الوحدة الرابعة: الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Functions

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

4 – 1: استكشاف النماذج الأسية

جزء 1: استخدام الدوال الأسية.

4 – 2: الدوال الأسية وتمثيلها بيانيًّا

جزء 1: التمثيل البياني للدوال الأسية.

جزء 2: الرمز e.

4 – 3: الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها بيانيًّا

جزء 1: كتابة المقادير اللوغاريتمية وحسابها.

جزء 2: التمثيل البياني للدوال اللوغاريتمية.

جزء 3: انسحاب الدوال اللوغاريتمية.

4 – 4: خواص اللوغاريتمات

جزء 1: خواص اللوغاريتمات.

جزء 2: تطبيقات على خواص اللوغاريتمات.

4 – 5: المعادلات الأسية واللوغاريتمية

جزء 1: حل معادلات أسية.

جزء 2: حل معادلات لوغاريتمية.

4 – 6: اللوغاريتم الطبيعي

مقدمة الوحدة


الوحدة الرابعة

الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Functions

مشروع الوحدة: الآثار المتبقية

1 مقدمة المشروع: علماء الآثار هم مجموعة من العلماء يهتمون بدراسة إنجازات الحضارات القديمة من خلال آثارها الباقية. نذكر منها على سبيل المثال المومياوات المصرية الشهيرة التي حفظت منذ حوالى 400 3 سنة ق. م ولا تزال معروضة حتى الآن في المتحف الوطني المصري.

2 الهدف: في هذه الوحدة، سوف تتحرى طرائق مختلفة لتحديد عمرقطعة أثرية.

3 اللوازم: آلة حاسبة علمية.

4 أسئلة حول التطبيق:

إحدى طرائق تأريخ الإبداعات الإنسانية تسمى التأريخ بالكربون المشع.

العناصر التي تمّ سردها في الجدول تمّ اكتشافها داخل المقابر الأثرية.

استخدم العلاقة: $t = 1.904 \times 10^4 \times \log\left(\frac{13.7}{n}\right)$

حيث تمثل "t" عمر العنصر بالسنوات، و"n" عدد انبعاثات أشعة بيتا كل دقيقة لكل جرام من الكربون في العنصر.

المومياء

العنصر	وزن الكربون بالجرام (g)	انبعاثات أشعة بيتا لكل دقيقة
عظم ماموث	400	1 640 ± 30
شظايا عظمية	15	61.5 ± 1.5
قطعة فخار	25	342 ± 7
فحم نباتي	10	41.0 ± 1.3
قصبة رمح	250	1 020 ± 30

الماموث

a احسب عمر كل عنصر.

b ما الاستثناء في البيانات أعلاه؟ كيف يمكنك تفسيره؟

c التأريخ بالإشعاع الكربوني هي طريقة لاستخدام معلومات عن فترة نصف العمر لنظير ما لتحديد عمر عنصر، للكربون (c – 14) هي 40 ± 730 5 سنة. مقبض فأس فيه 42 g من الكربون (c – 14) يعتقد أنه كان موجودًا منذ حوالى 040 19سنة.

اشرح كيف يمكن لعالم آثار استخدام العلاقة أعلاه لإيجاد معدل انبعاث أشعة بيتا من مقبض الفأس.

5 التقرير: ضع تقريرًا مفصلًا حول تنفيذ المشروع مستفيدًا من دروس الوحدة. ضمّن تقريرك صورًا لآثار قديمة وملصقًا ورسومًا بيانية سبق أن استخدمتها.

دروس الوحدة

استكشاف النماذج الأسية	الدوال الأسية وتمثيلها بيانيًا	الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها بيانيًا	خواص اللوغاريتمات	المعادلات الأسية واللوغاريتمية	اللوغاريتم الطبيعي
4–1	4–2	4–3	4–4	4–5	4–6

124

يدرس علماء الآثار أي دليل قد يساعدهم على التعرف إلى حياة البشر الذين عاشوا على سطح الأرض في العصور القديمة، فتتنوع الأدلة الأثرية بين بقايا مدينة وبعض قطع الحجارة والعظام والأواني وغيرها. يستخدم علماء الآثار تقنيات مغناطيسية ووسائل خاصة بهدف جمع الدلائل الأثرية بطريقة دقيقة ومنهجية، ثم ينظمون سجلات تفصيلية عن هذه الآثار.

الهدف الأساسي لعلم الآثار هو دراسة الإنسان منذ بداية ظهوره، ومخلفاته التي تركها على مدى العصور، والحقبات التي مرت.

من المعروف أنه تبعًا لبعض التقديرات، فإن عمر الإنسان على الأرض يعود إلى حوالى عشرة ملايين سنة. لذا يعتبر علم الآثار مهمًّا في الكشف عن حضارات وثقافات لم تكن الكتابة خلالها معروفة. وذلك أن الكتابة لا يعدو تاريخ معرفتها أكثر من ستة آلاف سنة، وهي قد بدأت في وادي النيل وفي بلاد ما بين النهرين وذلك في القرن الثاني والثلاثين قبل الميلاد. يركز عالم الآثار اهتمامه على كل شيء يعثر عليه لأنه يجد فيه مادته التي يبني عليها معلوماته.

أدّى العثور في تربة جافة في مدينة «أور» في العراق على طبعة قيثارة من الخشب بليت بالكامل مما أدى إلى إعادة تشكيلها وهي تعود إلى عصر حضارة «سومر».

مشروع الوحدة

يقدم مشروع الوحدة إحدى الوسائل المستخدمة في تأريخ الإبداعات الإنسانية وتعرف الحضارات التي سادت على الأرض في العصور الغابرة.

إن استخدام الكربون المشع في العلاقة:

$t = 1.904 \times 10^4 \times \log \dfrac{13.7}{n}$ يوفر لعالم الآثار فرصة لإيجاد عمر العنصر بالسنوات بدلالة انبعاث أشعة بيتا.

حيث log هي اختصار لكلمة logarithm اعتيادي وأساسه العدد 10، n عدد انبعاثات أشعة بيتا في الدقيقة.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

(a) عظم ماموث: 9976 سنة

شظايا عظمية: 9976 سنة

قطعة فخار: 12 سنة

فحم نباتي: 9976 سنة

قصبة رمح: 10016 سنة

(b) إن عمر قطعة الفخار لم يتطابق مع أعمار بقية العناصر في الجدول.

(c) في العلاقة نعوض المتغير التابع t بالقيمة 040 19، ونوجد قيمة n، ثم نضرب قيمة n في العدد 42 فنحصل على الإجابة.

التقرير

اكتب تقريرًا مفصلًا عن النتائج التي توصلت إليها. اعرض مشروعك مصورًا أمام زملائك في غرفة الصف. ناقش معهم جميع النقاط الواردة، ثم أعد النظر ببعضها إذا كان ذلك ضروريًّا، وتأكد من حساباتك.

الوحدة الرابعة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت نمذجة الدوال الخطية وحل معادلات خطية.
- تعلمت نمذجة الدوال التربيعية وحل معادلات تربيعية.
- تعلمت نمذجة دوال كثيرات الحدود وحل معادلات كثيرات الحدود.
- تعلمت إيجاد معكوس الدالة وتمثيله بيانيًّا.

ماذا سوف تتعلم؟

- تمثيل النمو الأسي والتضاؤل الأسي.
- تمثيل بيان بعض الدوال الأسية.
- استخدام الرمز e كأساس.
- إيجاد قيمة المقادير اللوغاريتمية.
- تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا.
- اختصار المقادير اللوغاريتمية وفكها.
- حل معادلات أسية.
- استخدام اللوغاريتمات والأسس لحل معادلات لوغاريتمية.
- علاقة اللوغاريتم الطبيعي بالدالة الأسية.

المصطلحات الأساسية

الدوال الأسية – معامل النمو – معامل التضاؤل – الرمز e – الدوال اللوغاريتمية – اللوغاريتمات المعتادة – المعادلات الأسية – اللوغاريتم الطبيعي.

أضف إلى معلوماتك

تستخدم الدوال الأسية لتمثيل الاضمحلال الإشعاعي في المادة الإشعاعية، ولتمثيل نمو البكتيريا، ولحل المسائل التي تتضمن نموًّا أو تضاؤلًا أسيًّا. فإنك تحتاج إلى معرفة كيفية استخدام الدوال الأسية ومعكوساتها وهي الدوال اللوغاريتمية.

معلومة جغرافية:
جزيرة فيلكا (فيلجا) جزيرة كويتية تبلغ مساحتها $43\ km^2$. تقع في الركن الشمالي الغربي من الخليج العربي وتبعد 20 km عن سواحل مدينة الكويت. تتخذ شكل مثلث قاعدته من الغرب ورأسه في الجنوب الشرقي. يُعتقد أن اسمها مشتق من كلمة إغريقية تعني نقطة تمركز أو موقع بعيد. تُعد أرضها من الأراضي الطينية الصالحة للزراعة.

وفي الجزيرة أيضًا آثار تعود للاسكندر المقدوني ومقام للعبد الصالح الخضر وتلال أثرية تعود إلى الألف الثالث قبل الميلاد. في عام 1973 عثر في الجزيرة على «حجر سويتلس» منقوش عليه باللغة اليونانية وإثر هذا الاكتشاف بدأت عمليات التنقيب عن الآثار مما أظهر ارتباط الجزيرة بحضارة دلمون تلك الحضارة التي كانت تضم البحرين والساحل الشرقي لشبه الجزيرة العربية.

125

سلّم التقييم	
4	الحسابات دقيقة بالكامل – البحث والشروح موثقة وصحيحة – العرض واضح ويقدم المعطيات بطريقة منطقية.
3	معظم الحسابات دقيقة – البحث والشروح بحاجة إلى بعض الإيضاح – معظم العرض واضح.
2	تتضمن الحسابات أخطاء كثيرة – البحث والشروح غير واضحة – العرض غير منظم وغير مقبول.
1	معظم عناصر المشروع ناقصة.

4–1: استكشاف النماذج الأسية

1 الأهداف

- يتعرف كيفية تمثيل النمو الأسي وتطبيقاته.
- يتعرف كيفية تمثيل التضاؤل الأسي وتطبيقاته.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

الدوال الأسية – عامل النمو – عامل التضاؤل – النسبة المئوية للتغير – نمو أسي – تضاؤل أسي – عامل التغير – معدل التغير.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – ورق رسم بياني – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(1) أوجد ناتج ما يلي:

(a) $x^3 \times x^4$

(b) $(x^2)^5$

(c) $\dfrac{x^7}{x^3}$

(d) $x^4 \times y^2 \times x^5 \times y^{-1}$

(2) إذا كان $f(x) = 2^{x+1}$ ، فأوجد:

(a) $f(-1)$ **(b)** $f(0)$ **(c)** $f(0.1)$

5 التدريس

سوف يتعرف الطالب نموذج الدالة الأسية حيث يستكشف لأول مرة، دالة أساسها ثابت والأس متغير، بعد أن كان يتعامل مع دوال مكونة من حدوديات أساسها متغير وأسها ثابت. لذا، كان من المهم متابعة عمل الطلاب في فقرة «عمل تعاوني» للتأكد من كونهم قد تفهموا أن كل فريقين سوف يتنافسان في كل مبارايات، وأنه في كل دورة جميع الفرق المتبقية سوف تشارك في المباراة. أخبرهم أن عدد الفرق المشاركة هو 64 وعدد المباريات في الدورة الأولى هو 32، ويجب أن يكون هناك فريق رابح في كل لعبة، ولا يوجد انسحابات من بين الفرق المشاركة.

4–1

سوف تتعلم
- تمثيل النمو الأسي.
- تمثيل التضاؤل الأسي.

المفردات والمصطلحات:
- الدوال الأسية Exponential Functions
- عامل النمو Growth Factor
- عامل التضاؤل Decay Factor
- النسبة المئوية للتغير Percent of Change
- نمو أسي Exponential Growth
- تضاؤل أسي Exponential Decay
- عامل التغير Variation Factor
- معدل التغير Rate of Change

استكشاف النماذج الأسية

Exploring Exponential Models

عمل تعاوني

تقام في دولة الكويت مسابقات لكرة قدم الصالات ويشترك فيها 64 فريقًا مختلفًا، على أن يستبعد الفريق الخاسر من المنافسة في كل مباراة.

1 اعمل مع زميل لك لتحديد عدد الفرق المتبقية في المسابقة بعد الدور الأول من المسابقة.

2 a أكمل الجدول حتى يتبقى فريق واحد.

بعد الدور (x)	عدد الفرق المتبقية في المسابقة (y)
0	64
1	
2	
⋮	⋮

b كم دورًا يجب لعبه حتى نهاية المسابقة؟

3 عيّن النقاط (x, y) من جدولك على ورقة رسم بياني.

4 هل الرسم البياني يمثل دالة خطية؟ فسّر إجابتك.

5 كيف تقارن عدد الفرق المتبقية في كل دور بعدد الفرق في الدور الذي يسبقه؟

استخدام الدوال الأسية Using Exponential Functions

تعتبر الدالة التي تمثل عدد الفرق المتبقية في مسابقة كرة قدم الصالات بعد كل دورة مثالًا على الدالة الأسية.

الدالة:

$\forall x \in \mathbb{R}$ $y = ab^x$

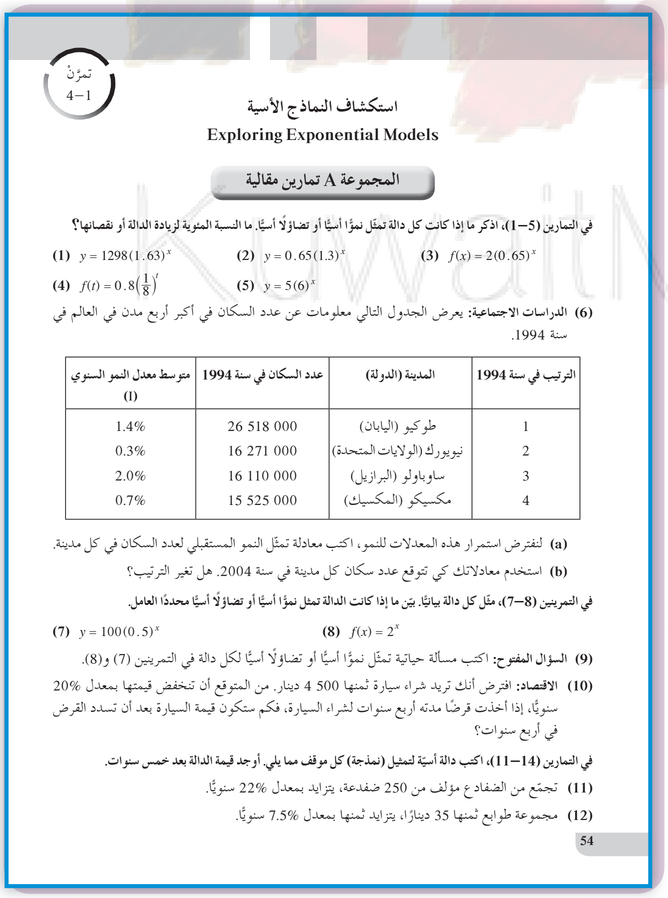
$a \in \mathbb{R}^*$ (عدد ثابت)

$b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ (الأساس)

تسمى دالة أسية.

الدالة الأسية التي فيها $a > 0$ يمكن أن تستخدم كنموذج للنمو أو للتضاؤل معتمدًا على قيمة b، كالتالي:

126



تمرَّنْ 4–1

استكشاف النماذج الأسية

Exploring Exponential Models

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (5–1)، اذكر ما إذا كانت كل دالة تمثّل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا. ما النسبة المئوية لزيادة الدالة أو نقصانها؟

(1) $y = 1298(1.63)^x$ **(2)** $y = 0.65(1.3)^x$ **(3)** $f(x) = 2(0.65)^x$

(4) $f(t) = 0.8\left(\frac{1}{8}\right)^t$ **(5)** $y = 5(6)^x$

(6) الدراسات الاجتماعية: يعرض الجدول التالي معلومات عن عدد السكان في أكبر أربع مدن في العالم في سنة 1994.

الترتيب في سنة 1994	المدينة (الدولة)	عدد السكان في سنة 1994	متوسط معدل النمو السنوي (I)
1	طوكيو (اليابان)	26 518 000	1.4%
2	نيويورك (الولايات المتحدة)	16 271 000	0.3%
3	ساوباولو (البرازيل)	16 110 000	2.0%
4	مكسيكو (المكسيك)	15 525 000	0.7%

(a) لنفترض استمرار هذه المعدلات للنمو، اكتب معادلة تمثّل النمو المستقبلي لعدد السكان في كل مدينة.

(b) استخدم معادلاتك كي تتوقع عدد سكان كل مدينة في سنة 2004. هل تغير الترتيب؟

في التمرينين (8–7)، مثّل كل دالة بيانيًّا. بيّن ما إذا كانت الدالة تمثل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا محددًا العامل.

(7) $y = 100(0.5)^x$ **(8)** $f(x) = 2^x$

(9) السؤال المفتوح: اكتب مسألة حياتية تمثّل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا لكل دالة في التمرينين (7) و(8).

(10) الاقتصاد: افترض أنك تريد شراء سيارة ثمنها 4 500 دينار. من المتوقع أن تنخفض قيمتها بمعدل 20% سنويًّا، إذا أخذت قرضًا مدته أربع سنوات لشراء السيارة، فكم ستكون قيمة السيارة بعد أن تسدد القرض في أربع سنوات؟

في التمارين (14–11)، اكتب دالة أسيّة لتمثيل (نمذجة) كل موقف مما يلي. أوجد قيمة الدالة بعد خمس سنوات.

(11) تجمّع من الضفادع مؤلف من 250 ضفدعة، يتزايد بمعدل 22% سنويًّا.

(12) مجموعة طوابع ثمنها 35 دينارًا، يتزايد ثمنها بمعدل 7.5% سنويًّا.

54

في المثال (1)

اطلب إلى الطلاب ملاحظة الفرق بين x^2 , 2^x. دعهم يكونون جدولًا للدالة x^2 بالقيم نفسها التي استخدمت للدالة 2^x، ثم رسم بيان الدالة x^2 لملاحظة الفرق بينهما. اسألهم ما إذا كانت هذه الدالة تزايدية أم تناقصية.

في المثال (2)

اسأل ما إذا كانت هذه الدالة تزايدية أم تناقصية، وكيفية اختلافها عن الدالة في المثال (1). اطلب إليهم التمعن بأساس كل دالة، ثم كتابة الاستنتاج.

في المثال (3)

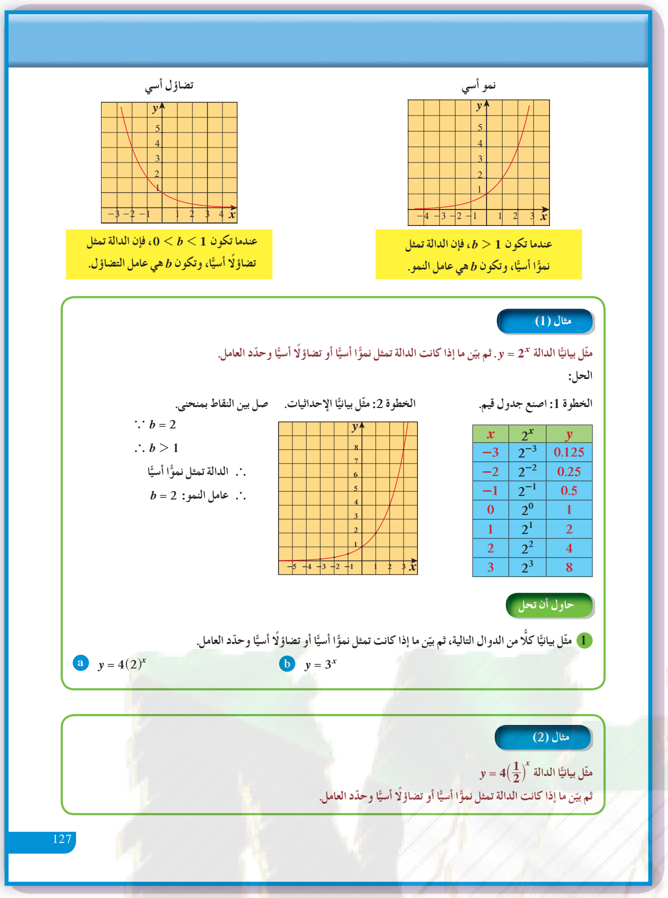
هو تطبيق الدالة الأسية على نمو السكان. ساعدهم على فهم عامل النمو. أخبرهم أن عامل النمو (عامل التضاؤل) سيكون دائمًا هو الأساس في الدالة الأسية، وأن $b = 1 + \mathrm{I}$، حيث I هو معدّل التغير (موجبًا أو سالبًا).

في المثال (4)

يبيّن كيفية إيجاد دالة أسية إذا كان رسمها البياني يمر عبر نقطتين، علمًا بأن الدالة الأسية $y = ab^x$ تتضمن ثابتين a, b لذا يجب معرفة إحداثيات نقطتين.

في المثال (5)

يوفر هذا المثال فرصة أمام الطالب لتعرف كيفية استخدام الدالة الأسية في الانخفاض (التناقص) باستخدام القاعدة $y = ab^x$، حيث b هي أساس الدالة الأسية، وهي قيمة الانخفاض (التناقص) وتكون قيمة ثابتة.



نمو أسي

تضاؤل أسي

عندما تكون $b > 1$، فإن الدالة تمثل نموًّا أسيًّا، وتكون b هي عامل النمو.

عندما تكون $0 < b < 1$، فإن الدالة تمثل تضاؤلًا أسيًّا، وتكون b هي عامل التضاؤل.

مثال (1)

مثّل بيانيًّا الدالة $y = 2^x$. ثم بيّن ما إذا كانت الدالة تمثل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا وحدّد العامل.

الحل:

الخطوة 1: اصنع جدول قيم.

x	2^x	y
-3	2^{-3}	0.125
-2	2^{-2}	0.25
-1	2^{-1}	0.5
0	2^0	1
1	2^1	2
2	2^2	4
3	2^3	8

الخطوة 2: مثّل بيانيًّا الإحداثيات. صل بين النقاط بمنحنى.

$\because b = 2$

$\therefore b > 1$

$\therefore$ الدالة تمثل نموًّا أسيًّا

$\therefore$ عامل النمو: $b = 2$

حاول أن تحل

1 مثّل بيانيًّا كلًّا من الدوال التالية، ثم بيّن ما إذا كانت تمثل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا وحدّد العامل.

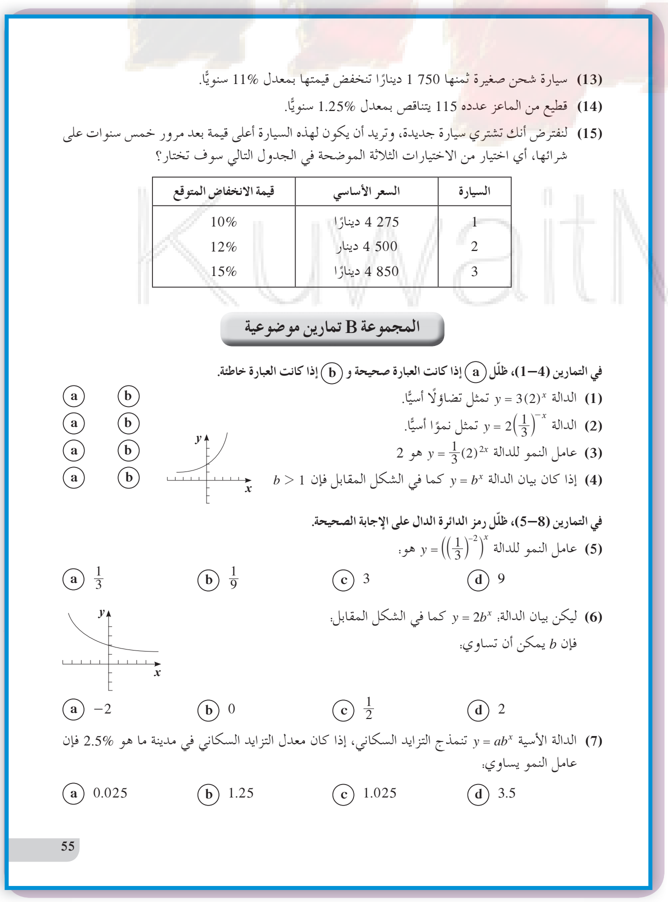
(a) $y = 4(2)^x$ (b) $y = 3^x$

مثال (2)

مثّل بيانيًّا الدالة $y = 4\left(\frac{1}{2}\right)^x$

ثم بيّن ما إذا كانت الدالة تمثل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا وحدّد العامل.

127



(13) سيارة شحن صغيرة ثمنها 750 1 دينارًا تنخفض قيمتها بمعدل 11% سنويًّا.

(14) قطيع من الماعز عدده 115 يتناقص بمعدل 1.25% سنويًّا.

