج التكراري وبالمنحنى التكراري.

(c) استخدم مراكز الفئات لترسم المنحنى التكراري.

(d) مثّل هذه البيانات بالقطاعات الدائرية.

(e) أوجد الجذر التربيعي لكل عدد مما يلي:

629 , 230 , 196 , 49

6–4

الانحراف المعياري

Standard Deviation

سوف تتعلم
- إيجاد التباين والانحراف المعياري.

المفردات والمصطلحات:
- المتوسط الحسابي Mean
- مقاييس التشتت Dispersion Measures
- الانحراف المعياري Standard Deviation
- التباين Variance

عمل تعاوني

في نهاية الفصل الأول من العام الدراسي، كانت درجات أحد الطلاب حيث النهاية العظمى 20 درجة كما يلي:

المادة	الدرجة					المتوسط الحسابي
أحياء	11	12	11	10	9	
رياضيات	16	8	10	7	13	
فيزياء	15	15	15	5	5	
كيمياء	11	12	11	10	11	

a هل يمكن التعرف على المادة الأفضل في التحصيل، من دون إجراء عمليات حسابية، أو من خلال أفضل متوسط حسابي لدرجات هذا الطالب؟

b أوجد المتوسط الحسابي لدرجات هذا الطالب في كل مادة.

c أدخل البيانات إلى الآلة الحاسبة الموجودة لديك، ثم أوجد الانحراف المعياري لدرجات كل مادة. أكمل الجدول التالي:

	الانحراف المعياري
أحياء	
رياضيات	
فيزياء	
كيمياء	

d ما الذي تلاحظه عند هذا الطالب بالنسبة إلى الانحراف المعياري لدرجات كل مادة؟ اشرح.

خطوات استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد الانحراف المعياري:

لإدخال بيانات ذو متغير منفرد. تأخذ x على الترتيب القيم: {1، 2، 2، 3، 3، 3، 4، 4، 5}

باستخدام العمود FREQ لتعيين عدد التكرارات لكل بند {xn; freqn}

{1;1، 2;2، 3;3، 4;2، 5;1}، وحساب الانحراف المعياري والمتوسط الحسابي.

SHIFT MODE (SETUP) ▼ 4 (STAT) 1 (ON)

MODE 3 (STAT) 1 (1 – VAR)

1 = 2 = 3 = 4 = 5 = ▼ ▶

1 = 2 = 3 = 2 = 1 =

STAT X	FREQ
3	3
4	2
5	1

AC SHIFT 1 (STAT) 4 (VAR) 2 ($\bar{x}$) =

3

AC SHIFT 1 (STAT) 4 (VAR) 3 (σx) =

1.154700538

الناتج: المتوسط الحسابي: 3 الانحراف المعياري: 1.154700538

213

KuwaitMath.com

5 التدريس

تعرّف الطالب في مراحل سابقة على طرائق متعددة لوصف جميع البيانات. كانت تستخدم في بيانات حيث المتغير فيها هو متقطع.

في هذا الدرس سوف يبني المتعلم مفاهيم ومهارات متقدمة في علم الإحصاء. فهو سوف يتعامل مع مقاييس تساعده على اتخاذ قرارات سليمة، وفي بعض الأحيان يمكن أن يضع توقعات مستقبلية معقولة.

في المثال (1)

يعتبر الانحراف المعياري من أهم مقاييس التشتت المستخدمة في علم الإحصاء، حيث يؤشر إلى مدى تشتت البيانات مقارنة بالمتوسط الحسابي لقيم هذه البيانات. كلما كان الانحراف المعياري صغيرًا، كان تشتت قيم البيانات أقرب إلى المتوسط الحسابي.

شجع الطلاب على استخدام الآلة الحاسبة، لأنها تساعد كثيرًا على إيجاد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري.

كما أنه من المهم جدًّا أن يتعرف الطالب كيفية تكوين جدول يبيّن العمليات الحسابية المستخدمة لإيجاد التباين v ومن ثم الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{v}$.

6 الربط

يؤكد المثال (1) الربط بالواقع الحياتي.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطالب في إدخال البيانات إلى الآلة الحاسبة. تجوّل بين الطلاب، وتابع معهم إدخال البيانات آخذًا في الاعتبار البرنامج الإحصائي لكل آلة حاسبة.

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يتعاملون مع فقرة «حاول أن تحل»، لتتأكّد من حسن أدائهم في الإجابة عن الأسئلة كلها.

يمكن قراءة البيانات الإحصائية بزوج مرتب مكون من مقياسين مهمين:

a المتوسط الحسابي وهو مقياس لتمركز القيم في البيانات.

b الانحراف المعياري وهو مقياس لتشتت القيم في البيانات.

- لإيجاد المتوسط الحسابي $\bar{x}$ نستخدم القانون: $\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}$
  حيث إن: x_i هي قيم المتغيرات في البيانات.
  n_i تكرارات المتغيرات في البيانات.
- لإيجاد التباين v نستخدم القانون: $v = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum n_i}$
- لإيجاد الانحراف المعياري σ نستخدم القانون: $\sigma = \sqrt{v}$ أو $\sigma = \sqrt{\frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum n_i}}$

ملاحظة هامة: في حالة التوزيع التكراري ذي الفئات x_i تمثل مراكز الفئات ونستخدم نفس القوانين السابقة.

مثال (1)

في استطلاع أجري في عيادة أحد الأطباء عن الوقت المستغرق لمعاينة 120 مريضًا، جاءت النتائج كما يلي:

الوقت المستغرق بالدقائق (min)	10–	15–	20–	25–	30–	35–	40–	45–	50–	المجموع
عدد المرضى	11	21	23	14	16	18	12	3	2	120

a أكمل الجدول بإيجاد مركز كل فئة. أوجد المتوسط الحسابي.

b أوجد التباين والانحراف المعياري.

c فسّر إجابتك.

الحل:

a

الوقت المستغرق بالدقائق (min)	10–	15–	20–	25–	30–	35–	40–	45–	50–	المجموع
عدد المرضى (n_i)	11	21	23	14	16	18	12	3	2	120
مركز الفئة (x_i)	12.5	17.5	22.5	27.5	32.5	37.5	42.5	47.5	52.5	

214

KuwaitMath.com

اختبار سريع

جاءت درجات طلاب الصف الحادي عشر في اختبار للرياضيات حيث النهاية العظمى 20 درجة كما يلي:

11 , 12 , 9 , 10 , 13 , 14 , 15 , 16 , 17 , 8 , 10 , 11 , 12 , 14 , 15 , 14 , 13 , 16 , 7 , 9 , 8 , 14 , 15 , 16 , 12.

(a) كوّن جدولًا يبيّن التكرار، ومركز الفئة.

الفئة	7−	9−	11−	13−	15− 17
التكرار	3	4	5	6	7
مركز الفئة	8	10	12	14	16

(b) أوجد المتوسط الحسابي $\overline{x}$ والانحراف المعياري σ بدون استخدام برنامج إحصائي.

المتوسط الحسابي: $\overline{x} = \frac{320}{25} = 12.8$

x_i	$n_i(x_i - \overline{x})$	$n_i(x_i - \overline{x})^2$
8	$3(8 - 12.8)$	69.12
10	$4(10 - 12.8)$	31.36
12	$5(12 - 12.8)$	3.2
14	$6(14 - 12.8)$	8.64
16	$7(16 - 12.8)$	71.68
		المجموع = 184

التباين: $v = \frac{184}{25} = 7.36$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{v}$

$\sigma = \sqrt{7.36} \approx 2.7$

المتوسط الحسابي: $\overline{x} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}$

$\overline{x} = \frac{(11 \times 12.5) + (21 \times 17.5) + (23 \times 22.5) + (14 \times 27.5) + \ldots + (3 \times 47.5) + (2 \times 52.5)}{120}$

$\overline{x} = \frac{3\,360}{120} = 28$

b لإيجاد التباين والانحراف المعياري نكون الجدول التالي:

مركز الفئة x_i	التكرار n_i	$(x_i - \overline{x})$	$(x_i - \overline{x})^2$	$n_i(x_i - \overline{x})^2$
12.5	11	12.5 − 28	240.25	2642.75
17.5	21	17.5 − 28	110.25	2315.25
22.5	23	22.5 − 28	30.25	695.75
27.5	14	27.5 − 28	0.25	3.5
32.5	16	32.5 − 28	20.25	324
37.5	18	37.5 − 28	90.25	1624.5
42.5	12	42.5 − 28	210.25	2523
47.5	3	47.5 − 28	380.25	1140.75
52.5	2	52.5 − 28	600.25	1200.5
				المجموع = 12 470

التباين: $v = \frac{\sum n_i(x_i - \overline{x})^2}{\sum n_i}$

$v = \frac{12\,470}{120} \approx 103.9\overline{16}$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{v}$

$\sigma \approx 10.2$

c بما أن المتوسط الحسابي $\overline{x} = 28$ min والانحراف المعياري $\sigma \approx 10.2$ فهذا يدل على تشتت كبير لقيم البيانات عن المتوسط الحسابي.

حاول أن تحل

1 لاحظ صاحب صيدلية أن مبيع الأدوية بحسب أسعارها بالدينار هو كما يلي:

الفئة (بالدينار)	0−	5−	10−	15−	20−	25−	المجموع
التكرار	19	30	47	28	26	10	160

a أكمل الجدول بإيجاد مركز كل فئة. أوجد المتوسط الحسابي.

b أوجد التباين والانحراف المعياري لأسعار الأدوية.

