الوحدة السابعة: الأعداد المركبة Complex Numbers

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

1–7: الأعداد المركبة

جزء 1: الوحدة التخيلية i.

جزء 2: تساوي عددين مركبين.

جزء 3: التمثيل البياني لعدد مركب.

جزء 4: العمليات على مجموعة الأعداد المركبة.

2–7: الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

جزء 1: القيمة المطلقة لعدد مركب.

جزء 2: الإحداثيات القطبية.

جزء 3: الصورة المثلثية.

3–7: حل معادلات

جزء 1: حل معادلات من الدرجة الأولى.

جزء 2: حل معادلات من الدرجة الثانية.

جزء 3: الجذر التربيعي لعدد مركب.

مقدمة الوحدة


الوحدة السابعة

الأعداد المركبة

Complex Numbers

مشروع الوحدة: استخدام الرادار في مراقبة حركة الطائرات

1. مقدمة المشروع: يرسل الرادار موجات عالية التردد ويتلقى انعكاسها، ما يسمح بتحديد موقع الطائرة وبعدها عن المطار. وكل هذا يتم باستخدام الإحداثيات القطبية.
2. الهدف: إيجاد البعد بين طائرتين باستخدام الإحداثيات القطبية عند رصدهما بواسطة الرادار.
3. اللوازم: أوراق رسم بياني – آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).
4. أسئلة حول التطبيق:

رصد رادار أحد المطارات طائرتين على الارتفاع نفسه، وكانت إحداثياتهما القطبية $(8\text{ km}, 60^\circ)$, $(14\text{ km}, 150^\circ)$.

(a) ضع رسمًا بيانيًا ينمذج موقع الطائرتين معتبرًا أن المطار هو نقطة الأصل.

(b) أوجد العددين المركبين z_1, z_2 بالصورة المثلثية اللذين يمثلان موقعي الطائرتين.

(c) احسب القيمة المطلقة للعدد المركب $|z_1 - z_2|$، ثم استنتج البعد بين الطائرتين.

5. التقرير: اكتب تقريرًا يبيّن بوضوح خطوات الحل وكيف استفدت من دروس هذه الوحدة للإجابة عن الأسئلة. دعّم تقريرك بملصق أو بعرض على جهاز الإسقاط.

دروس الوحدة

الأعداد المركبة	الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب	حل معادلات
7–1	7–2	7–3

10

لاحظ العالم كاردان (Cardan) أنه يمكن إيجاد جذر تربيعي لعدد سالب من بين جذور المعادلة: $x^3 + bx = c$ حيث x المتغير و b, c ثابتان مع $c \neq 0$.

وفي منتصف القرن الثامن عشر، أثبت دالمبير (D'Alembert) إمكانية كتابة كل عدد مركب على النحو: $z = a + bi$ على أساس أنّ a, b عددان حقيقيان، i عدد تخيلي. كما أنه مثّل الأعداد المركبة بمتجهات مستوية.

إلا أن غاوس (Gauss) هو الذي وضّح العلاقة بين الأعداد المركبة والنقاط في المستوى الإحداثي.

لقد أصبح من المعروف في الوقت الحاضر أن مجالات علمية كثيرة لا يمكن التعامل معها من دون استخدام الأعداد المركبة مثل:

(a) **في الكهرباء:** كيفية عمل الدارة الكهربائية (يمكن تمثيل حركة ممتص الصدمات بواسطة معادلة تفاضلية تحتوي على أعداد مركبة).

(b) **في الفيزياء الكمية:** لا يمكن تحديد موقع ذرة بدقة من دون استخدام الأعداد المركبة.

(c) حركة دوران الكواكب (دوائر تتحرك داخل دوائر أخرى).

(d) إيجاد حلول لبعض المعادلات التفاضلية.

– تبسيط متسلسلة فوريیه (Fourier Series).

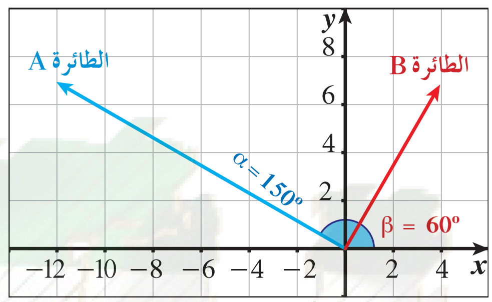
– تشغيل أجهزة الهاتف الجوال (Cellular Phone).

مشروع الوحدة

كانت فكرة الزاوية ونصف القطر مستخدمة منذ القدم. وقد وضع العالم الفلكي والرياضي هيبارخوس Hipparchus (190–120 ق.م.) جداول مثلثية تعطي طول الوتر وفق قياس الزاوية، واستخدم الإحداثيات القطبية لتحديد مواقع الكواكب. ولكن لم يعتمد اليونانيون الإحداثيات القطبية كنظام إحداثيات متكامل حتى القرن السابع عشر، حيث تمّ إدخال نظام الإحداثيات القطبية في العمليات الحسابية.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

1 **(a)**



(b) $z_1 = 14(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)$

$$z_2 = 8(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$$

$$z_1 - z_2 = 14\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) - 8\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= (-7\sqrt{3} - 4) + (7 - 4\sqrt{3})i$$

(c) $|z_1 - z_2| = \sqrt{(-7\sqrt{3} - 4)^2 + (7 - 4\sqrt{3})^2}$

$$= 2\sqrt{65}$$

$$\approx 16.125 \text{ km}$$

طريقة ثانية: المثلث OAB قائم الزاوية O.

$$\therefore\ AB = \sqrt{14^2 + 8^2} = 2\sqrt{65}$$

$$\therefore\ |z_1 - z_2| = AB \quad \therefore\ |z_1 - z_2| = 2\sqrt{65}$$

يبلغ البعد بين الطائرتين حوالي 16.125 km

التقرير

اكتب تقريرًا مفصّلًا يبيّن خطوات عملك وكيفية التوصل إلى الإجابات المطلوبة في المشروع. دعّم تقريرك بملصق أو بعرض بواسطة جهاز الإسقاط. راجع مع زملائك خطوات الحل، ثم أعد النظر في بعض النقاط إذا كان ذلك ضروريًّا.

الوحدة السابعة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت كتابة معادلات خطية وحلها.
- تعلمت حل معادلات تربيعية.
- تعلمت رسم دوال تربيعية بيانيًّا.
- تعلمت استخدام بيان الدوال التربيعية لحل مسائل معادلات تربيعية.

ماذا سوف تتعلم؟

- الوحدة التخيلية i.
- الصورة الجبرية للعدد المركب.
- مجموعة الأعداد المركبة.
- الصورة المثلثية للعدد المركب.
- جمع الأعداد المركبة وطرحها وضربها وقسمتها.
- إيجاد الجذر التربيعي لعدد مركب.
- حل معادلات من الدرجة الأولى ومن الدرجة الثانية تتضمن أعدادًا مركبة.

المصطلحات الأساسية

الوحدة التخيلية – الأعداد المركبة – الصورة الجبرية – العدد التخيلي – مرافق العدد المركب – الإحداثيات القطبية – مقياس العدد المركب – سعة العدد المركب – الصورة المثلثية.

أضف إلى معلوماتك

طوّر عالم الرياضيات بنوا مندلبرو Benoit Mandelbrot (1924 – 2010) مفهوم الكسريات Fractals، مما سمح بنمذجة أشكال طبيعية مثل القرنبيط والرئة والمنحدر الصخري، واستخدم متتاليات تتضمن أعدادًا مركبة لرسم بيانات مجموعات بواسطة الحاسوب.

11

سلّم التقييم

4	خطوات الحل واضحة – الحسابات دقيقة – التمثيل البياني صحيح – التقرير مفصل ومعبر.
3	معظم خطوات الحل واضحة – أخطاء قليلة في الحسابات – التمثيل البياني صحيح – معظم التقرير مفصل.
2	بعض خطوات الحل واضحة – أخطاء متعددة في الحسابات – التمثيل البياني مقبول – بعض عناصر التقرير بحاجة إلى تفصيل أكثر.
1	معظم عناصر المشروع ناقصة.

7–1: الأعداد المركبة

1 الأهداف

- يتعرف الوحدة التخيلية i.
- يكتب الصورة الجبرية والصورة الديكارتية للعدد المركب.
- يوجد مرافق العدد المركب.
- يستخدم العمليات على الأعداد المركبة.
- يمثل الأعداد المركبة على المستوى الإحداثي المركب (مستوى أرجاند).

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

وحدة تخيلية i – العدد المركب – جزء حقيقي – جزء تخيلي – الصورة الجبرية – مرافق العدد – العمليات على الأعداد المركبة – قوى العدد المركب.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) أوجد ناتج ما يلي: $(3x-4)(4x+7)$

(b) أوجد الجذر التربيعي لكل مما يلي:

$\sqrt{225}$, $\sqrt{169}$, $\sqrt{196}$

(c) أوجد الجذر التكعيبي لكل مما يلي:

$\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[3]{-343}$, $\sqrt[3]{216}$

(d) حلّ المعادلات التالية:

$$3x^2-75=0$$

$$x^2-7x+12=0$$

$$2x^2+50=0$$

7–1

الأعداد المركبة

Complex Numbers

دعنا نفكر ونتناقش

المعادلات التربيعية التي مميزها عددًا سالبًا ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ مثل $x^2+1=0$ أو $-3x^2+x-1=0$

يبيّن الشكل المقابل أن الدالة $f(x)=x^2+1$ ليس لها أصفارًا حقيقية وبالتالي، فالمعادلة التربيعية $x^2+1=0$ ليس لها حل في $\mathbb{R}$.

لحل هذه المعادلات اقترح الرياضيون في القرن السابع عشر توسيع مجموعة الأعداد الحقيقية وذلك بتطوير مفهوم الجذر التربيعي ليتضمن الأعداد الحقيقية السالبة وصولًا إلى مجموعة الأعداد المركبة.

عند حل المعادلة $x^2+1=0$ أو $x^2=-1$ علينا إيجاد عدد مربعه يساوي (-1).

استخدم $\sqrt{-1}$ للدلالة عن هذا العدد غير الحقيقي، ثم استخدم الرمز (i) بدلًا من $\sqrt{-1}$.

$f(x)=x^2+1$

$f(x)=-3x^2+x-1$

الأعداد المركبة **Complex Numbers**

الوحدة التخيلية **Imaginary Unit**

هي العدد الذي مربعه (-1) ويرمز إليه بالرمز i

$i=\sqrt{-1}$, $i^2=-1$

الأعداد التخيلية:

- لأي عدد حقيقي موجب m،

$\sqrt{-m}=\sqrt{m}\,i$

- تسمى الأعداد التي على الصورة bi حيث $b\in\mathbb{R}^*$ أعدادًا تخيلية.

مجموعة الجذور التربيعية الموجبة والسالبة للأعداد الحقيقية السالبة تكوّن مجموعة الأعداد التخيلية.

سوف تتعلم

- الوحدة التخيلية.
- الصورة الجبرية للعدد المركب.
- مرافق العدد المركب.
- العمليات على الأعداد المركبة.

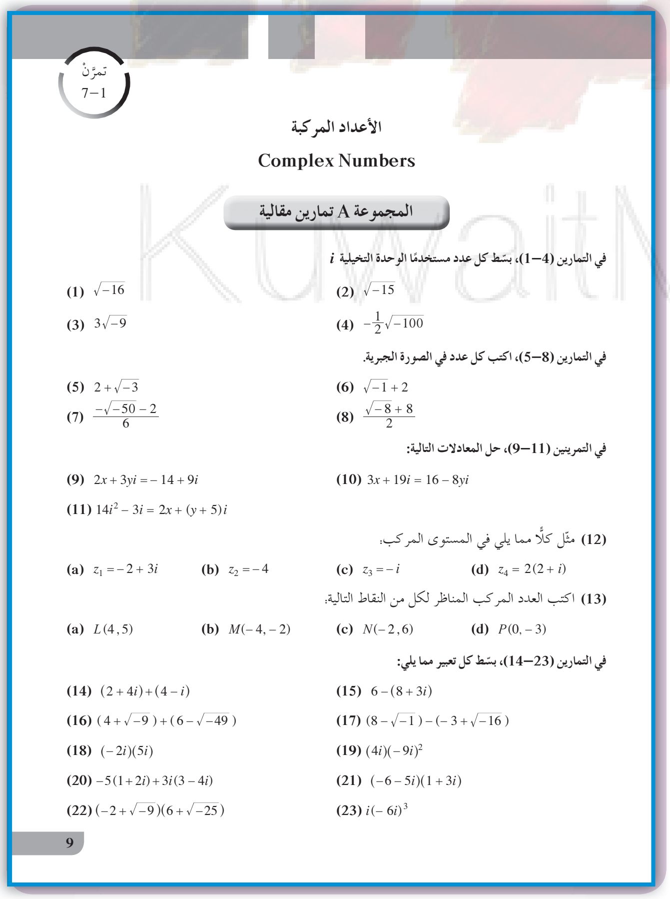
المفردات والمصطلحات:

- الوحدة التخيلية The Imaginary Unit
- العدد المركب The Complex Number
- جزء حقيقي Real Part
- جزء تخيلي Imaginary Part
- الصورة الجبرية The Algebraic Form
- مرافق العدد Conjugate Number
- العمليات على الأعداد المركبة The Operations on the Complex Numbers
- قوى العدد المركب Powers of a Complex Number

معلومة رياضية:

يستخدم أيضًا الحرف الأبجدي ت للتعبير عن الوحدة التخيلية i.

12



تمرَّنْ 7–1

الأعداد المركبة

Complex Numbers

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4–1)، بسّط كل عدد مستخدمًا الوحدة التخيلية i

(1) $\sqrt{-16}$ **(2)** $\sqrt{-15}$

(3) $3\sqrt{-9}$ **(4)** $-\frac{1}{2}\sqrt{-100}$

في التمارين (8–5)، اكتب كل عدد في الصورة الجبرية.

(5) $2+\sqrt{-3}$ **(6)** $\sqrt{-1}+2$

(7) $\frac{-\sqrt{-50}-2}{6}$ **(8)** $\frac{\sqrt{-8}+8}{2}$

في التمرينين (11–9)، حل المعادلات التالية:

(9) $2x+3yi=-14+9i$ **(10)** $3x+19i=16-8yi$

(11) $14i^2-3i=2x+(y+5)i$

(12) مثّل كلًّا مما يلي في المستوى المركب:

(a) $z_1=-2+3i$ **(b)** $z_2=-4$ **(c)** $z_3=-i$ **(d)** $z_4=2(2+i)$

(13) اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط التالية:

(a) $L(4,5)$ **(b)** $M(-4,-2)$ **(c)** $N(-2,6)$ **(d)** $P(0,-3)$

في التمارين (23–14)، بسّط كل تعبير مما يلي:

(14) $(2+4i)+(4-i)$ **(15)** $6-(8+3i)$

(16) $(4+\sqrt{-9})+(6-\sqrt{-49})$ **(17)** $(8-\sqrt{-1})-(-3+\sqrt{-16})$

(18) $(-2i)(5i)$ **(19)** $(4i)(-9i)^2$

(20) $-5(1+2i)+3i(3-4i)$ **(21)** $(-6-5i)(1+3i)$

(22) $(-2+\sqrt{-9})(6+\sqrt{-25})$ **(23)** $i(-6i)^3$

9

5 التدريس

يعتبر بناء مجموعة الأعداد المركبة والعمليات عليها المرحلة الأخيرة للتعرف على الأعداد، بحيث إن الطالب بدأ هذه المرحلة منذ دخوله إلى المدرسة، فكانت أولًا الأعداد الكلية والعمليات عليها، ثم الكسور والكسور العشرية والأعداد الكسرية. تتبعها الأعداد الصحيحة، تليها الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية وصولًا إلى الأعداد الحقيقية.

لذا، يستحسن التعامل بروية مع الأعداد المركبة، لأن الطالب سوف يبني مفاهيم ومهارات لها مكتسبات في كل ما سبق ولكن في تركيبة مختلفة عن الأعداد التي سبق أن رآها.

والخطوة الأولى التي سوف يقف فيها الطالب متسائلًا، هي استيعاب فكرة أن مربع العدد i هو عدد سالب أي $i^2 = -1$، فهو، على فترة سنوات عديدة، تعلّم أن مربع أي عدد مهما كان موجبًا أم سالبًا سوف يكون دائمًا موجبًا، فكيف سيتقبل فكرة $i^2 = -1$، وبالتالي $i = \sqrt{-1}$.

يعتبر المثال (1) تطبيقًا مباشرًا لهذه الفكرة.

أخبر الطلاب أنهم سوف يعتادون شيئًا فشيئًا على هذا المدخل في تكوين الأعداد المركبة، وأنهم في مراحل لاحقة سوف يتفهمون جيّدًا دور هذا العدد التخيلي وتمثيله على المستوى الإحداثي المركب.

ركّز أفكار الطلاب على الصورة الجبرية للعدد المركب وهي بصفة عامة: $z = a + bi$، وبالتالي تصبح كل الأعداد التي تعلمها الطالب جزءًا من الأعداد المركبة.

في المثال (2)

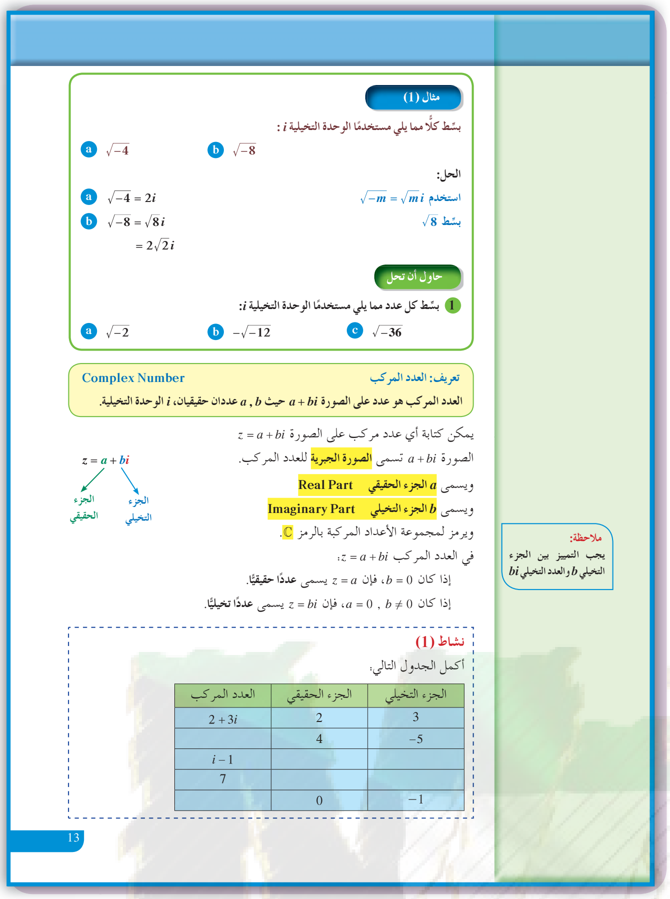
تركيز على فكرة الصورة الجبرية للعدد المركب.