(15) لنفترض أنك تشتري سيارة جديدة، وتريد أن يكون لهذه السيارة أعلى قيمة بعد مرور خمس سنوات على شرائها، أي اختيار من الاختيارات الثلاثة الموضحة في الجدول التالي سوف تختار؟

السيارة	السعر الأساسي	قيمة الانخفاض المتوقع
1	275 4 دينارًا	10%
2	500 4 دينار	12%
3	850 4 دينارًا	15%

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة $y = 3(2)^x$ تمثل تضاؤلًا أسيًّا. (a) (b)

(2) الدالة $y = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$ تمثل نموًّا أسيًّا. (a) (b)

(3) عامل النمو للدالة $y = \frac{1}{3}(2)^{2x}$ هو 2 (a) (b)

(4) إذا كان بيان الدالة $y = b^x$ كما في الشكل المقابل فإن $b > 1$ (a) (b)

في التمارين (5–8)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) عامل النمو للدالة $y = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right)^x$ هو:

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{9}$ (c) 3 (d) 9

(6) ليكن بيان الدالة: $y = 2b^x$ كما في الشكل المقابل: فإن b يمكن أن تساوي:

(a) -2 (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 2

(7) الدالة الأسية $y = ab^x$ تنمذج التزايد السكاني، إذا كان معدل التزايد السكاني في مدينة ما هو 2.5% فإن عامل النمو يساوي:

(a) 0.025 (b) 1.25 (c) 1.025 (d) 3.5

55

6 الربط

المثالان (5) ,(3) يوفران فرصة أمام الطلاب لتعرف كيفية استخدام الدوال الأسية، لإيجاد التزايد أو التناقص في عدد السكان أو في استهلاك منتج معين خلال فترة زمنية محددة.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في كتابة النسبة المئوية لتزايد عدد السكان، فمثلًا 2% زيادة قد يحولونها إلى 0.2 في الصورة العشرية وهذا خطأ.

أخبرهم أن 2% هي $\frac{2}{100}$ وهي أصغر من 1، لذا تكون 2% هي 0.02 وليس 0.2 والتي تعادل 20%.

a أوجد عامل النمو.

b كوّن الدالة الأسية التي تنمذج التغير السكاني حيث بلغ عدد سكان الكويت من المواطنين 598 038 1 مواطنًا في سنة 2007.

(المصدر: الإدارة المركزية للإحصاء)

c إذا افترضنا أن معدل التزايد ثابت، فكم سيكون عدد سكان الكويت من المواطنين سنة 2013؟

الحل:

a عامل النمو:

$b = 1 + I$

$= 1 + 0.0244$ $\quad (I = 2.44\% = \frac{2.44}{100} = 0.0244)$

$\therefore b = 1.0244$

b يتزايد السكان أسيًا لذلك نستخدم الدالة الأسية $y = ab^x$،

حيث x عدد السنوات بعد 2007، y عدد السكان بالمليون.

أي أن:

$y = a(1.0244)^x$

$y = 1\,038\,598$ (عدد السكان سنة 2007)

$1\,038\,598 = a(1.0244)^0$ عندما $x = 0$ (سنة البدء 2007)

$1\,038\,598 = a \times 1$ أي عدد غير صفري مرفوع للأس صفر يساوي واحد

$a = 1\,038\,598$

$\therefore$ دالة التغير السكاني هي:

$y = 1\,038\,598(1.0244)^x$

c سنة 2013 هي السنة السادسة

أي أن $x = 6$

$y = 1\,038\,598(1.0244)^6$

$y \approx 1\,200\,231$

من المتوقع أن يصبح عدد مواطني الكويت مليون ومئتي ألف و 231 نسمة في سنة 2013.

حاول أن تحل

3 من المعلومات في مثال (3)

a إذا بقي معدل التزايد ثابتًا، فكم تتوقع أن يكون عدد مواطني الكويت سنة 2017؟

b التفكير الناقد: لماذا قد لا يكون التوقع صحيحًا لسنة 2017؟

يمكن كتابة دالة أسية بمعلومية نقطتين على رسمها البياني.

مثال (4)

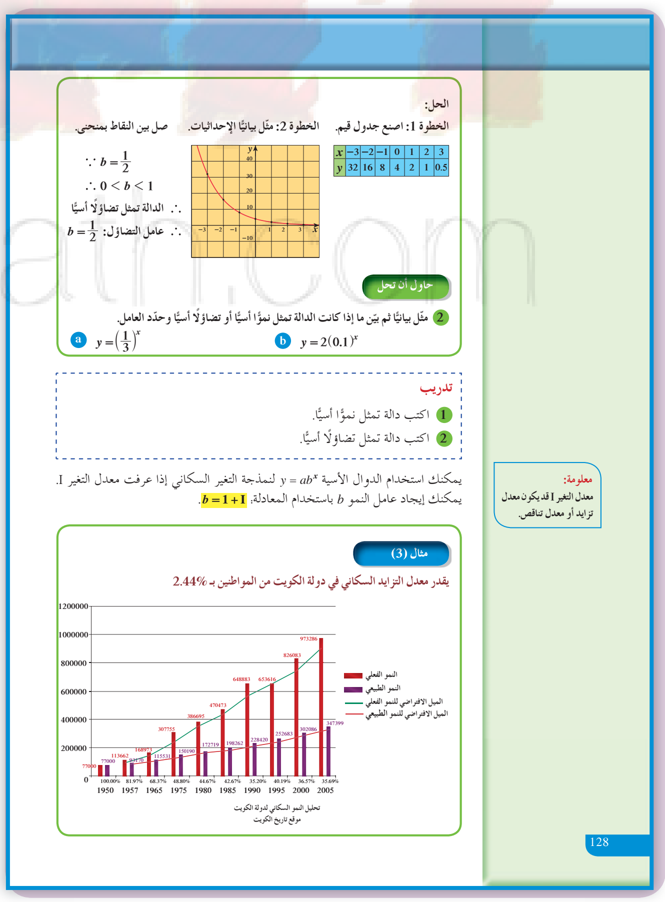
اكتب دالة أسية: $y = ab^x$، يمر بيانها بالنقطتين: $P(2, 2)$, $Q(3, 4)$

الحل:

استخدم الدالة الأسية $y = ab^x$

عوّض عن (x, y) بـ $(2, 2)$ $ab^2 = 2$

129



الحل:

الخطوة 1: اصنع جدول قيم. الخطوة 2: مثّل بيانيًا الإحداثيات. صل بين النقاط بمنحنى.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	32	16	8	4	2	1	0.5

$\because b = \frac{1}{2}$

$\therefore 0 < b < 1$

$\therefore$ الدالة تمثل تضاؤلًا أسيًا

$\therefore$ عامل التضاؤل: $b = \frac{1}{2}$

حاول أن تحل

2 مثّل بيانيًا ثم بيّن ما إذا كانت الدالة تمثل نموًا أسيًا أو تضاؤلًا أسيًا وحدّد العامل.

a $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ b $y = 2(0.1)^x$

تدريب

1 اكتب دالة تمثل نموًا أسيًا.

2 اكتب دالة تمثل تضاؤلًا أسيًا.

يمكنك استخدام الدوال الأسية $y = ab^x$ لنمذجة التغير السكاني إذا عرفت معدل التغير I.

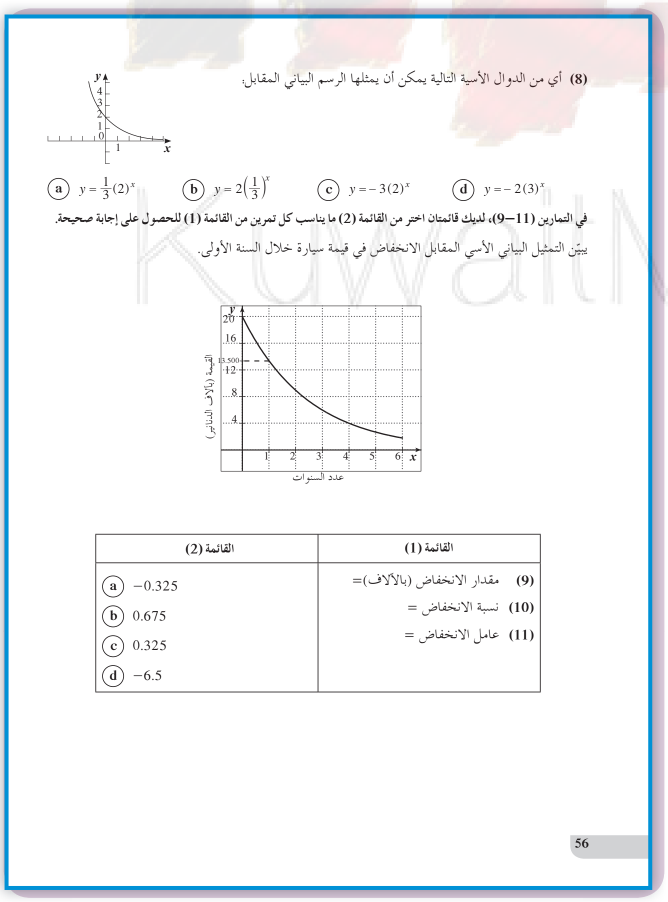
يمكنك إيجاد عامل النمو b باستخدام المعادلة: $b = 1 + I$.

معلومة:
معدل التغير I قد يكون معدل تزايد أو معدل تناقص

مثال (3)

يقدر معدل التزايد السكاني في دولة الكويت من المواطنين بـ 2.44%

128



(8) أي من الدوال الأسية التالية يمكن أن يمثلها الرسم البياني المقابل

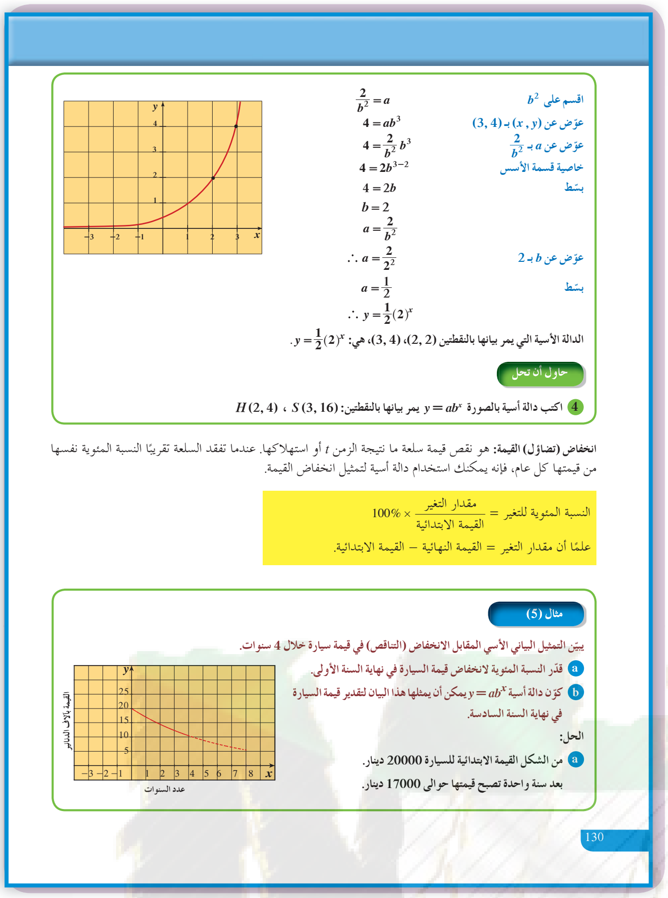
a $y = \frac{1}{3}(2)^x$ b $y = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x$ c $y = -3(2)^x$ d $y = -2(3)^x$

في التمارين (9–11)، لديك قائمتان اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين من القائمة (1) للحصول على إجابة صحيحة.

يبيّن التمثيل البياني الأسي المقابل الانخفاض في قيمة سيارة خلال السنة الأولى.

القائمة (1)	القائمة (2)
(9) مقدار الانخفاض (بالآلاف)=	a -0.325
(10) نسبة الانخفاض =	b 0.675
(11) عامل الانخفاض =	c 0.325
	d -6.5

56



اقسم على b^2 $\quad \frac{2}{b^2} = a$

عوّض عن (x, y) بـ $(3, 4)$ $\quad 4 = ab^3$

عوّض عن a بـ $\frac{2}{b^2}$ $\quad 4 = \frac{2}{b^2} b^3$

خاصية قسمة الأسس $\quad 4 = 2b^{3-2}$

بسّط $\quad 4 = 2b$

$b = 2$

$a = \frac{2}{b^2}$

عوّض عن b بـ 2 $\quad \therefore a = \frac{2}{2^2}$

بسّط $\quad a = \frac{1}{2}$

$\therefore y = \frac{1}{2}(2)^x$

الدالة الأسية التي يمر بيانها بالنقطتين $(2, 2)$، $(3, 4)$، هي: $y = \frac{1}{2}(2)^x$.

حاول أن تحل

4 اكتب دالة أسية بالصورة $y = ab^x$ يمر بيانها بالنقطتين: $S(3, 16)$ ، $H(2, 4)$

انخفاض (تضاؤل) القيمة: هو نقص قيمة سلعة ما نتيجة الزمن t أو استهلاكها. عندما تفقد السلعة تقريبًا النسبة المئوية نفسها من قيمتها كل عام، فإنه يمكنك استخدام دالة أسية لتمثيل انخفاض القيمة.

النسبة المئوية للتغير = $\frac{\text{مقدار التغير}}{\text{القيمة الابتدائية}} \times 100\%$

علمًا أن مقدار التغير = القيمة النهائية − القيمة الابتدائية.

مثال (5)

يبيّن التمثيل البياني الأسي المقابل الانخفاض (التناقص) في قيمة سيارة خلال 4 سنوات.

a قدّر النسبة المئوية لانخفاض قيمة السيارة في نهاية السنة الأولى.

b كوّن دالة أسية $y = ab^x$ يمكن أن يمثلها هذا البيان لتقدير قيمة السيارة في نهاية السنة السادسة.

الحل:

a من الشكل القيمة الابتدائية للسيارة 20000 دينار.

بعد سنة واحدة تصبح قيمتها حوالى 17000 دينار.

130

8 التقييم

تساعد فقرات «حاول أن تحل» المعلم على متابعة الطلاب وإدراك مدى فهمهم هذا النموذج الجديد من الدوال.

اختبار سريع

1 هل الدالة $y = 234(0.87)^x$ تمثل نموًّا أسيًّا أم تضاؤلًا أسيًّا؟ اشرح. تضاؤلًا أسيًّا. الأساس أصغر من 1

2 اشتريت حاسوبًا بسعر 350 دينارًا وتتوقع أن يتناقص سعره 25% كل سنة. كم سيصبح سعره بعد 4 سنوات؟ 110.7 دنانير

3 مستعمرة حشرات مؤلفة من 414 حشرة تتزايد بمعدل 45% كل أسبوع، كم سيكون عدد حشرات هذه المستعمرة بعد 4 أسابيع؟ 1 830 حشرة

9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

1 32 فرقة

2 **(a)**

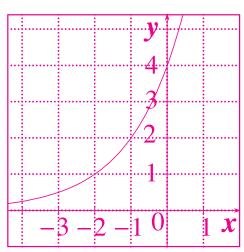
بعد الدور (x)	عدد الفرق المتبقية في المسابقة (y)
0	64
1	32
2	16
3	8
4	4
5	2
6	1

(b) 6 أدوار بـ 63 مباراة.

5 – 3 تحقق من عمل الطلاب.

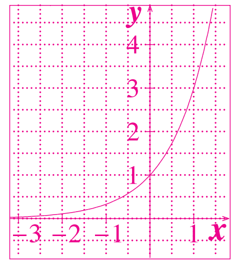
«حاول أن تحل»

1 **(a)** $y = 4(2)^x$



(b) $y = 3^x$

x	-2	-1	0	1
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3



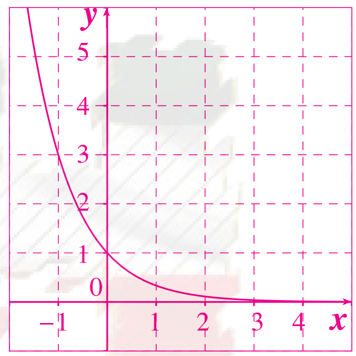
2 (a) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	y
-2	9
-1	3
0	1
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$

$\because b = \frac{1}{3},\ 0 < b < 1$

$\therefore$ الدالة تمثل تضاؤلًا أسيًّا

$\therefore$ عامل التضاؤل $b = \frac{1}{3}$



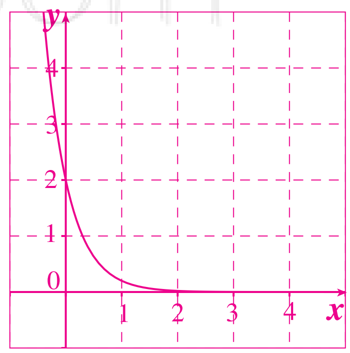
(b) $y = 2 \times (0.1)^x$

x	0	1	2	3
y	2	0.2	0.02	0.002

$\because b = 0.1,\ 0 < b < 1$

$\therefore$ الدالة تمثل تضاؤلًا أسيًّا

$\therefore$ عامل التضاؤل $b = 0.1$



3 $y = 1\,038\,598(1.0244)^{10} \approx 1\,321\,731$

(a) أي أن عدد سكان الكويت سوف يكون تقريبًا 1 321 731 نسمة.

(b) لأن نسبة الزيادة قد لا تكون ثابتة أي 2.44%.

4 الدالة الأسية بالصيغة القياسية هي: $y = a(b)^x$


نسبة التغير = (القيمة النهائية − القيمة الابتدائية) ÷ القيمة الابتدائية

$\text{Decay Ratio} = \frac{17\,000 - 20\,000}{20\,000}$

$= -0.15$

النسبة المئوية للتغير: $-0.15 \times 100\% = -15\%$

تنخفض قيمة السيارة بمقدار 15% في العام الأول.

b نستخدم الدالة الأسية: $y = ab^x$ لتقدير قيمة السيارة بعد 6 سنوات،

حيث (x) عدد السنوات، (y) قيمة السيارة بالدينار، b هو عامل الانخفاض (التضاؤل).

$\therefore$ عامل الانخفاض $b = 1 + \mathrm{I}$، حيث I معدل التغير.

عامل الانخفاض: $b = 1 - 0.15 = 0.85$

عوّض عن y بـ 20 000، عن x بـ 0 $\quad 20\,000 = a(0.85)^0$

$a = 20\,000$

$\therefore\ y = 20\,000(0.85)^x$

عوّض عن x بـ 6 $\quad y = 20\,000(0.85)^6$

بسّط $\quad y \approx 7\,542.99$

تصبح قيمة السيارة بعد 6 سنوات حوالى 7540 دينارًا.

حاول أن تحل

5 يبيّن التمثيل البياني الأسي أدناه الانخفاض (التناقص) في قيمة حاسوب خلال 4 سنوات.

a قدّر النسبة المئوية للانخفاض في نهاية السنة الأولى.

b كوّن دالة أسية $y = ab^x$ يمكن أن يمثلها هذا البيان ثم استخدمها لتقدير قيمة الحاسوب في نهاية السنة الرابعة.

131

يجب إيجاد a, b

$y = \frac{1}{4}(4)^x$

5 (a) مقدار التغيير: $1600 - 2100 = -500$

$\therefore$ قيمة الانخفاض: 500

النسبة المئوية للتغير:

$\frac{-500}{2100} \times 100\% \approx -23.8\%$

(b) الدالة الأسية تكتب على الشكل التالي:

$y = a(b)^x$ ؛ $2100 = a(b)^0$

ومنه $a = 2100$

ثم $b = 1 + \mathrm{I}$

أي $b = 1 - 0.238$

$b = 0.762$

تصبح الدالة الأسية: $y = 2100(0.762)^x$

قيمة الحاسوب في السنة الرابعة:

708 دنانير تقريبًا

«تدريب»

1 $y = 2(3)^x$

2 $y = 3\left(\frac{1}{4}\right)^x$

4–2: الدوال الأسية وتمثيلها بيانيًّا

1 الأهداف

- يرسم التمثيل البياني لبعض الدوال الأسية.
- يحدد دور الثوابت في الدوال الأسية.
- يستخدم العدد e كأساس في الدوال الأسية.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

انعكاس – انسحاب – العدد e.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة بيانية – ورق رسم بياني – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) ارسم بيان الدالة: $y = 3(2)^x$

(b) ارسم بيان الدالة: $y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^x$

(c) أوجد قيم: a, b في الدالة: $y = a(b)^x$ إذا كان الرسم البياني لهذه الدالة يمر بالنقاط: $(25, 1), (75, 2)$.

5 التدريس

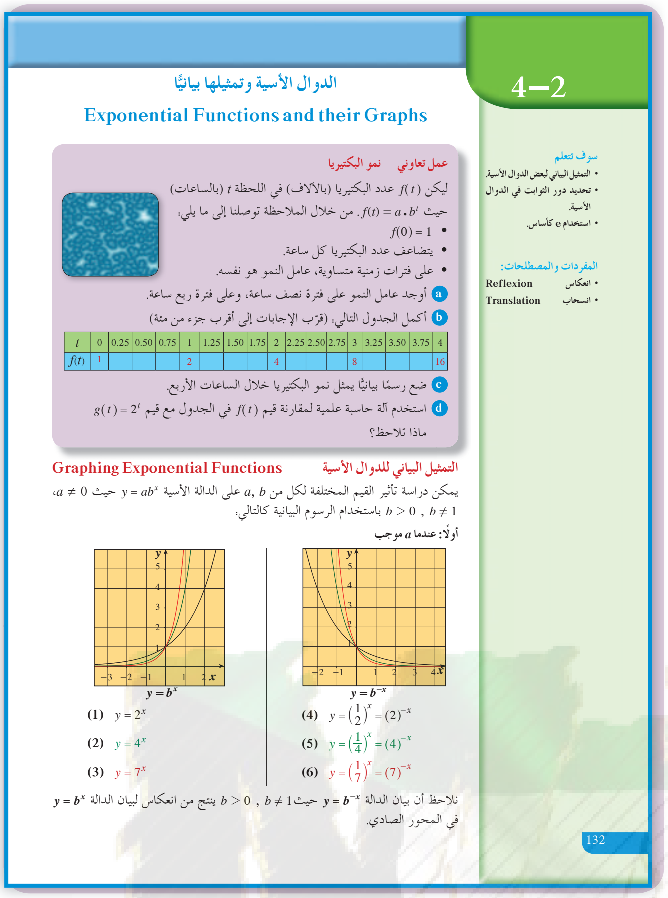
تعتبر الدوال الأسية ذات أهمية كبرى لما لها من استخدامات في التطبيقات الحياتية.

في المثال (1)

ركز انتباه الطلاب على جدول القيم، اسألهم إذا لاحظوا ما يحدث لقيم 3^x و $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ عندما تتزايد x في العمود الأول لجهة اليسار. اطلب إليهم الربط بين قيم 3^x وقيم $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ على الجدول عند القيم 1–، 2– والقيم 1، 2. شجعهم على استنتاج التزايد على منحنى 3^x واستنتاج التناقص على منحنى $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ وذلك عند تزايد المتغير x.

في المثال (2)

اشرح للطلاب أن الدالة $y = ab^x, (a < 0)$ لها منحنى وهو انعكاس لمنحنى الدالة $y = ab^x, (a > 0)$ في محور السينات. شجعهم على ملاحظة قيم $\frac{1}{2}(2)^x$ وقيم $-\frac{1}{2}(2)^x$



4–2

الدوال الأسية وتمثيلها بيانيًّا

Exponential Functions and their Graphs

سوف تتعلم
- التمثيل البياني لبعض الدوال الأسية.
- تحديد دور الثوابت في الدوال الأسية.
- استخدام e كأساس.

المفردات والمصطلحات:
- انعكاس Reflexion
- انسحاب Translation

عمل تعاوني نمو البكتيريا

ليكن $f(t)$ عدد البكتيريا (بالآلاف) في اللحظة t (بالساعات) حيث $f(t) = a \cdot b^t$. من خلال الملاحظة توصلنا إلى ما يلي:
- $f(0) = 1$
- يتضاعف عدد البكتيريا كل ساعة.
- على فترات زمنية متساوية، عامل النمو هو نفسه.

(a) أوجد عامل النمو على فترة نصف ساعة، وعلى فترة ربع ساعة.

(b) أكمل الجدول التالي: (قرّب الإجابات إلى أقرب جزء من مئة)

t	0	0.25	0.50	0.75	1	1.25	1.50	1.75	2	2.25	2.50	2.75	3	3.25	3.50	3.75	4
$f(t)$	1				2				4				8				16

(c) ضع رسمًا بيانيًّا يمثل نمو البكتيريا خلال الساعات الأربع.

(d) استخدم آلة حاسبة علمية لمقارنة قيم $f(t)$ في الجدول مع قيم $g(t) = 2^t$ ماذا تلاحظ؟

التمثيل البياني للدوال الأسية Graphing Exponential Functions

يمكن دراسة تأثير القيم المختلفة لكل من a, b على الدالة الأسية $y = ab^x$ حيث $a \neq 0$، $b > 0$, $b \neq 1$ باستخدام الرسوم البيانية كالتالي:

أولًا: عندما a موجب

(1) $y = 2^x$
(2) $y = 4^x$
(3) $y = 7^x$
(4) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2)^{-x}$
(5) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x = (4)^{-x}$
(6) $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x = (7)^{-x}$

نلاحظ أن بيان الدالة $y = b^{-x}$ حيث $b > 0$, $b \neq 1$ ينتج من انعكاس لبيان الدالة $y = b^x$ في المحور الصادي.

132

تمرَّنْ 4–2

الدوال الأسية وتمثيلها بيانيًّا

Exponential Functions and their Graphs

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4–1)، مثّل بيانيًّا كلًّا من الدوال الأسية التالية:

(1) $y = 4^x$ (2) $y = 6^x + 3$ (3) $y = 2^{-x}$ (4) $y = -3^{x+4}$

في التمارين (8–5)، مثّل بيانيًّا كلًّا من الدوال الأسية التالية مستخدمًا دالة المرجع:

(5) $y = (5)^x - 1$ (6) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$ (7) $y = (4)^{x-2} + 3$ (8) $y = -2(3)^{2x} + 1$

في التمارين (13–9)، استخدم آلتك الحاسبة لإيجاد ناتج كل مقدار مقرّبًا الناتج إلى أربعة أرقام عشرية.