215

KuwaitMath.com

9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

(a) تتنوع الإجابات.

(b) أحياء: 10.6

رياضيات: 10.8

فيزياء: 11

كيمياء: 11

(c)

	الانحراف المعياري
أحياء	1.02
رياضيات	3.3
فيزياء	4.9
كيمياء	0.63

(d) التشتت الأكبر يطال الفيزياء. يوجد تقارب كبير جدًّا بالنسبة إلى درجات الكيمياء مع المتوسط الحسابي.

«حاول أن تحل»

1 (a)

الفئة	0−	5−	10−	15−	20−	25−
التكرار	19	30	47	28	26	10
مركز الفئة	2.5	7.5	12.5	17.5	22.5	27.5

المتوسط الحسابي: $\bar{x} = \frac{2\,210}{160} \approx 13.8$

(b) التباين: $v \approx 49.56$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{v} = 7.04$

تمرّنْ 6–4

الانحراف المعياري
Standard Deviation

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أوجد الانحراف المعياري للبيانات التالية. 5 , 5 , 5 , 5. فسّر إجابتك.

(2) سجّل صاحب متجر أن مبيع السلع بحسب أسعارها هو كما يلي:

الفئة (بالدينار)	0−	10−	20−	30−	40−	50−	المجموع
التكرار	190	300	470	280	260	100	1 600

(a) أوجد المتوسّط الحسابي.

(b) أوجد التباين والانحراف المعياري لأسعار السلع.

(3) تصنع مؤسسة عبوات لحفظ الأجبان على أن تحتوي العلبة الواحدة على g 170 من الجبنة. ولكن عند وزن 200 علبة، جاءت الأوزان كما يبين الجدول التكراري التالي:

الوزن g	167	168	169	170	171	172	173	174	المجموع
التكرار	10	15	24	55	48	34	8	6	200

(a) أوجد المتوسّط الحسابي لهذه الأوزان.

(b) أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه الأوزان.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا أضفنا العدد نفسه على جميع الأعداد في البيانات، نحصل على الانحراف المعياري نفسه. (a) (b)

(2) إذا ضربنا الأعداد في البيانات بالعدد نفسه، لا يتغيّر الانحراف المعياري. (a) (b)

(3) الانحراف المعياري يكون دائمًا أصغر من المتوسّط الحسابي. (a) (b)

(4) الانحراف المعياري يكون دائمًا موجبًا. (a) (b)

91

في التمارين (9–5)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) إذا كان التباين يساوي 100، الانحراف المعياري يساوي:

(a) ±10 (b) −10 (c) 10 (d) ليس أيًا مما سبق

(6) الانحراف المعياري للبيانات التالية. 6 , 5 , 5 , 4 , 4 , 3 , 2 , 1 يساوي:

(a) 0.78 (b) 1.56 (c) 2.78 (d) 3.78

(7) الانحراف المعياري يساوي صفرًا إذا كانت البيانات:

(a) متساوية (b) نصفها هو المعكوس الضربي للنصف الآخر

(c) نصفها هو المعكوس الجمعي للنصف الآخر (d) لا يمكن أن يساوي الانحراف المعياري صفرًا.

(8) الانحراف المعياري هو مقياس:

(a) تمركز القيم في البيانات (b) تشتت القيم في البيانات

(c) انحراف القيم في البيانات (d) ليس أيًا مما سبق

(9) يساوي انحراف معياري لبيانات معيّنة 4. بعد ضرب البيانات في العدد 3، يصبح الانحراف المعياري:

(a) 13 (b) 12 (c) 11 (d) 10

92

5–6: القاعدة التجريبية

1 الأهداف

- استخدام القاعدة التجريبية

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

قاعدة تجريبية – التوزيع الطبيعي.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

نأخذ البيانات التالية:

12 , 14 , 17 , 13 , 15 , 18 , 11 , 16

(a) أوجد المتوسط الحسابي $\bar{x}$ لقيم هذه البيانات.

(b) كوّن جدولًا يبين x_i، $n_i(x_i-\bar{x})$، $n_i(x_i-\bar{x})^2$.

(c) استنتج قيم التباين v والانحراف المعياري σ لهذه البيانات.

(d) أوجد: $[\bar{x}-\sigma\ ,\ \bar{x}+\sigma]$

$[\bar{x}-2\sigma\ ,\ \bar{x}+2\sigma]$

$[\bar{x}-3\sigma\ ,\bar{x}+3\sigma]$

5 التدريس

تعتبر القاعدة التجريبية واحدة من مقاييس التشتت المهمة حيث تساعد الإحصائي على التطبيق على إحدى الفترات $[\bar{x}-\sigma\ ,\ \bar{x}+\sigma]$ أو $[\bar{x}-2\sigma\ ,\ \bar{x}+2\sigma]$ أو $[\bar{x}-3\sigma\ ,\ \bar{x}+3\sigma]$ وهذا يتدرج ضمن شروط محددة. ومن الواضح أن هذه القاعدة تحتاج إلى قيمتين هما: المتوسط الحسابي $\bar{x}$، والانحراف المعياري σ.

6–5

القاعدة التجريبية

Empirical Rule

سوف تتعلم
- استخدام القاعدة التجريبية.

المفردات والمصطلحات:
- قاعدة تجريبية
Empirical Rule
- التوزيع الطبيعي
Normal Distribution

دعنا نفكر ونتناقش

تعلمنا سابقًا أن المدى يقيس تشتت قيم البيانات، إذا كانت قيمة المدى صغيرة فنستطيع القول إن قيم البيانات قريبة من بعضها بعضًا ولكن إذا كانت قيمة المدى كبيرة فإن قيم البيانات بعيدة عن بعضها بعضًا أو يوجد فيها قيم متطرفة. كما أن الانحراف المعياري يقيس مدى تشتت قيم البيانات بالمقارنة مع المتوسط الحسابي، إذا كانت قيمة الانحراف المعياري صغيرة تكون قيم البيانات قريبة جدًا من قيمة المتوسط الحسابي أما إذا كانت قيمة الانحراف المعياري كبيرة فتكون قيم البيانات بعيدة عن قيمة المتوسط الحسابي.

فمثلًا في البيانات، 14، 15، 16، 17، 18 نجد أن المدى = 4،

المتوسط الحسابي، $\bar{x}=16$

والانحراف المعياري $\sigma_1 \approx 1.414$

وفي البيانات، 3، 9، 17، 23، 28 نجد أن المدى = 25

المتوسط الحسابي، $\bar{y}=16$ والانحراف المعياري، $\sigma_2 \approx 9.077$

من الملاحظ أن البيانات الأولى لها متوسط حسابي $\bar{x}=16$ وانحراف معياري $\sigma_1 \approx 1.414$ أي أن قيم هذه البيانات تتجمع حول المتوسط الحسابي.

في البيانات الثانية المتوسط الحسابي $\bar{y}=16$ والانحراف المعياري $\sigma_2 \approx 9.077$ أي أن هذه البيانات تبتعد عن المتوسط الحسابي.

أوجد الإحصائيون قواعد أخرى لدراسة تشتت قيم البيانات عندما تتوزع بطريقة معينة تعرف بالتوزيع الطبيعي وذلك من خلال استخدام القاعدة التجريبية التي سنوضحها في هذا البند.

التوزيع الطبيعي Normal Distribution

تعلمت سابقًا توزيع قيم البيانات بحسب قيم المتوسط الحسابي والوسيط مقارنة مع قيمة المنوال.

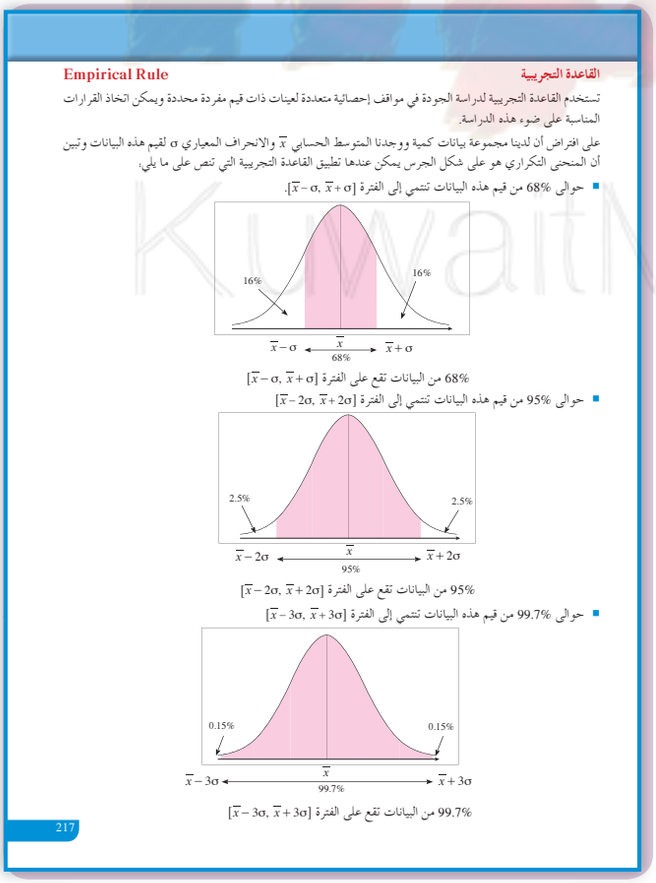
والتوزيع الطبيعي هو توزيع البيانات بشكل متماثل حول المتوسط الحسابي والمنحنى التكراري الذي يمثل هذه البيانات يأخذ شكل الجرس كما في الشكل التالي.