في المثال (3)

تطبيق مباشر لِ «تساوي عددين مركبين». في (c) أشر إلى أن العدد 1 يكتب على الصورة $1 + 0i$

في المثالين (5) ,(4)

يجب على المعلم التشديد على العلاقة بين صورة العدد المركب الجبرية وصورته الديكارتية، مما يوفّر للطلاب وضوحًا في الانتقال من الجزء الحقيقي والجزء التخيلي إلى الإحداثي السيني والإحداثي الصادي وبالعكس.



مثال (1)

بسّط كلًّا مما يلي مستخدمًا الوحدة التخيلية i:

a $\sqrt{-4}$ b $\sqrt{-8}$

الحل:

a $\sqrt{-4} = 2i$

b $\sqrt{-8} = \sqrt{8}\,i$ بسّط $\sqrt{8}$

$= 2\sqrt{2}\,i$

استخدم $\sqrt{-m} = \sqrt{m}\,i$

حاول أن تحل

1 بسّط كل عدد مما يلي مستخدمًا الوحدة التخيلية i:

a $\sqrt{-2}$ b $-\sqrt{-12}$ c $\sqrt{-36}$

تعريف: العدد المركب Complex Number

العدد المركب هو عدد على الصورة $a + bi$ حيث a , b عددان حقيقيان، i الوحدة التخيلية.

يمكن كتابة أي عدد مركب على الصورة $z = a + bi$

الصورة $a + bi$ تسمى **الصورة الجبرية** للعدد المركب.

ويسمى a **الجزء الحقيقي Real Part**

ويسمى b **الجزء التخيلي Imaginary Part**

ويرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$.

$z = a + bi$

الجزء الحقيقي — الجزء التخيلي

في العدد المركب $z = a + bi$:

إذا كان $b = 0$، فإن $z = a$ يسمى **عددًا حقيقيًّا**.

إذا كان $b \neq 0 , a = 0$، فإن $z = bi$ يسمى **عددًا تخيليًّا**.

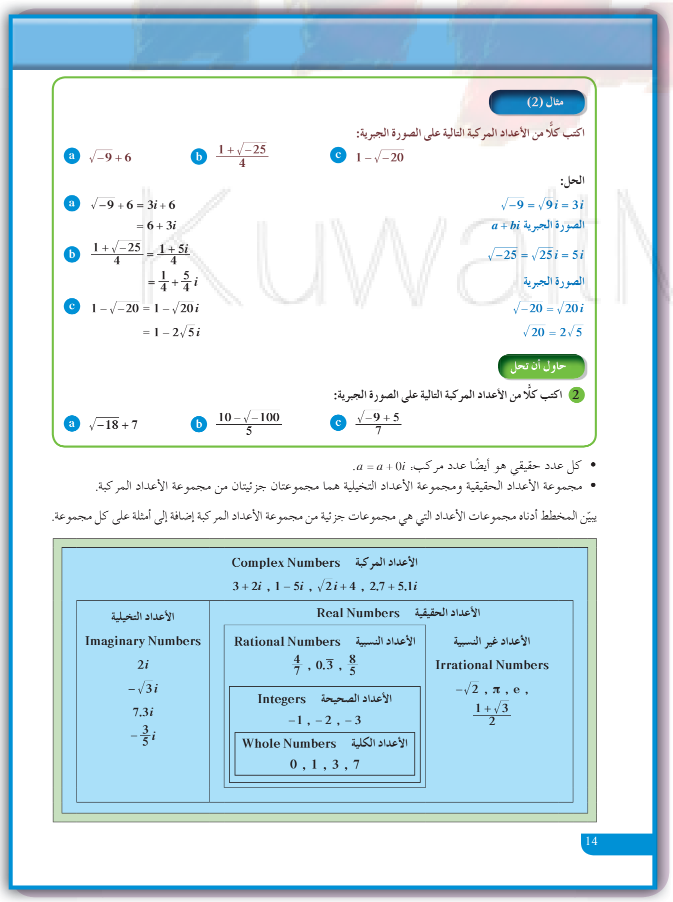
ملاحظة: يجب التمييز بين الجزء التخيلي b والعدد التخيلي bi

نشاط (1)

أكمل الجدول التالي:

العدد المركب	الجزء الحقيقي	الجزء التخيلي
$2 + 3i$	2	3
	4	-5
$i - 1$		
7		
	0	-1

13



مثال (2)

اكتب كلًّا من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية:

a $\sqrt{-9} + 6$ b $\frac{1 + \sqrt{-25}}{4}$ c $1 - \sqrt{-20}$

الحل:

a $\sqrt{-9} + 6 = 3i + 6$ $\sqrt{-9} = \sqrt{9}\,i = 3i$

$= 6 + 3i$ الصورة الجبرية $a + bi$

b $\frac{1 + \sqrt{-25}}{4} = \frac{1 + 5i}{4}$ $\sqrt{-25} = \sqrt{25}\,i = 5i$

$= \frac{1}{4} + \frac{5}{4}i$ الصورة الجبرية

c $1 - \sqrt{-20} = 1 - \sqrt{20}\,i$ $\sqrt{-20} = \sqrt{20}\,i$

$= 1 - 2\sqrt{5}\,i$ $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

حاول أن تحل

2 اكتب كلًّا من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية:

a $\sqrt{-18} + 7$ b $\frac{10 - \sqrt{-100}}{5}$ c $\frac{\sqrt{-9} + 5}{7}$

- كل عدد حقيقي هو أيضًا عدد مركب: $a = a + 0i$.
- مجموعة الأعداد الحقيقية ومجموعة الأعداد التخيلية هما مجموعتان جزئيتان من مجموعة الأعداد المركبة.

يبيّن المخطط أدناه مجموعات الأعداد التي هي مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد المركبة إضافة إلى أمثلة على كل مجموعة.

الأعداد المركبة Complex Numbers

$3 + 2i \ , \ 1 - 5i \ , \ \sqrt{2}\,i + 4 \ , \ 2.7 + 5.1i$

الأعداد الحقيقية Real Numbers

الأعداد النسبية Rational Numbers

$\frac{4}{7} \ , \ 0.\overline{3} \ , \ \frac{8}{5}$

الأعداد الصحيحة Integers

$-1 \ , \ -2 \ , \ -3$

الأعداد الكلية Whole Numbers

$0 \ , \ 1 \ , \ 3 \ , \ 7$

الأعداد غير النسبية Irrational Numbers

$-\sqrt{2} \ , \ \pi \ , \ e \ , \ \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

الأعداد التخيلية Imaginary Numbers

$2i$

$-\sqrt{3}\,i$

$7.3i$

$-\frac{3}{5}i$

14

في المثال (6)

أكّد للطلاب أنه، في عمليتي جمع الأعداد المركبة أو طرحها، يتم التعامل مع الأجزاء الحقيقية معًا، ثم مع الأجزاء التخيلية تمامًا كما في عملية جمع المتجهات.

أشر إلى أنه يمكن تحويل عمليات الطرح إلى عمليات جمع. فمثلًا في «حاول أن تحل» تكتب $z_1 - z_2 - z_3$
$z_1 + (-z_2) + (-z_3)$

في المثالين (7), (8)

شدّد على عملية ضرب الأعداد المركبة. وإذا دعت الحاجة، راجع مع الطلاب العمليات على كثيرات الحدود.
ركّز على إمكانية التخلص دائمًا من i^2، حيث $i^2 = -1$

في المثال (9)

أكّد للطلاب أن قوى العدد المركب عملية بسيطة تستخدم فيها خاصية الضرب التي سبق أن تعاملوا معها في كثيرات الحدود.

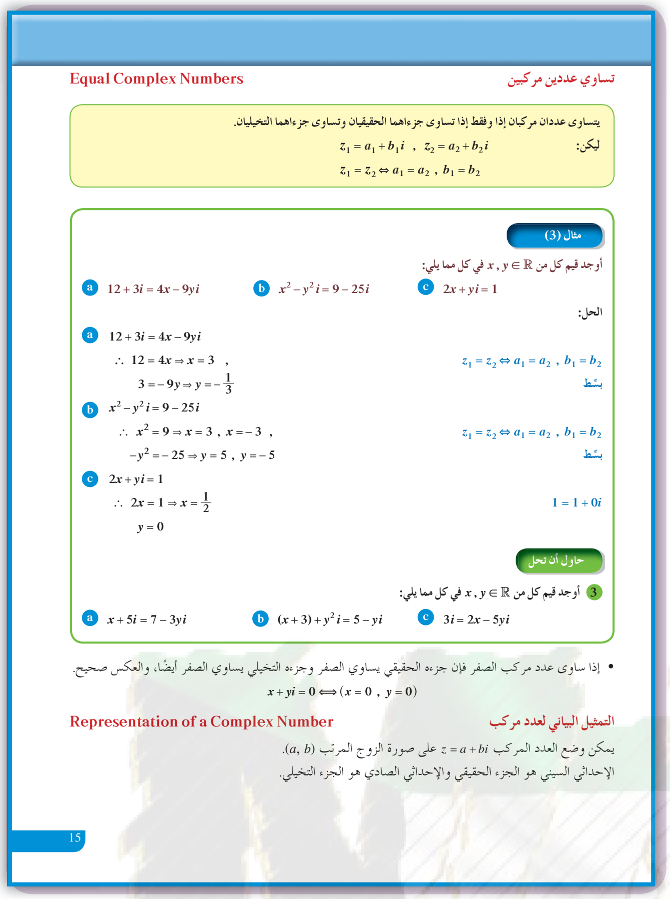
في المثالين (10), (11)

ركّز مع الطلاب على أهمية العدد المرافق التي تكمن في أنه يساعد في كتابة كسر بسطه ومقامه عددان مركبان، بحيث يصبح مقامه عددًا حقيقيًّا. راجع مع الطلاب خواص المرافق.

في المثالين (12), (13)

شدّد على أهمية ضرب بسط ومقام الكسر المركب في مرافق مقام هذا العدد المركب، للحصول على عدد مركب مقامه عدد حقيقي. نبّه الطلاب إلى أن $(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$ وليس $a^2 - b^2$.

أشر إلى أن ناتج الضرب هو في الحقيقة $a^2 - i^2b^2$ ولكن بالتعويض عن i^2 بـ -1 نحصل على $a^2 + b^2$.



تساوي عددين مركبين Equal Complex Numbers

يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا تساوى جزءاهما الحقيقيان وتساوى جزءاهما التخيليان.

ليكن: $z_1 = a_1 + b_1 i \ , \ z_2 = a_2 + b_2 i$

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \ , \ b_1 = b_2$

مثال (3)

أوجد قيم كل من $x , y \in \mathbb{R}$ في كل مما يلي:

a $12 + 3i = 4x - 9yi$ b $x^2 - y^2 i = 9 - 25i$ c $2x + yi = 1$

الحل:

a $12 + 3i = 4x - 9yi$
$\therefore \ 12 = 4x \Rightarrow x = 3 \ ,$ $\quad z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \ , \ b_1 = b_2$
$3 = -9y \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$ بسّط

b $x^2 - y^2 i = 9 - 25i$
$\therefore \ x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \ , \ x = -3 \ ,$ $\quad z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \ , \ b_1 = b_2$
$-y^2 = -25 \Rightarrow y = 5 \ , \ y = -5$ بسّط

c $2x + yi = 1$
$\therefore \ 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ $\quad 1 = 1 + 0i$
$y = 0$

حاول أن تحل

3 أوجد قيم كل من $x , y \in \mathbb{R}$ في كل مما يلي:

a $x + 5i = 7 - 3yi$ b $(x+3) + y^2 i = 5 - yi$ c $3i = 2x - 5yi$

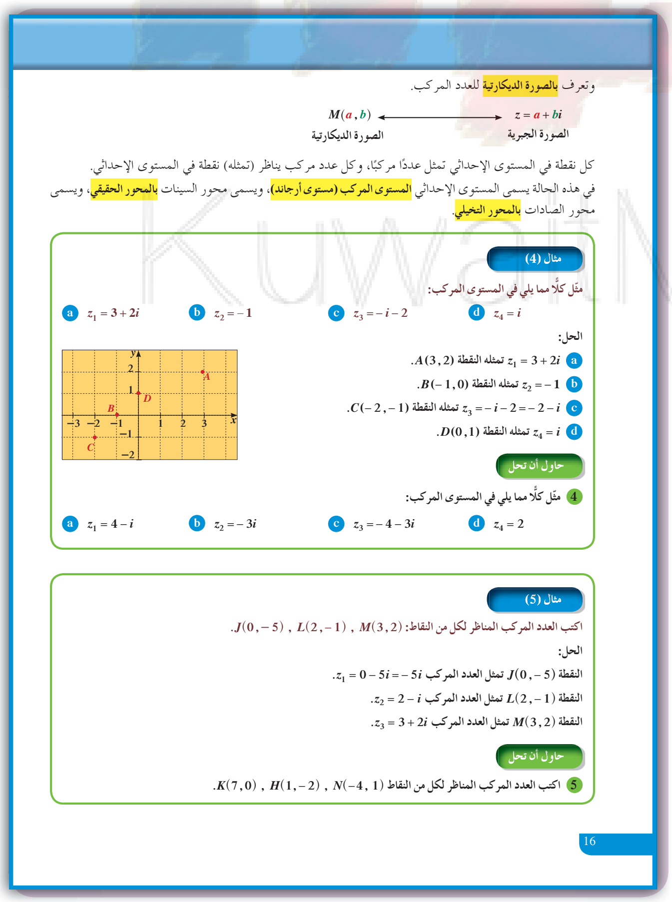
• إذا ساوى عدد مركب الصفر فإن جزءه الحقيقي يساوي الصفر وجزءه التخيلي يساوي الصفر أيضًا، والعكس صحيح.

$x + yi = 0 \Longleftrightarrow (x = 0 \ , \ y = 0)$

التمثيل البياني لعدد مركب Representation of a Complex Number

يمكن وضع العدد المركب $z = a + bi$ على صورة الزوج المرتب (a, b).
الإحداثي السيني هو الجزء الحقيقي والإحداثي الصادي هو الجزء التخيلي.

15



وتعرف **بالصورة الديكارتية** للعدد المركب.

$z = a + bi \longleftrightarrow M(a , b)$
الصورة الجبرية الصورة الديكارتية

كل نقطة في المستوى الإحداثي تمثل عددًا مركبًا، وكل عدد مركب يناظر (تمثله) نقطة في المستوى الإحداثي.
في هذه الحالة يسمى المستوى الإحداثي **المستوى المركب (مستوى أرجاند)**، ويسمى محور السينات **بالمحور الحقيقي**، ويسمى محور الصادات **بالمحور التخيلي**.

مثال (4)

مثّل كلًّا مما يلي في المستوى المركب:

a $z_1 = 3 + 2i$ b $z_2 = -1$ c $z_3 = -i - 2$ d $z_4 = i$

الحل:

a $z_1 = 3 + 2i$ تمثله النقطة $A(3 , 2)$.
b $z_2 = -1$ تمثله النقطة $B(-1 , 0)$.
c $z_3 = -i - 2 = -2 - i$ تمثله النقطة $C(-2 , -1)$.
d $z_4 = i$ تمثله النقطة $D(0 , 1)$.

حاول أن تحل

4 مثّل كلًّا مما يلي في المستوى المركب:

a $z_1 = 4 - i$ b $z_2 = -3i$ c $z_3 = -4 - 3i$ d $z_4 = 2$

مثال (5)

اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط: $M(3 , 2) \ , \ L(2 , -1) \ , \ J(0 , -5)$.

الحل:

النقطة $J(0 , -5)$ تمثل العدد المركب $z_1 = 0 - 5i = -5i$.
النقطة $L(2 , -1)$ تمثل العدد المركب $z_2 = 2 - i$.
النقطة $M(3 , 2)$ تمثل العدد المركب $z_3 = 3 + 2i$.

حاول أن تحل

5 اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط $N(-4 , 1) \ , \ H(1 , -2) \ , \ K(7 , 0)$.

16

6 الربط

يمكن لقوى بعض الأعداد المركبة أن تشكل أنماطًا عند جمع مربع الجزء الحقيقي إلى مربع الجزء التخيلي.

فمثلًا إذا أخذنا: $z = 1 + i\sqrt{3}$ وأوجدنا z^2، z^3، z^4، z^5، ...

فسوف نستكشف نمطًا كما يلي:

$$z = 1 + i\sqrt{3} \to 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$z^2 = -2 + 2i\sqrt{3} \to (-2)^2 + (2\sqrt{3})^2 = 16 = 2^4$$

$$z^3 = -8 \to (-8)^2 = 64 = 2^6$$

$$z^4 = -8 - 8\sqrt{3}\,i \to (-8)^2 + (-8\sqrt{3})^2 = 256 = 2^8$$

$$z^5 = 16 - 16\sqrt{3}\,i \to (16)^2 + (-16\sqrt{3})^2 = 1024 = 2^{10}$$

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب عند الضرب في مرافق مقام العدد المركب، فيكتبون الناتج على الصورة $a^2 - b^2$. ذكّرهم بضرورة التعويض دائمًا عن i^2 بـ -1

8 التقييم

توفر فقرات «حاول أن تحل» الفرصة المناسبة أمام المعلم ليتأكّد من حسن أداء الطلاب في مهارات هذا الدرس ومفاهيمه.

اختبار سريع

1 أوجد ناتج ما يلي:

$(2 - 3i)(3 + 5i)$ $\quad 21 + i$

2 إذا كان $z = 1 - i$، فأوجد z^4 , z^2

$z^2 = -2i$, $z^4 = -4$

3 اكتب الكسر التالي في الصورة الجبرية:

$\dfrac{2 + 3i}{4 - 5i}$ $\quad \dfrac{-7}{41} + \dfrac{22}{41}i$

العمليات على مجموعة الأعداد المركبة Operations with Complex Numbers

أولًا: جمع وطرح الأعداد المركبة Adding and Subtracting Complex Numbers

لجمع عددين مركبين نجمع جزءيهما الحقيقيين معًا ونجمع جزأيهما التخيليين معًا.