(9) e^3 (10) $5e^6$ (11) $\left(\frac{5}{4}\right)e^{\frac{1}{2}}$

(12) $\frac{4}{e^6}$ (13) e^e

(14) أوجد قيمة a التي يصبح عندها الرسم البياني للدالة: $y = ab^x$ خطًّا أفقيًّا.

(15) (a) **الكيمياء:** تعطي العلاقة: $A = Pe^{-0.0001t}$ الكمية المتبقية «A» بالميكروجرام من مادة إشعاعية معينة بعد «t» سنة من التضاؤل؛ «P» هي الكمية الأولية للمادة المشعة. استخدم العلاقة لإكمال الجدول التالي:

الكمية الأولية من المادة (P)	السنوات (t)	الكمية المتبقية من المادة (A)
10 000	5	
7 500	5	
6 000	5	
5 000	5	
2 500	5	
2 000	5	

(b) قارن بين قيم كل من P , A. ماذا تلاحظ؟

(16) **علم المحيطات:** كلما غصنا في أعماق المحيط، قلت شدة أشعة الشمس. إذا كانت شدة أشعة الشمس على سطح المحيط هي y، فإن النسبة المئوية من y التي تصل إلى عمق x m تعطى بالعلاقة: $y = 20 \times (0.92)^x$
(يعد هذا النموذج مناسبًا للأعماق من 6 m إلى 180 m تحت مستوى سطح البحر).

(a) أوجد النسبة المئوية لأشعة الشمس الموجودة على عمق 15 m تحت مستوى سطح البحر.

(b) إذا كان أقصى عمق مسجل لرياضة الغطس هو 107 m تحت مستوى سطح البحر، فأوجد النسبة المئوية لأشعة الشمس عند هذا العمق.

57

على الجدول عندما تتغير x. اعرض أمامهم على جهاز الإسقاط أمثلة متعددة عن بيان دالتين حيث إشارة a سالبة وموجبة.

في المثال (3)

شجع الطلاب على استخدام الانسحاب في التمثيلات البيانية للدوال الأسية لأنه يساعدهم كثيرًا. فسّر لهم جيّدًا الرموز المستخدمة وكيفية التعامل معها بين الدالتين: $y = ab^x$, $y = a(b)^{x-h} + k$.

في المثال (5)

يعالج هذا المثال حالة خاصة من قيم b في الدالة الأسية، حيث $b = e$ علمًا أن: $e \simeq 2.718$، أي أن الدالة $y = e^x$ هي تزايدية لأن $e > 1$. أخبرهم أن $y = e^{-x}$ هي دالة تناقصية.

تطبيق إثرائي (الطب)

بيّن كيفية تطبيق التضاؤل باستخدام الدالة الأسية وذلك على مادة مشعة تستخدم في المستشفيات. اشرح لهم معنى نصف العمر. ثم اطلب إليهم إجراء بحث أو القيام بزيارة لمستشفى للتعرف أكثر إلى طبيعة هذه المادة.

6 الربط

التطبيق الإثرائي في الطب يوفر الربط بين الدوال الأسية لجهة التضاؤل والمواقف التي تهم كل واحد منا في حياته اليومية.

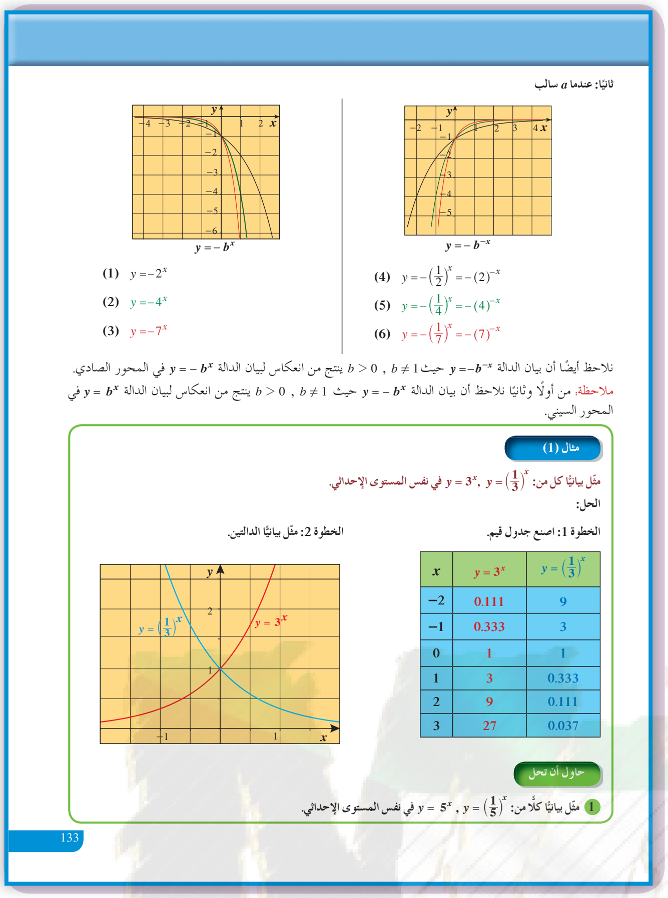
7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام الإزاحة (الانسحاب) مع الدالة $y = a(b)^{x-h} + k$ والدالة الأساسية $y = a(b)^x$.

شدّد على فكرة أن h هي إزاحة إلى اليمين إذا كانت موجبة وإزاحة إلى اليسار إذا كانت سالبة، وأن k إزاحة إلى أعلى إذا كانت موجبة وإزاحة إلى أسفل إذا كانت سالبة.

8 التقييم

تابع الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» للتأكد من إمكانياتهم على إستيعاب المفاهيم والمهارات التي اكتسبوها في هذا الدرس.



ثانيًا: عندما a سالب

$y = -b^{-x}$

(4) $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x = -(2)^{-x}$

(5) $y = -\left(\frac{1}{4}\right)^x = -(4)^{-x}$

(6) $y = -\left(\frac{1}{7}\right)^x = -(7)^{-x}$

$y = -b^x$

(1) $y = -2^x$

(2) $y = -4^x$

(3) $y = -7^x$

نلاحظ أيضًا أن بيان الدالة $y = -b^{-x}$ حيث $b \neq 1$, $b > 0$ ينتج من انعكاس لبيان الدالة $y = -b^x$ في المحور الصادي.

ملاحظة: من أولًا وثانيًا نلاحظ أن بيان الدالة $y = -b^x$ حيث $b \neq 1$, $b > 0$ ينتج من انعكاس لبيان الدالة $y = b^x$ في المحور السيني.

مثال (1)

مثّل بيانيًا كل من: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = 3^x$ في نفس المستوى الإحداثي.

الحل:

الخطوة 1: اصنع جدول قيم.

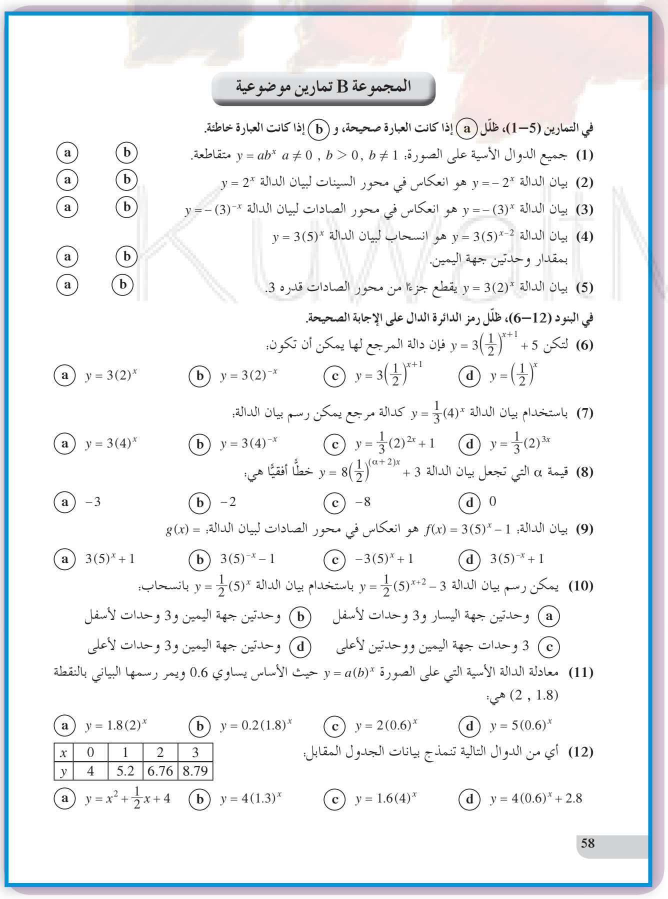
x	$y = 3^x$	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
−2	0.111	9
−1	0.333	3
0	1	1
1	3	0.333
2	9	0.111
3	27	0.037

الخطوة 2: مثّل بيانيًا الدالتين.

حاول أن تحل

1 مثّل بيانيًا كلًّا من: $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, $y = 5^x$ في نفس المستوى الإحداثي.

133



المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) جميع الدوال الأسية على الصورة: $y = ab^x$ $a \neq 0$, $b > 0$, $b \neq 1$ متقاطعة. (a) (b)

(2) بيان الدالة $y = -2^x$ هو انعكاس في محور السينات لبيان الدالة $y = 2^x$ (a) (b)

(3) بيان الدالة $y = -(3)^x$ هو انعكاس في محور الصادات لبيان الدالة $y = -(3)^{-x}$ (a) (b)

(4) بيان الدالة $y = 3(5)^{x-2}$ هو انسحاب لبيان الدالة $y = 3(5)^x$ بمقدار وحدتين جهة اليمين. (a) (b)

(5) بيان الدالة $y = 3(2)^x$ يقطع جزءًا من محور الصادات قدره 3. (a) (b)

في البنود (6–12)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) لتكن $y = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + 5$ فإن دالة المرجع لها يمكن أن تكون:

(a) $y = 3(2)^x$ (b) $y = 3(2)^{-x}$ (c) $y = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ (d) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

(7) باستخدام بيان الدالة $y = \frac{1}{3}(4)^x$ كدالة مرجع يمكن رسم بيان الدالة:

(a) $y = 3(4)^x$ (b) $y = 3(4)^{-x}$ (c) $y = \frac{1}{3}(2)^{2x} + 1$ (d) $y = \frac{1}{3}(2)^{3x}$

(8) قيمة α التي تجعل بيان الدالة $y = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{(\alpha+2)x} + 3$ خطًّا أفقيًّا هي:

(a) −3 (b) −2 (c) −8 (d) 0

(9) بيان الدالة: $f(x) = 3(5)^x - 1$ هو انعكاس في محور الصادات لبيان الدالة: $g(x) =$

(a) $3(5)^x + 1$ (b) $3(5)^{-x} - 1$ (c) $-3(5)^x + 1$ (d) $3(5)^{-x} + 1$

(10) يمكن رسم بيان الدالة $y = \frac{1}{2}(5)^{x+2} - 3$ باستخدام بيان الدالة $y = \frac{1}{2}(5)^x$ بانسحاب:

(a) وحدتين جهة اليسار و3 وحدات لأسفل (b) وحدتين جهة اليمين و3 وحدات لأسفل

(c) 3 وحدات جهة اليمين ووحدتين لأعلى (d) وحدتين جهة اليمين و3 وحدات لأعلى

(11) معادلة الدالة الأسية التي على الصورة $y = a(b)^x$ حيث الأساس يساوي 0.6 ويمر رسمها البياني بالنقطة (2 , 1.8) هي:

(a) $y = 1.8(2)^x$ (b) $y = 0.2(1.8)^x$ (c) $y = 2(0.6)^x$ (d) $y = 5(0.6)^x$

(12) أي من الدوال التالية تنمذج بيانات الجدول المقابل:

x	0	1	2	3
y	4	5.2	6.76	8.79

(a) $y = x^2 + \frac{1}{2}x + 4$ (b) $y = 4(1.3)^x$ (c) $y = 1.6(4)^x$ (d) $y = 4(0.6)^x + 2.8$

58

اختبار سريع

1. استخدم آلة حاسبة لمعرفة قيمة $\frac{e^5}{3}$ إلى أقرب جزء من عشرة آلاف. 49.4711
2. اكتب دالة أسية أساسها 2 وتمر بالنقطة (3, 12).
$y = \frac{3}{2}(2)^x$

9 إجابات وحلول

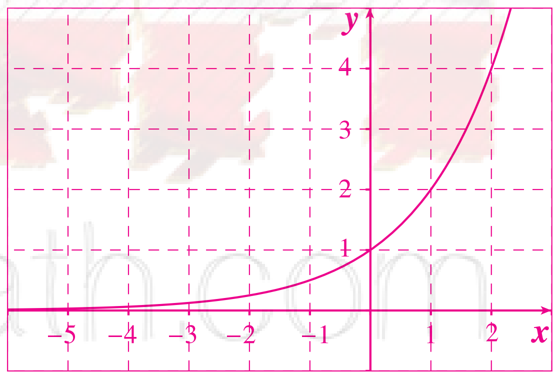
«عمل تعاوني»

(a) عامل النمو ثابت وهو 2.

(b)

t	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.50	1.75
$f(t)$	1	1.19	1.41	1.68	2	2.38	2.83	3.36
2	2.25	2.50	2.75	3	3.25	3.50	3.75	4
4	4.76	5.66	6.73	8	9.51	11.31	13.45	16

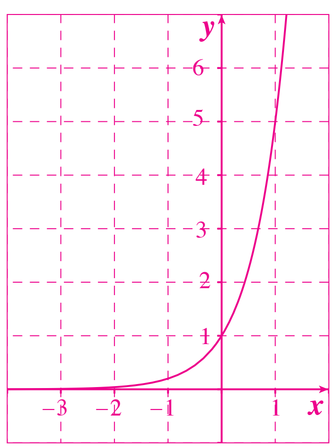
(c) $y = 2^x$

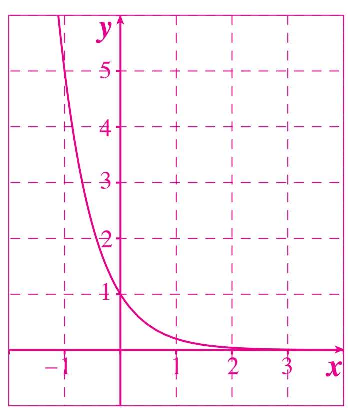


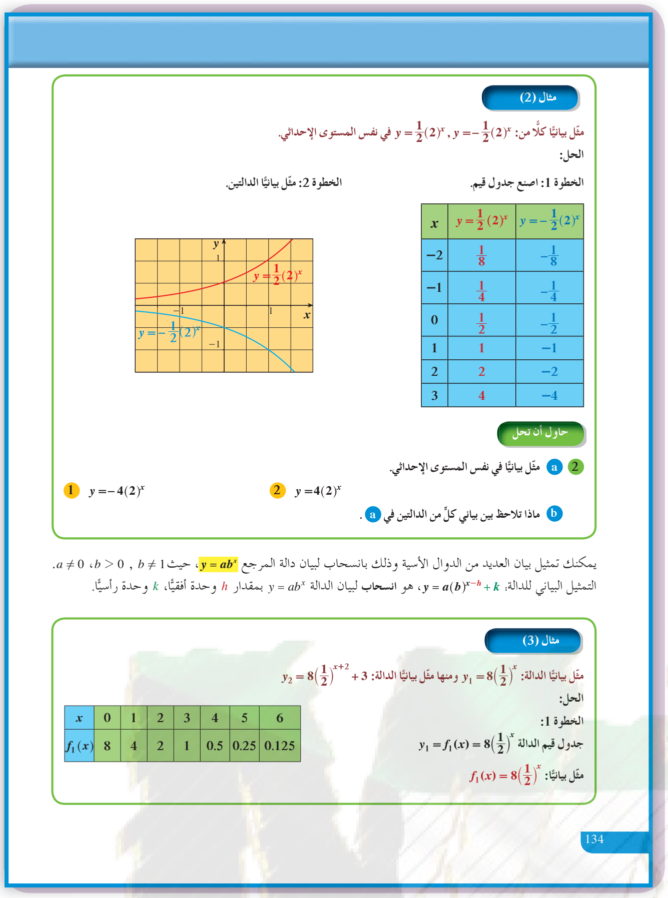
(d) تحقق من إجابات الطلاب.

«حاول أن تحل»

1. $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$







مثال (2)

مثّل بيانيًا كلًا من: $y = \frac{1}{2}(2)^x$, $y = -\frac{1}{2}(2)^x$ في نفس المستوى الإحداثي.

الحل:

الخطوة 1: اصنع جدول قيم.

x	$y = \frac{1}{2}(2)^x$	$y = -\frac{1}{2}(2)^x$
−2	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$
−1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
1	1	−1
2	2	−2
3	4	−4

الخطوة 2: مثّل بيانيًا الدالتين.

حاول أن تحل

2 (a) مثّل بيانيًا في نفس المستوى الإحداثي.

1. $y = -4(2)^x$
2. $y = 4(2)^x$

(b) ماذا تلاحظ بين بياني كلٍّ من الدالتين في (a).

يمكنك تمثيل بيان العديد من الدوال الأسية وذلك بانسحاب لبيان دالة المرجع $y = ab^x$، حيث $b \neq 1$, $b > 0$، $a \neq 0$.
التمثيل البياني للدالة: $y = a(b)^{x-h} + k$، هو **انسحاب** لبيان الدالة $y = ab^x$ بمقدار h وحدة أفقيًا، k وحدة رأسيًا.

مثال (3)

مثّل بيانيًا الدالة: $y_1 = 8\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ومنها مثّل بيانيًا الدالة: $y_2 = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 3$

الحل:

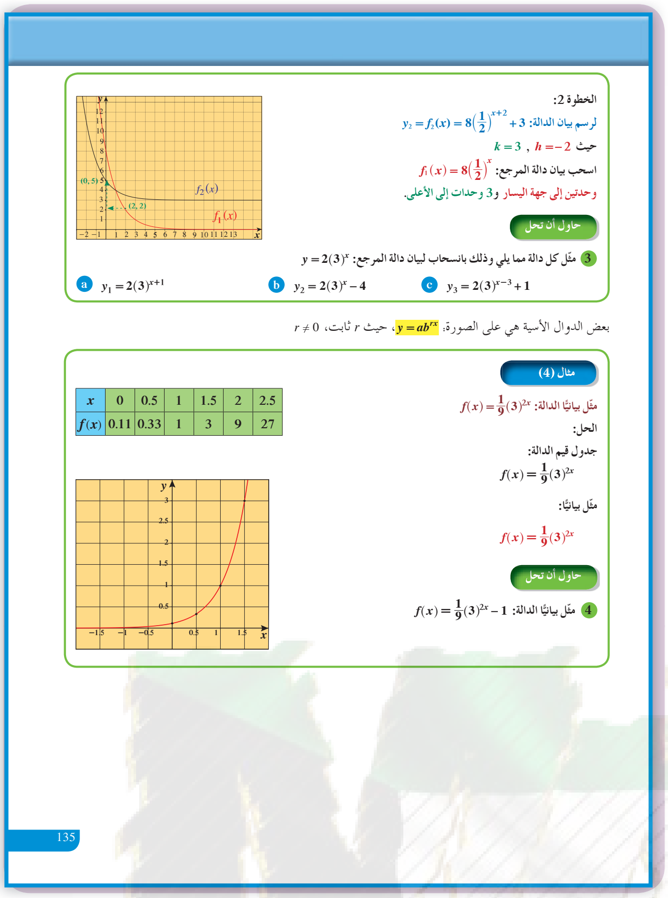
الخطوة 1:

جدول قيم الدالة $y_1 = f_1(x) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	0	1	2	3	4	5	6
$f_1(x)$	8	4	2	1	0.5	0.25	0.125

مثّل بيانيًا: $f_1(x) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^x$

134



الخطوة 2:

لرسم بيان الدالة: $y_2 = f_2(x) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 3$

حيث $h = -2$, $k = 3$

اسحب بيان دالة المرجع: $f_1(x) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

وحدتين إلى جهة اليسار و3 وحدات إلى الأعلى.

حاول أن تحل

3 مثّل كل دالة مما يلي وذلك بانسحاب لبيان دالة المرجع: $y = 2(3)^x$

a $y_1 = 2(3)^{x+1}$ b $y_2 = 2(3)^x - 4$ c $y_3 = 2(3)^{x-3} + 1$

بعض الدوال الأسية هي على الصورة: $y = ab^{rx}$، حيث r ثابت، $r \neq 0$

مثال (4)

مثّل بيانيًا الدالة: $f(x) = \frac{1}{9}(3)^{2x}$

الحل:

جدول قيم الدالة:

$f(x) = \frac{1}{9}(3)^{2x}$

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5
$f(x)$	0.11	0.33	1	3	9	27

مثّل بيانيًا:

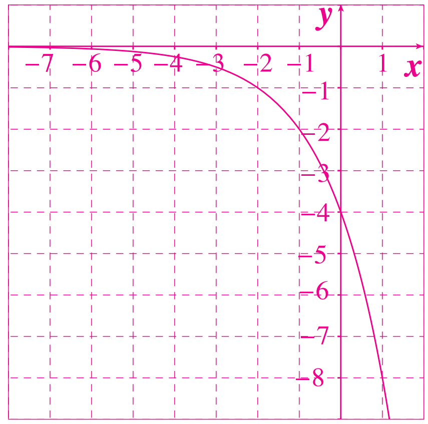
$f(x) = \frac{1}{9}(3)^{2x}$

حاول أن تحل

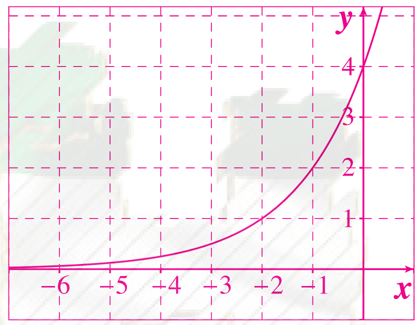
4 مثّل بيانيًا الدالة: $f(x) = \frac{1}{9}(3)^{2x} - 1$

135

2 (a) (1) $y = -4(2)^x$

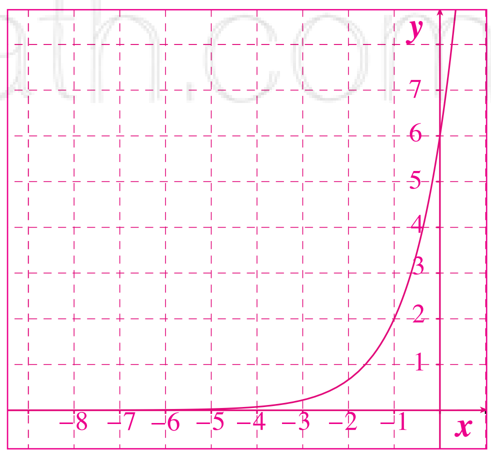


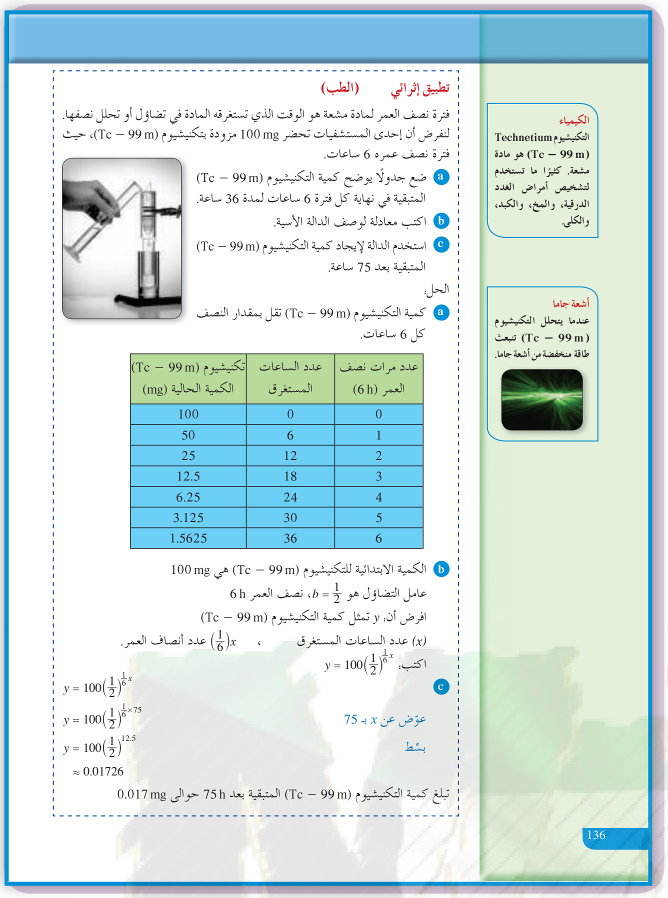
(2) $y = 4(2)^x$



(b) بيان الأولى يمثل تضاؤلًا أسيًّا أما بيان الثانية فيمثل نموًّا أسيًّا.

3 (a) $y_1 = 2(3)^{x+1}$





تطبيق إثرائي (الطب)

فترة نصف العمر لمادة مشعة هو الوقت الذي تستغرقه المادة في تضاؤل أو تحلل نصفها. لنفرض أن إحدى المستشفيات تحضر 100 mg مزودة بتكنيشيوم (Tc − 99 m)، حيث فترة نصف عمره 6 ساعات.