من خواص منحنى التوزيع الطبيعي:

- أن يكون على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول المتوسط الحسابي.
- أن تتساوى فيه قيم المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.
- أن ينحدر طرفاه تدريجيًا ويمتدان إلى ما لانهاية ولا يلتقيان مع المحور الأفقي أبدًا.

$\bar{x}$

216



القاعدة التجريبية Empirical Rule

تستخدم القاعدة التجريبية لدراسة الجودة في مواقف إحصائية متعددة لعينات ذات قيم مفردة محددة ويمكن اتخاذ القرارات المناسبة على ضوء هذه الدراسة.

على افتراض أن لدينا مجموعة بيانات كمية ووجدنا المتوسط الحسابي $\bar{x}$ والانحراف المعياري σ لقيم هذه البيانات وتبين أن المنحنى التكراري هو على شكل الجرس يمكن عندها تطبيق القاعدة التجريبية التي تنص على ما يلي:

- حوالي 68% من قيم هذه البيانات تنتمي إلى الفترة $[\bar{x}-\sigma,\ \bar{x}+\sigma]$.

68% من البيانات تقع على الفترة $[\bar{x}-\sigma,\ \bar{x}+\sigma]$

- حوالي 95% من قيم هذه البيانات تنتمي إلى الفترة $[\bar{x}-2\sigma,\ \bar{x}+2\sigma]$

95% من البيانات تقع على الفترة $[\bar{x}-2\sigma,\ \bar{x}+2\sigma]$

- حوالي 99.7% من قيم هذه البيانات تنتمي إلى الفترة $[\bar{x}-3\sigma,\ \bar{x}+3\sigma]$

99.7% من البيانات تقع على الفترة $[\bar{x}-3\sigma,\ \bar{x}+3\sigma]$

217

KuwaitMath.com

في المثال (1)

يعالج هذا المثال أرباح شركة بتطبيق القاعدة التجريبية. ركّز على العلاقة بين كل نسبة مئوية والفترة المناظرة لها. أخبرهم أن حوالى 68% يجب أن تكون على الفترة $[\bar{x}-\sigma\ ,\ \bar{x}+\sigma]$ وأن 95% يجب أن تكون على الفترة $[\bar{x}-2\sigma\ ,\ \bar{x}+2\sigma]$ وأن 99.7% يجب أن تكون على الفترة $[\bar{x}-3\sigma\ ,\ \bar{x}+3\sigma]$.

في المثال (2)

يبيّن هذا المثال كيفية تطبيق القاعدة التجريبية للتأكد من مواصفات منتج ضمن شروط تعلن عنها مراكز الإنتاج. ساعد الطلاب بأمثلة بديلة على فهم أهمية تطبيق القاعدة التجريبية وشروط استخدامها عندما يقترب المنحنى الممثل للبيانات من التوزيع الطبيعي. ركّز معهم على فكرة الرسم كشكل جرس، والتوزيعات بالنسب المئوية إلى يمين المتوسط الحسابي ويساره.

6 الربط

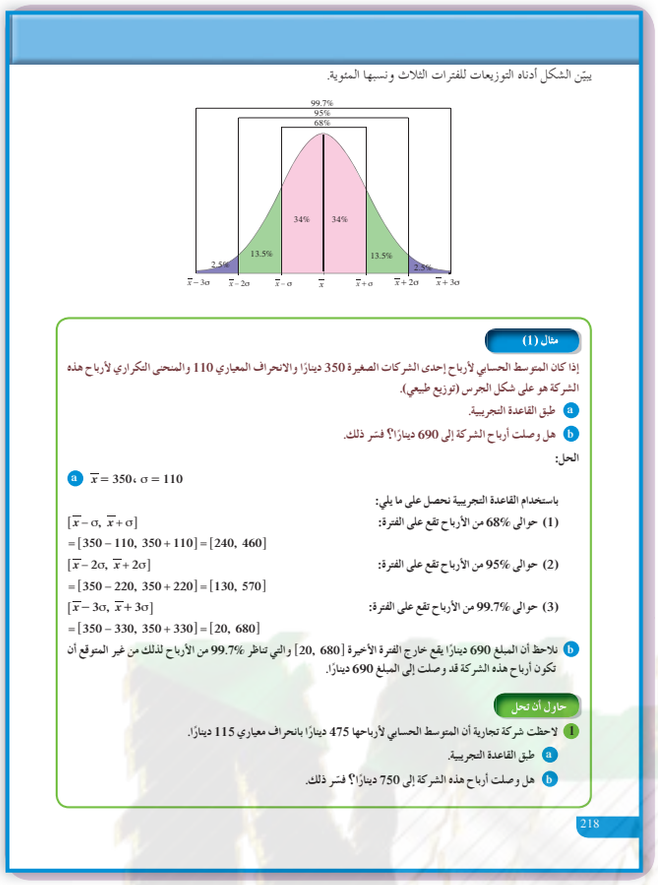
تحقق الأمثلة الموجودة في هذا الدرس الربط بمواقف حياتية.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطىء الطلاب في تحديد عدد القيم على الفترة المطلوبة.
ساعدهم بأمثلة على إيجاد الفترة $[\bar{x}-\sigma\ ,\ \bar{x}+\sigma]$ كحالة خاصة أولًا، ثم كيفية تحديد القيم عليها.

8 التقييم

تابع مع الطلاب بالحوار والنقاش ما ينجزونه في فقرات «حاول أن تحل»، لتتأكد من حسن أدائهم وفهمهم لما ورد في هذا الدرس.



يبيّن الشكل أدناه التوزيعات للفترات الثلاث ونسبها المئوية.

مثال (1)

إذا كان المتوسط الحسابي لأرباح إحدى الشركات الصغيرة 350 دينارًا والانحراف المعياري 110 والمنحنى التكراري لأرباح هذه الشركة هو على شكل الجرس (توزيع طبيعي).

a طبق القاعدة التجريبية.

b هل وصلت أرباح الشركة إلى 690 دينارًا؟ فسّر ذلك.

الحل:

a $\bar{x}=350,\ \sigma=110$

باستخدام القاعدة التجريبية نحصل على ما يلي:

(1) حوالى 68% من الأرباح تقع على الفترة: $[\bar{x}-\sigma,\ \bar{x}+\sigma]$

$=[350-110,\ 350+110]=[240,\ 460]$

(2) حوالى 95% من الأرباح تقع على الفترة: $[\bar{x}-2\sigma,\ \bar{x}+2\sigma]$

$=[350-220,\ 350+220]=[130,\ 570]$

(3) حوالى 99.7% من الأرباح تقع على الفترة: $[\bar{x}-3\sigma,\ \bar{x}+3\sigma]$

$=[350-330,\ 350+330]=[20,\ 680]$

b نلاحظ أن المبلغ 690 دينارًا يقع خارج الفترة الأخيرة $[20,\ 680]$ والتي تناظر 99.7% من الأرباح لذلك من غير المتوقع أن تكون أرباح هذه الشركة قد وصلت إلى المبلغ 690 دينارًا.

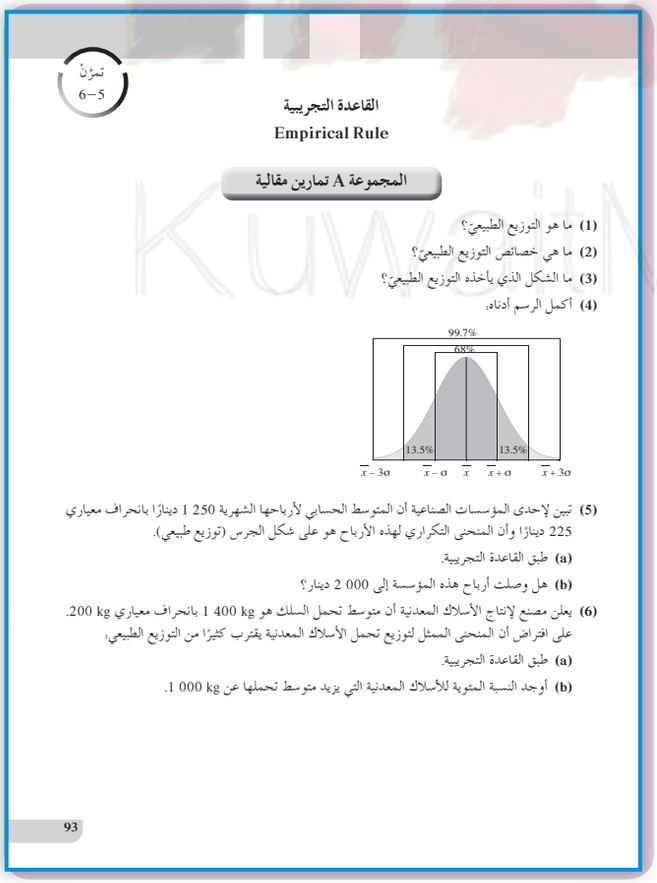
حاول أن تحل

1 لاحظت شركة تجارية أن المتوسط الحسابي لأرباحها 475 دينارًا بانحراف معياري 115 دينارًا.

a طبق القاعدة التجريبية.

b هل وصلت أرباح هذه الشركة إلى 750 دينارًا؟ فسّر ذلك.