كذلك لطرح عددين مركبين نطرح الجزءين الحقيقيين ونطرح الجزءين التخيليين كالتالي:

إذا كان $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ عددين مركبين فإن:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

خواص عملية الجمع على الأعداد الحقيقية تستمر مع عملية الجمع على الأعداد المركبة كما يلي:

الخاصية	$\forall\ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
الإبدالية	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
التجميعية	$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

مثال (6)

إذا كان: $z_3 = 2i$, $z_2 = 4 - 7i$, $z_1 = 2 + 3i$ فأوجد:

a $z_1 + z_2$ b $z_1 - z_2$ c $z_3 + z_2 + z_1$

الحل:

a $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (4 - 7i)$ $\qquad z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

$= (2 + 4) + (3 - 7)i$ $\qquad$ بسّط

$= 6 - 4i$

b $z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (4 - 7i)$ $\qquad z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

$= (2 - 4) + (3 - (-7))i$ $\qquad$ بسّط

$= -2 + 10i$

c $z_3 + z_2 + z_1 = z_3 + (z_2 + z_1)$ $\qquad$ الخاصية التجميعية

$= z_3 + (z_1 + z_2)$ $\qquad$ الخاصية الإبدالية

$= 2i + 6 - 4i$

$= 6 - 2i$

حاول أن تحل

6 إذا كان $z_3 = -0.3i$, $z_2 = 3.4 - 1.2i$, $z_1 = -2 + 5i$ فأوجد:

a $z_1 + z_2$ b $z_2 - z_1$ c $z_3 - z_2 - z_1$

17

ملاحظات:

- الصفر هو العنصر المحايد لعملية الجمع على مجموعة الأعداد المركبة ($0 = 0 + 0i$).
- المعكوس الجمعي للعدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $-z = -a - bi$

  مثلًا: إذا كان $z = 2 + 5i$ فإن $-z = -2 - 5i$
- إذا كان مجموع عددين مركبين يساوي صفرًا فإن كلًّا منهما معكوس جمعي للآخر والعكس صحيح.

  أي أن: $z_1 + z_2 = 0 \Longleftrightarrow z_1 = -z_2$
- لإيجاد ناتج طرح: $z_1 - z_2$ يمكن إضافة المعكوس الجمعي لِـ z_2 إلى z_1 أي $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

ثانيًا: ضرب الأعداد المركبة Multiplying Complex Numbers

ويمكن استخدام قاعدة الضرب التالية:

إذا كان z_1 , $z_2 \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{R}$

حيث $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ فإن:

1 $c z_1 = c a_1 + c b_1 i$

2 $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

البرهان:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2(-1) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i \end{aligned}$$

خواص عملية الضرب على مجموعة الأعداد المركبة:

الخاصية	$\forall\ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
الإبدالية	$z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$
التجميعية	$z_1 \times (z_2 \times z_3) = (z_1 \times z_2) \times z_3$
التوزيعية	$z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3$ $z_1 \times (z_2 - z_3) = z_1 \times z_2 - z_1 \times z_3$

العدد 1 هو العنصر المحايد لعملية ضرب الأعداد المركبة ($1 = 1 + 0i$)

لضرب عددين مركبين يمكن:

استخدام الخواص أعلاه وحقيقة $i^2 = -1$ والخطوات نفسها التي تستخدم في عملية ضرب كثيرات الحدود.

18

9 إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

1 (a) $i\sqrt{2}$

(b) $-2i\sqrt{3}$

(c) $6i$

2 (a) $7+3i\sqrt{2}$

(b) $2-2i$

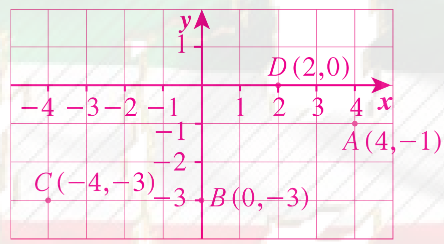
(c) $\frac{5}{7}+\frac{3}{7}i$

3 (a) $x=7\ ,\ y=\frac{-5}{3}$

(b) $x=2\ ,\ y=0$ أو $y=-1$

(c) $x=0\ ,\ y=\frac{-3}{5}$

4



5 النقطة $K(7,\ 0)$ تمثل العدد المركب $z_1=7$

النقطة $H(1,\ -2)$ تمثل العدد المركب $z_2=1-2i$

النقطة $N(-4,\ 1)$ تمثل العدد المركب $z_3=-4+i$

6 (a) $1.4+3.8i$

(b) $5.4-6.2i$

(c) $z_3+(-z_2)+(-z_1)$

$= -0.3i + (-3.4 + 1.2i) + (2 - 5i)$

$= -1.4 - 4.1i$

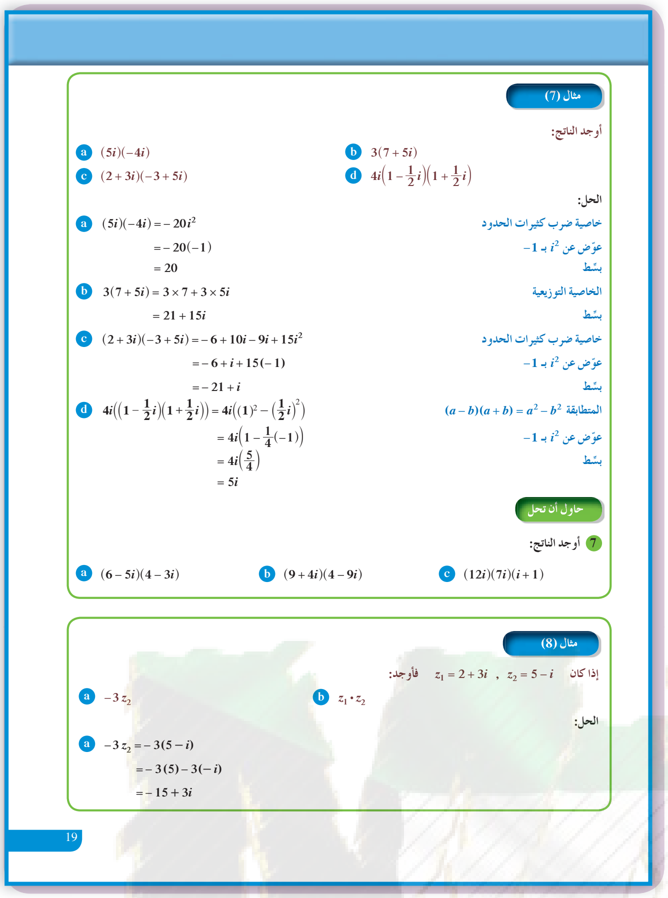
7 (a) $9 - 38i$

(b) $72 - 65i$

(c) $-84 - 84i$

8 (a) $1-\frac{3}{2}i$

(b) $14 + 5i$


مثال (7)

أوجد الناتج:

a $(5i)(-4i)$ b $3(7+5i)$

c $(2+3i)(-3+5i)$ d $4i\left(1-\frac{1}{2}i\right)\left(1+\frac{1}{2}i\right)$

الحل:

a $(5i)(-4i)=-20i^2$ خاصية ضرب كثيرات الحدود

$=-20(-1)$ عوّض عن i^2 بـ -1

$=20$ بسّط

b $3(7+5i)=3\times 7+3\times 5i$ الخاصية التوزيعية

$=21+15i$ بسّط

c $(2+3i)(-3+5i)=-6+10i-9i+15i^2$ خاصية ضرب كثيرات الحدود

$=-6+i+15(-1)$ عوّض عن i^2 بـ -1

$=-21+i$ بسّط

d $4i\left(\left(1-\frac{1}{2}i\right)\left(1+\frac{1}{2}i\right)\right)=4i\left((1)^2-\left(\frac{1}{2}i\right)^2\right)$ المتطابقة $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$=4i\left(1-\frac{1}{4}(-1)\right)$ عوّض عن i^2 بـ -1

$=4i\left(\frac{5}{4}\right)$ بسّط

$=5i$

حاول أن تحل

7 أوجد الناتج:

a $(6-5i)(4-3i)$ b $(9+4i)(4-9i)$ c $(12i)(7i)(i+1)$

مثال (8)

إذا كان $z_1=2+3i\ ,\ z_2=5-i$ فأوجد:

a $-3z_2$ b $z_1\cdot z_2$

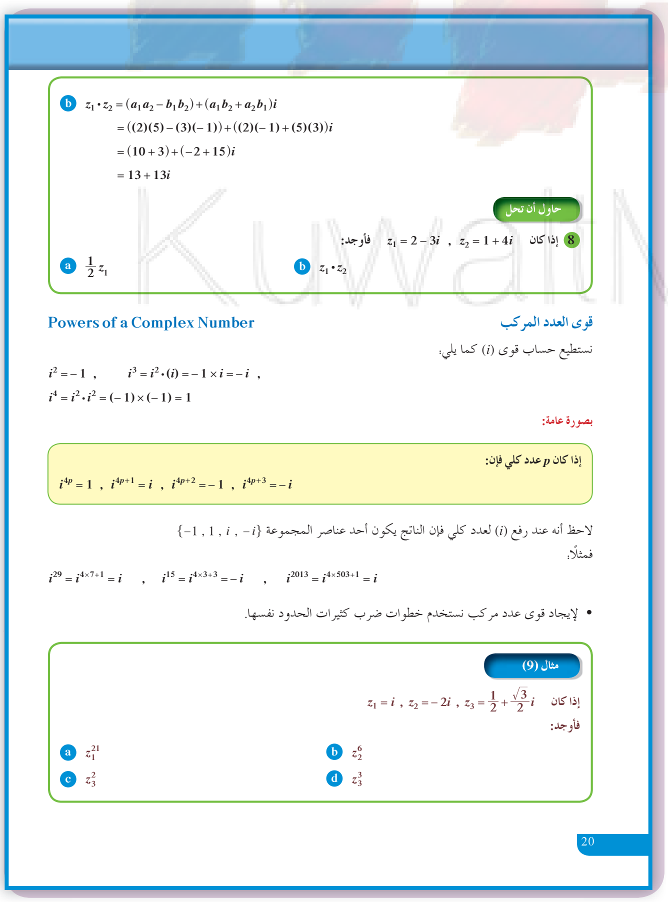
الحل:

a $-3z_2=-3(5-i)$

$=-3(5)-3(-i)$

$=-15+3i$

19


b $z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$

$=((2)(5)-(3)(-1))+((2)(-1)+(5)(3))i$

$=(10+3)+(-2+15)i$

$=13+13i$

حاول أن تحل

8 إذا كان $z_1=2-3i\ ,\ z_2=1+4i$ فأوجد:

a $\frac{1}{2}z_1$ b $z_1\cdot z_2$

قوى العدد المركب Powers of a Complex Number

نستطيع حساب قوى (i) كما يلي:

$i^2=-1\ ,\quad i^3=i^2\cdot(i)=-1\times i=-i\ ,$

$i^4=i^2\cdot i^2=(-1)\times(-1)=1$

بصورة عامة:

إذا كان p عدد كلي فإن:

$i^{4p}=1\ ,\ i^{4p+1}=i\ ,\ i^{4p+2}=-1\ ,\ i^{4p+3}=-i$

لاحظ أنه عند رفع (i) لعدد كلي فإن الناتج يكون أحد عناصر المجموعة $\{-1\ ,1\ ,i\ ,-i\}$

فمثلًا:

$i^{29}=i^{4\times 7+1}=i\quad ,\quad i^{15}=i^{4\times 3+3}=-i\quad ,\quad i^{2013}=i^{4\times 503+1}=i$

- لإيجاد قوى عدد مركب نستخدم خطوات ضرب كثيرات الحدود نفسها.

مثال (9)

إذا كان $z_1=i\ ,\ z_2=-2i\ ,\ z_3=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

فأوجد:

a z_1^{21} b z_2^{6}

c z_3^{2} d z_3^{3}

20

9 (a) $5(i^4)^{18} \times i = 5i$

(b) i

(c) -1

10 (a) $5+2i$ (b) $-1+12i$

(c) $41+11i$ (d) $41+11i$

11 (a) $\frac{-7}{58}+\frac{3}{58}i$

(b) $\frac{5}{146}-\frac{11}{146}i$

(c) $-\frac{1}{6}i$

12 $\frac{1}{5}+\frac{8}{5}i$

13 (a) $\frac{11}{29}-\frac{13}{29}i$

(b) $\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$

(c) $\frac{7}{13}-\frac{17}{13}i$

الحل:

(a) $z_1^{21} = i^{21} = i^{4\times5+1} = i$

(b) $z_2^6 = (-2i)^6 = (-2)^6 \times i^6$

$= 64 \times i^{4+2} = 64 \times i^2 = 64 \times (-1) = -64$

(c) $z_3^2 = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$

$= \frac{1}{4} + 2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2$ $\quad (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4}$ $\quad$ بسّط $(i^2=-1)$

$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(d) $z_3^3 = z_3^2 \cdot z_3$

$= \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ $\quad$ عوّض عن z_3^2 بـ: $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$= -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{4}i + \frac{3}{4}i^2$

$= -\frac{1}{4} + 0 + \frac{3}{4}(-1)$

$= -1$

حاول أن تحل

9 أوجد:

(a) $5(i)^{73}$ (b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^3$ (c) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^4$

ثالثًا: قسمة الأعداد المركبة Dividing Complex Numbers

مرافق العدد المركب Complex Conjugate

ناتج ضرب العددين المركبين $a+bi$, $a-bi$ غير الصفريين هو عدد حقيقي موجب:

$$(a+bi)\cdot(a-bi) = a^2-(bi)^2 = a^2+b^2$$

للاستفادة من هذه العلاقة الخاصة نعرض ما يلي:

مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب $z = a+bi$ هو العدد المركب $\bar{z} = \overline{a+bi} = a-bi$

فمثلًا: مرافق العدد $2+3i$ هو $2-3i$

والعدد $\overline{-7i+2}$ هو $2+7i$

ملاحظة: لإيجاد المرافق $(\bar{z})$ يجب أن يكون z على الصورة الجبرية $z=a+bi$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$.

معلومة:
إذا كان $z = a$ عدد حقيقي
فإن $\bar{z} = z = a$

خواص مرافق العدد المركب:

إذا كان $z_1 = a_1+b_1i$, $z_2 = a_2+b_2i$

فإن:

- $z_1+\overline{z_1} = 2a_1$
- $z_1-\overline{z_1} = 2bi$
- $z_1\cdot\overline{z_1} = a_1^2+b_1^2$
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
- $\overline{(\overline{z_1})} = z_1$

مثال (10)

إذا كان $z_1 = 3+4i$, $z_2 = 5-2i$ فأوجد:

(a) $z_1+\overline{z_1}$ (b) $z_1-\overline{z_1}$ (c) $\overline{(\overline{z_1})}$

(d) $\overline{z_1+z_2}$ (e) $\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ (f) $\overline{z_1\cdot z_2}$

الحل:

نوجد كل من: $\overline{z}_1 = 3-4i$, $\overline{z}_2 = 5+2i$

(a) $z_1+\overline{z_1} = 3+4i+3-4i = 6$

(b) $z_1-\overline{z_1} = 3+4i-(3-4i) = 8i$

(c) $\overline{(\overline{z_1})} = \overline{(\overline{3+4i})} = \overline{3-4i} = 3+4i$

(d) $\overline{z_1+z_2} = \overline{(3+4i)+(5-2i)} = \overline{3+4i+5-2i}$

$= \overline{8+2i} = 8-2i$

(e) $\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} = \overline{3+4i}\cdot\overline{5-2i}$

$= (3-4i)(5+2i)$

$= 15+6i-20i+8$

$= 23-14i$

(f) $\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{(3+4i)(5-2i)}$

$= \overline{15-6i+20i+8}$

$= \overline{23+14i}$

$= 23-14i$

حاول أن تحل

10 إذا كان $z_1 = 2-7i$, $z_2 = 3+5i$ فأوجد:

(a) $\overline{z_1}+\overline{z_2}$ (b) $\overline{z_1-z_2}$ (d) $\overline{z_1\cdot z_2}$ (e) $\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

تدريب: استخدم خواص المرافق أعلاه في حل المثال (10) السابق.

(24) إذا كان $z = \frac{1-i}{1+i}$ فأوجد: z^{27} , z^{12}

(25) إذا كان $z_2 = -3+4i$, $z_1 = 2+i$ فأوجد:

(a) $-\frac{1}{3}z_2$ (b) $z_1 . z_2$ (c) z_1^3 (d) $\overline{\overline{z}_1 . z_2}$

(e) $\overline{z}_1-\overline{z}_2$ (f) $z_1 . \overline{z}_2$

(26) إذا كان $z = \frac{4i}{1-i\sqrt{3}}$ فأوجد: $\bar{z}$

(27) أوجد المعكوس الضربي لكل مما يلي:

(a) $-3-2i$ (b) $5i$ (c) $3i-4$

(28) إذا كان $z_2 = -\sqrt{3}+2i$, $z_1 = \sqrt{3}+i$ فأوجد: $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$, $\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $\frac{\overline{z_1}}{z_2}$

(29) **تفكير ناقد:** أوجد العلاقة بين x , y عندما يكون $(x+yi)^2$ عددًا تخيّليًا.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الصورة الجبرية للعدد: $3+\sqrt{-4}$ هي: $3+2i$ (a) (b)

(2) مرافق العدد المركب: $z = 3+4i$ هو: $\bar{z} = -3-4i$ (a) (b)

(3) المعكوس الجمعي للعدد المركب $z = 3-2i$ هو: $-z = 3+2i$ (a) (b)

(4) الصورة المبسّطة للتعبير: $(12+5i)-(2-i)$ هي: $10+6i$ (a) (b)

«نشاط 1»

الجزء التخيلي	الجزء الحقيقي	العدد المركب
3	2	$2+3i$
-5	4	$4-5i$
1	-1	$i-1$
0	7	7
-1	0	$-i$

المعكوس الضربي لعدد مركب غير صفري $z=a+bi$ يرمز له بالرمز z^{-1}:

ويكون: $z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}\times\frac{a-bi}{a-bi}$

$$z^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

مثال (11)

أوجد المعكوس الضربي لكل من:

a $z_1=3-5i$ b $z_2=2i-1$ c $z_3=-7i$

الحل:

a اضرب البسط والمقام في مرافق z_1

$$z_1^{-1}=\frac{1}{3-5i}\times\frac{3+5i}{3+5i}=\frac{3}{9+25}+\frac{5}{9+25}i=\frac{3}{34}+\frac{5}{34}i$$

b اكتب المقام في الصورة الجبرية

$$z_2^{-1}=\frac{1}{2i-1}=\frac{1}{-1+2i}=\frac{1}{-1+2i}\times\frac{-1-2i}{-1-2i}=\frac{-1}{1+4}-\frac{2}{1+4}i=\frac{-1}{5}-\frac{2}{5}i$$

c

$$z_3^{-1}=\frac{1}{-7i}=\frac{1}{-7i}\times\frac{i}{i}=\frac{i}{-7\times(-1)}=\frac{i}{7}=\frac{1}{7}i$$

حاول أن تحل

11 أوجد المعكوس الضربي لكل من:

a $z_1=-3i-7$ b $z_2=5+11i$ c $z_3=6i$

ملاحظة: يمكنك التحقق من أن: $z^{-1}=\frac{\bar{z}}{a^2+b^2}$

لقسمة عدد مركب z_1 على عدد مركب آخر غير صفري z_2، نكتبهما على شكل كسر على الصورة $\frac{z_1}{z_2}$، نبسط الكسر بضرب كلّ من البسط والمقام في مرافق المقام.