(a) ضع جدولًا يوضح كمية التكنيشيوم (Tc − 99 m) المتبقية في نهاية كل فترة 6 ساعات لمدة 36 ساعة.

(b) اكتب معادلة لوصف الدالة الأسية.

(c) استخدم الدالة لإيجاد كمية التكنيشيوم (Tc − 99 m) المتبقية بعد 75 ساعة.

الحل:

(a) كمية التكنيشيوم (Tc − 99 m) تقل بمقدار النصف كل 6 ساعات.

عدد مرات نصف العمر (6 h)	عدد الساعات المستغرق	تكنيشيوم (Tc − 99 m) الكمية الحالية (mg)
0	0	100
1	6	50
2	12	25
3	18	12.5
4	24	6.25
5	30	3.125
6	36	1.5625

(b) الكمية الابتدائية للتكنيشيوم (Tc − 99 m) هي 100 mg

عامل التضاؤل هو $b = \frac{1}{2}$، نصف العمر 6 h

افرض أن: y تمثل كمية التكنيشيوم (Tc − 99 m)

(x) عدد الساعات المستغرق ، $\left(\frac{1}{6}\right)x$ عدد أنصاف العمر.

اكتب: $y = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}x}$

(c)

$y = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}x}$

عوّض عن x بـ 75 $\quad y = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}\times 75}$

بسّط $\quad y = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{12.5}$

≈ 0.01726

تبلغ كمية التكنيشيوم (Tc − 99 m) المتبقية بعد 75 h حوالى 0.017 mg

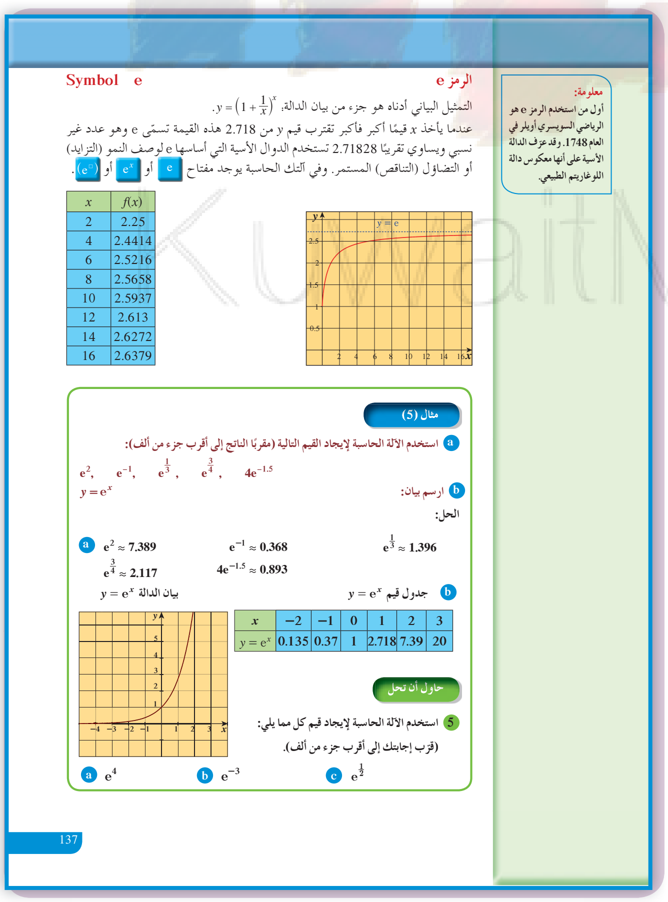
الكيمياء

التكنيشيوم Technetium (Tc − 99 m) هو مادة مشعة. كثيرًا ما تستخدم لتشخيص أمراض الغدد الدرقية، والمخ، والكبد، والكلى.

أشعة جاما

عندما يتحلل التكنيشيوم (Tc − 99 m) تنبعث طاقة منخفضة من أشعة جاما.

136



الرمز e **Symbol e**

التمثيل البياني أدناه هو جزء من بيان الدالة: $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

عندما يأخذ x قيمًا أكبر فأكبر تقترب قيم y من 2.718 هذه القيمة تسمّى e وهو عدد غير نسبي ويساوي تقريبًا 2.71828 تستخدم الدوال الأسية التي أساسها e لوصف النمو (التزايد) أو التضاؤل (التناقص) المستمر. وفي آلتك الحاسبة يوجد مفتاح e أو e^x أو $(e^{\square})$.

x	$f(x)$
2	2.25
4	2.4414
6	2.5216
8	2.5658
10	2.5937
12	2.613
14	2.6272
16	2.6379

معلومة:

أول من استخدم الرمز e هو الرياضي السويسري أويلر في العام 1748. وقد عرّف الدالة الأسية على أنها معكوس دالة اللوغاريتم الطبيعي.

مثال (5)

(a) استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد القيم التالية (مقربًا الناتج إلى أقرب جزء من ألف):

$e^2, \quad e^{-1}, \quad e^{\frac{1}{3}}, \quad e^{\frac{3}{4}}, \quad 4e^{-1.5}$

(b) ارسم بيان: $y = e^x$

الحل:

(a) $e^2 \approx 7.389 \quad e^{-1} \approx 0.368 \quad e^{\frac{1}{3}} \approx 1.396$

$e^{\frac{3}{4}} \approx 2.117 \quad 4e^{-1.5} \approx 0.893$

(b) جدول قيم $y = e^x$ بيان الدالة $y = e^x$

x	−2	−1	0	1	2	3
$y = e^x$	0.135	0.37	1	2.718	7.39	20

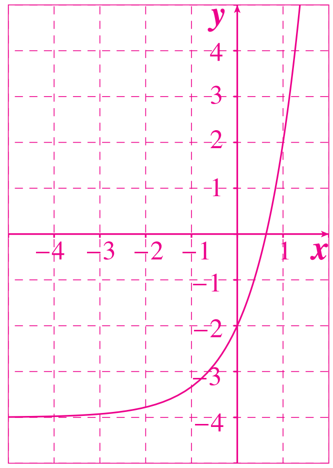
حاول أن تحل

5 استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيم كل مما يلي:
(قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من ألف).

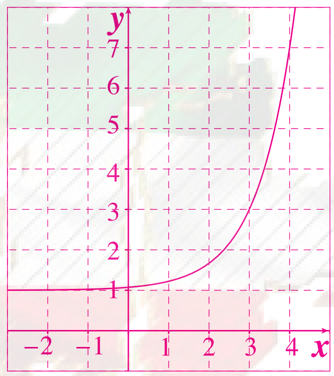
(a) e^4 (b) e^{-3} (c) $e^{\frac{1}{2}}$

137

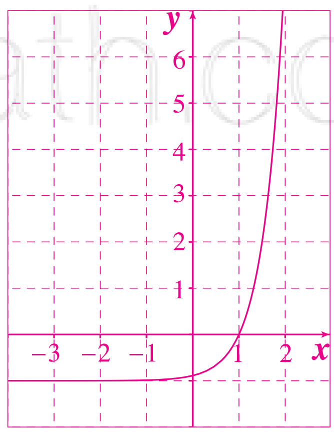
(b) $y_2 = 2(3)^x - 4$



(c) $y_3 = 2(3)^{x-3} + 1$



4 $y = \frac{1}{9}(3)^{2x} - 1$



5 **(a)** $e^4 \approx 54.598$

(b) $e^{-3} \approx 0.0498$

(c) $e^{\frac{1}{2}} \approx 1.6487$

3–4: الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها بيانيًّا

1 الأهداف

- يستخدم رموز اللوغاريتمات.
- يوجد قيم المقادير اللوغاريتمية.
- يمثّل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

مقادير لوغاريتمية – اللوغاريتمات المعتادة – الدوال اللوغاريتمية.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة بيانية – ورق رسم بياني – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) ارسم بيان الدالة: $y = (2)^x$

(b) ارسم بيان الدالة: $y = e^x$

(c) ارسم بيان الدالة: 10^x

(d) أوجد حل المعادلة: $27 = 9^{x-3}$

(e) أوجد معكوس الدالة: $y = x^2$

5 التدريس

تعرفت بعض الدوال ومثلتها بيانيًّا، كما أنك أوجدت معكوس هذه الدوال وتمثيلها البياني. وفي هذا الدرس، سوف تتعرف معكوس الدالة الأسية وهي الدالة اللوغاريتمية.

تكمن أهمية هذه الدالة بأنها فتحت آفاقًا واسعة أمام العلماء في تبسيط العمليات على الأعداد، ووفرت لهم فرصًا كبيرة لمعالجة مواقف حياتية.

في المثال (1)

اطلب إلى الطلاب إجراء مقارنة حول كمية الطاقة المنطلقة من زلزالين مختلفين في القوة بحسب مقياس ريختر.

4–3

الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها بيانيًّا

Logarithmic Functions and their Graphs

سوف تتعلم
- استخدام رموز اللوغاريتمات.
- إيجاد قيم المقادير اللوغاريتمية.
- تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا.

المفردات والمصطلحات:
- مقادير لوغاريتمية Logarithmic Expressions
- اللوغاريتمات المعتادة Common Logarithms
- الدوال اللوغاريتمية Logarithmic Functions

عمل تعاوني

1 باستخدام الدالة الأسية $y = 10^x$، أكمل الجدول التالي:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y								

2 لكل زيادة وحدة في x، صف الزيادة المناظرة في y.

3 صف الزيادة في y إذا كانت x تتزايد بمقدار 1.5؛ بمقدار 0.5

كتابة المقادير اللوغاريتمية وحسابها

Writing and Calculating Logarithmic Expressions

قوة الزلزال هي قياس كمية الطاقة المنطلقة (E). يقيس مقياس ريختر قوة الزلازل باستخدام الصورة الأسية فمثلًا الزلزال الذي تبلغ قوته 5 درجات بمقياس ريختر طاقته المنطلقة (E) تساوي 30× الطاقة المنطلقة من الزلزال الذي قوته 4 درجات.

مثال (1)

سجل زلزال مكسيكو سنة 1995 بقوة 8.0 درجات على مقياس ريختر.
وقد سجل أيضًا زلزال في واشنطن سنة 2011 بقوة 6.8 درجات.
كم مرة تكون الطاقة المنطلقة من زلزال مكسيكو أكبر من كمية الطاقة المنطلقة من زلزال واشنطن؟
(إرشاد: استعن بمقياس ريختر)

الحل:

∵ قوة زلزال مكسيكو 8 درجات.

∴ الطاقة المنطلقة من زلزال مكسيكو = $E \times 30^8$

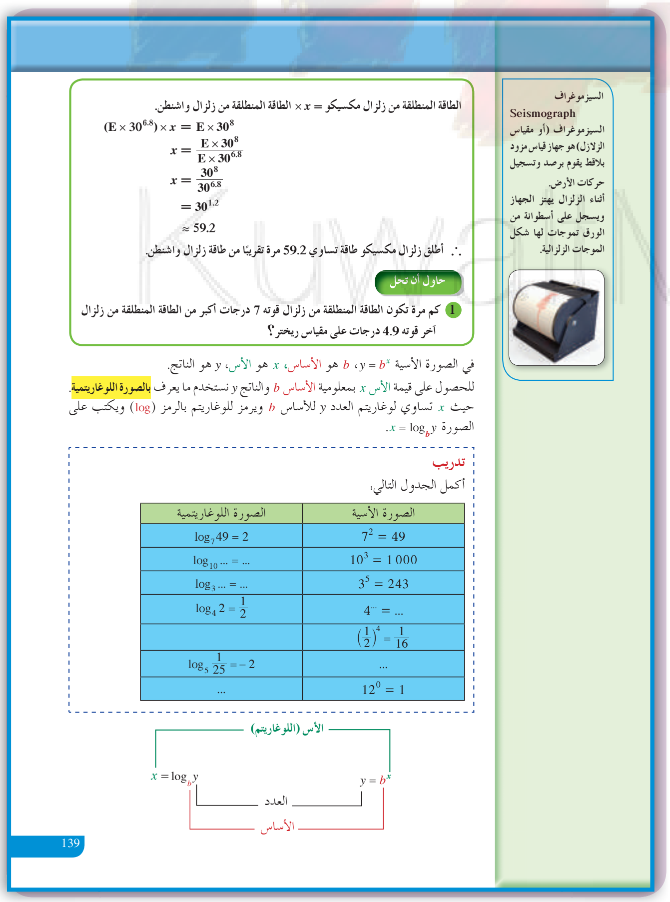
∵ قوة زلزال واشنطن 6.8 درجات.

∴ الطاقة المنطلقة من زلزال واشنطن = $E \times 30^{6.8}$

معلومة:
لم يكن تشارلز ريختر Charles F. Richter) (1900–1985) راضيًا عن مقياس روسي (Rossi) الذي يعود للعام 1880 ولم يكن راضيًا أيضًا عن مقياس مركالي (Mercalli) الذي يعود للعام 1902 لذلك اقترح عام 1935 مقياسه الشهير لقياس قوة الزلازل.
في العام 1977 اقترح هيروكاناموري مقياسًا جديدًا أكثر تطورًا لقياس قوة الزلازل.
أقوى زلزال سجل على مقياس ريختر هو زلزال التشيلي في 22 مايو 1960.

تشارلز ريختر

138



الطاقة المنطلقة من زلزال مكسيكو = x × الطاقة المنطلقة من زلزال واشنطن.

$$(E \times 30^{6.8}) \times x = E \times 30^8$$
$$x = \frac{E \times 30^8}{E \times 30^{6.8}}$$
$$x = \frac{30^8}{30^{6.8}}$$
$$= 30^{1.2}$$
$$\approx 59.2$$

∴ أطلق زلزال مكسيكو طاقة تساوي 59.2 مرة تقريبًا من طاقة زلزال واشنطن.

حاول أن تحل

1 كم مرة تكون الطاقة المنطلقة من زلزال قوته 7 درجات أكبر من الطاقة المنطلقة من زلزال آخر قوته 4.9 درجات على مقياس ريختر؟

في الصورة الأسية $y = b^x$، b هو الأساس، x هو الأس، y هو الناتج.
للحصول على قيمة الأس x بمعلومية الأساس b والناتج y نستخدم ما يعرف **بالصورة اللوغاريتمية**.
حيث x تساوي لوغاريتم العدد y للأساس b ويرمز للوغاريتم بالرمز (log) ويكتب على الصورة $x = \log_b y$.

تدريب

أكمل الجدول التالي:

الصورة الأسية	الصورة اللوغاريتمية
$7^2 = 49$	$\log_7 49 = 2$
$10^3 = 1\,000$	$\log_{10} ... = ...$
$3^5 = 243$	$\log_3 ... = ...$
$4^{...} = ...$	$\log_4 2 = \frac{1}{2}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$	
...	$\log_5 \frac{1}{25} = -2$
$12^0 = 1$	...

السيزموغراف Seismograph
السيزموغراف (أو مقياس الزلازل) هو جهاز قياس مزود بلاقط يقوم برصد وتسجيل حركات الأرض.
أثناء الزلزال يهتز الجهاز ويسجل على أسطوانة من الورق تموجات لها شكل الموجات الزلزالية.

139

في المثال (2)

شدّد للطلاب على فكرة العلاقة التي تربط بين الدالة الأسية ومعكوسها وهي الدالة اللوغاريتمية. اكتب على السبورة $y = b^x$. أخبرهم أن b هي أساس الدالة الأسية وهي قيمة ثابتة، وأن x هو المتغير. أكّد لهم أن معكوس هذه الدالة لا يمكن إيجاده بالطرق التي استخدمناها سابقًا أي بحل المعادلة وإيجاد x بدلالة y. شجعهم على كتابة عدة مرات ما يلي: $y = b^x$ معكوسها $x = \log_b y$.

أعط أمثلة لترسيخ مفهوم هذه العلاقة.

في المثال (3)

يساعد هذا المثال على فهم كيفية استخدام الدالة اللوغاريتمية في مواقف حياتية، وذلك بتحويل الدالة الأسية وإيجاد معكوسها.

في المثال (4)

يساهم هذا المثال في إيجاد مجال التعريف بالدالة اللوغاريتمية، ويساعد الطلاب على إيجاد فترة المتغير x عندما يكون متغير الدالة اللوغاريتمية بدلالة x، والمهم هو معرفة الطالب أنه من الواجب دائمًا المحافظة على الشرط القائل بأن متغير الدالة اللوغاريتمية يجب أن يكون دائمًا قيمة موجبة.

في المثال (5)

يبيّن هذا المثال بشكل واضح العلاقة بين منحنى الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية، فيكون معكوس الدالة الأسية هو أيضًا دالة.

في المثال (6)

يساعد على استخدام دالة المرجع والانسحاب الأفقي والرأسي لرسم دالة لوغاريتمية، ويوضح العلاقة بين $\log_b x$ و $\log_b (x-h)+k$.

6 الربط

يوفر المثالان (3), (1) الربط بين الدوال اللوغاريتمية ومواقف حياتية خاصة في مجالي قياس الزلازل وقياس درجة الحموضة، وكيفية استخدام هذه الدوال وتبسيط الحلول.

ملاحظة: تعلم أن: $1 = 1^1 = 1^2 = 1^3 = 1^4 = ... = 1^n \ (n \in \mathbb{N})$

وهذا يعني أن: ... $\log_1 1^1 = 1, \ \log_1 1^2 = 2, \ \log_1 1^3 = 3$

ولذلك $\log_1 y$ غير معيّن لأنه ليس وحيدًا.

تعريف

يتعين عدد حقيقي x بحيث يكون: $\forall y \in \mathbb{R}^+ \ , \ b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

$y = b^x \iff \log_b y = x$

تذكر: الرمز ⇔ يقرأ (إذا وفقط إذا)

لإيجاد قيمة اللوغاريتمات، يمكنك كتابتها في صورة أسية.

مثال (2)

أوجد قيمة $\log_8 16$.

الحل:

افرض أن $\log_8 16 = x$

حوّل إلى صورة أسية $16 = 8^x$

اكتب كلًّا من الطرفين بالأساس 2 $2^4 = 2^{3x}$

اكتب الأسس في تساوٍ $4 = 3x$

$x = \frac{4}{3}$

$\therefore \log_8 16 = \frac{4}{3}$

حاول أن تحل

2 أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يلي:

a $\log_{10} 100$ b $\log_9 27$ c $\log_{64} \frac{1}{32}$

ملاحظة:

$\log x$ هو اللوغاريتم المعتاد ذو الأساس 10 أي: $\log_{10} x$ تكتب $\log x$

فمثلًا: $\log_{10} 4 = \log 4$

مثال (3) التربط

يستخدم العلماء اللوغاريتمات لقياس الحموضة pH.

وهي تتزايد مع تزايد تركيز أيون الهيدروجين $[H^+]$ في المادة.

pH لمادة يساوي $(-\log[H^+])$.

يبلغ pH عصير الليمون 2.3، في حين يبلغ pH الحليب 6.6

أوجد تركيز أيونات الهيدروجين بالصورة العلمية في كل مادة. أي مادة هي الأكثر حموضة؟

140

تمرَّنْ 4-3

الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها بيانيًّا

Logarithmic Functions and their Graphs

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (8-1)، اكتب كل معادلة مما يلي في الصورة اللوغاريتمية:

(1) $4^2 = 16$ (2) $7^3 = 343$ (3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$ (4) $8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$

(5) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ (6) $10^{-2} = 0.01$ (7) $6^{\frac{3}{2}} = 6\sqrt{6}$ (8) $5^{-3} = \frac{1}{125}$

في التمارين (14-9)، اكتب كل معادلة مما يلي في الصورة الأسية:

(9) $\log_2 128 = 7$ (10) $\log_4 64 = 3$ (11) $\log 100 = 2$

(12) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ (13) $\log 0.0001 = -4$ (14) $\log_3 \frac{1}{243} = -5$

في التمارين (20-15)، أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يلي:

(15) $\log_2 4$ (16) $\log_2 8$ (17) $\log_8 8$

(18) $\log_2 2^5$ (19) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$ (20) $\log 0.01$

في التمارين (23-21)، أوجد مجال التعريف لكل دالة مما يلي:

(21) $y = \log_6 (x+1)$ (22) $y = \log_8 (x) - 2$ (23) $y = \log (x^2 - 4)$

(24) يساوي تركيز أيون الهيدروجين $[H^+]$ في الليم (نوع من الليمون) حوالى 1.26×10^{-2}

أوجد رقمه الهيدروجيني (pH) علمًا أن $pH = -\log[H^+]$.

(25) يساوي الرقم الهيدروجيني لعصير خل التفاح (Cider Vinegar) حوالى 3.1

أوجد تركيز أيونه الهيدروجيني $[H^+]$.

في التمرينين (27-26)، مثّل بيانيًّا كل دالة لوغاريتمية معينًا المجال والمدى.

(26) $y = \log_3 (x)$ (27) $y = \log_3 (x-1) + 2$

(28) اشرح لماذا b لا تستطيع أن تأخذ قيمة 1 في الدالة: $y = \log_b (x)$

59

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تحويل الدالة $y = b^x$ إلى دالة لوغاريتمية. ساعدهم ، من خلال عدة أمثلة مشابهة للمثال (2)، على كتابة $y = b^x$ أو $\log_b y = x$ بعد تبديل المتغيرات.

8 التقييم

تابع باهتمام أعمال الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لتدرك مدى قدرة الطلاب على الربط بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية.

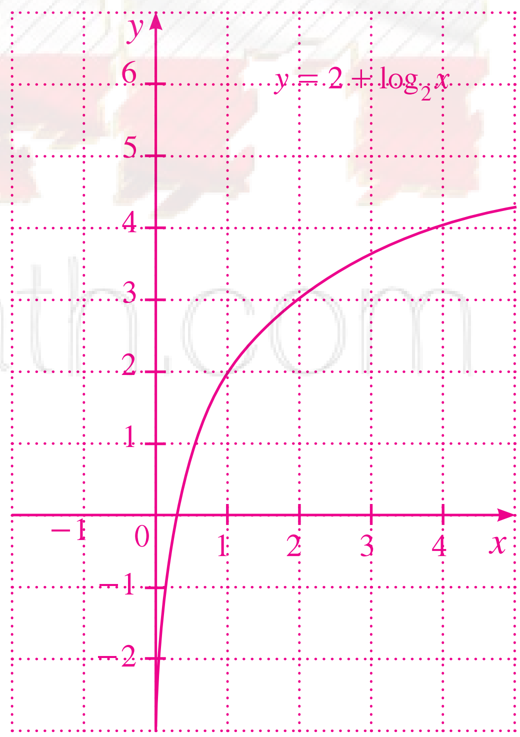
اختبار سريع

1. اكتب: $5^{-2} = \frac{1}{25}$ في الصورة اللوغاريتمية.

   $\log_5\left(\frac{1}{25}\right) = -2$

2. اكتب $\log_3 81 = 4$ في الصورة الأسية. $3^4 = 81$

3. مثّل بيانيًّا الدالة: $y = 2 + \log_2 x$



الحل:

تركيز أيونات الهيدروجين في عصير الليمون	تركيز أيونات الهيدروجين في الحليب
$pH = -\log[H^+]$	$pH = -\log[H^+]$
$2.3 = -\log[H^+]$	$6.6 = -\log[H^+]$
$\log[H^+] = -2.3$	$\log[H^+] = -6.6$
$[H^+] = 10^{-2.3}$ باستخدام الآلة الحاسبة	$[H^+] = 10^{-6.6}$
$\approx 5 \times 10^{-3}$ باستخدام الآلة الحاسبة	$\approx 2.5 \times 10^{-7}$

$\because \; 5 \times 10^{-3} > 2.5 \times 10^{-7}$

$\therefore$ تركيز أيونات الهيدروجين في العصير أكثر منه في الحليب.

$\therefore$ عصير الليمون أكثر حموضة.

حاول أن تحل

3 أوجد تركيز أيونات الهيدروجين بالصورة العلمية لشراب القيقب (Maple Syrup)، حيث $pH = 5.2$.

التمثيل البياني للدوال اللوغاريتمية Graphing Logarithmic Functions

الدوال اللوغاريتمية هي معكوسات الدوال الأسية.