218



تمرّنْ 6–5

القاعدة التجريبية
Empirical Rule

المجموعة A تمارين مقالية

(1) ما هو التوزيع الطبيعيّ؟

(2) ما هي خصائص التوزيع الطبيعيّ؟

(3) ما الشكل الذي يأخذه التوزيع الطبيعيّ؟

(4) أكمل الرسم أدناه.

(5) تبين لإحدى المؤسسات الصناعية أن المتوسط الحسابي لأرباحها الشهرية 1 250 دينارًا بانحراف معياري 225 دينارًا وأن المنحنى التكراري لهذه الأرباح هو على شكل الجرس (توزيع طبيعي).

(a) طبق القاعدة التجريبية.

(b) هل وصلت أرباح هذه المؤسسة إلى 2 000 دينار؟

(6) يعلن مصنع لإنتاج الأسلاك المعدنية أن متوسط تحمل السلك هو 1 400 kg بانحراف معياري 200 kg. على افتراض أن المنحنى الممثل لتوزيع تحمل الأسلاك المعدنية يقترب كثيرًا من التوزيع الطبيعي،

(a) طبق القاعدة التجريبية.

(b) أوجد النسبة المئوية للأسلاك المعدنية التي يزيد متوسط تحملها عن 1 000 kg.

93

KuwaitMath.com

اختبار سريع

1 أرادت مؤسسة تجارية شراء كمية معلبة من منتج حيث وزن كل عبوة 90 g، ولكن جاءت دراسة المحتويات لعينة من 500 عبوة لتبين أن المتوسط الحسابي للأوزان: $\bar{x} = 89.5\,g$ والانحراف المعياري $\sigma = 1.2\,g$ والمنحنى التكراري لتوزيع أوزان العبوات هو على شكل جرس (توزيع طبيعي).

(a) طبّق القاعدة التجريبية.

(b) هل تشتري هذه المؤسسة كمية من هذا المنتج تحت شرط ألا يصل الحد الأدنى للمتوسط الحسابي إلى 86.5 g؟

(a) (1) حوالى 68% من العبوات على الفترة:

$[\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma] = [88.3, 90.7]$ أي 340 عبوة تقع أوزانها على $[88.3, 90.7]$

(2) حوالى 95% من العبوات على الفترة:

$[\bar{x}-2\sigma, \bar{x}+2\sigma] = [87.1, 91.9]$ أي 457 عبوة تقع أوزانها على $[87.1, 91.9]$

(3) حوالى 99% من العبوات على الفترة

$[\bar{x}-3\sigma, \bar{x}+3\sigma] = [85.9, 93.1]$

أي حوالى 495 عبوة تقع أوزانها على الفترة $[85.9, 93.1]$

(b) بما أن $\bar{x} = 86.5$ تقع على الفترة $[85.9, 93.1]$، لذا يمكن للمؤسسة شراء كمية من العبوات.

مثال (2)

يعلن مصنع لإنتاج البطاريات المستخدمة في السيارات أن متوسط عمر البطارية من النوع (A) هو 60 شهرًا بانحراف معياري 10 أشهر. على افتراض أن المنحنى الممثل لتوزيع عمر البطاريات يقترب كثيرًا من التوزيع الطبيعي.

a طبق القاعدة التجريبية.

b أوجد النسبة المئوية للبطاريات من النوع (A) التي يزيد عمرها عن 50 شهرًا بفرض أن ما يعلنه المصنع صحيحًا.

c أوجد النسبة المئوية للبطاريات من النوع (A) والتي يقل عمرها عن 40 شهرًا بفرض أن ما يعلنه المصنع صحيحًا.

الحل:

a (1) حوالى 68% من البطاريات المصنعة عمرها يقع على الفترة:

$[\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma] = [60-10, 60+10] = [50, 70]$

(2) حوالى 95% من البطاريات المصنعة عمرها يقع على الفترة:

$[\bar{x}-2\sigma, \bar{x}+2\sigma] = [60-20, 60+20] = [40, 80]$

(3) حوالى 99.7% من البطاريات المصنعة عمرها يقع على الفترة:

$[\bar{x}-3\sigma, \bar{x}+3\sigma] = [60-30, 60+30] = [30, 90]$

b بما أن المنحنى الممثل لتوزيع عمر البطاريات يقترب كثيرًا من التوزيع الطبيعي لذا من الرسم أعلاه نستنتج:

$34\% + 34\% + 13.5\% + 2.5\% = 84\%$

أي أن 84% من هذه البطاريات يزيد عمرها عن 50 شهرًا بفرض أن ما تعلنه هذه الشركة صحيحًا.

c يبين المنحنى الممثل لعمر البطاريات أن 2.5% من هذه البطاريات يقل عمرها عن 40 شهرًا وذلك بفرض أن ما تعلنه الشركة صحيحًا.

حاول أن تحل

2 يعلن مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية أن متوسط عمر المصباح الكهربائي من النوع (A) هو 700h بانحراف معياري 100h على افتراض أن المنحنى الممثل لتوزيع عمر المصابيح الكهربائية يقترب كثيرًا من التوزيع الطبيعي.

a طبق القاعدة التجريبية.

b أوجد النسبة المئوية للمصابيح الكهربائية من النوع (A) التي يزيد عمرها عن 500h

c أوجد النسبة المئوية للمصابيح الكهربائية من النوع (A) التي يقل عمرها عن 400h

219

KuwaitMath.com

9 إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

1 (a) تطبيق القاعدة التجريبية:

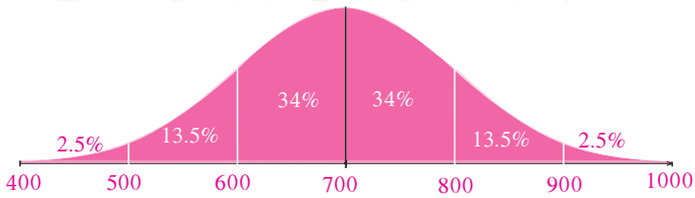
- حوالى 68% على الفترة $[\bar{x}-\sigma\ ,\ \bar{x}+\sigma]$ أي على الفترة $[360\ ,\ 590]$
- حوالى 95% على الفترة $[\bar{x}-2\sigma\ ,\ \bar{x}+2\sigma]$ أي 95% على الفترة $[245,705]$
- حوالى 99.7% على الفترة: $[\bar{x}-3\sigma\ ,\ \bar{x}+3\sigma]$ أي 99.7% على الفترة $[130,820]$

(b) نعم، لأن المبلغ 750 موجود على الفترة $[130,820]$ وبالتالي وصلت أرباح الشركة إلى 750 دينارًا.

2 (a) تطبيق القاعدة التجريبية:

- حوالى 68% على الفترة $[600\ ,\ 800]$
- حوالى 95% على الفترة $[500\ ,\ 900]$
- حوالى 99.7% على الفترة $[400\ ,\ 1000]$

(b) باستخدام المنحنى الممثل لتوزيع عمر المصابيح الكهربائية على افتراض أنه توزيع طبيعي نجد التالي:



النسبة المئوية للمصابيح التي يزيد عمرها عن 500 ساعة:

$13.5\% + 34\% + 34\% + 13.5\% + 2.5\% = 97.5\%$

(c) لا يوجد.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) يمكن أن يكون شكل التوزيع الطبيعيّ جرسًا غير متماثل. (a) (b)

(2) في التوزيع الطبيعيّ المنوال والوسيط غير متساويين. (a) (b)

(3) في التوزيع الطبيعيّ الفترة $[\bar{x}-\sigma\ ,\ \bar{x}+\sigma]$ تحتوي على 95% من البيانات. (a) (b)

(4) في التوزيع الطبيعيّ 99.7% من البيانات توجد في الفترة $[\bar{x}-3\sigma\ ,\ \bar{x}+3\sigma]$. (a) (b)

(5) تستخدم القاعدة التجريبية لدراسة الجودة في مواقف إحصائية متعددة لعينات ذات قيم مفردة. (a) (b)

في التمارين (6–8)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) تزعم شركة أن متوسط عمر منتجها هو 50 شهرًا مع انحراف معياري 5 أشهر. النسبة المئوية للمنتجات التي يزيد عمرها عن 50 شهرًا هي:

(a) 50% (b) 55% (c) 45% (d) 40%

(7) التمثيل الأفضل للتوزيع الطبيعيّ هو:

(a) (b) (c) (d)

(8) الفترة $[\bar{x}-2\sigma\ ,\ \bar{x}+2\sigma]$ تحتوي على:

(a) 68% من البيانات (b) 99.7% من البيانات

(c) 90% من البيانات (d) 95% من البيانات

94

KuwaitMath.com

6–6: القيمة المعيارية

1 الأهداف

- استخدام القيمة المعيارية.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

قيمة معيارية.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

لنأخذ البيانات التالية: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 7

(a) أوجد المتوسط الحسابي $\bar{x}$ لقيم هذه البيانات.

(b) أوجد التباين v والانحراف المعياري σ.