23

«تدريب»

(c) $\overline{(\overline{z_1})}=z_1=3+4i$

(d) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}=3-4i+5+2i=8-2i$

(f) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(3-4i)(5+2i)$

$=15+6i-20i-8i^2 \quad (i^2=-1)$

$=23-14i$

في التمارين (14–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) العدد: $32+\sqrt{-225}$ يكتب بالصورة الجبرية كما يلي:

a $-15+6i$ b $6+15i$ c $6-15i$ d $32+15i$

(6) حل المعادلة: $-10-6i=2x+3yi$ هو:

a $x=5\ ,\ y=-2$ b $x=-5\ ,\ y=-2$ c $x=-5\ ,\ y=2$ d $x=5\ ,\ y=2$

(7) إذا كان $z_1=5i+2$ ، $z_2=-3-i$ فإنّ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ تساوي:

a $\frac{1}{10}+\frac{17}{10}i$ b $\frac{-1}{10}-\frac{17}{10}i$ c $\frac{-1}{10}+\frac{17}{10}i$ d $\frac{1}{10}-\frac{17}{10}i$

(8) إذا كان: $x i^2+3yi=5+3i^5$ فإن $(x\ ,\ y)$ تساوي

a $(5,\ 1)$ b $(-5,\ -1)$ c $(5,\ -1)$ d $(-5,\ 1)$

(9) أبسط صورة للتعبير: $(3+\sqrt{-4})(4+\sqrt{-9})$ هي:

a $18+17i$ b $18+3\sqrt{-9}+4\sqrt{-4}$ c $6+17i$ d 18

(10) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=(1+2i)^2$ هي:

a $z=-3+4i$ b $z=5+4i$ c $z=-3$ d $z=5$

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=(2-i)^3$ هي:

a $z=14+13i$ b $z=14-13i$ c $z=2-11i$ d $z=2-13i$

(12) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=\frac{i}{i+2}$ هي:

a $z=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$ b $z=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$ c $z=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$ d $z=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$

(13) إذا كان $z=i$ فإنّ z^{250} يساوي:

a $-i$ b i c 1 d -1

(14) ليكن $x\in\mathbb{Z}^+$ فإنّ مجموعة قيم x التي تجعل العدد $(5+i^x)$ عددًا حقيقيًا هي:

a $\mathbb{Z}^+$ b $\{0,2,4,6,...\}$ c $\{1,3,5,...\}$ d $\{2,4,6,...\}$

11

مثال (12)

أوجد ناتج قسمة $5-6i$ على $2+3i$

الحل:

$$\frac{5-6i}{2+3i}=\frac{5-6i}{2+3i}\times\frac{2-3i}{2-3i}=\frac{10-15i-12i+18i^2}{(2)^2+(3)^2}=\frac{10-18}{13}-\frac{15+12}{13}i=\frac{-8}{13}-\frac{27}{13}i$$

حاول أن تحل

12 أوجد ناتج قسمة $3-2i$ على $1+2i$

مثال (13)

اكتب كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية للعدد المركب:

a $\frac{2}{3-i}$ b $\overline{\left(\frac{5+i}{2-3i}\right)}$

الحل:

a ضرب البسط والمقام في مرافق المقام

$$\frac{2}{3-i}=\frac{2}{3-i}\times\frac{3+i}{3+i}=\frac{6+2i}{3^2+1^2}$$

بسّط

$$=\frac{6}{10}+\frac{2}{10}i=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$$

b ضرب البسط والمقام في مرافق المقام

$$\frac{5+i}{2-3i}=\frac{5+i}{2-3i}\times\frac{2+3i}{2+3i}$$

خاصية ضرب كثيرات الحدود

$$=\frac{10+15i+2i+3i^2}{2^2+3^2}$$

بسّط

$$=\frac{7+17i}{13}=\frac{7}{13}+\frac{17}{13}i$$

$$\therefore\ \overline{\left(\frac{5+i}{2-3i}\right)}=\overline{\left(\frac{7+17i}{13}\right)}=\frac{7}{13}-\frac{17}{13}i$$

حاول أن تحل

13 اكتب كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

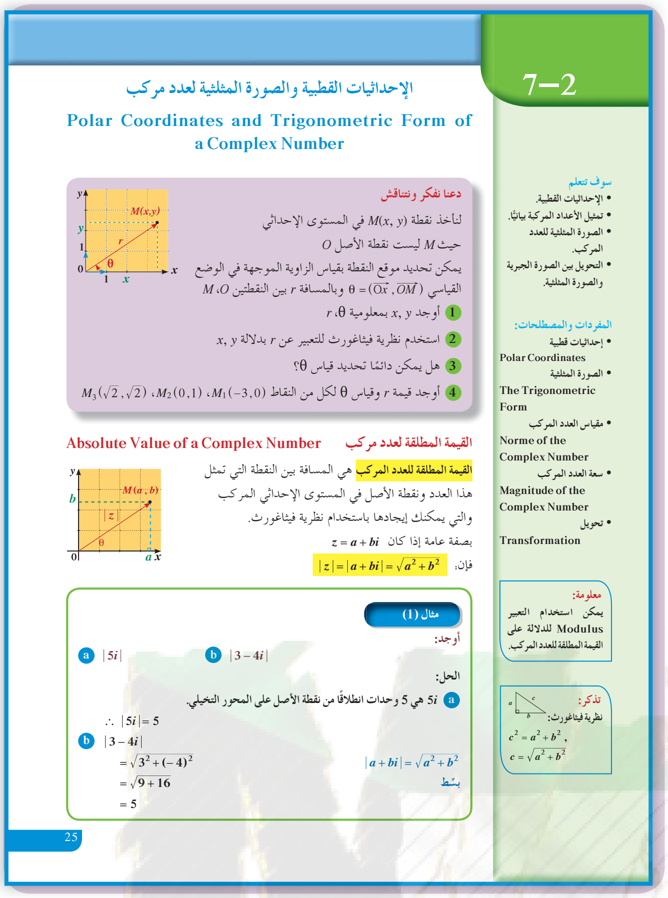
a $\frac{3+i}{2+5i}$ b $\frac{2-i}{2+i}$ c $\overline{\frac{5+i}{2-3i}}$

ملاحظة: مرافق ناتج قسمة عدد مركب على عدد مركب آخر غير صفري يساوي ناتج قسمة مرافق العدد المركب الأول على مرافق العدد المركب الثاني.

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

24

7–2: الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب



الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

Polar Coordinates and Trigonometric Form of a Complex Number

7–2

دعنا نفكر ونتناقش

لنأخذ نقطة $M(x, y)$ في المستوى الإحداثي حيث M ليست نقطة الأصل O

يمكن تحديد موقع النقطة بقياس الزاوية الموجهة في الوضع القياسي $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ وبالمسافة r بين النقطتين O، M

1 أوجد θ، r بمعلومية x، y

2 استخدم نظرية فيثاغورث للتعبير عن r بدلالة x، y

3 هل يمكن دائمًا تحديد قياس θ؟

4 أوجد قيمة r وقياس θ لكل من النقاط $M_1(-3, 0)$، $M_2(0, 1)$، $M_3(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

القيمة المطلقة لعدد مركب Absolute Value of a Complex Number

القيمة المطلقة للعدد المركب هي المسافة بين النقطة التي تمثل هذا العدد ونقطة الأصل في المستوى الإحداثي المركب والتي يمكنك إيجادها باستخدام نظرية فيثاغورث.

بصفة عامة إذا كان $z = a + bi$

فإن: $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

مثال (1)

أوجد: (a) $|5i|$ (b) $|3 - 4i|$

الحل:

(a) $5i$ هي 5 وحدات انطلاقًا من نقطة الأصل على المحور التخيلي.

$\therefore |5i| = 5$

(b) $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$

بسّط $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

سوف تتعلم

- الإحداثيات القطبية.
- تمثيل الأعداد المركبة بيانيًا.
- الصورة المثلثية للعدد المركب.
- التحويل بين الصورة الجبرية والصورة المثلثية.

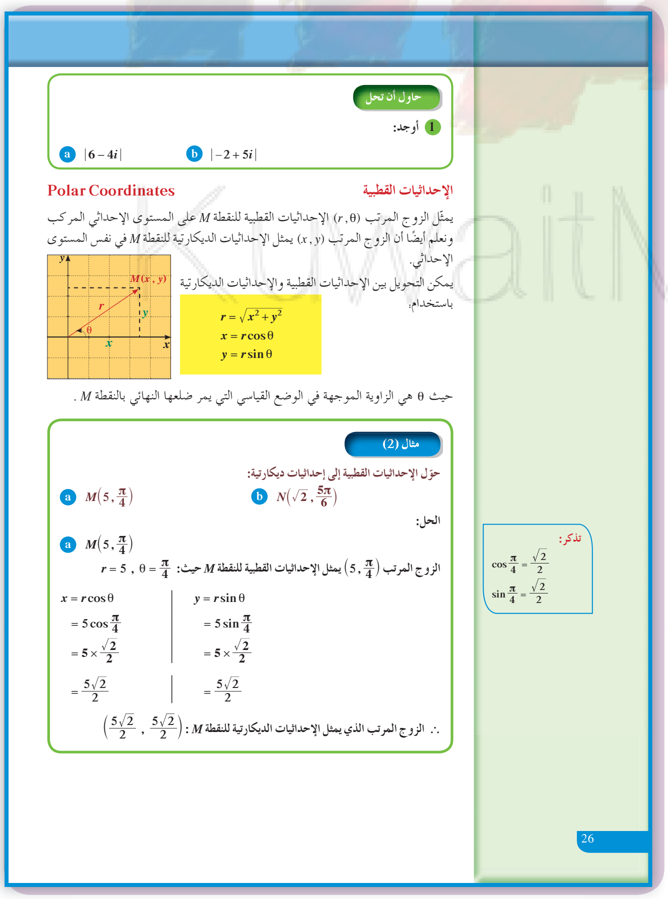
المفردات والمصطلحات:

- إحداثيات قطبية Polar Coordinates
- الصورة المثلثية The Trigonometric Form
- مقياس العدد المركب Norme of the Complex Number
- سعة العدد المركب Magnitude of the Complex Number
- تحويل Transformation

معلومة: يمكن استخدام التعبير Modulus للدلالة على القيمة المطلقة للعدد المركب.

تذكر: نظرية فيثاغورث: $c^2 = a^2 + b^2$، $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

25



حاول أن تحل

1 أوجد: (a) $|6 - 4i|$ (b) $|-2 + 5i|$

الإحداثيات القطبية Polar Coordinates

يمثّل الزوج المرتب (r, θ) الإحداثيات القطبية للنقطة M على المستوى الإحداثي المركب ونعلم أيضًا أن الزوج المرتب (x, y) يمثل الإحداثيات الديكارتية للنقطة M في نفس المستوى الإحداثي.

يمكن التحويل بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية باستخدام:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

حيث θ هي الزاوية الموجهة في الوضع القياسي التي يمر ضلعها النهائي بالنقطة M.

مثال (2)

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية:

(a) $M(5, \frac{\pi}{4})$ (b) $N(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{6})$

الحل:

(a) $M(5, \frac{\pi}{4})$

الزوج المرتب $(5, \frac{\pi}{4})$ يمثل الإحداثيات القطبية للنقطة M حيث: $r = 5$، $\theta = \frac{\pi}{4}$

$x = r\cos\theta = 5\cos\frac{\pi}{4} = 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$y = r\sin\theta = 5\sin\frac{\pi}{4} = 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ الزوج المرتب الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية للنقطة M: $(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2})$

تذكر: $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$، $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

26

1 الأهداف

- يتعرف الإحداثيات القطبية.
- يكتب الصورة المثلثية للعدد المركب.
- يتعرف المحور الحقيقي والمحور التخيلي.
- يوجد مقياس عدد مركب وسعة عدد مركب.
- يتعرف التحويل بين الصورة الجبرية والصورة المثلثية لعدد مركب.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

إحداثيات قطبية – الصورة المثلثية – مقياس العدد المركب – سعة العدد المركب – تحويل.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – ورق رسم بياني – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

أوجد ناتج كلّ مما يلي في الصورة الجبرية:

(a) $2 + 3i + 4i^2 + 5i^3 + 6i^4$

(b) $(4 + 3i)(6 - 7i)$

(c) $\dfrac{2 - 3i}{2 - 3i}$

5 التدريس

ركّز على فكرة الإحداثيات القطبية للطلاب من خلال فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» كونها المدخل الأساسي للصورة المثلثية في كتابة العدد المركب.

اكتب على السبورة إلى جانب المستوى الإحداثي القطبي القواعد التي تربط بين الإحداثيات الديكارتية (x , y) والإحداثيات القطبية (r , θ).

حيث $r = \sqrt{x^2 + y^2}$، $x = r\cos\theta\ ,\ y = r\sin\theta$

شجّعهم على فهم هذه القواعد من خلال النسب المثلثية في المثلث قائم الزاوية بدلًا من حفظها، وبالتالي يصبح التحويل بين هذه الإحداثيات سهلًا للغاية.

في المثال (1)

نبّه الطلاب إلى أن القيمة المطلقة للعدد المركب أو مقياس العدد المركب أو معيار العدد المركب هي تعابير متشابهة وتعني قيمة واحدة وهي:

إذاكان $z = a + bi$ فإن $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

أو إذا كان $z = x + yi$ فإن $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

في المثالين (2), (3)

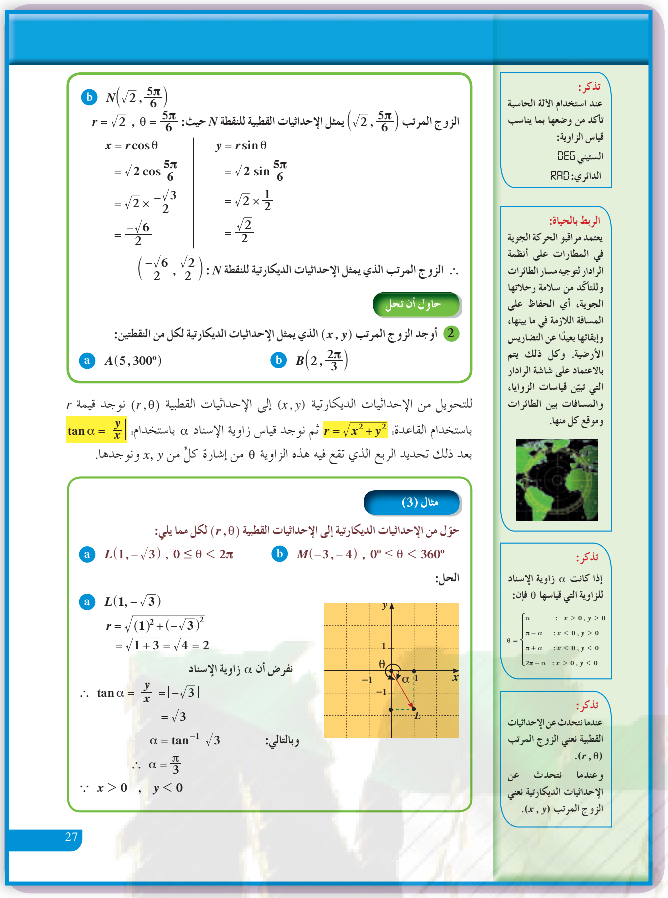
ناقش مع الطلاب التحويل من الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية، ثم من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية.

أخبر الطلاب أن لكل عدد مركب صورة في المستوى الإحداثي، وهي نقطة معرفة بالإحداثيات الديكارتية، ومن ثم بإحداثيات قطبية. وسيكون للمحاور أسماء جديدة، حيث يصبح محور السينات المحور الحقيقي ومحور الصادات المحور التخيلي.

r = مقياس العدد المركب أو معيار العدد المركب.

θ = سعة العدد المركب.

اطلب إلى الطلاب تكرار هذه المفردات بصوت مرتفع عدة مرات.



b $N\left(\sqrt{2} , \frac{5\pi}{6}\right)$

الزوج المرتب $\left(\sqrt{2} , \frac{5\pi}{6}\right)$ يمثل الإحداثيات القطبية للنقطة N حيث: $r = \sqrt{2}\ ,\ \theta = \frac{5\pi}{6}$

$x = r\cos\theta = \sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{6} = \sqrt{2} \times \frac{-\sqrt{3}}{2} = \frac{-\sqrt{6}}{2}$

$y = r\sin\theta = \sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{6} = \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ الزوج المرتب الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية للنقطة N: $\left(\frac{-\sqrt{6}}{2} , \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

حاول أن تحل

2 أوجد الزوج المرتب (x , y) الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية لكل من النقطتين:

a $A(5 , 300^\circ)$ b $B\left(2 , \frac{2\pi}{3}\right)$

للتحويل من الإحداثيات الديكارتية (x , y) إلى الإحداثيات القطبية (r , θ) نوجد قيمة r باستخدام القاعدة: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ثم نوجد قياس زاوية الإسناد α باستخدام: $\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right|$ بعد ذلك تحديد الربع الذي تقع فيه هذه الزاوية θ من إشارة كلٍّ من x, y ونوجدها.