تعريف: الدالة اللوغاريتمية

$\forall x > 0 \;,\; b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

فإن الدالة: $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\; f(x) = \log_b x$

تسمى دالة لوغاريتمية أساسها b

مثال (4)

أوجد مجال تعريف كل من الدوال التالية:

a) $y = \log_5(6x)$　b) $f(x) = \log(3 - x)$

c) $g(x) = \log_2(x^2)$　d) $h(x) = 4\log_3(5 - 3x)$

الحل:

a) $\because \; 6x > 0 \Rightarrow x > 0$

$\therefore$ مجال الدالة $= (0, +\infty)$

b) $\because \; 3 - x > 0 \Rightarrow x < 3$

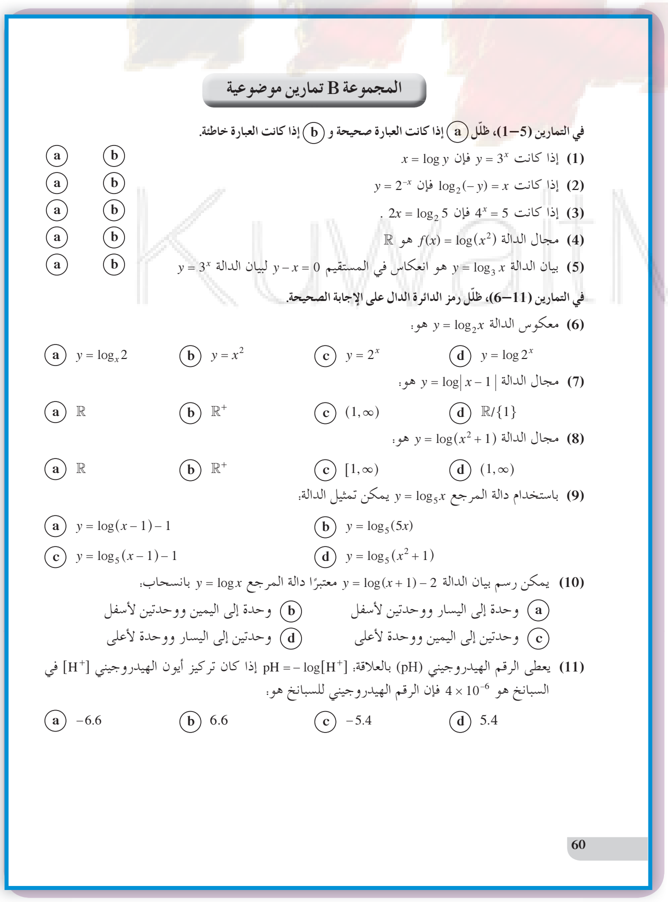
$\therefore$ مجال الدالة $= (-\infty, 3)$

معلومة:
شراب القيقب أو الأسفندن (Maple Syrup) هو شراب مصنوع من نسغ (عصارة) أشجار القيقب السكري التي تنبت بكثرة في كندا لذا فورقتها موجودة على العلم الكندي. تخزن الأشجار خلال البرد النشأ في جذوعها وجذورها الذي ما يلبث أن يتحول بعد ذلك إلى سكر يرتفع في النسغ في الربيع فيتم ثقب فتحات في جذوعها لجمع النسغ الناضج الذي تتم معالجته وتصنيعه بالتسخين لإنتاج شراب مركز ذي لون ذهبي. فوائده كثيرة، ويعتبر سكان أميركا الشمالية الأصليون أول من قاموا بجمع هذا الشراب واستخدامه.

شجرة القيقب

شراب القيقب

141



المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت $y = 3^x$ فإن $x = \log y$　(a)　(b)

(2) إذا كانت $\log_2(-y) = x$ فإن $y = 2^{-x}$　(a)　(b)

(3) إذا كانت $4^x = 5$ فإن $2x = \log_2 5$.　(a)　(b)

(4) مجال الدالة $f(x) = \log(x^2)$ هو $\mathbb{R}$　(a)　(b)

(5) بيان الدالة $y = \log_3 x$ هو انعكاس في المستقيم $y - x = 0$ لبيان الدالة $y = 3^x$　(a)　(b)

في التمارين (6–11)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) معكوس الدالة $y = \log_2 x$ هو:

(a) $y = \log_x 2$　(b) $y = x^2$　(c) $y = 2^x$　(d) $y = \log 2^x$

(7) مجال الدالة $y = \log|x - 1|$ هو:

(a) $\mathbb{R}$　(b) $\mathbb{R}^+$　(c) $(1, \infty)$　(d) $\mathbb{R}/\{1\}$

(8) مجال الدالة $y = \log(x^2 + 1)$ هو:

(a) $\mathbb{R}$　(b) $\mathbb{R}^+$　(c) $[1, \infty)$　(d) $(1, \infty)$

(9) باستخدام دالة المرجع $y = \log_5 x$ يمكن تمثيل الدالة:

(a) $y = \log(x - 1) - 1$　(b) $y = \log_5(5x)$

(c) $y = \log_5(x - 1) - 1$　(d) $y = \log_5(x^2 + 1)$

(10) يمكن رسم بيان الدالة $y = \log(x + 1) - 2$ معتبرًا دالة المرجع $y = \log x$ بانسحاب:

(a) وحدة إلى اليسار ووحدتين لأسفل　(b) وحدة إلى اليمين ووحدتين لأسفل

(c) وحدتين إلى اليمين ووحدة لأعلى　(d) وحدتين إلى اليسار ووحدة لأعلى

(11) يعطى الرقم الهيدروجيني (pH) بالعلاقة: $pH = -\log[H^+]$ إذا كان تركيز أيون الهيدروجيني $[H^+]$ في السبانخ هو 4×10^{-6} فإن الرقم الهيدروجيني للسبانخ هو:

(a) -6.6　(b) 6.6　(c) -5.4　(d) 5.4

60

9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

3 – 1 تحقق من إجابات الطلاب.

«حاول أن تحل»

1 $\dfrac{E \times 30^{7}}{E \times 30^{4.9}} = 30^{2.1} = 1265$

أي أن طاقة الزلزال 7 درجات تساوي تقريبًا 1 265 مرة طاقة الزلزال 4.9 درجات.

2 **(a)** $\log_{10} 10^{2} = x$;

$10^{x} = 10^{2} ; x = 2$

(b) $9^{x} = 27 ; 3^{2x} = 3^{3}$;

$x = \dfrac{3}{2}$

(c) $64^{x} = \dfrac{1}{32}$

$2^{6x} = 2^{-5}$

$6x = -5$

$x = -\dfrac{5}{6}$

3 $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H}^{+}]$

$5.2 = -\log[\mathrm{H}^{+}]$

$\log[\mathrm{H}^{+}] = -5.2$

$\mathrm{H}^{+} = 10^{-5.2}$

$\mathrm{H}^{+} \approx 6.31 \times 10^{-6}$

4 **(a)** $x - 2 > 0$; $x \in (2, \infty)$

(b) $x^{2} + 1 > 0$; $x \in (-\infty, \infty)$

(c) $1 - x > 0$; $x \in (-\infty, 1)$

c $\because x^{2} > 0 \Rightarrow |x| > 0$

$\therefore x > 0$ أو $x < 0$

$\therefore$ مجال الدالة $= (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

أو $\mathbb{R} - \{0\}$

d $\because 5 - 3x > 0 \Rightarrow -3x > -5 \Rightarrow x < \frac{5}{3}$

$\therefore$ مجال الدالة $= \left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$.

تذكر: مربع أي عدد حقيقي هو عدد موجب أو يساوي صفر. $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^{2} \geq 0$

معلومة: $\sqrt{x^{2}} = |x|$

حاول أن تحل

4 أوجد مجال تعريف كل من الدوال التالية:

a $y = 2 + \log_{5}(x-2)$ b $f(x) = \log_{4}(x^{2}+1)$ c $g(x) = \log_{7}(1-x)$

الشكل المقابل يبيّن التمثيل البياني للدالتين:

$y = \log x$، $y = 10^{x}$.

لاحظ النقطتين $(0, 1)$، $(1, 10)$ تنتميان إلى بيان $y = 10^{x}$

بينما $(1, 0)$، $(10, 1)$ تنتميان إلى بيان $y = \log x$

كل من المنحنيين المرسومين انعكاس للآخر في الخط المستقيم $y = x$.

لاحظ أن كلًّا من الدالتين معكوس للأخرى.

مثال (5)

استخدم خواص الانعكاس لرسم بيان الدالة: $y = \log_{2}x$ ومعكوسها.

الحل:

الدالة $y = \log_{2} x$ هي معكوس الدالة $y = 2^{x}$

الخطوة 1:

كون الجدول

x	-1	0	1	2
$y = 2^{x}$	0.5	1	2	4

ارسم بيان الدالة $y = 2^{x}$

الخطوة 2:

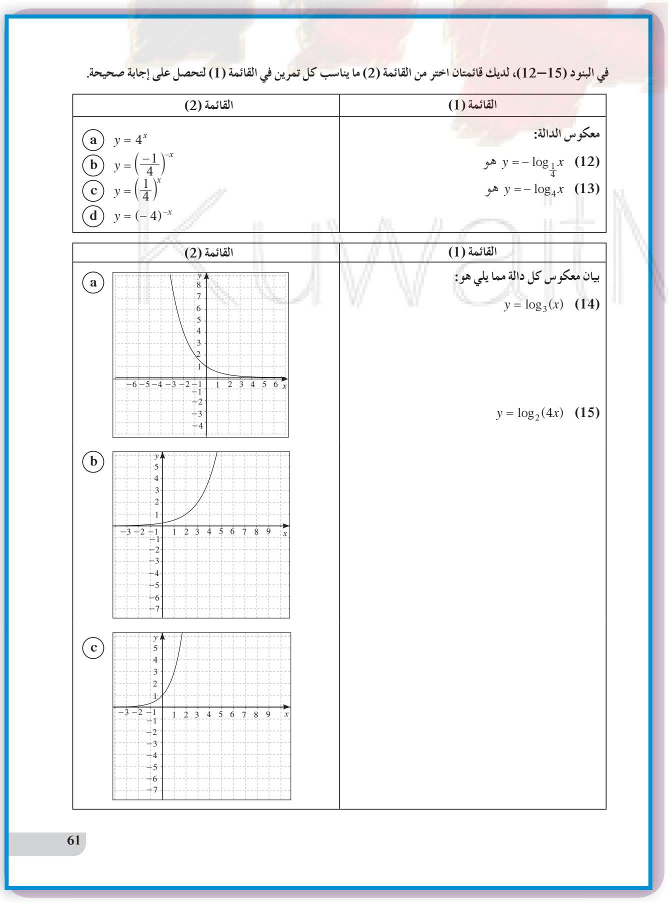
ارسم المستقيم $y = x$

الخطوة 3:

اعكس إحداثيات النقاط المختارة في الجدول السابق وارسم بيان الدالة $y = \log_{2} x$

x	0.5	1	2	4
$y = \log_{2}x$	-1	0	1	2

142



في البنود (12–15)، لديك قائمتان اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

القائمة (1)	القائمة (2)
معكوس الدالة: (12) $y = -\log_{\frac{1}{4}}x$ هو (13) $y = -\log_{4}x$ هو	a $y = 4^{x}$ b $y = \left(\frac{-1}{4}\right)^{-x}$ c $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x}$ d $y = (-4)^{-x}$

القائمة (1)	القائمة (2)
بيان معكوس كل دالة مما يلي هو: (14) $y = \log_{3}(x)$ (15) $y = \log_{2}(4x)$	a b c

61


حاول أن تحل

5 استخدم خواص الانعكاس لرسم بيان الدالة: $y = \log_3 x$ ومعكوسها.

انسحاب الدوال اللوغاريتمية Translating Logarithmic Functions

يمكنك تمثيل العديد من الدوال اللوغاريتمية على أنها انسحاب لدالة المرجع: $y = \log_b x$

التمثيل البياني للدالة: $y = \log_b (x-h)+k$ هو انسحاب لبيان دالة المرجع: $y = \log_b x$، h وحدة أفقيًا، k وحدة رأسيًا.

مثال (6)

ارسم بيان الدالة: $y = \log_6 (x+2) - 3$ مستخدمًا دالة المرجع.

الحل:

الخطوة 1:

دالة المرجع هي: $y = \log_6 x$

اصنع جدول قيم دالة المرجع: $y = \log_6 x$

x	$\log_6 x$	y
6	$\log_6 6 = 1$	1
1	$\log_6 1 = 0$	0
$\frac{1}{6}$	$\log_6 \frac{1}{6} = -1$	-1
$\frac{1}{36}$	$\log_6 \frac{1}{36} = -2$	-2

الخطوة 2:

للحصول على بيان الدالة: $y = \log_6 (x+2) - 3$

نستخدم بيان دالة المرجع $y = \log_6 x$ كالتالي:

$\because\ h = -2$ (سالبة)

$\therefore$ انسحاب أفقي جهة اليسار بمقدار وحدتين.

$\because\ k = -3$ (سالبة)

$\therefore$ انسحاب رأسي للأسفل بمقدار 3 وحدات.

حاول أن تحل

6 ارسم بيان الدالة: $y = \log_3 (x-3) + 1$ مستخدمًا دالة المرجع.

143

«تدريب»

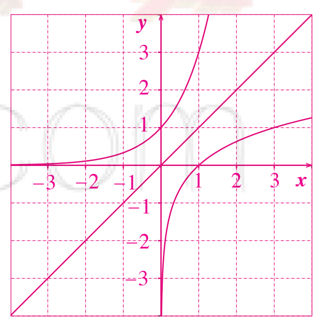
الصورة اللوغاريتمية	الصورة الأسية
$\log_7 49 = 2$	$7^2 = 49$
$\log_{10} 1000 = 3$	$10^3 = 1000$
$\log_3 243 = 5$	$3^5 = 243$
$\log_4 2 = \frac{1}{2}$	$4^{\frac{1}{2}} = 2$
$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$
$\log_{12} 1 = 0$	$12^0 = 1$

5 نرسم بيان الدالة: $y = \log_3 x$

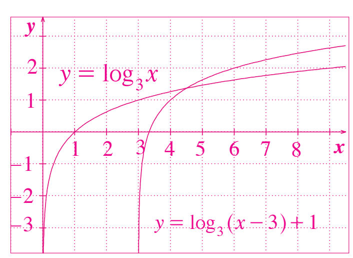
x	1	3	9
y	0	1	2

ثم نرسم بيان الدالة $y = 3^x$ باستخدام نقاط الجدول التالي:

x	0	1	2
y	1	3	9



6 $y = \log_3 (x-3) + 1$ هو إزاحة لمنحنى الدالة: $y = \log_3 x$، 3 وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى الأعلى.



4–4: خواص اللوغاريتمات

1 الأهداف

- يتعرف خواص اللوغاريتمات.
- يختصر المقادير اللوغاريتمية ويفكها.
- يطبق خواص اللوغاريتمات.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

خاصية الضرب – خاصية القسمة – خاصية القوى – شدة الصوت – مستوى شدة الصوت.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – ورق رسم بياني – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) أوجد قيمة: $\frac{4^x}{4^y}$, $(3x)(3y)$

(b) ارسم على مستوى إحداثي واحد الدالتين:

$y = \log x$, $y = 10^x$ ماذا تلاحظ؟

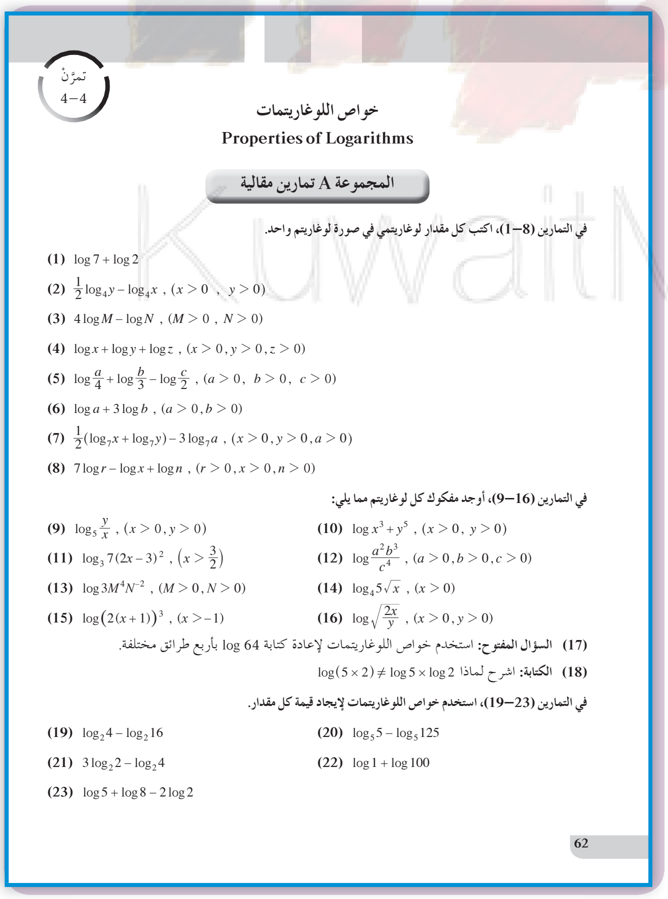
(c) هل يمكن تبسيط المقدار $5^x \times 4^x$؟ اشرح.

(d) هل يمكن تبسيط المقدار $\frac{7^x}{9^y}$؟ اشرح.

5 التدريس

تابع الطلاب بدقة وهم ينفذون فقرة «عمل تعاوني» باستخدام الآلة الحاسبة. أرشدهم إلى كيفية استخدام المفاتيح وبخاصة أن الآلة الحاسبة تحمل فقط مفتاحين لقيم اللوغاريتم: واحد يوجد عليه **log** فقط وهذا يعني اللوغاريتم المعتاد حيث الأساس 10 ويقابله الرمز log فقط، والثاني يوجد عليه ***ln*** وهذا يعني اللوغاريتم الطبيعي وأساسه العدد e ويقابله الرمز *ln* وهذا اللوغاريتم سوف نتعرف إليه لاحقًا.

وضّح للطلاب كيفية استخدام الخواص اللوغاريتمية لما لها من أهمية في التحويلات بين الأعداد. أعط أمثلة متعددة تتناول خاصية الضرب وخاصية القسمة وخاصية القوى، مشابهة للأمثلة (1), (2), (3) .



في المثال (4)

اعرض أمام الطلاب عددًا من الحالات تساهم في فهم أهمية اللوغاريتم عند حساب شدّة الصوت أو كيفية تخفيضه إلى مستويات معينة.

اطلب إليهم دراسة شدة الصوت في مواقف حياتية مستخدمًا اللوغاريتمات.

6 الربط

يمكن الاستفادة من المثال (4) للربط بين شدّة الصوت في أماكن معينة واللوغاريتمات.

ⓒ $\log\sqrt{\frac{25}{x}} = \log\left(\frac{25}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\log\frac{25}{x}$ — خاصية القوى

$= \frac{1}{2}(\log 25 - \log x)$ — خاصية القسمة

$= \frac{1}{2}(\log 5^2 - \log x)$

$= \frac{1}{2}(2\log 5 - \log x)$ — خاصية القوى

$= \log 5 - \frac{1}{2}\log x$

حاول أن تحل

2 أوجد مفكوك كل لوغاريتم مما يلي حيث a، b، c أعداد حقيقية موجبة.

ⓐ $\log_2(7b)$ ⓑ $\log\left(\frac{c}{3}\right)^2$ ⓒ $\log_7(a^3b^4)$

ملاحظات:

1 $\log_b 1 = 0$ 2 $\log_b b = 1$ 3 $\log_b b^m = m$

حيث m , b عددان حقيقيان موجبان $b \neq 1$

تذكر:
$\log 3 = \log_{10} 3$

مثال (3)

إذا كان $\log 5 \approx 0.699$, $\log 3 \approx 0.477$, $\log 2 \approx 0.301$

استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة كل مما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة.

(قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من ألف).

ⓐ $\log 20$ ⓑ $\log 0.5$

ⓒ $\log\frac{8}{3}$ ⓓ $\log 600$

الحل:

ⓐ $\log 20 = \log(4 \times 5)$

$= \log 4 + \log 5$ — خاصية الضرب

$= \log 2^2 + \log 5$

$= 2\log 2 + \log 5$ — خاصية القوى

$\approx 2(0.301) + 0.699$

≈ 1.301

146

يمكنك كتابة مجموع أو فرق اللوغاريتمات (التي لها الأساسات نفسها) بشكل لوغاريتم واحد.

مثال (1)

أعد كتابة كل مقدار لوغاريتمي مما يلي بصورة لوغاريتم واحد:

ⓐ $\log_2 8 - \log_2 4$ ⓑ $3\log_b x + \log_b y$ ⓒ $3\log_5 2 + \log_5 4 - \log_5 16$

الحل:

ⓐ $\log_2 8 - \log_2 4 = \log_2\frac{8}{4} = \log_2 2$ — خاصية القسمة

ⓑ $3\log_b x + \log_b y = \log_b x^3 + \log_b y$ — خاصية القوى

$= \log_b(x^3y)$ — خاصية الضرب

ⓒ $3\log_5 2 + \log_5 4 - \log_5 16 = \log_5 2^3 + \log_5 2^2 - \log_5 2^4$ — خاصية القوى

$= \log_5(2^3 \times 2^2) - \log_5 2^4$ — خاصية الضرب

$= \log_5\frac{2^3 \times 2^2}{2^4}$ — خاصية القسمة

$= \log_5 2$

حاول أن تحل

1 ⓐ أعد كتابة كل مقدار لوغاريتمي مما يلي بصورة لوغاريتم واحد.

1 $\log_5 2 + \log_5 6$ 2 $3\log_b 4 - 3\log_b 2$ 3 $4\log_3 2 - \log_3 5 + \log_3 10$

ⓑ تفكير ناقد: هل يمكنك كتابة $3\log_2 9 - \log_6 9$ بشكل لوغاريتم واحد؟ اشرح.

يمكنك أحيانًا كتابة لوغاريتم واحد كمجموع أو فرق بين لوغاريتمين أو أكثر.

مثال (2)

أوجد مفكوك كل لوغاريتم مما يلي حيث x، y عددان حقيقيان موجبان.

ⓐ $\log_5\frac{x}{y}$ ⓑ $\log(3x^4)$ ⓒ $\log\sqrt{\frac{25}{x}}$

الحل:

ⓐ $\log_5\frac{x}{y} = \log_5 x - \log_5 y$ — خاصية القسمة

ⓑ $\log(3x^4) = \log 3 + \log x^4$ — خاصية الضرب

$= \log 3 + 4\log x$ — خاصية القوى

145

في التمارين (28–24)، لنفترض أن $\log 6 \simeq 0.7782$, $\log 5 \simeq 0.6990$, $\log 4 \simeq 0.6021$. استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة كل مقدار. دون استخدام آلتك الحاسبة قرّب إجاباتك إلى أقرب جزء من ألف.

(24) $\log 20$ (25) $\log 16$ (26) $\log 1.25$

(27) $\log 125$ (28) $\log\frac{1}{36}$

(29) **العلوم:** يستطيع الإنسان سماع مدى واسع من شدة الصوت، وهذا ما يوضحه الجدول التالي. شدة الصوت هي قياس كمية الطاقة الناتجة عن مصدر الصوت، ويعتمد مستوى شدة الصوت على شدة الصوت، وعلى المسافة بين مصدر الصوت والشخص الذي يسمعه. ويعرف مستوى شدة الصوت المقاس بالديسيبل (dB) بالمعادلة التالية: مستوى شدة الصوت = $10\log\frac{I}{I_0}$، حيث I شدة الصوت، I_0 شدة الصوت بالكاد مسموع.

أكمل الجدول التالي:

نوع الصوت	الشدة W/m^2	مستوى شدة الصوت (ديسيبل dB)
صوت عالٍ	1	120
صوت آلة ثقب	10^{-2}	
صوت شارع مزدحم	10^{-5}	
صوت محادثة	10^{-6}	
صوت همس	10^{-10}	
حفيف أوراق الأشجار	10^{-11}	
صوت بالكاد مسموع	10^{-12}	0

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (6–1)، ظلّل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\log(x-1)^2 = 2\log|x-1|$ ⓐ ⓑ

(2) $\log\frac{1}{x^2} = -2\log x , x > 0$ ⓐ ⓑ

(3) $\log\left(\frac{\sqrt{m}}{n}\right) = \frac{1}{2}\log m - \log n ,\ m > 0 , n > 0$ ⓐ ⓑ

(4) $\log_2 16 - \log_2 2 = \log_2 8$ ⓐ ⓑ

(5) $\log(x-y) = \frac{\log x}{\log y} ,\ x, y \in \mathbb{R}^+/\{1\}$ ⓐ ⓑ

(6) $\log_6 4 + \log_6 9 = 2$ ⓐ ⓑ

63

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في العلاقة بين $\log_3(xy), \log_3 y, \log_3 x$ فيكتبون على سبيل المثال:

$$\log_3(x+y) = \log_3 x \cdot \log_3 y$$

$$\log_3(x \cdot y) = \log_3 x \cdot \log_3 y$$

أكد لهم أن اللوغاريتم له خاصية التحويل من الضرب إلى الجمع كالتالي: $\log_3(xy) = \log_3 x + \log_3 y$

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يحلون فقرات «حاول أن تحل» لتقف على إمكانيتهم في فهم عمليات التحويل المستخدمة في خاصيات الضرب والقسمة والقوى.

اختبار سريع

1 أعد كتابة كل تعبير مما يلي:

(a) $\log x + \log y$ $\log(xy)$

(b) $2\log_3 x - \log_3 x$ $\log_3 x$

(c) $\log 3 + \log 4$ $\log 12$

2 أوجد قيمة التعبير: $\log_2 8 - \log_2 2$ 2

---

b $\log 0.5 = \log \frac{1}{2}$
$= \log(2)^{-1}$
$= -\log 2$ خاصية القوى
≈ -0.301

c $\log \frac{8}{3} = \log 8 - \log 3$ خاصية القسمة
$= \log 2^3 - \log 3$
$= 3\log 2 - \log 3$ خاصية القوى
$\approx 3(0.301) - 0.477 \approx 0.426$

d $\log 600 = \log(2^3 \times 3 \times 5^2)$
$= \log 2^3 + \log 3 + \log 5^2$ خاصية الضرب
$= 3\log 2 + \log 3 + 2\log 5$ خاصية القوى
$\approx 3 \times 0.301 + 0.477 + 2 \times 0.699 \approx 2.778$

حاول أن تحل

3 باستخدام المعطيات في مثال (3) أوجد:

a $\log 30$ b $\log 4.5$

c $\log \frac{1}{25}$ d $\log 1200$

تطبيقات على خواص اللوغاريتمات:

شدة الصوت هو قياس الطاقة المحمولة بالموجة الصوتية. والصوت ذو الشدة الكبيرة هو الصوت الذي يبدو عاليًا جدًا.

تستخدم اللوغاريتمات لقياس **مستوى شدة الصوت Sound Intensity Level.**

شدة الصوت هي كثافة طاقة الصوت على مساحة معينة وتحسب بقسمة طاقة الصوت على المساحة.