5 التدريس

تقارن القيمة المعيارية لقيمة محددة من البيانات بباقي هذه القيم، كما أنها تقارن بقيم أكثر في بيانات أخرى. فمثلًا، درجة معينة في مادة دراسية قد تكون قيمتها أفضل في مادة دراسية أخرى إذا ما قارنتها ببقية الدرجات في المادتين.

في المثال (1)

يبيّن كيف أن درجة 16 من 20 في مادتين مختلفتين هي أفضل في مادة من الأخرى، وهذا باستخدام قاعدة القيمة المعيارية، والتي تساعد على مقارنة هذه الدرجة مع بقية الدرجات.

في المثال (2)

يبيّن هذا المثال كيفية استخدام القيمة المعيارية لمقارنة درجتين مختلفتين في مادتين مختلفتين وذلك بدرجات كل مادة.

6–6

القيمة المعيارية

Standardized Value

سوف تتعلم
- استخدام القيمة المعيارية.

المفردات والمصطلحات:
- قيمة معيارية
Standardized Value

دعنا نفكر ونتناقش

قد يحصل طالب خلال السنة الدراسية على درجات مختلفة في كل مادة كما أنه من الممكن أن يحصل على الدرجة نفسها في أكثر من مادة. والسؤال: كيف يقيم الطالب هذه الدرجة في كل مادة مع بقية الدرجات؟
للإجابة عن هذا السؤال تستخدم القيمة المعيارية.

القيمة المعيارية Standardized Value

هي مؤشر يدل على انحراف قيمة مفردة من بيانات عن المتوسط الحسابي وذلك باستخدام الانحراف المعياري لقيم هذه البيانات. إذا كان المطلوب مقارنة قيمتين لمفردتين مختلفتين تنتمي كل منهما إلى مجموعة محددة فإنه لا يكفي إحصائيًا مقارنة قيم هذه المفردات ببعضها بعضًا بل يجب الأخذ بعين الاعتبار المتوسط الحسابي لكل مجموعة من البيانات وانحرافها المعياري. ويتطلب منا هذا الأمر تحويل القيم المقاسة بوحدات قياس عادية إلى قيم معيارية مناظرة بعدد من الانحرافات المعيارية، وذلك باستخدام القاعدة:

القيمة المعيارية = (قيمة المفردة – المتوسط الحسابي) / الانحراف المعياري

$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$

مثال (1)

في أحد الاختبارات نال أحد الطلاب درجة 16 من 20 في مادة الرياضيات حيث المتوسط الحسابي 13 والانحراف المعياري 5 ونال أيضًا 16 من 20 في مادة الكيمياء حيث المتوسط الحسابي 14 والانحراف المعياري 4.
ما القيمة المعيارية للدرجة 16 مقارنة مع درجات كل مادة؟ أيهما أفضل؟

الحل:

القيمة المعيارية للدرجة 16 في مادة الرياضيات: $z_1 = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{16 - 13}{5} = 0.6$

القيمة المعيارية للدرجة 16 في مادة الكيمياء: $z_2 = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{16 - 14}{4} = 0.5$

$\because 0.5 < 0.6$

$\therefore$ القيمة المعيارية للدرجة 16 في مادة الرياضيات أفضل من القيمة المعيارية للدرجة 16 في مادة الكيمياء.

وبالتالي الدرجة 16 في مادة الرياضيات أفضل من الدرجة 16 في مادة الكيمياء.

220

6 الربط

الأمثلة في هذا الدرس هي ربط مباشر بمواقف حياتية.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطىء الطلاب في استخدام قاعدة القيمة المعيارية، فيكتبون: $z = \frac{\bar{x} - x}{\sigma}$. أعطهم أمثلة متعددة تبين لهم أن: $z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$.

8 التقييم

تابع الطلاب بدقة وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل»، لتتأكد من حسن استخدامهم القاعدة: $z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$ وأنهم احتسبوا أولًا قيم $\bar{x}$, σ من بيانات معطاة.

KuwaitMath.com

اختبار سريع

يبيّن الجدول التالي الرواتب الشهرية بالدينار لبعض الموظفين في مؤسستين A , B.

الموظف	مدير إداري	مدير مبيعات	محاسب	عامل تقني	عامل تنظيفات
المؤسسة A	800	700	450	300	200
المؤسسة B	850	700	500	275	225

أوجد القيمة المعيارية للراتب المشترك 700 دينار كويتي مقارنة بالرواتب في كل مؤسسة.

المتوسط الحسابي للرواتب في المؤسسة A: $\overline{x} = 490$

المتوسط الحسابي للرواتب في المؤسسة B: $\overline{y} = 510$

الانحراف المعياري في المؤسسة A: $\sigma_1 = 229$

الانحراف المعياري في المؤسسة B: $\sigma_2 = 240$

القيمة المعيارية للراتب 700 في المؤسسة A:

$$z_1 = \frac{700 - 490}{229} \approx 0.917$$

القيمة المعيارية للراتب 700 في المؤسسة B:

$$z_2 = \frac{700 - 510}{240} \approx 0.792$$

نلاحظ أن: $0.792 < 0.917$

أي أن الراتب 700 دينار في المؤسسة A أفضل منه في المؤسسة B مقارنة برواتب الموظفين في كل مؤسسة.

حاول أن تحل

1) جاءت إحدى درجات طالب في مادة الفيزياء 15 حيث المتوسط الحسابي 14 والانحراف المعياري 3.8 وفي مادة الكيمياء 15 حيث المتوسط الحسابي 13 والانحراف المعياري 7.8

ما القيمة المعيارية للدرجة 15 مقارنة مع درجات كل مادة؟ أيهما أفضل؟

مثال (2)

في نتيجة نهاية العام الدراسي حصلت الطالبة موضي على 64 درجة في مادة اللغة العربية حيث المتوسط الحسابي 69 والانحراف المعياري 8. وحصلت على 48 درجة في مادة الجغرافيا حيث المتوسط الحسابي 56 والانحراف المعياري 10

في أي المادتين كانت موضي أفضل؟

الحل:

لتحديد المادة التي كانت فيها موضي أكثر تحصيلًا نحول الدرجات الفعلية إلى قيم معيارية:

القيمة المعيارية للدرجة 64 في مادة اللغة العربية: $z_1 = \frac{x - \overline{x}}{\sigma} = \frac{64 - 69}{8} = -0.625$

القيمة المعيارية للدرجة 48 في مادة الجغرافيا: $z_2 = \frac{x - \overline{x}}{\sigma} = \frac{48 - 56}{10} = -0.8$

$\because -0.625 > -0.8$

$\therefore$ القيمة المعيارية للطالبة في مادة اللغة العربية أفضل من القيمة المعيارية في مادة الجغرافيا.

$\therefore$ أداء الطالبة موضي في مادة اللغة العربية أفضل من أدائها في مادة الجغرافيا.

حاول أن تحل

2) يسكن خالد في المدينة A حيث إن طول قامته 180cm والمتوسط الحسابي لأطوال قامات الرجال في هذه المدينة 174cm مع انحراف معياري 12cm. أما صالح فيسكن في المدينة B حيث إن طول قامته 172cm والمتوسط الحسابي لأطوال قامات الرجال في هذه المدينة 165cm مع انحراف معياري 15

أي منهما طول قامته أفضل من الآخر مقارنة مع أطوال الرجال في كل مدينة؟

221

KuwaitMath.com

9 إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

1 نوجد القيمة المعيارية للدرجة 15 في مادة الفيزياء:

$$z_1 = \frac{15-14}{3.8} \approx 0.2632$$

نوجد القيمة المعيارية للدرجة 15 في مادة الكيمياء:

$$z_2 = \frac{15-13}{7.8} \approx 0.2564$$

بما أن $0.2564 < 0.2632$، فإن الدرجة 15 في مادة الفيزياء هي أفضل من الدرجة 15 في مادة الكيمياء مقارنة بدرجات كل مادة.

2 نوجد القيمة المعيارية لطول قامة خالد في المدينة A:

$$z_1 = \frac{180-174}{12} = 0.5$$

نوجد القيمة المعيارية لطول قامة صالح في المدينة B:

$$z_2 = \frac{172-165}{15} \approx 0.4\overline{6}$$

نلاحظ أن: $0.5 > 0.4\overline{6}$ ، وبالتالي طول قامة خالد في المدينة A مقارنة بأطوال قامات رجال هذه المدينة أفضل من طول قامة صالح في المدينة B مقارنة بأطوال قامات رجال هذه المدينة.

تمرّن 6–6

القيمة المعيارية

Standarized Value

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أكمل الجملة التالية:

القيمة المعيارية هي مؤشر يدل على ..... قيمة مفردة من بيانات عن ..... .

وذلك باستخدام ..... لقيم هذه البيانات.

(2) في أحد الاختبارات حيث الدرجة العظمى 20، جاءت درجة أحد الطلاب 15 مع متوسط حسابي 14 وانحراف معياري 4. ما القيمة المعيارية للدرجة 15 مقارنة ببقية درجات هذا الاختبار؟

(3) لتأخذ البيانات: 7، 7، 6، 5، 5.

(a) أوجد: المتوسط الحسابي $\bar{x}$، والانحراف المعياري σ لهذه البيانات.

(b) أوجد القيمة المعيارية لهذه البيانات.

(4) في المدينة A يزن أحد الرجال 75 kg مع متوسط حسابي للرجال 70 kg وانحراف معياري 5 kg.