مثال (3)

حوّل من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية (r , θ) لكل مما يلي:

a $L(1 , -\sqrt{3})\ ,\ 0 \le \theta < 2\pi$ b $M(-3 , -4)\ ,\ 0^\circ \le \theta < 360^\circ$

الحل:

a $L(1, -\sqrt{3})$

$r = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

نفرض أن α زاوية الإسناد

$\therefore\ \tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = |-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

وبالتالي: $\alpha = \tan^{-1}\sqrt{3}$

$\therefore\ \alpha = \frac{\pi}{3}$

$\because\ x > 0\ ,\ y < 0$

تذكر: عند استخدام الآلة الحاسبة تأكد من وضعها بما يناسب قياس الزاوية: الستيني DEG الدائري: RAD

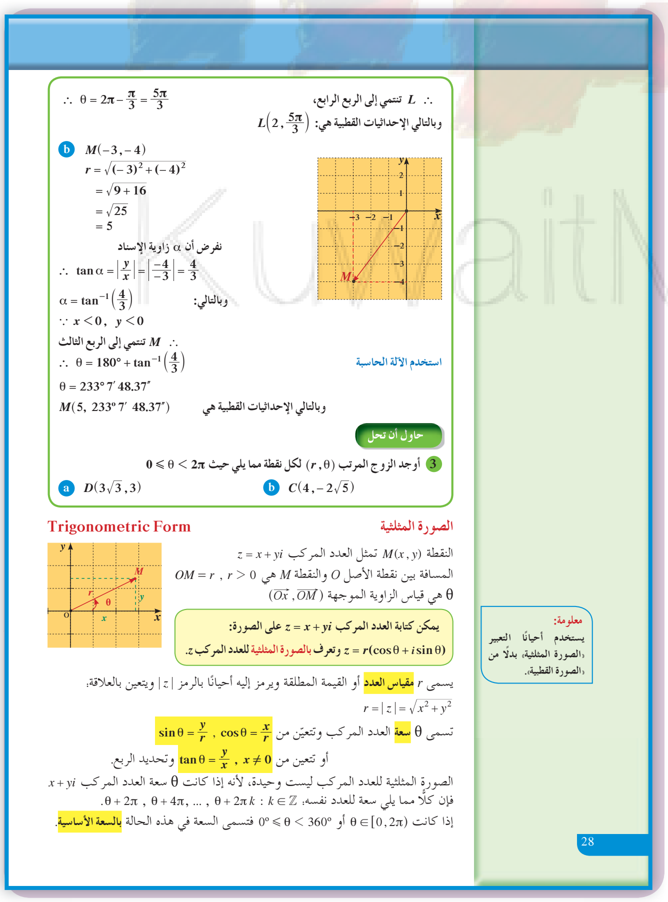
الربط بالحياة: يعتمد مراقبو الحركة الجوية في المطارات على أنظمة الرادار لتوجيه مسار الطائرات وللتأكّد من سلامة رحلاتها الجوية، أي الحفاظ على المسافة اللازمة في ما بينها، وإبقائها بعيدًا عن التضاريس الأرضية. وكل ذلك يتم بالاعتماد على شاشة الرادار التي تبيّن قياسات الزوايا، والمسافات بين الطائرات وموقع كل منها.

تذكر: إذا كانت α زاوية الإسناد للزاوية التي قياسها θ فإن:

$$\theta = \begin{cases} \alpha & : x > 0 , y > 0 \\ \pi - \alpha & : x < 0 , y > 0 \\ \pi + \alpha & : x < 0 , y < 0 \\ 2\pi - \alpha & : x > 0 , y < 0 \end{cases}$$

تذكر: عندما نتحدث عن الإحداثيات القطبية نعني الزوج المرتب (r , θ). وعندما نتحدث عن الإحداثيات الديكارتية نعني الزوج المرتب (x , y).

27



$\therefore$ L تنتمي إلى الربع الرابع، $\therefore\ \theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

وبالتالي الإحداثيات القطبية هي: $L\left(2 , \frac{5\pi}{3}\right)$

b $M(-3 , -4)$

$r = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

نفرض أن α زاوية الإسناد

$\therefore\ \tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{-4}{-3}\right| = \frac{4}{3}$

وبالتالي: $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

$\because\ x < 0 ,\ y < 0$

$\therefore$ M تنتمي إلى الربع الثالث

$\therefore\ \theta = 180^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ استخدم الآلة الحاسبة

$\theta = 233^\circ 7' 48.37''$

وبالتالي الإحداثيات القطبية هي $M(5,\ 233^\circ 7'\ 48.37'')$

حاول أن تحل

3 أوجد الزوج المرتب (r , θ) لكل نقطة مما يلي حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$

a $D(3\sqrt{3} , 3)$ b $C(4 , -2\sqrt{5})$

الصورة المثلثية Trigonometric Form

النقطة $M(x , y)$ تمثل العدد المركب $z = x + yi$

المسافة بين نقطة الأصل O والنقطة M هي $OM = r\ ,\ r > 0$

θ هي قياس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{Ox} , \overrightarrow{OM})$

يمكن كتابة العدد المركب $z = x + yi$ على الصورة: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ وتعرف بالصورة المثلثية للعدد المركب z.

يسمى r مقياس العدد أو القيمة المطلقة ويرمز إليه أحيانًا بالرمز $|z|$ ويتعين بالعلاقة:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

تسمى θ سعة العدد المركب وتتعيّن من $\sin\theta = \frac{y}{r}\ ,\ \cos\theta = \frac{x}{r}$

أو تتعين من $\tan\theta = \frac{y}{x}\ ,\ x \neq 0$ وتحديد الربع.

الصورة المثلثية للعدد المركب ليست وحيدة، لأنه إذا كانت θ سعة العدد المركب $x + yi$ فإن كلًا مما يلي سعة للعدد نفسه: $\theta + 2\pi\ ,\ \theta + 4\pi, \ldots\ ,\ \theta + 2\pi k\ :\ k \in \mathbb{Z}$.

إذا كانت $\theta \in [0 , 2\pi)$ أو $0^\circ \leqslant \theta < 360^\circ$ فتسمى السعة في هذه الحالة بالسعة الأساسية.

معلومة: يستخدم أحيانًا التعبير «الصورة المثلثية» بدلًا من «الصورة القطبية».

28

في المثالين (4), (5)

تأكّد من أن الطلاب يكتبون الصورة المثلثية للعدد المركب $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ وأن التحويل مع الصورة الديكارتية يعتمد على القواعد:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \;,\; x = r\cos\theta \;,\; y = r\sin\theta$$

نبّه الطلاب إلى قيم الدوال المثلثية للزوايا التي تكون أكبر من $90°$ أو $\frac{\pi}{2}$. وكذلك ألفت انتباههم إلى الوضع المناسب على الآلة الحاسبة بحيث يستخدمون Rad أو Deg بحسب وحدة القياس المستخدمة.

في المثالين (6), (7)

يستخدم الطلاب حساب المثلثات لتحويل العدد المركب من الصورة المثلثية إلى الصورة الجبرية وبالعكس.

شجّع الطلاب على مراجعة العلاقات بين الدوال المثلثية.

أكّد لهم أن القيمة المطلقة للعدد المركب r هي دائمًا قيمة موجبة، حيث $r = \sqrt{x^2 + y^2}$، ولكن $\cos\theta$، $\sin\theta$ يمكن أن تكونا موجبتين أو سالبتين، ويمكن أن تكون إحداهما موجبة والأخرى سالبة.

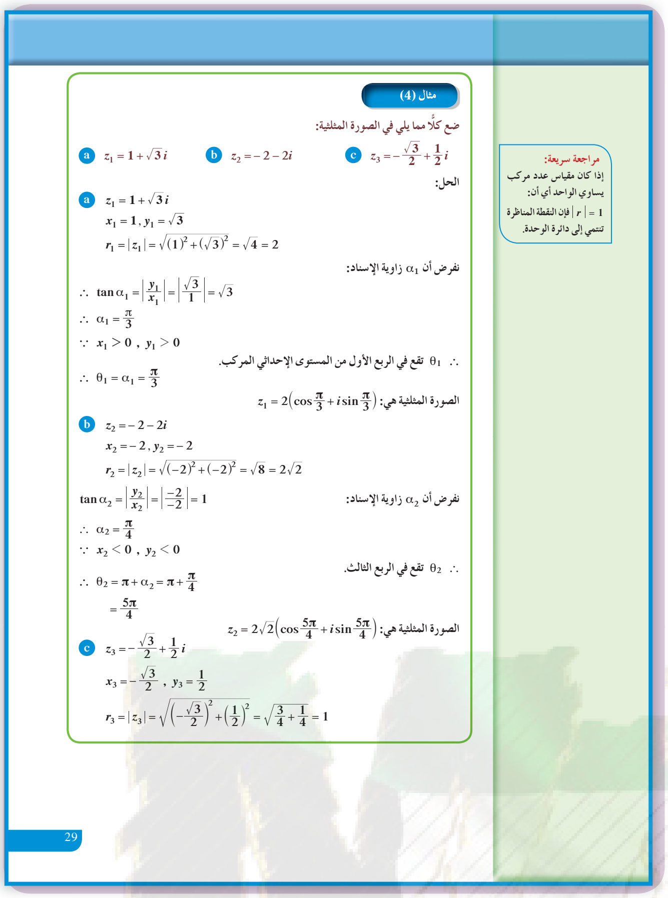
6 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في كتابة الصورة المثلثية للعدد المركب فيكتبون $z = r(\sin\theta + i\cos\theta)$

أكّد لهم أن: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، ولا يمكن التبديل بين $\cos\theta$ و $\sin\theta$.

7 التقييم

تابع مع الطلاب فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من حسن أدائهم في التحويل بين الصورة الديكارتية والصورة المثلثية للعدد المركب وبالعكس.



مثال (4)

ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية:

a $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$ b $z_2 = -2 - 2i$ c $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

الحل:

a $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$

$x_1 = 1 , y_1 = \sqrt{3}$

$r_1 = |z_1| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

نفرض أن α_1 زاوية الإسناد:

$\therefore \tan\alpha_1 = \left|\frac{y_1}{x_1}\right| = \left|\frac{\sqrt{3}}{1}\right| = \sqrt{3}$

$\therefore \alpha_1 = \frac{\pi}{3}$

$\because x_1 > 0 , y_1 > 0$

$\therefore$ θ_1 تقع في الربع الأول من المستوى الإحداثي المركب.

$\therefore \theta_1 = \alpha_1 = \frac{\pi}{3}$

الصورة المثلثية هي: $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

b $z_2 = -2 - 2i$

$x_2 = -2 , y_2 = -2$

$r_2 = |z_2| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

نفرض أن α_2 زاوية الإسناد: $\tan\alpha_2 = \left|\frac{y_2}{x_2}\right| = \left|\frac{-2}{-2}\right| = 1$

$\therefore \alpha_2 = \frac{\pi}{4}$

$\because x_2 < 0 , y_2 < 0$

$\therefore$ θ_2 تقع في الربع الثالث.

$\therefore \theta_2 = \pi + \alpha_2 = \pi + \frac{\pi}{4}$

$= \frac{5\pi}{4}$

الصورة المثلثية هي: $z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

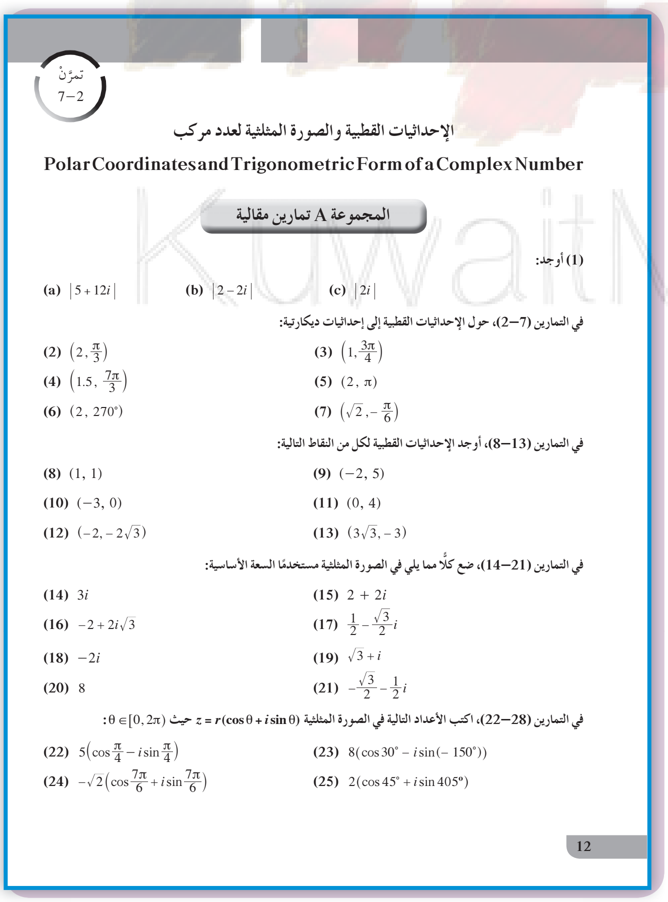
c $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} , y_3 = \frac{1}{2}$

$r_3 = |z_3| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$

مراجعة سريعة:
إذا كان مقياس عدد مركب يساوي الواحد أي أن: $|r| = 1$ فإن النقطة المناظرة تنتمي إلى دائرة الوحدة.

29



تمرَّنْ 7−2

الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

Polar Coordinates and Trigonometric Form of a Complex Number

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أوجد:

(a) $|5 + 12i|$ (b) $|2 - 2i|$ (c) $|2i|$

في التمارين (7−2)، حول الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية:

(2) $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ (3) $\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$

(4) $\left(1.5, \frac{7\pi}{3}\right)$ (5) $(2, \pi)$

(6) $(2, 270°)$ (7) $\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$

في التمارين (13−8)، أوجد الإحداثيات القطبية لكل من النقاط التالية:

(8) $(1, 1)$ (9) $(-2, 5)$

(10) $(-3, 0)$ (11) $(0, 4)$

(12) $(-2, -2\sqrt{3})$ (13) $(3\sqrt{3}, -3)$

في التمارين (21−14)، ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية مستخدمًا السعة الأساسية:

(14) $3i$ (15) $2 + 2i$

(16) $-2 + 2i\sqrt{3}$ (17) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(18) $-2i$ (19) $\sqrt{3} + i$

(20) 8 (21) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

في التمارين (28−22)، اكتب الأعداد التالية في الصورة المثلثية $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$:

(22) $5\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ (23) $8(\cos 30° - i\sin(-150°))$

(24) $-\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ (25) $2(\cos 45° + i\sin 405°)$

12

اختبار سريع

1 أوجد الإحداثي الديكارتي للنقطة $D\left(\sqrt{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$

$$r = \sqrt{3} \ , \ x = r\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = r\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$y = \frac{3}{2}$$

ومنه: $D\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

2 أوجد الإحداثي القطبي للنقطة $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ , \ \sin\theta = \frac{y}{r} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ومنه: $\theta = \frac{7\pi}{4}$

الإحداثي القطبي $M\left(1, \frac{7\pi}{4}\right)$

3 اكتب العدد المركب: $z = 1 - i\sqrt{3}$ في الصورة المثلثية.

$$|z| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \ , \ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

فتكون: $\theta = \frac{5\pi}{3}$

والصورة المثلثية $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

4 اكتب العدد المركب: $z = 3\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ في الصورة الجبرية.

$$z = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

نفرض أن α_3 زاوية الإسناد:

$$\tan\alpha_3 = \left|\frac{y_3}{x_3}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha_3 = \frac{\pi}{6}$$

$$\because \ x_3 < 0 \ , \ y_3 > 0$$

$\therefore$ θ_3 تقع في الربع الثاني.

$$\therefore \ \theta_3 = \pi - \alpha_3 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

الصورة المثلثية هي: $z_3 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$

حاول أن تحل

4 ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية:

a) $z_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}}i$ b) $z_2 = -1 - i$ c) $z_3 = -2 + 2\sqrt{3}i$

مثال (5)

ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

a) $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

b) $z_2 = \sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}$

c) $z_3 = -\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

d) $z_4 = \frac{9}{2}(\cos 30^\circ + i\sin 390^\circ)$

الحل:

a) $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ $\quad x > 0 \ , \ y < 0$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

b) $z_2 = \sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}$ $\quad x > 0 \ , \ y > 0$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

تذكر:
$\cos(-\theta) = \cos\theta$
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

تذكر:
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$

معلومة:
إذا كانت θ بالقياس السالب فإن السعة الأساسية تساوي:
$\theta + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{N}$

30

---

(26) $4\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ (27) $5(\cos(-60^\circ) + i\sin(-60^\circ))$

(28) $3\left(\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}\right)$

في التمارين (33–29)، ضع كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

(29) $2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ (30) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(31) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)$ (32) $7\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

(33) $\sqrt{3}(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (6–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4, \frac{7\pi}{6}\right)$ هي: $A(-2\sqrt{3}, 2)$ (a) (b)

(2) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $B(\sqrt{2}, 135^\circ)$ هي: $B(-1, 1)$ (a) (b)

(3) الإحداثيات القطبية للنقطة: $M\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ هي: $M\left(1, \frac{5\pi}{4}\right)$ (a) (b)

(4) العدد المركب: $z = \sqrt{3} - i$ بصورة المثلثية هو: $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ (a) (b)

(5) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ هي: $z = 1 - i$ (a) (b)

(6) السعة الأساسية للعدد $z = \cos 30^\circ + i\cos 240^\circ$ هي 330° (a) (b)

في التمارين (13–7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4, \frac{5\pi}{3}\right)$ هي:

(a) $A(2, 2\sqrt{3})$ (b) $A(-2, 2\sqrt{3})$ (c) $A(-2, -2\sqrt{3})$ (d) $A(2, -2\sqrt{3})$

(8) الإحداثيات القطبية للنقطة: $B\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ هي:

(a) $B\left(1, \frac{-\pi}{4}\right)$ (b) $B\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ (c) $B\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$ (d) $B\left(1, \frac{-3\pi}{4}\right)$

13

8 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1. $x = r\cos\theta \ , \ y = r\sin\theta$
2. $x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$
3. إذا لم يكن قياس الزاوية θ من الحالات الخاصة $\left(0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi \ldots\right)$ فعلينا استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة تقريبية.
4. $M_1(r = 3 \ , \ \theta = \pi)$