يعطى مستوى شدة الصوت بالعلاقة:

$$L = 10 \times \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

حيث: L تمثل مستوى شدة الصوت وتقاس بوحدة الديسيبل (dB)

I تمثل شدة الصوت وتقاس بالوات/ متر مربع (w/m^2)

I_0 أقل صوت تستطيع أذن إنسان عادية أن تميزه (عتبة السمع) وتمثل عددًا ثابتًا يساوي 10^{-12}

147

في التمارين (7–13)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(7) المقدار $2\log_4 8 + \log_5 125$ يساوي:

a 4   b 5   c 6   d 15

(8) إذا كان $\log 3 = x$, $\log 5 = y$ فإن $\log 45$ تساوي:

a $x+y$ b $2x+y$ c $2y+x$ d x^2y

(9) $\log_2 x + \log_2 2x + \log_2 \frac{1}{x^2}, x > 0$ يساوي:

a 1   b 2   c x d $2x$

(10) إذا كان $\log 2 = m, \log 3 = n$ فإن المقدار $m+n-1$ يساوي:

a $\log 0.06$ b $\log 0.6$ c $\log 6$ d $\log 60$

(11) عندما $m = 3$, $n = 2$ فإن المقدار الأكبر قيمة فيما يلي هو:

a $\log n^2 - \log m^3$ b $\log m^2 - \log n^2$ c $3\log n - 2\log m$ d $2\log m - 3\log n$

(12) مفكوك المقدار $\log\left(\sqrt[3]{\frac{8}{x^3}}\right)$ هو:

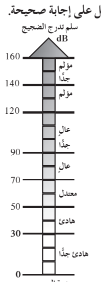
a $3\log\frac{8}{x^3}$ b $\frac{1}{3}(\log(8-x^3))$ c $\log 2 - \log x$ d $\log 2 - 3\log x$

(13) إذا كان مستوى شدة صوت صفارة إنذار (L) تساوي 140 dB والتي تقاس بالعلاقة: $L = 10\log\frac{I}{10^{-12}}$
فإن شدة صوتها I تساوي:

a 1   b 1000   c 10   d 100

في التمرينين (14–15)، لديك قائمتان اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

استخدم العلاقة: $L = 10\log\frac{I}{10^{-12}}$ والشكل المقابل.



القائمة (1)	القائمة (2)
إذا كانت شدة صوت ما (I) هي:	a هادئة
(14) 10^{-5} فإن قوته تكون:	b مؤلمة
(15) 1.65×10^{-2} فإن قوته تكون:	c عالية
	d عالية جدًّا

64

9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

7 – 1 تحقق من إجابات الطلاب، وتأكد من حسن استخدامهم لمفتاح اللوغاريتم الاعتيادي على الآلة الحاسبة **log**

«حاول أن تحل»

1 (a) (1) $\log_5 12$

(2) $\log_b 2^3 = \log_b 8$

(3) $5\log_3 2 = \log_3 32$

(b) لا. لأن الأساس مختلف حيث $2 \neq 6$

2 (a) $\log_2 7 + \log_2 b$

(b) $2\log c - 2\log 3$

(c) $3\log_7 a + 4\log_7 b$

3 (a) $\log 30 = \log 5 + \log 2 + \log 3 \approx 1.477$

(b) $\log 4.5 = \log\frac{9}{2} = 2\log 3 - \log 2 \approx 0.653$

(c) $\log\frac{1}{25} = -2\log 5 \approx -1.398$

(d) $\log 1200 = 2\log 2 + \log 3 + 2\log 10 \approx 3.079$

4 $L_1 - L_2 = 10\log\frac{I}{I_0} - 10\log 0.25\frac{I}{I_0} \approx 6.02$

سوف يكون الانخفاض حوالي 6 dB.

«تدريب»

نوع الصوت	الشدّة w/m^2	مستوى شدة الصوت	قوة الصوت
صوت صفارة إنذار	10^2	140	مؤلم جداً
صوت مصنع	10^{-2}	100	عالٍ جدًّا
صوت منظف غبار	10^{-5}	70	عالٍ
صوت دقات الساعة	10^{-8}	40	هادئ
صوت تساقط أوراق الشجر	10^{-10}	20	هادئ جدًّا

معلومة: هل تعلم أن عتبة الألم عند 120 dB وتلف طبلة الأذن عند 160 dB.

معلومة: تخطيط السمع هي عملية تسجيل القدرة السمعية وفق عتبة السمع لترددات صوتية مختلفة.

تدريب

أكمل الجدول التالي، حيث: $L = 10 \times \log\frac{I}{I_0}$

نوع الصوت	الشدة w/m^2	مستوى شدة الصوت	قوة الصوت
صوت صفارة إنذار	10^2	140	مؤلم
صوت مصنع	10^{-2}	...	...
صوت منظف غبار	10^{-5}	...	...
صوت دقات الساعة	10^{-8}	...	...
صوت تساقط أوراق الشجر	10^{-10}	...	هادئ جدًّا

148

مثال (4) تطبيق حياتي

بدأت شركة شحن في نقل حمولات طائرات الشحن خارج مطار المدينة، وقد اشتكى السكان المجاورون لها من صوتها المرتفع جدًّا، إذا افترضنا أن شركة الشحن قد طلبت إليك ابتكار طريقة تعمل على تخفيض شدّة الصوت إلى النصف، باستخدام العلاقة:

$L = (10)\log\frac{I}{I_0}$ حيث I شدة الصوت، I_0 عتبة السمع $(10)^{-12}$

فكم ديسيبل (dB) يجب أن ينخفض هذا الصوت؟

الحل:

لنفرض أن: مستوى شدة الصوت الحالي $= L_1$

مستوى شدة الصوت بعد خفضه $= L_2$

اربط: مقدار انخفاض مستوى شدة الصوت يعطى بـ: $L_1 - L_2$،

∵ شدة الصوت المنخفض نصف شدة الصوت الحالي:

$$L_1 = (10)\log\frac{I}{I_0},\quad L_2 = (10)\log\left(\frac{0.5\times I}{I_0}\right)$$

$$\begin{aligned} L_1 - L_2 &= (10)\log\frac{I}{I_0} - (10)\log\left(\frac{0.5\times I}{I_0}\right) \\ &= (10)\log\frac{I}{I_0} - (10)\log\left(0.5\times\frac{I}{I_0}\right) \\ &= (10)\log\frac{I}{I_0} - 10\left(\log 0.5 + \log\frac{I}{I_0}\right) && \text{خاصية الضرب} \\ &= (10)\log\frac{I}{I_0} - (10)\log 0.5 - (10)\log\frac{I}{I_0} && \text{جمع الحدود المتشابهة} \\ &= (-10)\log 0.5 \\ &\approx 3.01 \end{aligned}$$

يجب أن ينخفض مستوى شدة الصوت حوالي 3dB

حاول أن تحل

4 في مثال (4) السابق لنفرض أن شركة الشحن طلبت إليك تخفيض شدة الصوت 25% من شدة الصوت الحالية، فكم ديسيبل يجب أن ينخفض مستوى شدة الصوت الحالي؟

149

5–4: المعادلات الأسية واللوغاريتمية

1 الأهداف

- يحل معادلات أسية.
- يستخدم اللوغاريتمات لحل المعادلات الأسية.
- يستخدم الأسس لحل المعادلات اللوغاريتمية.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

معادلات أسية – معادلات لوغاريتمية – قاعدة تغيير الأساس.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة بيانية – ورق رسم بياني – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) اكتب $y = 4^x$ بالصورة اللوغاريتمية.

(b) اكتب $y = \log_7 x$ بالصورة الأسية.

(c) اكتب المقدار: $\log_6 x + \log_6 (3x)$ بصيغة لوغاريتم واحد.

(d) اكتب المقدار $\log 35 - \log 5$ بصيغة لوغاريتم واحد.

(e) اكتب المقدار $4 \log_8 3 + 6 \log_8 2$ بصيغة لوغاريتم واحد.

(f) اكتب المقدار: $\log 5 + \log_2 3$ بصيغة لوغاريتم واحد.

5 التدريس

تعرفنا الدالة اللوغاريتمية على أنها معكوس للدالة الأسية، وبالتالي لحل معادلة لوغاريتمية نحن نحتاج إلى استخدام الدالة الأسية.

كما أنه لحل دالة أسية، نحتاج إلى استخدام دالة لوغاريتمية وبالتالي نحن بحاجة دائمًا إلى آلة حاسبة لتعطينا قيم اللوغاريتم الاعتيادي log ولكن السؤال الأهم، هل تتضمن المعادلة دائمًا لوغاريتمًا اعتياديًّا log؟ بالطبع يوجد لدينا لوغاريتمات لها أساسات غير الأساس 10، لذا كان لا بد من إيجاد علاقة تحويل بين اللوغاريتمات ذات الأساسات المختلفة.

4–5

المعادلات الأسية واللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Equations

سوف تعلم
- حل معادلات أسية
- استخدام اللوغاريتمات لحل المعادلات الأسية
- استخدام الأسس لحل المعادلات اللوغاريتمية

المفردات والمصطلحات:
- معادلات أسية Exponential Equations
- معادلات لوغاريتمية Logarithmic Equations
- قاعدة تغيير الأساس Change of Base Formula

مواصفات الحصان العربي: هو من أقدم سلالات الخيول، صغير الحجم، له قدرة عالية على تحمل المشاق، قليل الأمراض، شجاع بالفطرة، وفي لصاحبه، يتكيف مع تقلبات المناخ وهو أيضًا محب للموسيقى.

عمل تعاوني

الأحياء: تصف العلاقة $F = kw^{\frac{3}{4}}$، كمية الطعام F بالكجم (kg) التي يجب أن يتناولها حيوان ثديي يوميًا (في هذه العلاقة k هي ثابت التغير الذي يعتمد على النوع، w هي وزن الحيوان).

اعمل مع زميل لك

(a) لحساب وزن فيل كبير حيث: $F = 145$ kg، $k = 0.421$ باستخدام الآلة الحاسبة.

(1) عوّض عن قيم k، F في العلاقة $F = kw^{\frac{3}{4}}$ وأوجد قيمة $w^{\frac{3}{4}}$

(2) أوجد قيمة w

(3) كيف يمكنك حل المعادلة $F = kw^{\frac{3}{4}}$ لإيجاد $w^{\frac{3}{4}}$؟ صف الناتج إذا ما تم رفع كل من طرفي المعادلة للقوة $\frac{4}{3}$، ثم اكتب العلاقة الناتجة.

(b) الحصان العربي من الثدييات. إذا اعتبرنا أن وزن الحصان المثالي 400 kg ويأكل يوميًا 15 kg فما قيمة الثابت k؟

حل معادلات أسية Solving Exponential Equations

تعلمت في ما سبق حل معادلة أسية مثل $7^{3x} = 49$ وذلك بتوحيد الأساس ومساواة الأسس.
سوف تتعلم في هذا الدرس حل معادلات أسية على الصورة $b^{kx} = a$ حيث يتضمن الأس المتغير x وذلك باستخدام اللوغاريتمات.

$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
$a = b \iff \log_m a = \log_m b$

لحل معادلات أسية يمكننا أخذ لوغاريتم كل من طرفي المعادلة

مثال (1)

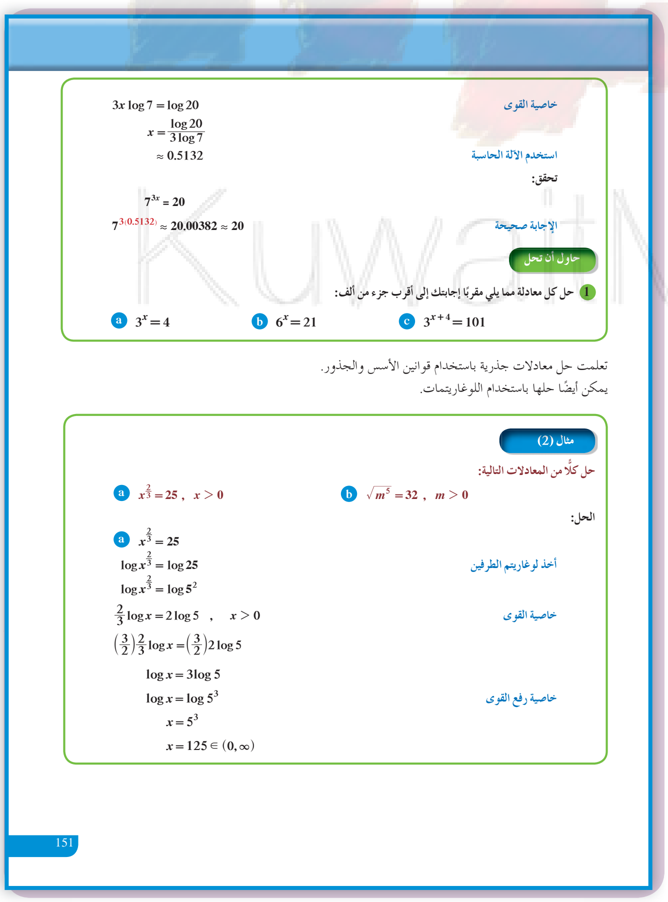
حل المعادلة التالية، ثم تحقق: $7^{3x} = 20$

الحل:

$7^{3x} = 20$

خذ لوغاريتم كل من طرفي المعادلة $\log 7^{3x} = \log 20$

150



خاصية القوى $3x \log 7 = \log 20$

$x = \frac{\log 20}{3 \log 7}$

استخدم الآلة الحاسبة ≈ 0.5132

تحقق:

$7^{3x} = 20$

الإجابة صحيحة $7^{3(0.5132)} \approx 20.00382 \approx 20$

حاول أن تحل

(1) حل كل معادلة مما يلي مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من ألف:

(a) $3^x = 4$ (b) $6^x = 21$ (c) $3^{x+4} = 101$

تعلمت حل معادلات جذرية باستخدام قوانين الأسس والجذور.
يمكن أيضًا حلها باستخدام اللوغاريتمات.

مثال (2)

حل كلًّا من المعادلات التالية:

(a) $x^{\frac{2}{3}} = 25$, $x > 0$ (b) $\sqrt{m^5} = 32$, $m > 0$

الحل:

(a) $x^{\frac{2}{3}} = 25$

خذ لوغاريتم الطرفين $\log x^{\frac{2}{3}} = \log 25$

$\log x^{\frac{2}{3}} = \log 5^2$

خاصية القوى $\frac{2}{3} \log x = 2 \log 5$, $x > 0$

$\left(\frac{3}{2}\right)\frac{2}{3} \log x = \left(\frac{3}{2}\right) 2 \log 5$

$\log x = 3 \log 5$

خاصية رفع القوى $\log x = \log 5^3$

$x = 5^3$

$x = 125 \in (0, \infty)$

151

في المثالين (2) , (1)

لحل معادلة أسية، نجد أننا بحاجة إلى تطبيق اللوغاريتم الاعتيادي **log** على الآلة الحاسبة.

في المثالين (4) ,(3)

اطلب إليهم كتابة قاعدة تغيير الأساس عدة مرات لكي يتمكنوا من استخدامها. أخبرهم أن ذلك ضروري كي يتمكنوا من استخدام الآلة الحاسبة. فعلى سبيل المثال، لإيجاد $\log_7 32$. لا يوجد على الآلة الحاسبة $\log_7$ (أي لوغاريتم أساسه 7) لذا نحن بحاجة إلى قاعدة التحويل فنكتب:

$$\log_7 32 = \frac{\log 32}{\log 7}$$

$$\log_7 32 \approx 1.781$$

تطبيق إثرائي

يبيّن كيفية تطبيق مواقف حياتية باستخدام الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية لإيجاد الحلول المطلوبة. كما أن الرسم البياني يساعد أيضًا على إيجاد حلول تقريبية.

في المثال (5)

لحل معادلة لوغاريتمية، يجب استخدام الصيغة الأسية مما يساعد على عزل المتغير، وبالتالي إيجاد القيمة التي تحقق المعادلة.

ركّز مع الطلاب على خواص اللوغاريتم التي سبق أن تعرفوها.

نبّه الطلاب إلى ما يلي:

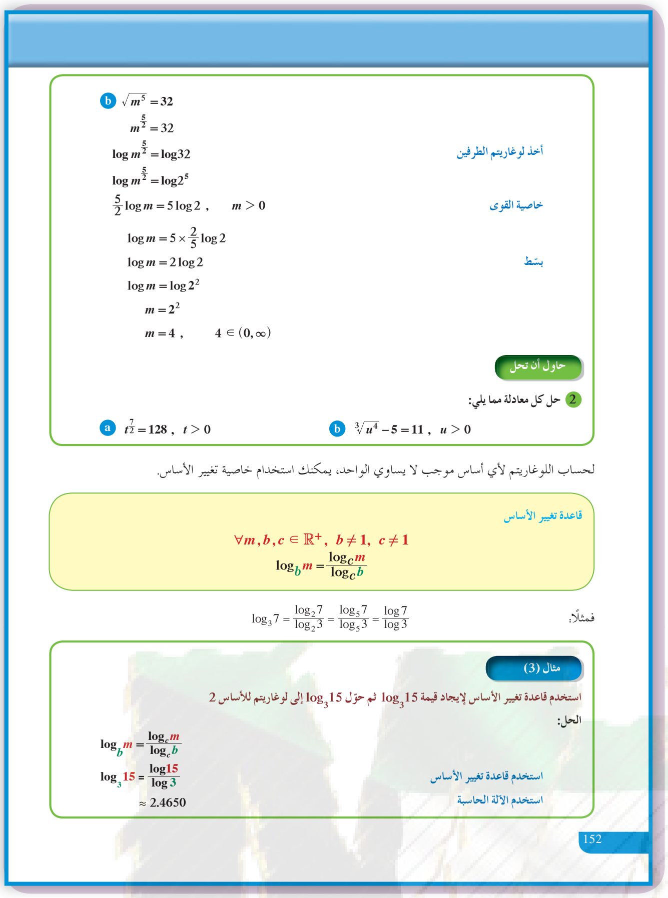
(a) $\log_b(x \pm y) \neq \log_b x \pm \log_b y$

ولكن: $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$

(b) $\log_b(xy) \neq (\log_b x)(\log_b y)$

(c) $\dfrac{\log_a x}{\log_a y} \neq \log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)$

ولأن: $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$



b $\sqrt{m^5} = 32$

$m^{\frac{5}{2}} = 32$

أخذ لوغاريتم الطرفين: $\log m^{\frac{5}{2}} = \log 32$

$\log m^{\frac{5}{2}} = \log 2^5$

خاصية القوى: $\frac{5}{2}\log m = 5\log 2\ , \quad m > 0$

$\log m = 5 \times \frac{2}{5}\log 2$

بسّط: $\log m = 2\log 2$

$\log m = \log 2^2$

$m = 2^2$

$m = 4\ , \quad 4 \in (0, \infty)$

حاول أن تحل

2 حل كل معادلة مما يلي:

a $t^{\frac{7}{2}} = 128\ ,\ t > 0$ **b** $\sqrt[3]{u^4} - 5 = 11\ ,\ u > 0$

لحساب اللوغاريتم لأي أساس موجب لا يساوي الواحد، يمكنك استخدام خاصية تغيير الأساس.

قاعدة تغيير الأساس

$$\forall m, b, c \in \mathbb{R}^+,\ b \neq 1,\ c \neq 1$$
$$\log_b m = \frac{\log_c m}{\log_c b}$$

فمثلًا: $\log_3 7 = \frac{\log_2 7}{\log_2 3} = \frac{\log_5 7}{\log_5 3} = \frac{\log 7}{\log 3}$

مثال (3)

استخدم قاعدة تغيير الأساس لإيجاد قيمة $\log_3 15$ ثم حوّل $\log_3 15$ إلى لوغاريتم للأساس 2

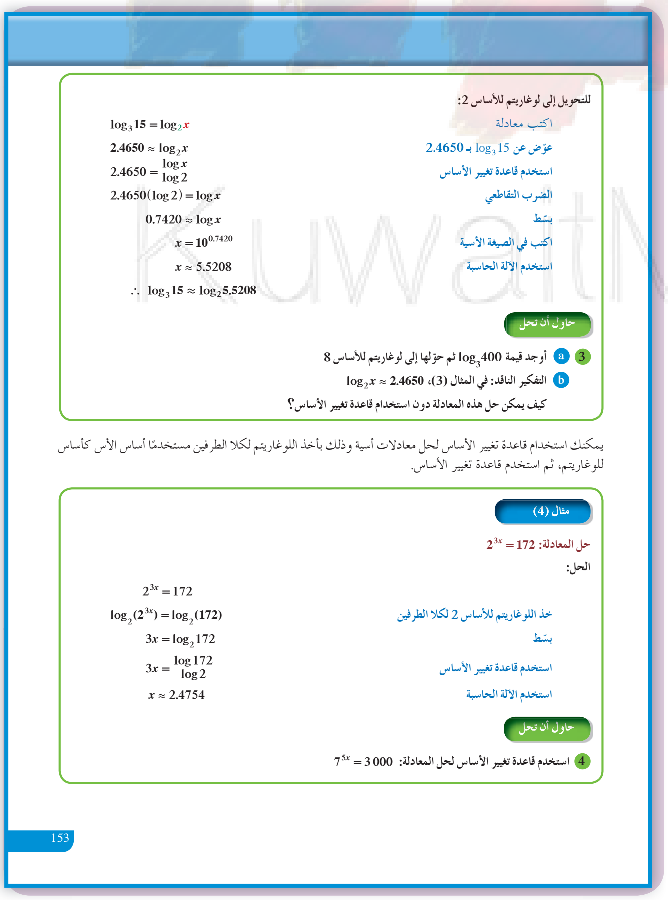
الحل:

$\log_b m = \frac{\log_c m}{\log_c b}$

استخدم قاعدة تغيير الأساس: $\log_3 15 = \frac{\log 15}{\log 3}$

استخدم الآلة الحاسبة: ≈ 2.4650

152



للتحويل إلى لوغاريتم للأساس 2:

اكتب معادلة: $\log_3 15 = \log_2 x$

عوّض عن $\log_3 15$ بـ 2.4650: $2.4650 \approx \log_2 x$

استخدم قاعدة تغيير الأساس: $2.4650 = \frac{\log x}{\log 2}$

الضرب التقاطعي: $2.4650(\log 2) = \log x$

بسّط: $0.7420 \approx \log x$

اكتب في الصيغة الأسية: $x = 10^{0.7420}$

استخدم الآلة الحاسبة: $x \approx 5.5208$

$\therefore\ \log_3 15 \approx \log_2 5.5208$

حاول أن تحل

3 **a** أوجد قيمة $\log_3 400$ ثم حوّلها إلى لوغاريتم للأساس 8

b التفكير الناقد: في المثال (3)، $\log_2 x \approx 2.4650$

كيف يمكن حل هذه المعادلة دون استخدام قاعدة تغيير الأساس؟

يمكنك استخدام قاعدة تغيير الأساس لحل معادلات أسية وذلك بأخذ اللوغاريتم لكلا الطرفين مستخدمًا أساس الأس كأساس للوغاريتم، ثم استخدم قاعدة تغيير الأساس.

مثال (4)

حل المعادلة: $2^{3x} = 172$

الحل:

$2^{3x} = 172$

خذ اللوغاريتم للأساس 2 لكلا الطرفين: $\log_2(2^{3x}) = \log_2(172)$

بسّط: $3x = \log_2 172$

استخدم قاعدة تغيير الأساس: $3x = \frac{\log 172}{\log 2}$

استخدم الآلة الحاسبة: $x \approx 2.4754$

حاول أن تحل

4 استخدم قاعدة تغيير الأساس لحل المعادلة: $7^{5x} = 3\,000$

153

6 الربط

يوفر التطبيق الإثرائي فرصة أمام الطلاب لاستخدام الدالة الأسية في موقف حياتي، حيث تتناقص أعداد النمور العربية في شبه الجزيرة العربية، ويبيّن كيفية التعامل مع الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية لإيجاد الحل.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام قاعدة التحويل أو قد يستخدمون الآلة الحاسبة مع اللوغاريتم الاعتيادي من دون الانتباه إلى أساس اللوغاريتم. نبه الطلاب إلى القاعدة: $\log_b m = \dfrac{\log m}{\log b}$، حيث ($\log$) هو اللوغاريتم الاعتيادي وله مفتاح على الآلة الحاسبة.

8 التقييم

إن متابعة المعلم لعمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل»، توفر له فرصة للاطلاع على إمكانياتهم في استيعاب حل المعادلات الأسية واللوغاريتمية.

اختبار سريع

حل كل معادلة مما يلي:

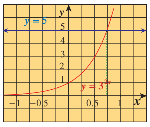
1. $3^x = 81$ $\quad x = 4$
2. $5 + 2^x = 69$ $\quad x = 6$
3. $\log x + \log 4 = 3$ $\quad 250$
4. $\log_3 22 = x$ $\quad 2.814$

يمكنك أيضًا حل معادلات أسية بيانيًّا.

فمثلًا الشكل المقابل يمثل حل المعادلة $3^{2x} = 5$ حيث تمّ تمثيل بيان الدالة: $y = 3^{2x}$ والدالة $y = 5$

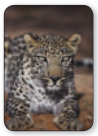
نقطة التقاطع للمنحنيين $(0.732, 5)$.

$\therefore$ حل المعادلة هو 0.732 تقريبًا.



تطبيق إثرائي

كان النمر العربي من أكثر السنوريات انتشارًا في شبه الجزيرة العربية لكنه الآن موجود على اللائحة الحمراء لأنواع الحيوانات المهددة بالانقراض.