وفي المدينة B يزن أحد الرجال 80 kg مع متوسط حسابي للرجال 76 kg وانحراف معياري 8 kg.

أوجد القيمة المعيارية z_1 لوزن 75 kg في المدينة A والقيمة المعيارية z_2 لوزن 80 kg في المدينة B.

(5) في اختبارات مادة الرياضيات نال خالد الدرجات التالية من 20؛ 17، 16، 15، 12.

أما في اختبارات مادة الكيمياء فقد نال الدرجات التالية من 20؛ 9، 15، 13، 11.

(a) أوجد القيمة المعيارية z_1 للدرجة 15 في مادة الرياضيات والقيمة المعيارية z_2 للدرجة 15 في مادة الكيمياء.

(b) في أيّ مادة كانت الدرجة 15 هي أفضل مقارنة ببقية الدرجات؟

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) القيمة المعيارية $= \frac{\bar{x}-x}{\sigma}$ (a) (b)

(2) القيمة المعيارية تؤشر إلى تشتت قيمة عن بقية قيم البيانات. (a) (b)

(3) في بيانات حيث المتوسط الحسابي $\bar{x} = 14$ والانحراف المعياري $\sigma = 4$

فإن القيمة المعيارية للمفردة $x = 16$ هي: $z = 0.5$ (a) (b)

95

(4) في بيانات حيث المتوسط الحسابي $\bar{x} = 12$ والقيمة المعيارية للمفردة $x = 15$ هي: $z = 0.4$ ، فإن الانحراف المعياري: $\sigma = 7.5$ (a) (b)

في التمارين (5–8)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) القيمة المعيارية للمفردة 14 مقارنة بقيم بيانات حيث المتوسط الحسابي 12.5 والانحراف المعياري 6 هي:

(a) -0.25 (b) 0.25 (c) 2.5 (d) -2.5

(6) القيمة المعيارية لمفردة من بيانات هي 0.625 والمتوسط الحسابي 12 والانحراف المعياري 8 فإن هذه المفردة تساوي:

(a) 7 (b) -7 (c) 17 (d) -17

(7) القيمة المعيارية للمفردة 14 من بيانات هي 0.6 والمتوسط الحسابي 11 فإن الانحراف المعياري لقيم هذه البيانات هو:

(a) 0.2 (b) -0.2 (c) -5 (d) 5

(8) القيمة المعيارية للمفردة 18 من بيانات هي 0.75 والانحراف المعياري 8 فإن المتوسط الحسابي هو:

(a) 24 (b) 12 (c) -12 (d) -24

96

KuwaitMath.com

المرشد لحل المسائل

إجابات «مسألة إضافية»

1 مجموعة (a): $\bar{x} = 6.07$

مجموعة (b): $\bar{x} = 6.07$

2 مجموعة (a):

القيمة	3	5	6	7	8	9
التكرار	4	1	2	2	3	2

$\sigma_1 = 2.22$

مجموعة (b):

القيمة	3	4	5	6	7	8	9
التكرار	1	1	2	5	3	1	1

$\sigma_2 = 1.49$

أستنتج أن تشتت القيم في البيانات (a) أكبر منه في البيانات (b)، لأن الانحراف المعياري $1.49 < 2.22$

المرشد لحل المسائل

في سوق العمل، ثمة شركتان تعملان في المجال نفسه. الرواتب الشهرية المدفوعة بالدينار لموظفي كل شركة مبينة على الجدولين الآتيين:

الراتب في الشركة (a)	600	700	1 200	1 750	2 250
التكرار	13	4	1	1	1

الراتب في الشركة (b)	700	800	1 100	1 300	1 500
التكرار	13	4	1	1	1

1 بالنظر إلى الجدولين، أيّ الشركتين تبدو أفضل من حيث الرواتب؟

2 a احسب المتوسط الحسابي $\bar{x}$، $\bar{y}$ للرواتب في كل جدول.

b هل تحققت من التوقعات التي وضعتها في السؤال 1؟ اشرح.

c هل إيجاد المتوسط الحسابي يكفي وحده لمقارنة الرواتب الشهرية في الشركتين؟

3 احسب الانحراف المعياري σ_1 , σ_2 لرواتب الموظفين في كل شركة. ماذا تستنتج؟

الحل:

1 نلاحظ أن الرواتب الصغيرة والتي تكرارها 13 , 4 على الترتيب في الشركة (b) أفضل من تلك التي في الشركة (a) ولكن الرواتب الكبيرة والتي تكرارها 1 , 1 , 1 على الترتيب في الشركة (a) أفضل من تلك التي في الشركة (b)، وبالتالي رواتب العاملين في الشركة (b) أفضل، لكن رواتب الإداريين في الشركة (a) أفضل.

2 a المتوسط الحسابي لرواتب الموظفين في الشركة (a):

$\bar{x} = 790$ KD

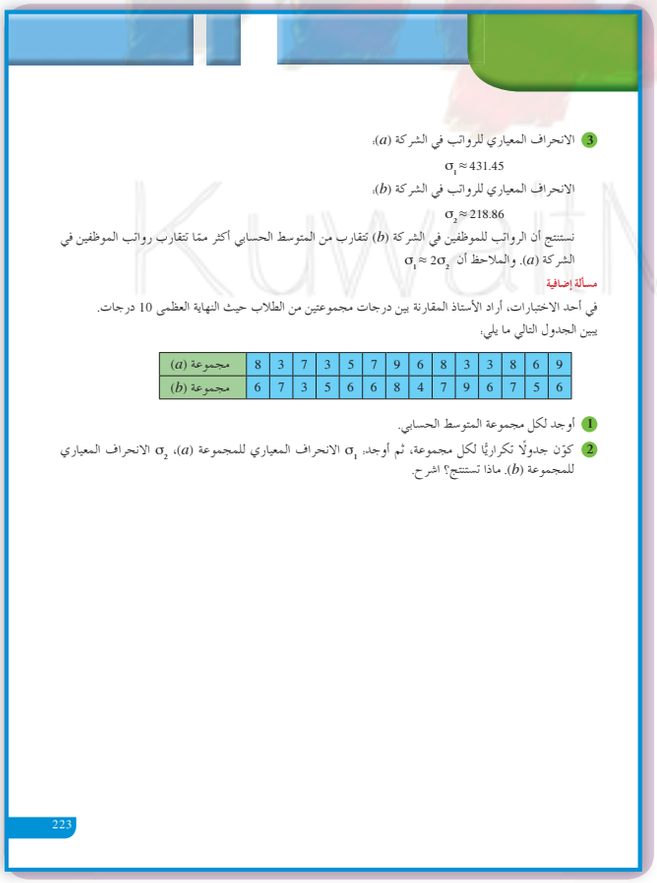
المتوسط الحسابي لرواتب الموظفين في الشركة (b):

$\bar{y} = 810$ KD

b يبدو من خلال النتائج الحسابية أن المتوسط الحسابي للرواتب في الشركة (b) أفضل من المتوسط الحسابي للرواتب في الشركة (a).

c لا تكفي معرفة المتوسط الحسابي عند المقارنة بين الرواتب لوجود قيم متطرفة في الجدولين.

222



3 الانحراف المعياري للرواتب في الشركة (a):

$\sigma_1 \approx 431.45$

الانحراف المعياري للرواتب في الشركة (b):

$\sigma_2 \approx 218.86$

نستنتج أن الرواتب للموظفين في الشركة (b) تتقارب من المتوسط الحسابي أكثر مما تتقارب رواتب الموظفين في الشركة (a). والملاحظ أن $\sigma_1 \approx 2\sigma_2$

مسألة إضافية

في أحد الاختبارات، أراد الأستاذ المقارنة بين درجات مجموعتين من الطلاب حيث النهاية العظمى 10 درجات. يبين الجدول التالي ما يلي:

مجموعة (a)	8	3	7	3	5	7	9	6	8	3	3	8	6	9
مجموعة (b)	6	7	3	5	6	6	8	4	7	9	6	7	5	6

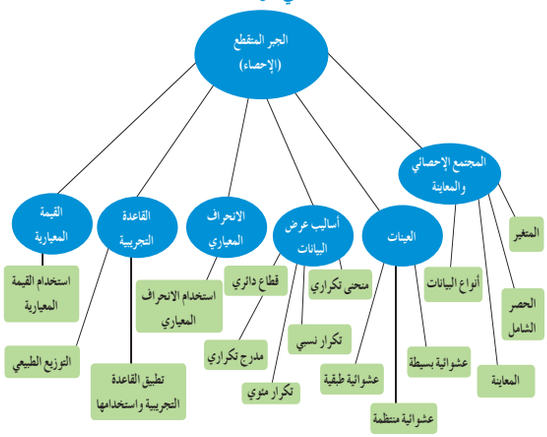
1 أوجد لكل مجموعة المتوسط الحسابي.

2 كوّن جدولًا تكراريًا لكل مجموعة، ثم أوجد σ_1 الانحراف المعياري للمجموعة (a)، σ_2 الانحراف المعياري للمجموعة (b). ماذا تستنتج؟ اشرح.