   $M_2\left(r = 1 \ , \ \theta = \frac{\pi}{2}\right)$

   $M_3\left(r = 2 \ , \ \theta = \frac{\pi}{4}\right)$

«حاول أن تحل»

1. **(a)** $2\sqrt{13}$

   (b) $\sqrt{29}$

2. **(a)** $A\left(\frac{5}{2}, \frac{-5\sqrt{3}}{2}\right)$

   (b) $B(-1 \ , \ \sqrt{3})$

3. **(a)** $D\left(6, \frac{\pi}{6}\right)$

   (b) $C(6 \ , \ 5.442 \text{ rad})$

4. **(a)** $5\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

   (b) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

   (c) $4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

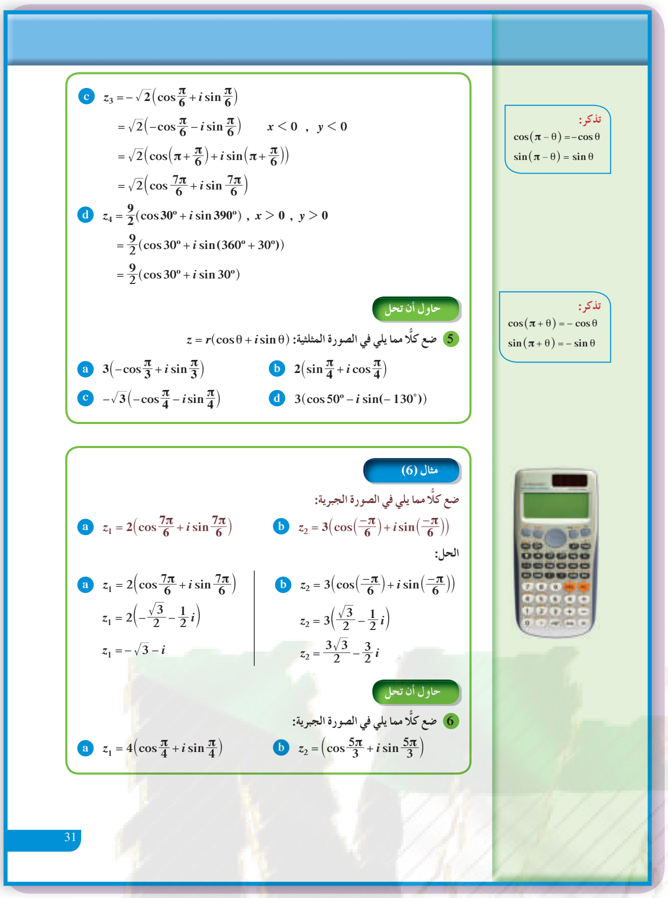
5. **(a)** $3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

   (b) $2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

   (c) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

   (d) $3(\cos 50^\circ + i\sin(180^\circ - 130^\circ))$

   $= 3(\cos 50^\circ + i\sin 50^\circ)$



ⓒ $z_3 = -\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= \sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) \qquad x < 0 \ , \ y < 0$

$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

ⓓ $z_4 = \frac{9}{2}(\cos 30^\circ + i\sin 390^\circ) \ , \ x > 0 \ , \ y > 0$

$= \frac{9}{2}(\cos 30^\circ + i\sin(360^\circ + 30^\circ))$

$= \frac{9}{2}(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$

تذكر:

$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

تذكر:

$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$

$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$

حاول أن تحل

5 ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ⓐ $3\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ⓑ $2\left(\sin\frac{\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4}\right)$

ⓒ $-\sqrt{3}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ⓓ $3(\cos 50^\circ - i\sin(-130^\circ))$

مثال (6)

ضع كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

ⓐ $z_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ ⓑ $z_2 = 3\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$

الحل:

ⓐ $z_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

$z_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

$z_1 = -\sqrt{3} - i$

ⓑ $z_2 = 3\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$

$z_2 = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

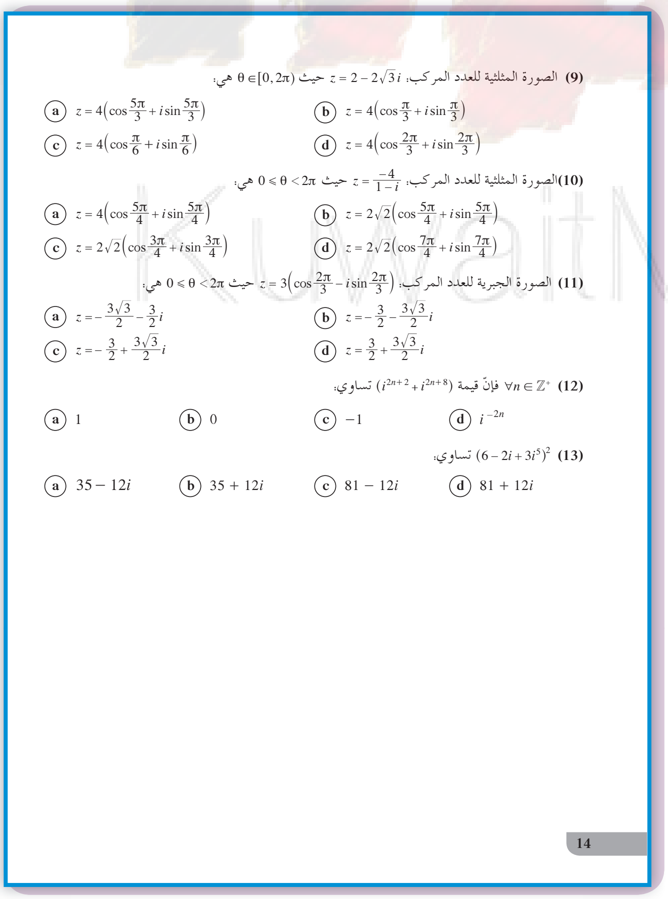
$z_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

حاول أن تحل

6 ضع كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

ⓐ $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ⓑ $z_2 = \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

31



(9) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$ هي:

ⓐ $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ ⓑ $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ⓒ $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ⓓ $z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

(10) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = \frac{-4}{1-i}$ حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$ هي:

ⓐ $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ ⓑ $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

ⓒ $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ ⓓ $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$ هي:

ⓐ $z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ ⓑ $z = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

ⓒ $z = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ ⓓ $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

(12) $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ فإنّ قيمة $(i^{2n+2} + i^{2n+8})$ تساوي:

ⓐ 1 ⓑ 0 ⓒ -1 ⓓ i^{-2n}

(13) $(6 - 2i + 3i^5)^2$ تساوي:

ⓐ $35 - 12i$ ⓑ $35 + 12i$ ⓒ $81 - 12i$ ⓓ $81 + 12i$

14

الصورة المثلثية في حالات خاصة Trigonometric Form In Special Cases

كل عدد حقيقي يمثل بنقطة على المحور الحقيقي (محور السينات). وكل عدد تخيلي يمثل بنقطة على المحور التخيلي (محور الصادات). يمثل الجدول التالي الحالات الأربع الخاصة. a, b عددان حقيقيان موجبان.

ملاحظة:
إذا كان $z = 0$، فإن:
$x = 0\ ,\ y = 0\ ,\ r = 0$
θ غير معيّنة.

العدد	المقياس	سعة (بالراديان) (rad)
a	a	0
$-a$	$\lvert -a \rvert = a$	π
bi	b	$\frac{\pi}{2}$
$-bi$	$\lvert -b \rvert = b$	$\frac{3\pi}{2}$

مثال (7)

ضع في الصورة المثلثية كلًّا من الأعداد التالية:

a $z_1 = 3$ b $z_2 = -5$ c $z_3 = i$ d $z_4 = -3i$

الحل:

a $r_1 = |z_1| = |3| = 3$ ، السعة الأساسية $= 0$ $\Longrightarrow z_1 = 3(\cos 0 + i\sin 0)$

b $r_2 = |z_2| = |-5| = 5$ ، السعة الأساسية $= \pi$ $\Longrightarrow z_2 = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$

c $r_3 = |z_3| = |i| = 1$ ، السعة الأساسية $= \frac{\pi}{2}$ $\Longrightarrow z_3 = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

d $r_4 = |z_4| = |-3i| = 3$ ، السعة الأساسية $= \frac{3\pi}{2}$ $\Longrightarrow z_4 = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

حاول أن تحل

7 ضع في الصورة المثلثية كلًّا من الأعداد التالية:

a $z_1 = 2i$ b $z_2 = 5$ c $z_3 = \frac{-3}{4}$ d $z_4 = -\frac{5}{2}i$

32

6 (a) $z_1 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$

(b) $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

7 (a) $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

(b) $z_2 = 5(\cos 0 + i\sin 0)$

(c) $z_3 = \frac{3}{4}(\cos\pi + i\sin\pi)$

(d) $z_4 = \frac{5}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

3—7: حل معادلات

1 الأهداف

- يحل معادلات من الدرجة الأولى تتضمن عددًا تخيليًّا.
- يحل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد.
- يوجد الجذرين التربيعيين لعدد مركب.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

جذر تربيعي لعدد مركب – معادلة تربيعية.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

حلّ المعادلات التالية:

(a) $x^2 - 9 = 0$

(b) $x^2 + 25 = 0$

(c) $x^2 + 4x + 20 = 0$

5 التدريس

يتوسع هذا الدرس في إيجاد مجموعة الحل لمعادلات مميزها سالب إلى معادلات تتضمن أعدادًا مركبة، لذلك من المفيد جدًّا التدرج من المعادلة من الدرجة الأولى إلى المعادلة من الدرجة الثانية.

في المثالين (1), (2)

يوضّح هذان المثالان كيفية التعامل مع المعادلة من الدرجة الأولى لإيجاد مجموعة الحل بالصورة الجبرية $z = a + bi$ أو $z = x + yi$ كما وردت في المثال (2).
ناقش مع الطلاب خطوات الحل في المثال (2)، وأخبرهم أن كتابة z على صورة $z = x + yi$ تساعد كثيرًا على تخطي إشكالية وجود $\overline{z}$ والتي هي مرافق العدد المركب z، حيث نجد العلاقة بين $z = x + yi$ و $\overline{z} = x - yi$


7—3

حل معادلات

Solving Equations

سوف تتعلم
- حل معادلات من الدرجة الأولى في $\mathbb{C}$.
- إيجاد الجذرين التربيعيين لعدد مركب.
- حل معادلات تربيعية مع $\Delta < 0$.

المفردات والمصطلحات:
- جذر تربيعي لعدد مركب Square Root of a Complex Number
- معادلة تربيعية Quadratic Equation

عمل تعاوني

1 حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كلًّا من المعادلتين التاليتين:

a $x^2 = -4$

b $x^2 = k$، حيث k عدد حقيقي سالب.

2 لتكن المعادلة: $x^2 - 2x + 5 = 0$

a أثبت أنه لا يوجد حلول حقيقية للمعادلة.

b استخدم طريقة إكمال المربع وأثبت أن: $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4$.

c حل المعادلة في $\mathbb{C}$.

3 استخدم الطريقة في 2 لحل المعادلة: $z^2 + 4z + 13 = 0$ في $\mathbb{C}$.

أولًا: حل معادلات من الدرجة الأولى في $\mathbb{C}$

Solving First Degree Equations in $\mathbb{C}$

تحل معادلات الدرجة الأولى في مجموعة الأعداد المركبة بالطريقة نفسها التي تستخدم لحل معادلات الدرجة الأولى في مجموعة الأعداد الحقيقية.

مثال (1)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $3z + 1 - i = 7 + 3i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

الحل:

$3z + 1 - i = 7 + 3i$

افصل المتغير z $\quad 3z = 7 + 3i - 1 + i$

بسّط $\quad 3z = 6 + 4i$

$z = \frac{6 + 4i}{3}$

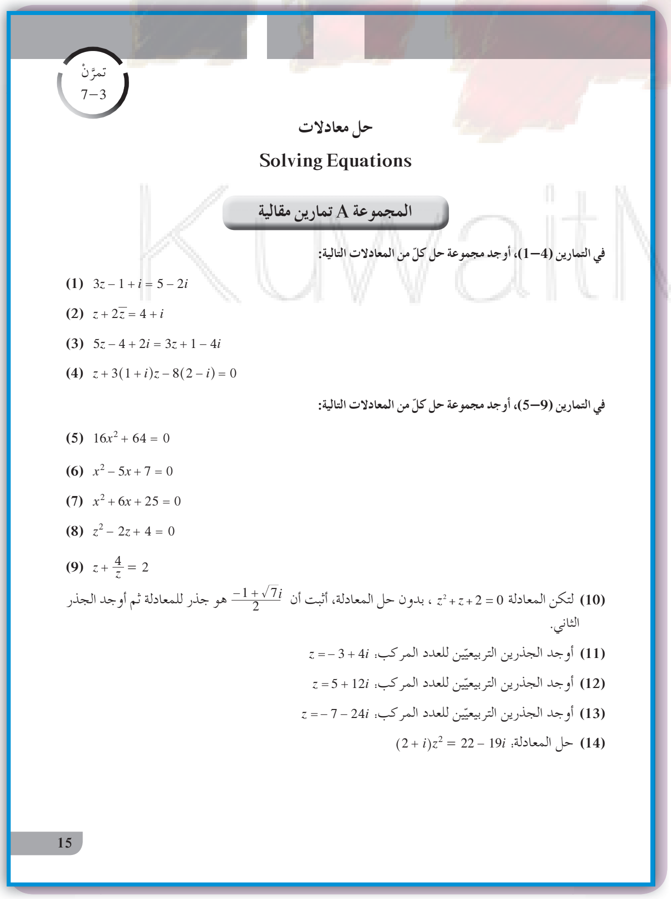
$z = 2 + \frac{4}{3}i$

مجموعة الحل $= \left\{2 + \frac{4}{3}i\right\}$

حاول أن تحل

1 أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i = 3 + 2i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

33


تمرَّنْ 7—3

حل معادلات

Solving Equations

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1—4)، أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلات التالية:

(1) $3z - 1 + i = 5 - 2i$

(2) $z + 2\overline{z} = 4 + i$

(3) $5z - 4 + 2i = 3z + 1 - 4i$

(4) $z + 3(1+i)z - 8(2-i) = 0$

في التمارين (5—9)، أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلات التالية:

(5) $16x^2 + 64 = 0$

(6) $x^2 - 5x + 7 = 0$

(7) $x^2 + 6x + 25 = 0$

(8) $z^2 - 2z + 4 = 0$

(9) $z + \frac{4}{z} = 2$

(10) لتكن المعادلة $z^2 + z + 2 = 0$ ، بدون حل المعادلة، أثبت أن $\frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}$ هو جذر للمعادلة ثم أوجد الجذر الثاني.

(11) أوجد الجذرين التربيعيّين للعدد المركب: $z = -3 + 4i$

(12) أوجد الجذرين التربيعيّين للعدد المركب: $z = 5 + 12i$

(13) أوجد الجذرين التربيعيّين للعدد المركب: $z = -7 - 24i$

(14) حل المعادلة: $(2+i)z^2 = 22 - 19i$

15

في المثال (3)

يوضّح هذا المثال كيف نحل معادلات على الصورة $x^2 + a^2 = 0$ وأن الحلول هي أعداد تخيلية.

في المثال (4)

كثيرًا ما يساعد هذا المثال على إيجاد حل معادلة من الدرجة الثانية عندما يكون المميز $\Delta < 0$.

ذكّر الطلاب أن $\Delta = b^2 - 4ac$، وأن $i^2 = -1$ وعندها تصبح الحلول أعدادًا مركبة على صورة $z = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

في المثال (5)

يساعد هذا المثال الطلاب على تعويض قيمة عدد مركب في معادلة من الدرجة الثانية والتأكد من أنه أحد حلول هذه المعادلة وبالتالي لإيجاد الحل الآخر (أو الجذر الثاني) لمعادلة الدرجة الثانية $az^2 + bz + c = 0$ يمكنهم استخدام إحدى العلاقتين: $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ أو $z_1 \times z_2 = \dfrac{c}{a}$

في الأمثلة (6), (7), (8)

أكّد للطلاب أن الجذرين التربيعيين لأي عدد مركب هما دائمًا موجودان، وأنهما عددان مركبان.

أخبرهم أن المعادلات الثلاث التي نحصل عليها ضرورية لإيجاد الجذور التربيعية، وأن إحدى هذه المعادلات وهي $m \times n$ توفر فقط نوعية الإشارات لكل من m, n والأساس هو حل النظام: $\begin{cases} m^2 + n^2 = \dots \\ m^2 - n^2 = \dots \end{cases}$

مثال (2)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i\overline{z} = 5 - 2i$ في $\mathbb{C}$.

الحل:

لتكن $z = x + yi$ حيث x, y عددان حقيقيان.

$2z + i\overline{z} = 5 - 2i$

عوّض عن z بـ $x + yi$: $2(x+yi) + i(\overline{x+yi}) = 5 - 2i$

مرافق $x + yi$ هو $x - yi$: $2(x+yi) + i(x-yi) = 5 - 2i$

$2x + 2yi + xi - y(i)^2 = 5 - 2i$

$i^2 = -1$: $2x + 2yi + xi + y = 5 - 2i$

تجميع الأعداد الحقيقية معًا والأعداد التخيلية معًا: $2x + y + (x+2y)i = 5 - 2i$

خاصية تساوي عددين مركبين: $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$

بحل المعادلتين نحصل على:

$\begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$

مجموعة الحل: $= \{4 - 3i\}$.

حاول أن تحل

2 أوجد مجموعة حل المعادلة: $z + i = 2\overline{z} + 1$ في $\mathbb{C}$.

تذكر: يمكن حل نظام معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين باستخدام طريقة الحذف أو التعويض أو باستخدام الآلة الحاسبة.

ثانيًا: حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد في $\mathbb{C}$

Solving Quadratic Equations With One Variable in $\mathbb{C}$

تذكر: إن العمليات على الأعداد المركبة مثل العمليات على الأعداد الحقيقية مع اعتبار $i^2 = -1$.

مثال (3)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $4x^2 + 100 = 0$ حيث $x \in \mathbb{C}$.