كان عدده 112 سنة 1990 في بعض مناطق شبه الجزيرة العربية وانخفض إلى 65 سنة 2006.

(a) اكتب معادلة أسية تنمذج تناقص عدد النمور.

(b) إذا بقي هذا التناقص على حاله، في أية سنة يبقى فقط 5 نمور في شبه الجزيرة العربية؟ وضّح بيانيًّا.

الحل:

(a) المعادلة الأسية على الشكل $y = ab^x$.

لتكن سنة 1990 ممثلة بالصفر وسنة 2006 بـ 16

$112 = ab^0$ — عوّض عن x بـ 0، عن y بـ 112

$a = 112$ — $b^0 = 1$

$\therefore y = 112b^x$

$65 = 112 \times b^{16}$ — عوّض عن x بـ 16، عن y بـ 65

$b^{16} = \frac{65}{112}$

$\log b^{16} = \log \frac{65}{112}$ — خذ اللوغاريتم لكلا الطرفين

$16 \log b = \log \frac{65}{112}$

$\log b \approx -0.01476904$ — استخدم الآلة الحاسبة

$b \approx 0.96656476$

$\therefore y = (112)(0.96656476)^x$

(b)

$y = 5$

$y = (112)(0.96656476)^x$

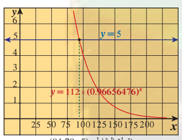
$5 = (112)(0.96656476)^x$

$x \approx 92$ — الإجابة

$1990 + 92 = 2082$

يبقى في شبه الجزيرة العربية 5 نمور فقط سنة 2082.

الشكل المقابل يوضّح الحل بيانيًّا.



نقطة التقاطع $(91.79, 5)$

154

تمرَّنْ 4–5

المعادلات الأسية واللوغاريتيمية

Exponential and Logarithmic Equations

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–8)، حلّ كل معادلة مما يلي. اختبر صحة كل حل:

(1) $9^{2y} = 66$ (2) $12^{y-2} = 20$ (3) $5 - 3^x = -40$ (4) $25^{2x+1} = 144$

(5) $3x^{\frac{3}{2}} = 27, x > 0$ (6) $2 + 8r^{\frac{5}{3}} = 26$ (7) $\sqrt[7]{n^2} - 12 = 5$ (8) $-3 + 2\sqrt[4]{x^3} = 33$

في التمارين (9–13)، استخدم قاعدة تغيير الأساس لإيجاد قيمة كل لوغاريتم مما يلي:

(9) $\log_2 7$ (10) $\log_3 33$ (11) $\log_{21} 0.085$

(12) $\log_5 510$ (13) $\log_4 1.116$

(14) باعتبار المعادلة: $2^{\frac{x}{3}} = 80$

(a) حلّ المعادلة بأخذ اللوغاريتم بأساس 2 لكل طرف.

(b) حلّ المعادلة بأخذ اللوغاريتم بأساس 10 لكل طرف.

(c) قارن بين إجاباتك في الفقرتين (a), (b). أي طريقة تفضلها؟ ولماذا؟

في التمارين (15–20)، حل كل معادلة لوغاريتمية مما يلي:

(15) $\log 6x - 3 = -4$ (16) $\log x - \log 3 = 8$

(17) $\log_2(3x - 5) = 1$ (18) $\log(2x) + \log(x - 3) = \log 8$

(19) $\log(3x) - \log(x + 20) = -\log 2$ (20) $\log_{(2x-1)} 49 = 2$

(21) $\log_{(5x-3)} 64 = \log 4$

(22) **الأحياء البرية:** لنفرض أن فصيلة معينة من الحيوانات البرية المعرضة لخطر الانقراض تتناقص أعدادها بمعدل 3.5% سنويًّا وقد أحصيت 80 حيوانًا من هذه الفصيلة في موطنها الذي تقوم بدراسته.

(a) توقع عدد حيوانات هذه الفصيلة الذي سيبقى بعد 10 سنوات.

(b) بعد كم سنة سوف يتناقص عدد حيوانات هذه الفصيلة لأول مرة إلى أقل من 15 حيوانًا، بالمعدل نفسه؟

65

«عمل تعاوني»

(a) 1 $F = kw^{\frac{2}{3}}$; $145 = 0.421w^{\frac{2}{3}}$

$w^{\frac{2}{3}} = 344.42$

2 $\left(w^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = (344.42)^{\frac{3}{2}}$

$w = 344.42\sqrt{344.42}$

$w \approx 6\,392\ kg$

3 $\dfrac{F}{k} = w^{\frac{2}{3}}$; $F = w^{\frac{2}{3}}$

$\left(\dfrac{F}{k}\right)^{\frac{3}{2}} = w$

(b) $15 = k(400)^{\frac{3}{2}}$

$k = \dfrac{15}{\sqrt[3]{160\,000}} \approx 0.276$

«حاول أن تحل»

1 **(a)** $3^x = 4$, $x = \dfrac{\log 4}{\log 3} \approx 1.262$

(b) $6^x = 21$, $x = \dfrac{\log 21}{\log 6} \approx 1.7$

(c) $3^{x+4} = 101$, $x = \dfrac{\log 101 - \log 81}{\log 3} \approx 0.2$

2 **(a)**

$t^{\frac{7}{2}} = 128 ; t^{\frac{7}{2}} = 2^7 ; \log t^{\frac{7}{2}} = \log 2^7 ; \frac{7}{2}\log t = 7\log 2 ; t = 4$

(b) $u^{\frac{4}{3}} = 16$; $u^{\frac{4}{3}} = 2^4$; $\frac{4}{3}\log u = 4\log 2$

$u = 8$

3 **(a)** $\log_3 400 = \dfrac{\log 400}{\log 3} \approx 5.454$

$5.454 = \dfrac{\log x}{\log 8}$

$\log x = 4.925$; $x \approx 10^{4.925}$

$x \approx 84168.814$

(b) $\log_2 x \approx 2^{2.4650}$

$x \approx 2^{2.4650}$

$x \approx 5.521$

4 $7^{5x} = 3\,000$

$\log_7 7^{5x} = \log_7 3\,000$

$5x = \dfrac{\log(3 \times 10^3)}{\log 7}$

$x = \dfrac{3 + \log 3}{5\log 7} \approx 0.823$

حل معادلات لوغاريتمية Solving Logarithmic Equations

كل معادلة تتضمن تعبيرًا لوغاريتميًّا تسمى معادلة لوغاريتمية ويمكن وضعها على الصورة:

$\log_b y = x \qquad \forall\ y, b \in \mathbb{R}^+, b \neq 1$

ويكون حلها بما يحقق هذه الشروط لذا يتوجب إيجاد مجال التعريف (شرط الحل) أو التحقق من القيم الناتجة.

مثال (5)

حل المعادلة: $\log(3x+1) = 5$

الحل:

نوجد المجال: $3x + 1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{3}$

$\therefore$ المجال $= \left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$

$\log(3x+1) = 5$

اكتب في الصورة الأسية $3x + 1 = 10^5$

$3x + 1 = 100\,000$

$x = 33\,333$

$\because 33\,333 \in \left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$

$\therefore$ الحل مقبول.

حاول أن تحل

5 حل المعادلة: $\log(7 - 2x) = -1$

في بعض الحالات، عليك استخدام خواص اللوغاريتمات لتبسيط التعابير قبل حل المعادلة.

مثال (6)

حل المعادلة: $2\log x - \log 3 = 2$

الحل:

نوجد المجال: $x > 0$

$\therefore$ المجال $= (0, \infty)$

$2\log x - \log 3 = 2$

اكتب لوغاريتم واحد $\log\left(\frac{x^2}{3}\right) = 2$

اكتب في الصورة الأسية $\frac{x^2}{3} = 10^2$

$x^2 = 3 \times 100$

$x = \pm 10\sqrt{3}$

155

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة $9^x = 3$ هو $x = \frac{1}{2}$ (a) (b)

(2) حل المعادلة $2\log x = -1$ هو $x = 10^{-0.5}$ (a) (b)

(3) إذا كان $\log(x+6) = 0$ فإن $x = -5$ (a) (b)

(4) حل المعادلة $14^{9x} = 146$ هو $x = \frac{\log 146}{\log 14}$ (a) (b)

(5) حل المعادلة $3\log x - \log 6 + \log 2.4 = 9$ هو 5×10^4 (a) (b)

في التمارين (6–14)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان $(1.5)^x = 356$ فإنّ:

(a) $x \approx 15$ (b) $x \approx 14.5$ (c) $x \approx 15.3$ (d) $x \approx 16.3$

(7) حل المعادلة $8 + 10^x = 1008$ هو:

(a) $x = 6$ (b) $x \approx 3.5$ (c) $x = 3$ (d) $x = 2$

(8) إذا كان $2^{x^2} = 512$ فإنّ:

(a) $x = 3$ (b) $x = 9$ (c) $x = 3\ ,\ x = -3$ (d) $x = -9$

(9) إذا كان $2\log x = -2$ فإنّ:

(a) $x = 10^{-1}$ (b) $x = 10^{0.5}$ (c) $x = 10^{-2}$ (d) $x = 10^{-0.5}$

(10) مجموعة حل المعادلة: $\log(x^2+2) = \log(5x-4)$ هي:

(a) $\{2\}$ (b) $\{3\}$ (c) $\{2, 3\}$ (d) $\{-2, -3\}$

(11) مجموعة حل المعادلة: $\log_2(x^2 - x) = 1$ هي:

(a) $\{-1\}$ (b) $\{1, 2\}$ (c) $\{-1, 2\}$ (d) $\{-1, -2\}$

(12) حل المعادلة $\log(x+21) + \log x = 2$ هو:

(a) 4 (b) $-25\ ,\ 4$ (c) 25 (d) $4\ ,\ 25$

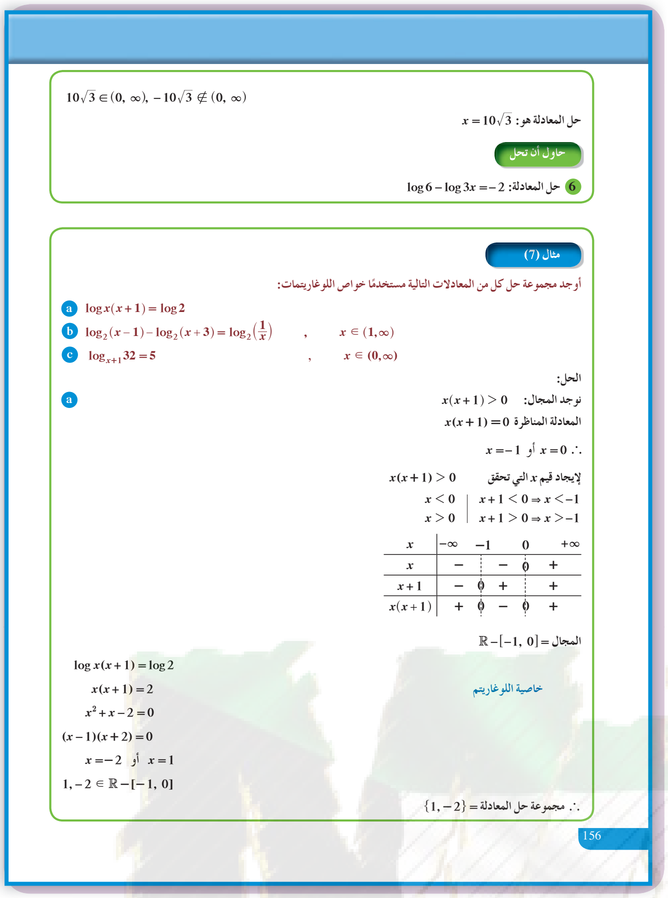
(13) يكون $x = 3$ حلًا للمعادلة:

(a) $\log_3(6 - x^2) = 1$ (b) $\log_x 9 = \frac{2}{3}$ (c) $\log_3(x^2+1) = 2$ (d) $\log_3 x^3 + \log_3 x = 4$

(14) حل المعادلة $\log_x 81 - \log_x 9 = 2$ هو:

(a) -3 (b) $\frac{1}{3}$ (c) 3 (d) 9

66



$10\sqrt{3} \in (0, \infty), -10\sqrt{3} \notin (0, \infty)$

حل المعادلة هو: $x = 10\sqrt{3}$

حاول أن تحل

6 حل المعادلة: $\log 6 - \log 3x = -2$

مثال (7)

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية مستخدمًا خواص اللوغاريتمات:

a $\log x(x+1) = \log 2$

b $\log_2(x-1) - \log_2(x+3) = \log_2\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \in (1, \infty)$

c $\log_{x+1} 32 = 5$, $x \in (0, \infty)$

الحل:

a

نوجد المجال: $x(x+1) > 0$

المعادلة المناظرة $x(x+1) = 0$

$\therefore x = 0$ أو $x = -1$

لإيجاد قيم x التي تحقق $x(x+1) > 0$

$x+1 < 0 \Rightarrow x < -1$ | $x < 0$

$x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$ | $x > 0$

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
x	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x(x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

المجال $= \mathbb{R} - [-1, 0]$

$\log x(x+1) = \log 2$

$x(x+1) = 2$ خاصية اللوغاريتم

$x^2 + x - 2 = 0$

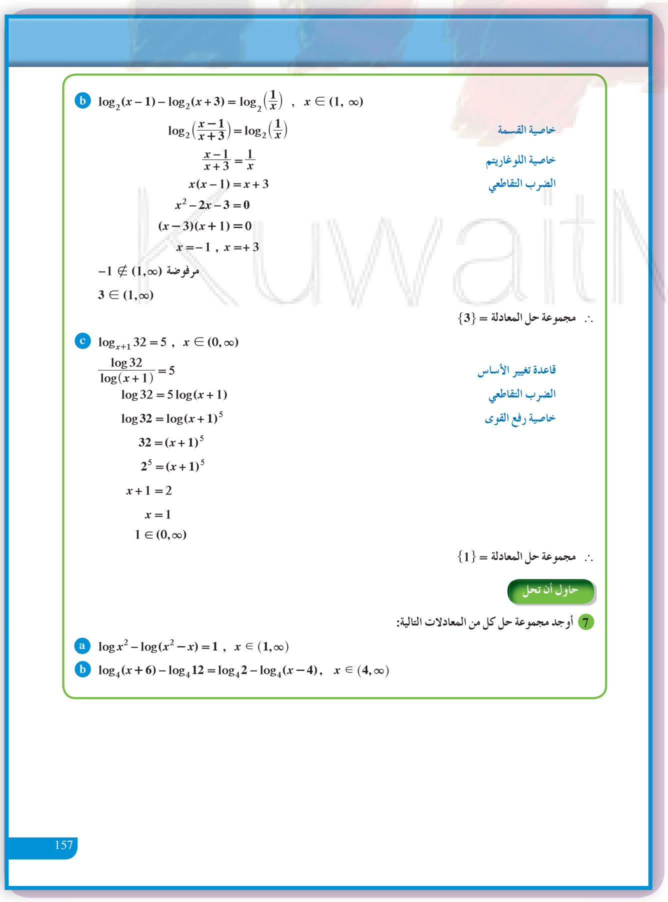
$(x-1)(x+2) = 0$

$x = 1$ أو $x = -2$

$1, -2 \in \mathbb{R} - [-1, 0]$

$\therefore$ مجموعة حل المعادلة $= \{1, -2\}$

156



b $\log_2(x-1) - \log_2(x+3) = \log_2\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \in (1, \infty)$

$\log_2\left(\frac{x-1}{x+3}\right) = \log_2\left(\frac{1}{x}\right)$ خاصية القسمة

$\frac{x-1}{x+3} = \frac{1}{x}$ خاصية اللوغاريتم

$x(x-1) = x+3$ الضرب التقاطعي

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x-3)(x+1) = 0$

$x = -1$, $x = +3$

$-1 \notin (1, \infty)$ مرفوضة

$3 \in (1, \infty)$

$\therefore$ مجموعة حل المعادلة $= \{3\}$

c $\log_{x+1} 32 = 5$, $x \in (0, \infty)$

$\frac{\log 32}{\log(x+1)} = 5$ قاعدة تغيير الأساس

$\log 32 = 5\log(x+1)$ الضرب التقاطعي

$\log 32 = \log(x+1)^5$ خاصية رفع القوى

$32 = (x+1)^5$

$2^5 = (x+1)^5$

$x + 1 = 2$

$x = 1$

$1 \in (0, \infty)$

$\therefore$ مجموعة حل المعادلة $= \{1\}$

حاول أن تحل

7 أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:

a $\log x^2 - \log(x^2 - x) = 1$, $x \in (1, \infty)$

b $\log_4(x+6) - \log_4 12 = \log_4 2 - \log_4(x-4)$, $x \in (4, \infty)$

157

5 $\log(7 - 2x) = \log 10^{-1}$; $x = 3.45$

6 $\log \dfrac{6}{3x} = \log 10^{-2}$; $x = 200$

7 **(a)** $\log\left(\dfrac{x^2}{x^2 - x}\right) = \log 10$

$\dfrac{x}{x-1} = 10$, $x = \dfrac{10}{9}$

(b) $\log_4\left(\dfrac{x+6}{12}\right) = \log_4\left(\dfrac{2}{x-4}\right)$

$\dfrac{x+6}{12} = \dfrac{2}{x-4}$

$x^2 + 2x - 48 = 0$

$x = 6$

4–6: اللوغاريتم الطبيعي

1 الأهداف

- يوجد العلاقة بين الدالة الأسية $y = e^x$ واللوغاريتم الطبيعي.
- يحل معادلات باستخدام اللوغاريتم الطبيعي.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

اللوغاريتم الطبيعي.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – ورق رسم بياني – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) حل المعادلة: $4^{x+1} = 8$

(b) حل المعادلة: $\log_4(x+2) = 3$

(c) حل المعادلة: $\log(2x-3) = 1$

(d) أوجد $\log_7 21$ باستخدام قاعدة تغيير الأساس.

5 التدريس

يعتبر العدد $e \approx 2.71828$ إلى جانب العددين $g \approx 9.8$, $\pi = 3.1416$ من أهم الأعداد الحقيقية.وبالتالي كان اللوغاريتم الطبيعي، حيث أساسه العدد e ، من أكثر اللوغاريتمات استخدامًا ويرمز إليه على الآلة الحاسبة بـ ln .

يساعد اللوغاريتم الطبيعي على إيجاد حلول سريعة كون $ln\,e = 1$، إلى جانب $\log 10 = 1$. وهنا يجب التنبيه دائمًا إلى استخدام المفاتيح على الآلة الحاسبة، حيث إن مفتاح log موجود إلى جانب مفتاح ln .

يمكن استكشاف الفرق بين نتائج اللوغاريتم للعدد نفسه باستخدام المفتاحين، لذا يجب الانتباه جيدًا إلى اللوغاريتم المستخدم.

4–6

اللوغاريتم الطبيعي

Natural Logarithm

سوف تتعلم

- علاقة اللوغاريتم الطبيعي بالدالة $y = e^x$.
- حل المعادلات باستخدام اللوغاريتم الطبيعي.

المفردات والمصطلحات:

- اللوغاريتم الطبيعي

Natural Logarithm

دعنا نفكر ونتناقش

في الدرس (2–4) وجدت أن العدد $e \approx 2.71828$ وقد أمكن استخدامه كأساس.
فالدالة $y = e^x$ لها معكوس هو $y = \log_e x$
ويسمى دالة اللوغاريتم الطبيعي ورمزه:
$y = ln\,x$
وتقرأ y تساوي اللوغاريتم الطبيعي لِـ x
يوضح الرسم البياني المجاور الدالتين:

1. $y = e^x$
2. $y = ln\,x$

الآلة الحاسبة: استخدم المفتاح ln على آلتك الحاسبة لإيجاد قيم:

a. $ln5,\ ln3,\ ln15,\ ln5 + ln3$

b. $ln1,\ ln\,e,\ ln\,e^2$

كيف تربط إجابتك بما سبق دراسته؟

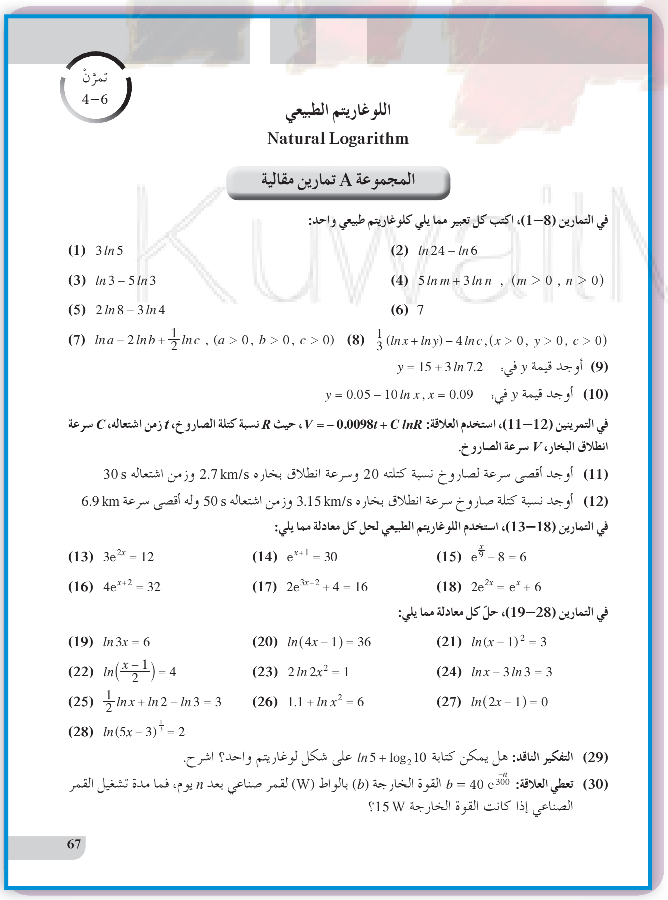
تطبق خواص اللوغارتيمات المعتادة على اللوغاريتم الطبيعي أيضًا.
أعد ذكر خاصية الضرب وخاصية القسمة وخاصية القوى بدلالة اللوغاريتم الطبيعي.

تدريب

أكمل ما يلي حيث $k, m, n \in \mathbb{R}^+$.

1. $ln(mn) = ...$ (خاصية ....)
2. $ln\frac{m}{n} = ...$ (خاصية ....)
3. $ln\,m^k = ...$ (خاصية ....)
4. $ln\ e = ...$
5. $ln\ e^k = ...$
6. $e^{ln\,k} = ...$

158



تمرَّنْ 4–6

اللوغاريتم الطبيعي

Natural Logarithm

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–8)، اكتب كل تعبير مما يلي كلوغاريتم طبيعي واحد:

(1) $3\,ln5$ (2) $ln24 - ln6$

(3) $ln3 - 5\,ln3$ (4) $5\,ln\,m + 3\,ln\,n\ ,\ (m > 0\ ,\ n > 0)$

(5) $2\,ln8 - 3\,ln4$ (6) 7

(7) $ln\,a - 2\,ln\,b + \frac{1}{2}ln\,c\ ,\ (a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$ (8) $\frac{1}{3}(ln\,x + ln\,y) - 4\,ln\,c,(x > 0,\ y > 0,\ c > 0)$

(9) أوجد قيمة y في: $y = 15 + 3\,ln\,7.2$

(10) أوجد قيمة y في: $y = 0.05 - 10\,ln\,x, x = 0.09$

في التمرينين (11–12)، استخدم العلاقة: $V = -0.0098t + C\,lnR$، حيث R نسبة كتلة الصاروخ، t زمن اشتعاله، C سرعة انطلاق البخار، V سرعة الصاروخ.

(11) أوجد أقصى سرعة لصاروخ نسبة كتلته 20 وسرعة انطلاق بخاره 2.7 km/s وزمن اشتعاله 30 s

(12) أوجد نسبة كتلة صاروخ سرعة انطلاق بخاره 3.15 km/s وزمن اشتعاله 50 s وله أقصى سرعة 6.9 km

في التمارين (13–18)، استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل كل معادلة مما يلي:

(13) $3e^{2x} = 12$ (14) $e^{x+1} = 30$ (15) $e^{\frac{x}{9}} - 8 = 6$

(16) $4e^{x+2} = 32$ (17) $2e^{3x-2} + 4 = 16$ (18) $2e^{2x} = e^x + 6$

في التمارين (19–28)، حلّ كل معادلة مما يلي:

(19) $ln\,3x = 6$ (20) $ln(4x-1) = 36$ (21) $ln(x-1)^2 = 3$

(22) $ln\left(\frac{x-1}{2}\right) = 4$ (23) $2\,ln\,2x^2 = 1$ (24) $ln\,x - 3\,ln\,3 = 3$

(25) $\frac{1}{2}ln\,x + ln\,2 - ln\,3 = 3$ (26) $1.1 + ln\,x^2 = 6$ (27) $ln(2x-1) = 0$

(28) $ln(5x-3)^{\frac{1}{3}} = 2$

(29) **التفكير الناقد:** هل يمكن كتابة $ln5 + \log_2 10$ على شكل لوغاريتم واحد؟ اشرح.

(30) **تعطي العلاقة:** $b = 40\,e^{\frac{-n}{300}}$ القوة الخارجة (b) بالواط (W) لقمر صناعي بعد n يوم، فما مدة تشغيل القمر الصناعي إذا كانت القوة الخارجة 15 W؟

67

في المثال (1)

يوفر هذا المثال فرصة أمام الطلاب لحل معادلة أسية حيث أساس الأس هو العدد e، في هذه الحالة يتعلم الطالب عزل الأساس e مع قيمة الأس ليتمكن بعدها من استخدام اللوغاريتم الطبيعي علمًا بأن $ln\,e = 1$.