223

KuwaitMath.com

مخطط تنظيمي للوحدة السادسة



ملخص

- المجتمع الإحصائي هو مجموعة كل المفردات(الوحدات) قيد الدراسة ولها خصائص مشتركة.
- المتغير هو الصفة (أو الصفات) محور الدراسة في مجتمع إحصائي معين.
- الحصر الشامل هو عملية جمع بيانات جميع مفردات المجتمع الإحصائي محل الدراسة.
- المعاينة هي عملية اختيار جزء من مفردات المجتمع بطريقة مدروسة تجعل هذه المفردات تمثل المجتمع وتحقق أهداف الدراسة.
- تصنف البيانات إلى نوعين: كيفي وكمي.
- العينة هي جزء من المجتمع الإحصائي يتم اختيارها عشوائيًا بطريقة علمية كي تمثل هذا المجتمع أفضل تمثيل بأقل كلفة ممكنة.
- العينة العشوائية البسيطة هي عينة حيث إن كل مفردة منها لها الفرصة نفسها في الظهور وتمثل المجتمع الإحصائي الذي أخذت منه.

جدول الأعداد العشوائية

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	28138	28596	04819	50138	12598	96878	55684	01488	58963	25896	36987	47856	20150	18965
2	01055	53625	47739	51063	08445	33254	22542	50954	73949	11945	29947	86107	35420	77076
3	79603	31075	71532	38497	08236	78411	18237	48743	81472	31761	49582	70411	64708	59416
4	79261	96010	82558	15977	15827	55768	29668	73188	65198	24483	16219	63827	05092	47495
5	00005	37153	07206	78041	09457	97003	49739	75180	74018	90951	96161	31749	23314	55471
6	59282	86004	13259	59537	75702	66287	77941	27095	46176	67215	93007	84125	89302	92843
7	20119	41234	01600	61772	57765	43965	60952	86606	47653	71502	85121	56804	03494	98302
8	67205	41113	34514	03273	95516	68365	79855	50202	66262	31348	37260	56557	15116	38645
9	06244	02595	08941	24615	92256	43007	05022	48195	91554	42525	30499	92203	70717	92685
10	46210	35683	67486	77091	58196	08010	54826	97006	76740	76343	93982	66126	91164	53560
11	80851	80252	02993	92649	12421	00480	53258	45140	57226	10428	36478	24600	01401	29179
12	74684	98726	87312	70956	49731	45504	70689	57849	77383	53581	05100	07629	04450	54826
13	82136	32120	31733	10371	01132	25110	67123	59517	89996	58905	75260	21509	87839	68376
14	73419	88893	89748	44745	46390	54781	31307	62656	69777	24494	91659	29133	46122	75769
15	66082	76594	77480	38397	64521	18712	50625	39027	39168	07835	13446	17758	19166	86050
16	72300	93912	87548	69024	17509	52647	64335	84663	79524	34618	72718	51651	10486	81509
17	46805	82648	27550	65291	27181	92637	13539	87601	15442	70131	62278	99491	41647	11029
18	59068	93270	15829	34926	46252	90487	92734	04850	90175	84906	46435	91518	86972	25705
19	63089	93954	30250	80347	81506	53768	75611	62054	89867	16083	45585	39555	96236	37875
20	54384	64888	28929	46575	08301	86288	52656	19225	65019	74795	25915	71637	49063	17695
21	41219	63211	39429	15290	78067	66741	08485	64653	87698	04983	47255	72768	90770	82930
22	20939	02271	71831	53134	73002	86087	98213	24484	08574	34915	03881	26259	83583	55337
23	66587	02998	73357	00128	97188	71660	47602	52022	28157	21602	30212	53762	94149	66526
24	71255	04641	38419	79552	62599	76281	10226	60287	16627	85028	41218	20667	63917	49254
25	08584	91510	57892	75011	49221	69960	90413	62400	23239	76854	66983	15964	70808	41341
26	31552	70340	48274	81006	74831	19177	49160	50762	89666	93535	12381	29770	33895	90381
27	02779	92197	83606	60964	65448	64964	19444	31357	16774	68021	46076	43831	09372	71527
28	22739	38348	29275	50087	91312	68984	37018	03447	05352	00798	61243	86397	98949	07622
29	21255	64526	97920	04791	77315	49905	74232	67222	89562	14683	81533	60057	31164	21824
30	95796	88317	77167	07879	03499	00804	27377	18693	75652	32509	38279	28588	16753	86119
31	75902	33821	35579	75020	78575	43912	99570	79216	04682	53316	95976	11938	56490	43868
32	36028	73731	05339	82203	22856	72459	00237	17627	50326	98629	71967	48402	61549	83717
33	06836	03795	80497	34107	29215	17117	69538	63274	96690	78884	38149	84592	67096	84551
34	35984	71052	01657	19690	99783	13513	37517	96508	49098	86592	10874	18125	00876	14549
35	87635	49443	55077	18157	20552	27316	12591	68157	34316	20447	53989	40096	69123	74210
36	41484	58832	43633	92072	54522	60783	05639	78371	20340	90174	90549	60250	80858	97632
37	65736	34031	37846	47294	50168	96397	50329	17390	04554	96190	02594	44229	24198	03064
38	16118	88260	28975	20036	77353	96179	08143	29222	57871	01292	52420	07130	11896	94088
39	62064	36947	31193	72328	10262	75428	50450	31620	17855	27018	75910	60965	39988	73389
40	23472	61332	48829	99113	90538	74066	38628	09270	72856	71411	78860	50745	42966	27424
41	05654	41781	99888	60787	56313	83221	82631	91989	32577	68175	24897	23456	16419	41727
42	83428	17512	78322	01942	42061	60659	32746	95367	20551	99885	79334	03732	97058	80356
43	65126	87369	56266	48697	33094	07522	92724	05676	91022	64262	24239	60242	01049	42945
44	28042	84729	34846	05880	34188	27048	30623	23204	05034	93136	19192	91674	47022	48523
45	53148	70847	48117	16103	83773	13224	76143	39148	06742	08298	52014	61711	79466	78334

- العينة العشوائية الطبقية هي عينة تتكون من عينات عشوائية بسيطة وتستخدم في مجتمع إحصائي مكون من مجموعات لا تتقاطع مع بعضها بعضًا.
- لإيجاد العينة العشوائية الطبقية نوجد أوّلًا:
  - (a) كسر المعاينة = $\frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع الإحصائي}} = \frac{m}{n}$
  - (b) حجم العينة من كل طبقة = كسر المعاينة × حجم الطبقة المناظرة
- العينة العشوائية المنتظمة هي عينة تقسم المجتمع الإحصائي إلى فترات متساوية الطول وعددها يساوي حجم العينة ويكون طول الفترة = $\frac{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}{\text{حجم العينة}}$
- تستخدم الجداول التكرارية في تحديد عدد ظهور كل قيمة في البيانات.
- نستخدم التكرار النسبي لمقارنة ظهور كل قيمة بالنسبة إلى مجموع قيم البيانات.
- نستخدم النسبة المئوية لظهور كل قيمة لمعرفة نسبتها المئوية من الكل.
- توفر التمثيلات البيانية بالقطاعات الدائرية معرفة حجم كل قيمة بالنسبة إلى الكل.
- يبيّن المدرج التكراري حجم كل فئة مقارنة بقية الفئات ويساعد على إيجاد قيمة تقريبية للمنوال.
- المدى = القيمة العظمى من البيانات − القيمة الصغرى من البيانات.
- المتوسط الحسابي: $\overline{x} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}$
- التباين: $v = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} n_i}$، حيث n_i التكرار، $\overline{x}$ = المتوسط الحسابي.
- الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{v}$
- يؤشر الانحراف المعياري إلى تشتت البيانات عن المتوسط الحسابي، كلما كان أصغر كان التشتت أقل.
- القيمة المعيارية = $\frac{x - \overline{x}}{\sigma}$، توفر القيمة المعيارية مقارنة قيمة معينة بقية القيم في عدد من البيانات.
- نستخدم القاعدة التجريبية: $[\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma]$، $[\overline{x} - 2\sigma, \overline{x} + 2\sigma]$، $[\overline{x} - 3\sigma, \overline{x} + 3\sigma]$ لإيجاد عدد القيم من البيانات في كل فئة والنسبة المئوية لهذه القيم.