الحل:

$4x^2 + 100 = 0$

$4x^2 = -100$

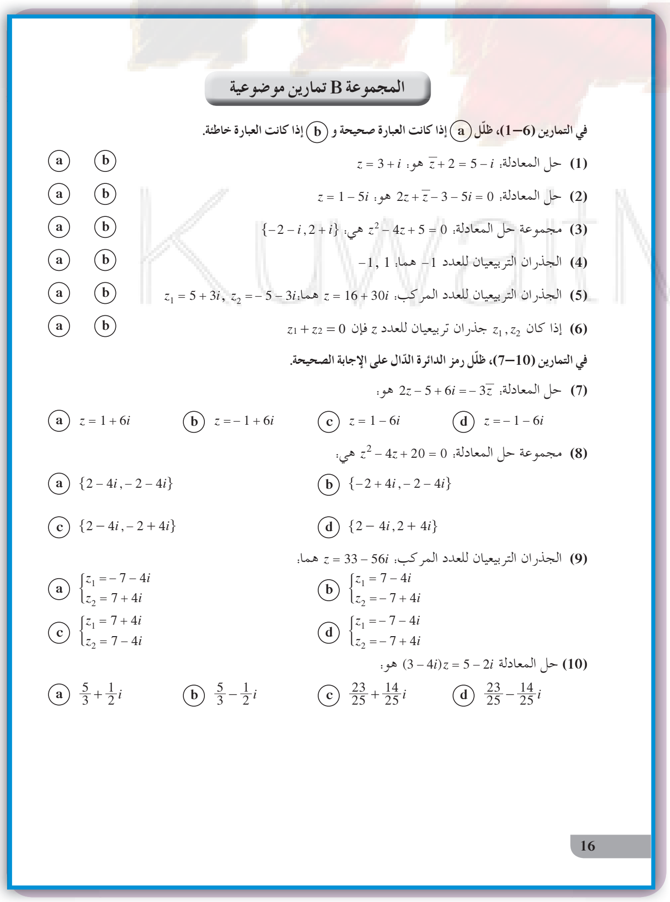
$x^2 = -25$

$x = \pm\sqrt{-25}$

$\sqrt{-a^2} = ai$: $x = \pm 5i$

مجموعة الحل $= \{5i, -5i\}$.

34



المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة: $\overline{z} + 2 = 5 - i$ هو: $z = 3 + i$ — (a) (b)

(2) حل المعادلة: $2z + \overline{z} - 3 - 5i = 0$ هو: $z = 1 - 5i$ — (a) (b)

(3) مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 4z + 5 = 0$ هي: $\{-2 - i, 2 + i\}$ — (a) (b)

(4) الجذران التربيعيان للعدد -1 هما: $-1, 1$ — (a) (b)

(5) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z = 16 + 30i$ هما: $z_1 = 5 + 3i,\ z_2 = -5 - 3i$ — (a) (b)

(6) إذا كان z_1, z_2 جذران تربيعيان للعدد z فإن $z_1 + z_2 = 0$ — (a) (b)

في التمارين (7–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) حل المعادلة: $2z - 5 + 6i = -3\overline{z}$ هو:

(a) $z = 1 + 6i$ (b) $z = -1 + 6i$ (c) $z = 1 - 6i$ (d) $z = -1 - 6i$

(8) مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 4z + 20 = 0$ هي:

(a) $\{2 - 4i, -2 - 4i\}$ (b) $\{-2 + 4i, -2 - 4i\}$

(c) $\{2 - 4i, -2 + 4i\}$ (d) $\{2 - 4i, 2 + 4i\}$

(9) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z = 33 - 56i$ هما:

(a) $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = 7 + 4i \end{cases}$ (b) $\begin{cases} z_1 = 7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$

(c) $\begin{cases} z_1 = 7 + 4i \\ z_2 = 7 - 4i \end{cases}$ (d) $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$

(10) حل المعادلة $(3 - 4i)z = 5 - 2i$ هو:

(a) $\frac{5}{3} + \frac{1}{2}i$ (b) $\frac{5}{3} - \frac{1}{2}i$ (c) $\frac{23}{25} + \frac{14}{25}i$ (d) $\frac{23}{25} - \frac{14}{25}i$

16

6 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في الربط بين القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ والقيمة المطلقة لجذره التربيعي $w = m + ni$.

اكتب أمامهم على السبورة أن: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ولكن $|w| = \sqrt{m^2 + n^2}$. وبما أن $w^2 = z$،

فإن: $m^2 + n^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$

7 التقييم

تابع الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتقف على حسن أدائهم وفهمهم لما ورد في هذا الدرس.

اختبار سريع

1. أوجد مجموعة حل المعادلة: $z + 3i = 2\bar{z} - 1$

نأخذ $z = x + yi$ فتكون $\bar{z} = x - yi$

$x = 1 \,,\, y = -1 \,,\, z = 1 - i$

2. أوجد مجموع حل المعادلة: $5z^2 + 6z + 9 = 0$

$\Delta = 36 - 180 = -144 = i^2 \times 144$

$z_1 = \frac{-3}{5} - \frac{6}{5}i \,,\, z_2 = -\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$

3. أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب:

(a) $z = 4i$

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = 0 \\ 2m\,n = 4 \\ m^2 + n^2 = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4 \end{cases}$$

$\therefore\ m = -\sqrt{2} \,,\, m = \sqrt{2}$

$n = -\sqrt{2} \,,\, n = \sqrt{2}$

مجموعة الحل: $\{\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i \,,\, -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i\}$

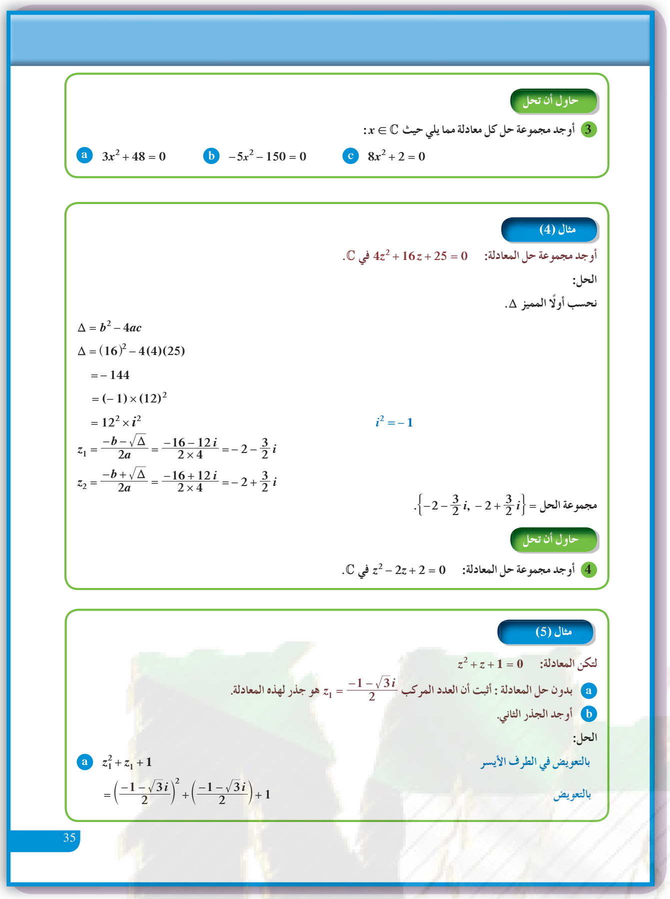
(b) $z = -12 - 16i$

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = -12 \\ 2m\,n = -16 \\ m^2 + n^2 = \sqrt{(-12)^2 + (-16)^2} = 20 \end{cases}$$

$\therefore\ m = -2 \,,\, m = 2$

$n = -4 \,,\, n = 4$

مجموعة الحل: $\{-2 + 4i \,,\, 2 - 4i\}$



حاول أن تحل

3 أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي حيث $x \in \mathbb{C}$:

a $3x^2 + 48 = 0$ b $-5x^2 - 150 = 0$ c $8x^2 + 2 = 0$

مثال (4)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $4z^2 + 16z + 25 = 0$ في $\mathbb{C}$.

الحل:

نحسب أولًا المميز Δ.

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (16)^2 - 4(4)(25)$

$= -144$

$= (-1) \times (12)^2$

$= 12^2 \times i^2$ $\quad i^2 = -1$

$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 - 12i}{2 \times 4} = -2 - \frac{3}{2}i$

$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 + 12i}{2 \times 4} = -2 + \frac{3}{2}i$

مجموعة الحل $= \left\{-2 - \frac{3}{2}i,\ -2 + \frac{3}{2}i\right\}$.

حاول أن تحل

4 أوجد مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$ في $\mathbb{C}$.

مثال (5)

لتكن المعادلة: $z^2 + z + 1 = 0$

a بدون حل المعادلة: أثبت أن العدد المركب $z_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ هو جذر لهذه المعادلة.

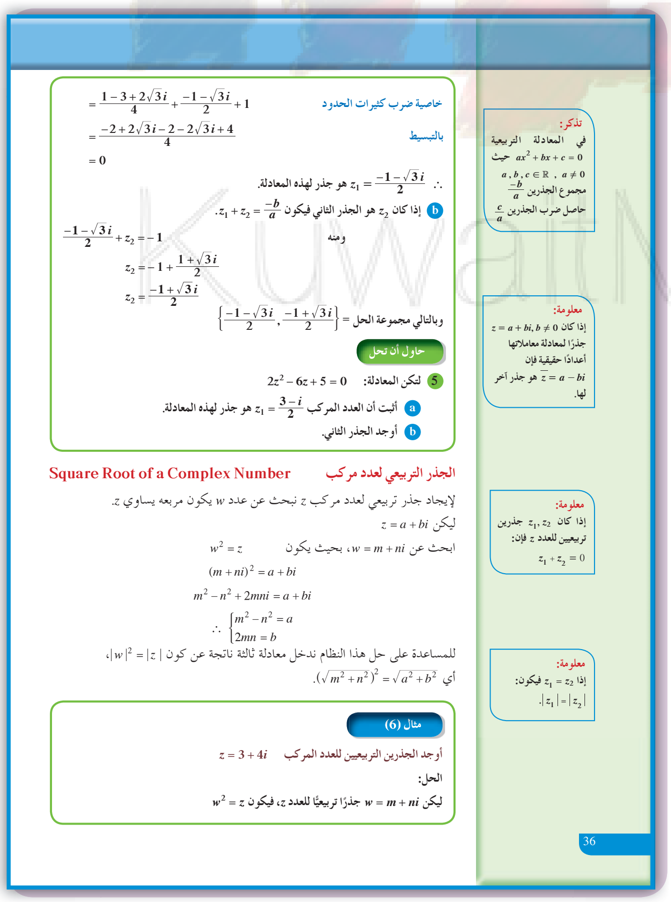
b أوجد الجذر الثاني.

الحل:

a بالتعويض في الطرف الأيسر $z_1^2 + z_1 + 1$

بالتعويض $= \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right) + 1$

35



خاصية ضرب كثيرات الحدود $= \frac{1 - 3 + 2\sqrt{3}i}{4} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} + 1$

بالتبسيط $= \frac{-2 + 2\sqrt{3}i - 2 - 2\sqrt{3}i + 4}{4}$

$= 0$

$\therefore$ $z_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ هو جذر لهذه المعادلة.

b إذا كان z_2 هو الجذر الثاني فيكون $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$.

ومنه $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} + z_2 = -1$

$z_2 = -1 + \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$

$z_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

وبالتالي مجموعة الحل $= \left\{\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right\}$

حاول أن تحل

5 لتكن المعادلة: $2z^2 - 6z + 5 = 0$

a أثبت أن العدد المركب $z_1 = \frac{3 - i}{2}$ هو جذر لهذه المعادلة.

b أوجد الجذر الثاني.

الجذر التربيعي لعدد مركب Square Root of a Complex Number

لإيجاد جذر تربيعي لعدد مركب z نبحث عن عدد w يكون مربعه يساوي z.

ليكن $z = a + bi$

ابحث عن $w = m + ni$، بحيث يكون $w^2 = z$

$(m + ni)^2 = a + bi$

$m^2 - n^2 + 2mni = a + bi$

$\therefore \begin{cases} m^2 - n^2 = a \\ 2mn = b \end{cases}$

للمساعدة على حل هذا النظام ندخل معادلة ثالثة ناتجة عن كون $|w|^2 = |z|$، أي $(\sqrt{m^2 + n^2})^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$.

مثال (6)

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 3 + 4i$

الحل:

ليكن $w = m + ni$ جذرًا تربيعيًا للعدد z، فيكون $w^2 = z$

تذكر: في المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ مجموع الجذرين $\frac{-b}{a}$ حاصل ضرب الجذرين $\frac{c}{a}$

معلومة: إذا كان $z = a + bi, b \neq 0$ جذرًا لمعادلة معاملاتها أعدادًا حقيقية فإن $\bar{z} = a - bi$ هو جذر آخر لها.

معلومة: إذا كان z_1, z_2 جذرين تربيعيين للعدد z فإن: $z_1 + z_2 = 0$

معلومة: إذا $z_1 = z_2$ فيكون: $|z_1| = |z_2|$.

36

8 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

1 **(a)** $x = 2i \ , \ x = -2i$

(b) $x = \sqrt{-k}\, i \ , \ x = -\sqrt{-k}\, i$

2 **(a)** $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$

لا توجد حلول حقيقية للمعادلة.

(b) $x^2 - 2x + 1 - 1 + 5$

$= (x-1)^2 + 4$

(c) $(x-1)^2 + 4 = 0$

$(x-1)^2 = 4i^2$

$x = 1 - 2i \ , \ x = 1 + 2i$

3 $z^2 + 4z + 4 - 4 + 13 = 0$

$(z+2)^2 = 9i^2$

$z = -2 - 3i \ , \ z = -2 + 3i$

«حاول أن تحل»

1 $\left\{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right\}$

2 $z = x + yi \ , \ \bar{z} = x - yi$

ومنه: $x = -1$

$y = -\frac{1}{3}$

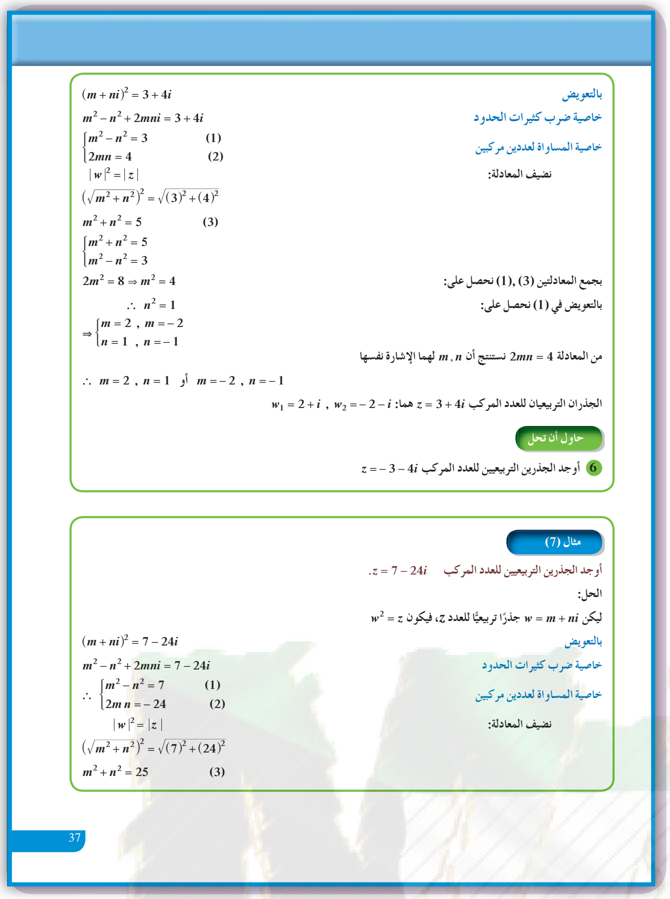
مجموعة الحل = $\left\{-1 - \frac{1}{3}i\right\}$

3 **(a)** $x^2 = -16 = 16i^2 \ , \ \{4i \ , \ -4i\}$

(b) $x^2 = -30 = 30i^2 \ , \ \{\sqrt{30}\, i \ , \ -\sqrt{30}\, i\}$

(c) $x^2 = \frac{-1}{4} = \frac{1}{4}i^2 \ , \ \left\{\frac{1}{2}i \ , \ -\frac{1}{2}i\right\}$

4 $(z-1)^2 = i^2 \ , \ \{1+i \ , \ 1-i\}$


بالتعويض $(m+ni)^2 = 3+4i$

خاصية ضرب كثيرات الحدود $m^2 - n^2 + 2mni = 3 + 4i$

خاصية المساواة لعددين مركبين $\begin{cases} m^2 - n^2 = 3 & (1) \\ 2mn = 4 & (2) \end{cases}$

نضيف المعادلة: $|w|^2 = |z|$

$\left(\sqrt{m^2+n^2}\right)^2 = \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$

$m^2 + n^2 = 5 \quad (3)$

$\begin{cases} m^2 + n^2 = 5 \\ m^2 - n^2 = 3 \end{cases}$

بجمع المعادلتين (3) ,(1) نحصل على: $2m^2 = 8 \Rightarrow m^2 = 4$

بالتعويض في (1) نحصل على: $\therefore \ n^2 = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} m = 2 \ , \ m = -2 \\ n = 1 \ , \ n = -1 \end{cases}$

من المعادلة $2mn = 4$ نستنتج أن m , n لهما الإشارة نفسها

$\therefore \ m = 2 \ , \ n = 1$ أو $m = -2 \ , \ n = -1$

الجذران التربيعيان للعدد المركب $z = 3 + 4i$ هما: $w_1 = 2 + i \ , \ w_2 = -2 - i$

حاول أن تحل

6 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = -3 - 4i$

مثال (7)

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 7 - 24i$.

الحل:

ليكن $w = m + ni$ جذرًا تربيعيًّا للعدد z، فيكون $w^2 = z$

بالتعويض $(m+ni)^2 = 7 - 24i$

خاصية ضرب كثيرات الحدود $m^2 - n^2 + 2mni = 7 - 24i$

خاصية المساواة لعددين مركبين $\therefore \begin{cases} m^2 - n^2 = 7 & (1) \\ 2mn = -24 & (2) \end{cases}$

نضيف المعادلة: $|w|^2 = |z|$

$\left(\sqrt{m^2+n^2}\right)^2 = \sqrt{(7)^2 + (24)^2}$

$m^2 + n^2 = 25 \quad (3)$

37

بجمع المعادلتين (3) ,(1) نحصل على:

$$\begin{cases} m^2+n^2=25 \\ m^2-n^2=7 \end{cases}$$

$2m^2=32 \Rightarrow m^2=16 \Rightarrow m=\pm 4$

بالتعويض في (1) نحصل على:

$n^2=9 \Rightarrow n=\pm 3$

$\because 2mn=-24 \quad , \quad -24<0$

من المعادلة $2mn=-24$ نستنتج أن m, n لهما إشارتان مختلفان.

$\therefore \quad m=4 \;,\; n=-3$ أو $m=-4 \;,\; n=3$

الجذران التربيعيان للعدد المركب $7+24i$ هما:

$w_1=4-3i \;,\; w_2=-4+3i$

حاول أن تحل

7 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z=5+12i$.

مثال (8)

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z=-21-20i$.

الحل:

ليكن $w=m+ni$ جذرًا تربيعيًّا للعدد z، فيكون $w^2=z$

بالتعويض $(m+ni)^2=-21-20i$

خاصية ضرب كثيرات الحدود $m^2-n^2+2mni=-21-20i$

خاصية المساواة لعددين مركبين $\therefore \begin{cases} m^2-n^2=-21 & (1) \\ 2mn=-20 & (2) \end{cases}$

نضيف المعادلة:

$|w|^2=|z|$

$\left(\sqrt{m^2+n^2}\right)^2=\sqrt{(-21)^2+(-20)^2}$

$m^2+n^2=29 \qquad (3)$

المعادلتان (3) ,(1) تعطيان $m^2=4$، $n^2=25$ أي $m=\pm 2$، $n=\pm 5$

المعادلة (2) تبين أن m, n مختلفتان في الإشارة.

$\therefore \quad m=-2 \;,\; n=5$ أو $m=2 \;,\; n=-5$

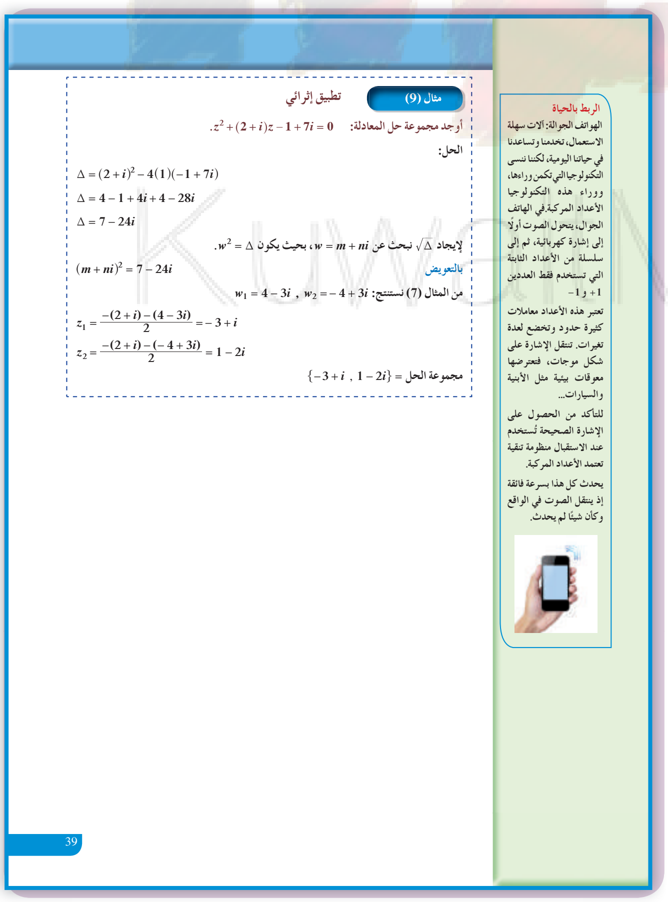
الجذران التربيعيان للعدد المركب $-21-20i$ هما:

$w_1=2-5i \;,\; w_2=-2+5i$

حاول أن تحل

8 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z=7+24i$

38



مثال (9) تطبيق إثرائي

أوجد مجموعة حل المعادلة: $z^2+(2+i)z-1+7i=0$.

الحل:

$\Delta=(2+i)^2-4(1)(-1+7i)$

$\Delta=4-1+4i+4-28i$

$\Delta=7-24i$

لإيجاد $\sqrt{\Delta}$ نبحث عن $w=m+ni$، بحيث يكون $w^2=\Delta$.

بالتعويض $(m+ni)^2=7-24i$

من المثال (7) نستنتج: $w_1=4-3i \;,\; w_2=-4+3i$

$z_1=\dfrac{-(2+i)-(4-3i)}{2}=-3+i$

$z_2=\dfrac{-(2+i)-(-4+3i)}{2}=1-2i$

مجموعة الحل $=\{-3+i \;,\; 1-2i\}$

الربط بالحياة

الهواتف الجوالة: آلات سهلة الاستعمال، تخدمنا وتساعدنا في حياتنا اليومية، لكننا ننسى التكنولوجيا التي تكمن وراءها، ووراء هذه التكنولوجيا الأعداد المركبة. في الهاتف الجوال، يتحول الصوت أولًا إلى إشارة كهربائية، ثم إلى سلسلة من الأعداد الثابتة التي تستخدم فقط العددين $+1$ و -1

تعتبر هذه الأعداد معاملات كثيرة حدود وتخضع لعدة تغيرات. تنتقل الإشارة على شكل موجات، فتعترضها معوقات بيئية مثل الأبنية والسيارات...

للتأكد من الحصول على الإشارة الصحيحة تُستخدم عند الاستقبال منظومة تنقية تعتمد الأعداد المركبة.

يحدث كل هذا بسرعة فائقة إذ ينتقل الصوت في الواقع وكأن شيئًا لم يحدث.

39

5 (a) $2\left(\dfrac{3-i}{2}\right)^2-6\left(\dfrac{3-i}{2}\right)+5$

$=4-3i-9+3i+5=0$

$\therefore$ $\dfrac{3-i}{2}$ هو أحد جذري المعادلة.

(b) $z_1\,z_2=\dfrac{c}{a} \;;\; \dfrac{3-i}{2}\times z_2=\dfrac{5}{2} \Longrightarrow z_2=\dfrac{5}{3-i}$

$\Longrightarrow z_2=\dfrac{5}{3-i}\times\dfrac{3+i}{3+i}=\dfrac{3+i}{2}$

حل آخر:

الجذر الثاني هو مرافق الجذر الأول وهو: $\dfrac{3+i}{2}$

6 $\begin{cases} m^2-n^2=-3 \\ 2mn=-4 \\ m^2+n^2=5 \end{cases}$

$m^2=1 \;,\; m=1 \;,\; m=-1$

$n^2=4 \;,\; n=2 \;,\; n=-2$

$w_1=1-2i \;,\; w_2=-1+2i$

7 $\begin{cases} m^2-n^2=5 \\ 2mn=12 \\ m^2+n^2=\sqrt{25+144}=13 \end{cases}$

$m^2=9 \;,\; m=3 \;,\; m=-3$

$n^2=4 \;,\; n=2 \;,\; n=-2$

$w_1=3+2i \;,\; w_2=-3-2i$

8 $\begin{cases} m^2-n^2=7 \\ 2mn=24 \\ m^2+n^2=\sqrt{7^2+24^2}=25 \end{cases}$

$m^2=16 \;,\; m=4 \;,\; m=-4$

$n^2=9 \;,\; n=3 \;,\; n=-3$

$w_1=4+3i \;,\; w_2=-4-3i$

المرشد لحل المسائل

إجابة «مسألة إضافية»

نكتب المعادلة:

$$z^3 - 8 + 2(\sqrt{2} - 1)z^2 - 4(\sqrt{2} - 1)z = 0$$

$$(z-2)(z^2 + 2z + 4) + 2(\sqrt{2} - 1)z(z-2) = 0$$

$$(z-2)(z^2 + 2z + 4 + 2\sqrt{2}\,z - 2z) = 0$$

$$(z-2)(z^2 + 2\sqrt{2}\,z + 4) = 0$$

ومنه $z - 2 = 0$ أي $z = 2$ وهو جذر حقيقي.

والمعادلة الثانية:

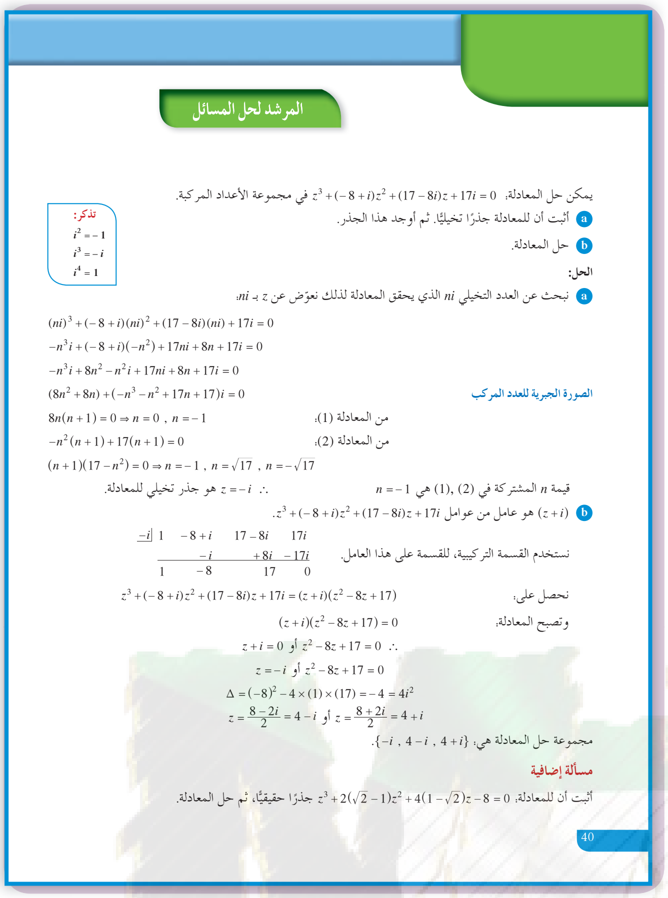
$$z^2 + 2\sqrt{2}\,z + 4 = 0$$

$$\Delta = 8 - 16 = -8 = 8i^2$$

$$z_1 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$$

$$z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$$

مجموعة الحل: $\{2, -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i\ ,\ -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i\}$



المرشد لحل المسائل

يمكن حل المعادلة: $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0$ في مجموعة الأعداد المركبة.

a أثبت أن للمعادلة جذرًا تخيليًا. ثم أوجد هذا الجذر.

b حل المعادلة.

تذكر:
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$

الحل:

a نبحث عن العدد التخيلي ni الذي يحقق المعادلة لذلك نعوّض عن z بـ ni:

$$(ni)^3 + (-8+i)(ni)^2 + (17-8i)(ni) + 17i = 0$$

$$-n^3 i + (-8+i)(-n^2) + 17ni + 8n + 17i = 0$$

$$-n^3 i + 8n^2 - n^2 i + 17ni + 8n + 17i = 0$$

الصورة الجبرية للعدد المركب

$$(8n^2 + 8n) + (-n^3 - n^2 + 17n + 17)i = 0$$

من المعادلة (1): $8n(n+1) = 0 \Rightarrow n = 0\ ,\ n = -1$

من المعادلة (2): $-n^2(n+1) + 17(n+1) = 0$

$$(n+1)(17 - n^2) = 0 \Rightarrow n = -1\ ,\ n = \sqrt{17}\ ,\ n = -\sqrt{17}$$

قيمة n المشتركة في (2) ,(1) هي $n = -1$ $\therefore$ $z = -i$ هو جذر تخيلي للمعادلة.

b $(z+i)$ هو عامل من عوامل $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i$.

نستخدم القسمة التركيبية، للقسمة على هذا العامل.

$$\begin{array}{r|cccc} -i & 1 & -8+i & 17-8i & 17i \\ & & -i & +8i & -17i \\ \hline & 1 & -8 & 17 & 0 \end{array}$$

نحصل على: $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(z^2 - 8z + 17)$

وتصبح المعادلة: $(z+i)(z^2 - 8z + 17) = 0$

$\therefore$ $z + i = 0$ أو $z^2 - 8z + 17 = 0$

$z = -i$ أو $z^2 - 8z + 17 = 0$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times (1) \times (17) = -4 = 4i^2$$

$z = \frac{8-2i}{2} = 4 - i$ أو $z = \frac{8+2i}{2} = 4 + i$

مجموعة حل المعادلة هي: $\{-i\ ,\ 4-i\ ,\ 4+i\}$.

مسألة إضافية

أثبت أن للمعادلة: $z^3 + 2(\sqrt{2}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{2})z - 8 = 0$ جذرًا حقيقيًا، ثم حل المعادلة.

40

مخطط تنظيمي للوحدة السابعة

ملخص

- العدد المركب هو عدد على الصورة $a + bi$ حيث a, b عددان حقيقيان.
- لأي عدد حقيقي موجب a، $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,i$
- الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = a + bi$ حيث a, b عددان حقيقيان ويسمى a الجزء الحقيقي وb الجزء التخيلي.
- يكون عددان مركبان متساويان إذا وفقط إذا تساوى جزءاهما الحقيقيان وتساوى جزءاهما التخيليان.
- إذا ساوى عدد مركب الصفر فإن جزءه الحقيقي يساوي الصفر وجزءه التخيلي يساوي الصفر أيضًا.
- يمكن تمثيل العدد المركب $z = a + bi$ بالزوج المرتب (a, b) وتعرف بالصورة الديكارتية للعدد المركب.
- لجمع (أو طرح) أعداد مركبة نجمع (أو نطرح) الأجزاء الحقيقية معًا والأعداد التخيلية معًا كل منهما بشكل منفصل عن الآخر.
- المعكوس الجمعي للعدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $-z = -a - bi$
- إذا كان $z_1 = a_1 + b_1 i\ ,\ z_2 = a_2 + b_2 i$ فإن $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$
- إذا كان p عدد كلي: $i^{4p} = 1\ ,\ i^{4p+1} = i\ ,\ i^{4p+2} = -1\ ,\ i^{4p+3} = -i$
- مرافق العدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $\bar{z} = a - bi$
- خواص المرافق:
  - $z + \bar{z} = 2a$
  - $z - \bar{z} = 2bi$
  - $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$
  - $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
  - $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
  - $\overline{(\bar{z}_1)} = z_1$
  - $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\ ,\ z_2 \neq 0$
- لقسمة عدد مركب z_1 على عدد مركب z_2 غير صفري نكتبهما على شكل كسر على الصورة $\frac{z_1}{z_2}$، نبسط الكسر ثم نضرب البسط والمقام في مرافق مقام الكسر.
- القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ هي المسافة بين الصورة الديكارتية (a, b) لهذا العدد ونقطة الأصل $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- الإحداثيات القطبية للنقطة M هي الزوج المرتب (r, θ) حيث $r = OM$، θ قياس الزاوية الموجهة في الوضع القياسي.
- الصورة المثلثية للعدد المركب $z = a + bi$ هي $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، حيث $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
  $\sin\theta = \frac{y}{r}\ ,\ \cos\theta = \frac{x}{r}\ ,\ \tan\theta = \frac{y}{x}$

41

اختبار الوحدة السابعة

في التمارين (4—1)، بسّط كلًّا من التعابير التالية:

(1) $4\sqrt{-9}-2$ **(2)** $(4-i)+(5-9i)$

(3) $(-3+2i)-(6+i)$ **(4)** $(2+3i)(8-5i)$

(5) أوجد المعكوس الجمعي والمعكوس الضربي للعدد $3-7i$

(6) أوجد القيمة المطلقة للعدد $7-2i$

(7) أوجد كلًّا مما يلي:

(a) $-3i^{77}$ **(b)** i^{50} **(c)** $(-2+3i)^2$

(8) أوجد مجموعة حلّ المعادلة: $2x^2+10=0$

(9) اكتب الكسر $\frac{1+3i}{3+2i}$ في الصورة الجبرية، ثم حوّلها إلى صورة المثلثية.

(10) أوجد مجموعة حل المعادلة: $\frac{z+1}{z-1}=2i$

(11) أوجد مرافق العدد $\frac{3-i}{1+i}$

(12) حل المعادلة: $2z^2-6z+5=0$

(13) اكتب الأعداد المركبة التالية في صورة المثلثية:

(a) $\frac{1}{2}$ **(b)** $-3i$ **(c)** $2\sqrt{3}+6i$

(14) اكتب العدد $-3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ في الصورة المثلثية مستخدمًا السعة الأساسية.

(15) اكتب العدد $\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ في الصورة الجبرية.

(16) أوجد الجذرين التربيعيين للعدد $-8+6i$

(17) **(a)** أثبت أن $-2+\frac{3}{2}i$ هو أحد جذري المعادلة: $4z^2+16z+25=0$

(b) أوجد الجذر الآخر.

تمارين إثرائية

(1) أثبت أن النقاط الممثلة للأعداد:

i، $-i$، $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$، $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$، $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ تنتمي إلى دائرة واحدة.

(2) اكتب العدد $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$ في صورة المثلثية.

(3) أثبت أن النقاط A, B, C, D الممثلة للأعداد المركبة $z_A=1$، $z_B=1\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$،

$z_C=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$، $z_D=2$ تشكل معينًا.

(4) اكتب العدد $z=\sin\alpha-i\cos\alpha$ في الصورة المثلثية مستخدمًا السعة الأساسية.

(5) أثبت أن $(1+i)^8$ هو عدد حقيقي موجب.

(6) إذا كان $|z|=1$، أثبت أن $\overline{z}=\frac{1}{z}$

(7) **(a)** أثبت أن $1+i$ هو أحد أصفار $f(z)=z^3+(-2+3i)z^2+(13-i)z-6-10i$

(b) استخدم القسمة التركيبية لتوجد ناتج قسمة $f(z)$ على $z=1+i$

(8) أوجد مجموعة النقاط M الممثلة للعدد المركب z بحيث تكون سعته الأساسية تساوي $\frac{\pi}{3}$

(9) **(a)** أثبت أن: $1+i$، $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ هما جذران للمعادلة: $z^4-z^3+z^2+2=0$ (1)

(b) أوجد مجموعة حل المعادلة (1).

(c) أثبت أن $f(z)=z^4-z^3+z^2+2$ يمكن أن تكتب على شكل كثيرتي حدود من الدرجة الثانية مضروبَتين في بعضهما بعضًا.

(10) **(a)** أثبت أن -1 هو أحد أصفار $f(z)=z^2+2(3-i)z+5-2i$

(b) أوجد الصفر الثاني.