تابع جدول الأعداد العشوائية

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
46	13560	38973	76536	54464	57626	10247	67051	83850	93002	30930	83842	09990	39203	85693
47	74560	04842	75720	98173	35124	18019	70681	73624	86300	76894	55504	20022	27144	03239
48	27449	10887	55047	76702	62587	20131	63452	96127	15802	65271	74663	37237	95812	19427
49	44413	47571	63342	67062	19900	42511	71024	44364	02775	41081	33177	09580	71047	33820
50	64512	50481	41107	21553	86471	16380	45959	16065	75195	31120	33822	43200	82566	43078
51	00095	29635	33618	55201	12075	97285	80296	92250	92579	69296	68423	91353	35553	77036
52	09638	68500	84152	55279	29481	48723	87785	06304	53198	79425	41344	87395	54720	72911
53	08589	28972	20500	26761	61852	87387	17967	50345	20479	37841	16337	88163	38585	02798
54	54883	36854	75468	31821	08464	13393	24322	56872	39507	16845	92039	13209	47035	57686
55	15444	18858	69256	81949	85766	20284	15914	76382	25665	84484	36409	87271	14949	12069
56	71565	25235	48604	04697	60513	89675	34337	06619	67509	03365	67431	43725	60359	33823
57	92871	06972	97272	98081	58945	98039	47815	55173	93203	03385	58309	47970	27985	73782
58	68849	33525	22034	44200	90628	39212	75363	00247	96303	51838	99956	34321	85809	87275
59	98827	81751	86350	27162	56861	00566	32360	52560	05152	97370	29229	98503	44100	59854
60	66803	20412	23097	36884	14158	51578	82839	04323	01877	91180	22403	31175	67942	14508
61	41516	62122	37492	78385	08100	01107	49028	80607	92813	75169	25796	12643	75026	04170
62	12162	72695	70213	28844	94220	04677	63128	96254	60006	42148	63974	24739	46064	93416
63	13274	51517	40925	25926	47062	06867	80018	43394	68316	19197	74832	95805	26126	29623
64	52918	26336	17452	70092	22425	68294	14624	12683	60030	18091	76824	45533	29768	59678
65	30361	58894	77995	22650	20266	21791	25773	37748	38058	73835	57440	33610	24749	56691
66	46377	07121	20251	41301	07635	66029	80470	25523	16429	40640	40041	79302	98712	95368
67	27423	28968	39623	90457	26780	14540	15082	90327	56459	77107	60727	26328	59556	93557
68	73886	44934	65197	86001	51613	92940	24998	35378	35732	05469	05791	07309	23107	37543
69	70336	30279	09961	58625	11044	73699	32481	85490	58333	12277	98355	86413	87883	23945
70	97903	34498	31282	11249	13179	41489	87962	89071	61922	02704	83626	67269	26568	09110
71	86205	97851	61543	40666	78098	05621	86072	21202	84985	65253	09306	56791	86227	73343
72	70718	31353	96295	21718	03495	83149	48733	21496	68430	91459	18409	86552	53261	30280
73	79073	05288	57087	27201	29661	08888	42984	96272	93656	50805	32057	36231	03532	64408
74	37479	85240	68508	36333	90080	46063	78129	96854	65844	71369	15432	66145	29223	87139
75	56009	81470	06181	98341	92406	61704	57770	28984	92858	88178	80042	83674	23736	64497
76	97012	75201	16764	31720	59414	81005	63959	15445	12347	71939	23651	29846	20962	77463
77	89839	94534	78223	94989	54376	61163	21914	19430	86856	38116	83201	10117	77879	04504
78	81048	37891	24924	18757	54550	54788	72430	24611	18643	55647	11806	78567	76679	58222
79	96743	96838	50696	57648	15325	72557	77193	50894	33206	44420	37986	84257	02031	65384
80	87649	00751	47483	48564	13103	20941	49793	68972	27994	75845	84616	37040	97110	95953
81	18173	87553	45854	18750	16506	57202	60428	61710	35887	19879	49893	04512	62556	63742
82	27613	72032	94334	38239	00395	05486	96365	01758	99314	41866	25760	74573	72169	25744
83	67517	04195	89100	21434	52923	90818	09206	19493	00233	62413	39127	76457	39419	35023
84	23574	88907	08133	85126	84643	94128	89259	18791	71035	84179	82500	92193	31383	34150
85	98721	90145	05695	14882	11827	56881	14143	68069	88481	08328	58607	81737	11660	96892
86	85556	83652	92934	55451	94792	45056	50732	83305	46303	37510	15539	52534	47250	75231
87	63282	48334	46961	05993	16605	63422	23375	44298	16226	10617	96722	42776	53376	94366
88	34033	36344	41107	77495	73985	79352	14844	44334	30781	16339	38031	28104	60054	05725
89	75567	31423	72507	48162	30150	44912	76250	12017	12136	47687	90279	67127	83889	87957
90	45101	69475	96924	76548	57756	14741	26052	42807	52824	61981	87866	35512	23771	43130

اختبار الوحدة السادسة

(1) هل يمكن استخدام الحصر الشامل في دراسة المجتمعات الإحصائية التالية أم لا؟ اشرح السبب.

(a) دراسة كمية السكر الموجودة في الدم عند أحد الأشخاص.

(b) إيجاد المتوسط الحسابي لأوزان طلاب صفك.

(2) في إحدى المؤسسات تمّ سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 70 فردًا وكسر المعاينة لهذه العينة 0.08

(a) أوجد عدد الأفراد العاملين في هذه المؤسسة (المجتمع الإحصائي).

(b) علمًا أن المؤسسة مكونة من ثلاث فئات: الفئة A حيث حجم العينة الطبقية 30 ، الفئة B حيث حجم العينة الطبقية 30، الفئة C حيث حجم العينة الطبقية 10، أوجد حجم العينة المناظرة لكلّ فئة.

(3) في إحدى الشركات تمّ سحب عينة عشوائية منتظمة مكونة من 25 فردًا بحيث إن طول الفترة 50،

أوجد حجم المجتمع الاحصائي (عدد أفراد العاملين في الشركة).

(4) في استطلاع أجري على الصف الثاني عشر علمي لمعرفة آرائهم حول مهنة المستقبل جاءت الإجابات كما يبيّن الجدول التالي:

المجموع	رجل أعمال	محام	طبيب	مهندس	ضابط	معلم	المهنة
25	2	5	7	6	3	2	التكرار

(a) أكمل الجدول لإيجاد التكرار النسبي والنسبة المئوية للتكرار.

(b) مثّل هذه البيانات بالقطاعات الدائرية.

(5) في البيانات التالية: 3، 9، 4، 5، 6، 8، 7. أوجد المتوسط الحسابي $\bar{x}$، التباين v والانحراف المعياري σ

(6) على افتراض أن المتوسط الحسابي لأرباح إحدى الشركات هو 850 دينارًا والانحراف المعياري 175 دينارًا والمنحنى التكراري لأرباح هذه الشركة هو على شكل جرس (توزيع طبيعي).

(a) طبّق القاعدة التجريبية على المتوسط الحسابي لأرباح هذه الشركة.

(b) هل انخفضت أرباح هذه الشركة إلى 300 دينار؟ اشرح ذلك.

(c) هل وصلت أرباح هذه الشركة إلى 1400 دينار؟ اشرح ذلك.

(7) نال الطالب سالم 15 من 20 في اختبار مادة الرياضيات حيث المتوسط الحسابي للدرجات 13 والانحراف المعياري 2.5 وقد نال أيضًا 13 من 20 في اختبار مادة الفيزياء حيث المتوسط الحسابي للدرجات 11.5 والانحراف المعياري 2.4

في أي مادة تعتبر درجة سالم هي الأفضل مقارنة بدرجات كل مادة؟ اشرح.

(8) يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لأوزان طلّاب الصف الحادي عشر بالكيلوجرام (kg).

الفئة	64–	68–	72–	76–	80–	المجموع
التكرار	4	5	7	6	3	25

(a) أكمل الجدول لإيجاد مراكز الفئات.

(b) مثّل هذه البيانات بالمدرج التكراري والمضلع التكراري.

تمارين إثرائية

(1) هل يمكن استخدام الحصر الشامل في دراسة المجتمعات الإحصائية التالية، أم لا؟ مع ذكر السبب.

(a) دراسة أنواع الحشرات في دولة الكويت.

(b) دراسة نسبة عدد الإناث إلى عدد الذكور العاملين في أحد المصارف في دولة الكويت.

(2) **الكتابة في الرياضيات:** اذكر أمثلة تتضمن ما يلي:

(a) مجتمع إحصائي منته – وحدة الدراسة – المتغير المراد دراسته.

(b) مجتمع إحصائي غير منته – وحدة الدراسة – المتغير المراد دراسته.

(3) في أحد مصانع غزل النسيج، الذي يحوي 600 عامل مرقمين من 1 إلى 600. أراد صاحب المصنع مناقشة عدد من العمال في كيفية تحسين الإنتاج. المطلوب سحب عينة عشوائية بسيطة مكونة من 15 عاملًا باستخدام جدول الأعداد العشوائية.

(4) أراد مدير عام شركة كبرى لإنتاج مواد الدهان تقييم أداء كافة الموظفين، علمًا أن الشركة تضم 80 مهندسًا تمّ ترقيمهم من 201 إلى 280، 120 اختصاصي مختبر تمّ ترقيمهم من 301 إلى 420، وأخيرًا 220 عاملًا تمّ ترقيمهم من 501 إلى 720. المطلوب سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 21 فردًا تمثل جميع العاملين باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف السابع والعمود الأوّل.

(5) أراد معلم في أصول تعليم القرآن الكريم تشكيل مجموعات في الصفوف الثانوية لإحدى المدارس التي تحوي 144 طالبًا مرقمين من 1 إلى 144. المطلوب سحب عينة عشوائية منتظمة مكونة من 16 طالبًا باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الثالث والعمود الثالث.

(6) يتألف فريق العمل في إحدى الشركات من 360 موظفًا وهم من الجنسين أي ذكور وإناث ويعملون إما بدوام كامل أو بدوام جزئي كما هو مبيّن في الجدول التالي:

ذكور/دوام كامل	180 مرقمين من 1 إلى 180
ذكور/دوام جزئي	36 مرقمين من 181 إلى 217
إناث/دوام كامل	18 مرقمين من 218 إلى 236
إناث/دوام جزئي	126 مرقمين من 237 إلى 363

المطلوب أخذ عينة طبقية حجمها 40 موظفًا، وفقًا للفئات أعلاه باستخدام برنامج إحصائي.

KuwaitMath.com