ساعد الطلاب على استخدام القاعدة: $ln\,e^{u} = u\,ln\,e = u$ حيث u بدلالة المتغير x وهذا يسهل أيضًا عزل المتغير x .


مثال (1)

استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل: $8e^{2x} = 20$

الحل:

	$8e^{2x} = 20$
اقسم كل طرف على 8	$e^{2x} = \frac{20}{8}$
بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لكل طرف	$ln\,e^{2x} = ln\,2.5$
خاصية القوى حيث $ln\,e = 1$	$2x\,ln\,e = ln\,2.5$
اختصر	$2x = ln\,2.5$
اقسم كل طرف على 2	$x = \frac{ln\,2.5}{2}$
استخدم آلتك الحاسبة	$x \approx 0.458$

حاول أن تحل

1 استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل: $e^{4(x+1)} = 32$.

اللوغاريتم الطبيعي يبسط تعبيرات العديد من العلاقات في المجالات المختلفة ومنها المجال الفيزيائي.

مثال (2) الصلة بالواقع

الفضاء: يمكن أن يبلغ صاروخ مدارًا ثابتًا على بعد 300 km فوق سطح الأرض إذا ما بلغت سرعته 7.7 km/s وتحسب أقصى سرعة (v) له بالعلاقة: $v = -0.0098\,t + c\,ln\,r$

(حيث t هي زمن اشتعال وقود محرك الصاروخ بالثانية (s)، c هي سرعة انطلاق البخار بـ (km/s)، r هي النسبة بين كتلة الصاروخ وهو محمل بالوقود إلى كتلته من دون وقود).

لنفرض أن صاروخًا قد استخدم لدفع سفينة فضاء، وله نسبة كتلة حوالى 25 وسرعة انطلاق البخار 2.8 (km/s)، وزمن الاشتعال 100 s، فهل يبلغ هذا الصاروخ مدارًا ثابتًا؟

الحل:

في هذه الحالة: $r \approx 25$, $c = 2.8$ km/s , $t = 100$ s

لإيجاد v، استخدم العلاقة: $v = -0.0098\,t + c\,ln\,r$

$v = -0.0098\,(100) + 2.8\,ln\,25$

$\approx -0.98 + 2.8(3.219)$

$\therefore v \approx 8$ km/s

وهذه السرعة أكبر من السرعة 7.7km/s، والتي تلزم لبلوغ المدار الثابت.

لذلك فإن هذا الصاروخ يمكنه أن يبلغ المدار الثابت.

159

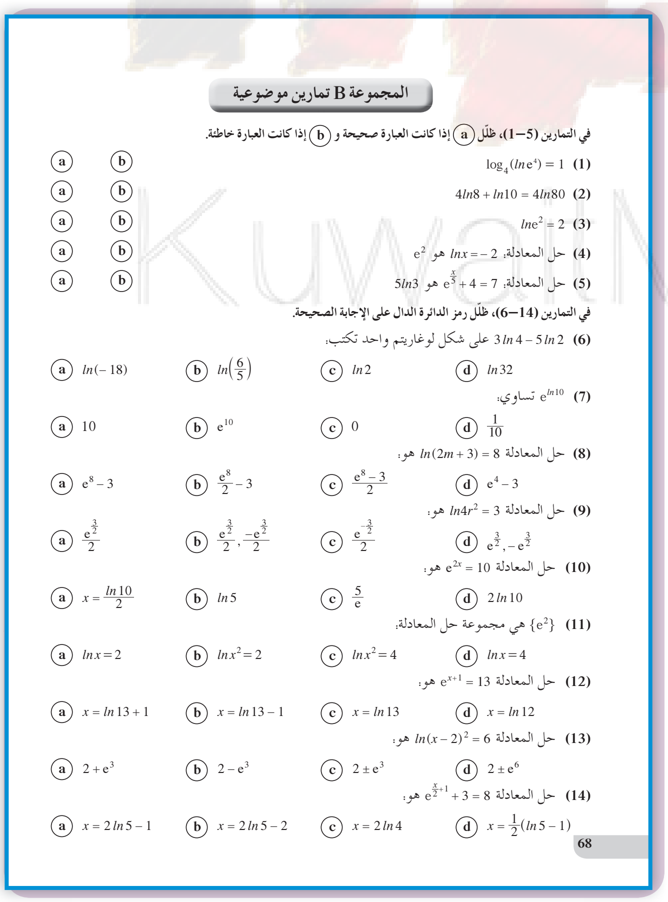
في المثال (2)

يوفر هذا المثال فرصة أمام الطلاب لاستخدام اللوغاريتم الطبيعي وخاصة أن معادلة أقصى سرعة للصاروخ تتضمن اللوغاريتم الطبيعي والممثل بالرمز ln.

كما أن جميع خاصيات اللوغاريتم التي تعرفنا عليها سابقًا هي صالحة مع اللوغاريتم الطبيعي أي خاصية الضرب وخاصية القسمة وخاصية القوى، وهذا ما تمّ تطبيقه في المثال (4).

في المثال (3)

يوفر هذا المثال فرصة للطالب كي يدرك أن الدالة اللوغاريتمية تكون معرفة إذا كان المتغير قيمة موجبة وهذا المتغير يمكن أن يكون بدلالة متغير آخر أي أن $3x + 5 > 0$ وليس $x > 0$ فقط.


المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\log_4(ln\,e^4) = 1$ (a) (b)

(2) $4ln8 + ln10 = 4ln80$ (a) (b)

(3) $ln\,e^2 = 2$ (a) (b)

(4) حل المعادلة: $ln\,x = -2$ هو e^2 (a) (b)

(5) حل المعادلة: $e^{\frac{x}{5}} + 4 = 7$ هو $5ln3$ (a) (b)

في التمارين (6—14)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) $3\,ln\,4 - 5\,ln\,2$ على شكل لوغاريتم واحد تكتب:

(a) $ln(-18)$ (b) $ln\left(\frac{6}{5}\right)$ (c) $ln\,2$ (d) $ln\,32$

(7) e^{ln10} تساوي:

(a) 10 (b) e^{10} (c) 0 (d) $\frac{1}{10}$

(8) حل المعادلة $ln(2m+3) = 8$ هو:

(a) $e^8 - 3$ (b) $\frac{e^8}{2} - 3$ (c) $\frac{e^8 - 3}{2}$ (d) $e^4 - 3$

(9) حل المعادلة $ln4r^2 = 3$ هو:

(a) $\frac{e^{\frac{3}{2}}}{2}$ (b) $\frac{e^{\frac{3}{2}}}{2}, \frac{-e^{\frac{3}{2}}}{2}$ (c) $\frac{e^{-\frac{3}{2}}}{2}$ (d) $e^{\frac{3}{2}}, -e^{\frac{3}{2}}$

(10) حل المعادلة $e^{2x} = 10$ هو:

(a) $x = \frac{ln\,10}{2}$ (b) $ln\,5$ (c) $\frac{5}{e}$ (d) $2\,ln\,10$

(11) $\{e^2\}$ هي مجموعة حل المعادلة:

(a) $ln\,x = 2$ (b) $ln\,x^2 = 2$ (c) $ln\,x^2 = 4$ (d) $ln\,x = 4$

(12) حل المعادلة $e^{x+1} = 13$ هو:

(a) $x = ln\,13 + 1$ (b) $x = ln\,13 - 1$ (c) $x = ln\,13$ (d) $x = ln\,12$

(13) حل المعادلة $ln(x-2)^2 = 6$ هو:

(a) $2 + e^3$ (b) $2 - e^3$ (c) $2 \pm e^3$ (d) $2 \pm e^6$

(14) حل المعادلة $e^{\frac{x}{2}+1} + 3 = 8$ هو:

(a) $x = 2\,ln\,5 - 1$ (b) $x = 2\,ln\,5 - 2$ (c) $x = 2\,ln\,4$ (d) $x = \frac{1}{2}(ln\,5 - 1)$

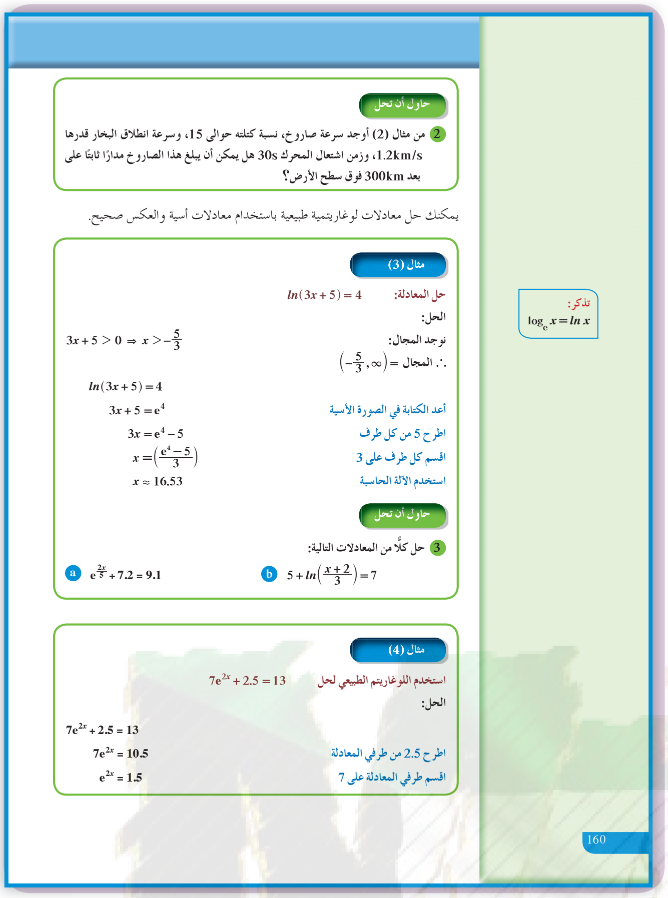
68

6 الربط

نجد في المثال (2) كيفية تطبيق اللوغاريتم الطبيعي على مسائل حياتية بشكل بسيط جدًّا لسهولة الحل باستخدام الآلة الحاسبة.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام الآلة الحاسبة بين مفتاحين **ln** و **log** ، ساعدهم على معرفة أن **log** تستخدم في اللوغاريتم الاعتيادي والأساس هو 10. أما **ln** فتستخدم في اللوغاريتم الطبيعي وأساسه العدد e.



حاول أن تحل

2 من مثال (2) أوجد سرعة صاروخ، نسبة كتلته حوالى 15، وسرعة انطلاق البخار قدرها 1.2km/s، وزمن اشتعال المحرك 30s هل يمكن أن يبلغ هذا الصاروخ مدارًا ثابتًا على بعد 300km فوق سطح الأرض؟

يمكنك حل معادلات لوغاريتمية طبيعية باستخدام معادلات أسية والعكس صحيح.

تذكر: $\log_e x = ln\, x$

مثال (3)

حل المعادلة: $ln(3x+5) = 4$

الحل:

نوجد المجال: $3x+5 > 0 \Rightarrow x > -\frac{5}{3}$

$\therefore$ المجال $= \left(-\frac{5}{3}, \infty\right)$

$ln(3x+5) = 4$

أعد الكتابة في الصورة الأسية $3x+5 = e^4$

اطرح 5 من كل طرف $3x = e^4 - 5$

اقسم كل طرف على 3 $x = \left(\frac{e^4-5}{3}\right)$

استخدم الآلة الحاسبة $x \approx 16.53$

حاول أن تحل

3 حل كلًّا من المعادلات التالية:

a $e^{\frac{2x}{5}} + 7.2 = 9.1$

b $5 + ln\left(\frac{x+2}{3}\right) = 7$

مثال (4)

استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل $7e^{2x} + 2.5 = 13$

الحل:

$7e^{2x} + 2.5 = 13$

اطرح 2.5 من طرفي المعادلة $7e^{2x} = 10.5$

اقسم طرفي المعادلة على 7 $e^{2x} = 1.5$

160

8 التقييم

تابع بدقة جهود الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» للتأكد من كونهم قد ميّزوا جيّدًا بين اللوغاريتمات التي تعرفوها في هذه الوحدة.

اختبار سريع

أوجد الحل لما يلي:

1	$e^x + 3 = 25$	3.091
2	$3\, ln\, e^{2x} = 15$	2.5
3	$ln\, x + ln\, 4 = 6$	100.857
4	$ln\, 8 - ln\, x = ln\, 2$	4

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

5 – 1 تحقق من إجابات الطلاب، وتأكد من أنهم يستخدمون المفتاح الصحيح على الآلة الحاسبة وهو ln .

«تدريب»

1 $ln(m\,n) = ln(m) + ln(n)$ خاصية الضرب

2 $ln\left(\frac{m}{n}\right) = ln(m) - ln(n)$ خاصية القسمة

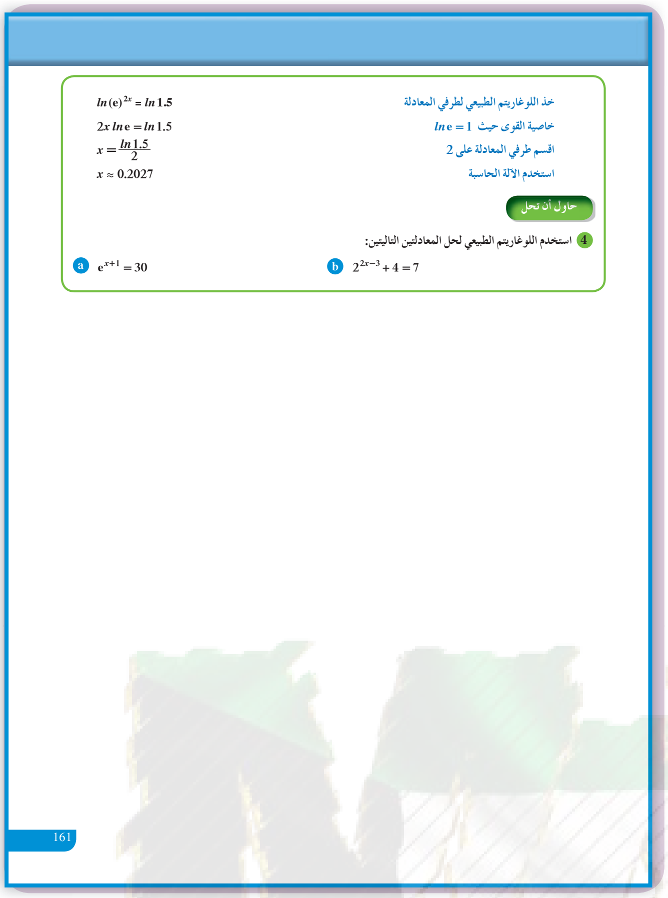
3 $ln(m^k) = k\, ln(m)$ خاصية القوى

4 $ln\, e = 1$

5 $ln\, e^k = k$

6 $e^{ln\, k} = k$

«حاول أن تحل»



خذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة	$ln(e)^{2x} = ln\,1.5$
خاصية القوى حيث $ln\,e = 1$	$2x\,ln\,e = ln\,1.5$
اقسم طرفي المعادلة على 2	$x = \frac{ln\,1.5}{2}$
استخدم الآلة الحاسبة	$x \approx 0.2027$

حاول أن تحل

4 استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل المعادلتين التاليتين:

a $e^{x+1} = 30$

b $2^{2x-3} + 4 = 7$

161

1 $4x + 4 = ln\,32 \;,\; x \approx -0.134$

2 والمطلوب إيجاد قيمة v $\quad v = -0.0098t + c\,ln\,r$

$v = -0.0098(30) + 1.2\,ln\,15$

$v \approx 2.956$ وهذه القيمة أصغر من 7.7، لذا لن يتمكن هذا الصاروخ من بلوغ المدار الثابت وهو 300 km فوق الأرض.

3 **(a)** $e^{\frac{2x}{5}} = 1.9 \;;\; x \approx 1.605$

(b) $ln\left(\frac{x+2}{3}\right) = 2$

$x \approx 20.167$

4 **(a)** $x \approx 2.4012$

(b) $\log_2 2^{2x-3} = \log_2 3$

$2x - 3 = \frac{ln\,3}{ln\,2} \approx 1.585$

$x \approx 2.3$

المرشد لحل المسائل

إجابات «مسألة إضافية»

(a) $y = 750e^{0.183x}$

(b) 2006

(c) 2014

المرشد لحل المسائل

في نهاية العام 2000 وصل عدد مشتركي شبكة الإنترنت في العالم إلى 360 مليونًا وتزايد هذا العدد ليصل في نهاية العام 2011 إلى 2 260 مليون مشترك.

a x تمثّل العدد بالسنين، m معدل الزيادة السنوية، P عدد المشتركين في عام 2000، y عدد المشتركين مع مرور الوقت.

اكتب دالة على الشكل: $y = Pe^{mx}$ تمثل القيمة المتوقعة لزيادة عدد مشتركي شبكة الإنترنت ابتداءً من العام 2000.

y: عدد المشتركين بعد مرور x عام.

m: معدل التزايد السنوي، P: عدد المشتركين عام 2000.

b في أي عام يتخطى عدد مشتركي شبكة الإنترنت المليار؟

c متى يصبح هذا العدد أكثر من 3 مليارات مشترك؟

d أوجد قيمة x بدلالة y.

e كيف يمكن استخدام المعادلة في **d** للتحقق من إجابات **b**، **c**؟

الحل:

a الشكل العام للمعادلة هو كالتالي: $y = Pe^{mx}$

إيجاد المعدل العام لتزايد عدد مشتركي شبكة الإنترنت في العالم بين عام 2000 و2011.

$2\,260 = 360\,e^{11m}$ تعويض y بـ 2 260 وPبـ 360 وx بـ 11

$\frac{2\,260}{360} = e^{11m}$ قسمة طرفي المعادلة على 360

$ln\frac{2\,260}{360} = ln\,e^{11m}$ تطبيق اللوغاريتم الطبيعي على طرفي المعادلة

$ln\frac{2\,260}{360} = 11m$ تبسيط

$m = \frac{ln\left(\frac{2\,260}{360}\right)}{11}$ قسمة طرفي المعادلة على 11

$m = 0.167$ استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد معدل التزايد السنوي

إذًا معدل التزايد السنوي لمشتركي شبكة الإنترنت هو 16.7%.

وبالتالي الدالة هي: $y = 360\,e^{0.167x}$

b

$y = 360\,e^{0.167x}$

$360\,e^{0.167x} > 1\,000$

$e^{0.167x} > \frac{1\,000}{360}$

$0.167x > ln\frac{1\,000}{360}$

$x > \frac{ln\frac{1\,000}{360}}{0.167} \approx 6.11767$

في العام 2007 يتخطى عدد مشتركي شبكة الإنترنت المليار، ويصبح العدد حوالى 1.159 مليار مشترك.

162

---

c

$y = 360\,e^{0.167x}$

$360\,e^{0.167x} > 3\,000$

$x > \frac{ln\frac{3\,000}{360}}{0.167} \approx 12.6961888$

وبالمثل

يتخطى عدد مشتركي شبكة الإنترنت 3 مليارات في العام 2013، ويصبح العدد حوالى 3.156 مليارات مشترك.

d

$y = 360\,e^{0.167x}$

$\frac{y}{360} = e^{0.167x}$ قسمة طرفي المعادلة على 360

$ln\left(\frac{y}{360}\right) = ln(e^{0.167x})$ تطبيق اللوغاريتم الطبيعي على طرفي المعادلة

$ln\left(\frac{y}{360}\right) = 0.167x$ تبسيط

$x = \frac{ln\left(\frac{y}{360}\right)}{0.167}$ قسمة طرفي المعادلة على 0.167

e نعوض عدد y في **b**، **c** لنتحقق من الإجابات التي توصلنا إليها من حيث عدد السنوات المطلوبة للوصول إلى هذه الأعداد.

b $\frac{ln\left(\frac{1\,000}{360}\right)}{0.167} \Rightarrow x \approx 6.12$، إذًا نحتاج إلى أكثر من 6 سنوات، إذًا في 2007.

c $\frac{ln\left(\frac{3\,000}{360}\right)}{0.167} \Rightarrow x \approx 12.7$، إذًا نحتاج إلى أكثر من 12 سنة، إذًا في 2013.

مسألة إضافية

في نهاية العام 2000، وصل عدد مشتركي الهاتف المحمول حوالى 750 مليونًا في العالم أمّا في نهاية العام 2011 فقد تزايد هذا العدد ليصل إلى حوالى 5.6 مليارات مشترك.

a x تمثّل عدد السنوات منذ العام 2000.

اكتب دالة على الشكل: $y = Pe^{mx}$، تمثل القيمة المتوقعة لزيادة مستخدمي الهاتف المحمول ابتداءً من العام 2000.

y: عدد المستخدمين بعد مرور x سنة.

m: معدل التزايد السنوي.

P: عدد المستخدمين في العام 2000.

b في أي عام يتخطى عدد مستخدمي الهاتف المحمول الـ 2 مليار؟

c في أي عام يتخطى عدد مستخدمي الهاتف المحمول الـ 9 مليارات؟

d أوجد x بدلالة y.

e كيف يمكن استخدام المعادلة في **d** للتحقق من الإجابات في **b**، **c**؟

163

اختبار الوحدة الرابعة

في التمارين (4–1)، ارسم كلًّا من الدوال التالية:

(1) $y = -3(0.25)^x$ **(2)** $f(x) = \frac{1}{2}(6)^{-x}$ **(3)** $y = 0.1(10)^{x-2}$ **(4)** $f(x) = (2)^{x+1} + 3$

(5) الكتابة: وضّح كيف يمكنك تحديد ما إذا كانت الدالة الأسية تمثّل نموًّا أسيًّا أم تضاؤلًا أسيًّا. اعرض مثالًا لكل منها.

في التمارين (8–6)، اكتب معادلة تصف الدالة الأسية التي على الصورة: $y = ab^x$، بمعلومية الأساس المعطى والتي يمر رسمها البياني بالنقطة المعطاة.

(6) الأساس 3، النقطة $(2, 3)$

(7) الأساس 4، النقطة $(-1, 1)$

(8) الأساس 2، النقطة $(0, 3)$

(9) علم الزلازل: كم مرة يكون زلزال قوته 5.2 بمقياس ريختر أقوى من زلزال قوته 3 علمًا بأن الطاقة المنطلقة تساوي $E \times 30^x$، x هي درجة قوة الزلزال بمقياس ريختر.

(10) ارسم بيان الدالة $y = \log_8 x$ ثم استخدمها كدالة مرجع لرسم بيان كل من الدوال اللوغاريتمية التالية:

(a) $y = \log_8(x+2)$ **(b)** $y = \log_8 x - 1$ **(c)** $y = \log_8(x+2) - 1$

في التمارين (14–11)، أوجد مفكوك كل من اللوغاريتمات التالية:

(11) $\log_4 r^2 n\ ,\ (r > 0\ ,\ n > 0)$ **(12)** $\log_2 (x+1)^2\ ,\ (x > -1)$

(13) $\log_7 \frac{a}{b}\ ,\ (a > 0\ ,\ b > 0)$ **(14)** $\log 3x^3y^2\ ,\ (x > 0\ ,\ y > 0)$

في التمارين (18–15)، استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد ناتج كل من المقادير التالية:

(15) $\log_3 27 - \log_3 9$ **(16)** $2\log_2 64 - \log_2 2$

(17) $-\log_4 \frac{1}{16} - \log_4 64$ **(18)** $2\log 5 + \log 40$

(19) سؤال مفتوح: اكتب مقدارين لوغاريتميين. أي منهما له القيمة الأكبر؟ اشرح.

في التمارين (30–20)، حل كلًّا من المعادلات التالية:

(20) $x^{\frac{3}{4}} = 81$ **(21)** $3k^{\frac{3}{2}} = 24$ **(22)** $\log 4x = 3$

(23) $2\log x = -4$ **(24)** $\log 2x + \log x = 1$ **(25)** $\log x - \log(x-1) = 1$

69

(d) $x = \dfrac{ln\left(\dfrac{y}{750}\right)}{0.183}$

(e) بالتعويض: $x \approx 5.4$ أي أكثر من 5 سنوات، لذا 2006

$x \approx 13.6$ أي أكثر من 13 سنة، لذا سنة 2014.

ملخص

- صورة الدالة الأسية هي: $y = ab^x$
- $b > 1$ الدالة تمثل نموًّا أسيًّا عامله b
- $0 < b < 1$ الدالة تمثل تضاؤلًا أسيًّا عامله b
- $y = ab^{cx}$، تتغير الرسوم البيانية للدالة الأسيّة بتغير قيم إحدى الثوابت التالية: $a\ ,b\ ,c$
- $y = b^x \Leftrightarrow \log_b y = x$
- اقرأ $\log_b y$ لوغاريتم y للأساس b
- الأساس b في المقدار الأس b^x هو نفسه الأساس في اللوغاريتم وفي كلتا الحالتين $b \neq 1$ و $b > 0$ وكذلك الأس.
- x في b^x هو اللوغاريتم في المعادلة $\log_b y = x$
- اللوغاريتمات المعتادة هي اللوغاريتمات للأساس 10 يمكن أن نكتب $\log_{10} y$ أو $\log y$
- الدوال اللوغاريتمية هي معكوسات الدوال الأسية.
- خواص اللوغاريتمات
- لأي أعداد حقيقية موجبة b, n, m، $b \neq 1$

خاصية الضرب $\log_b mn = \log_b m + \log_b n$

خاصية القسمة $\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$

خاصية القوى $\log_b m^k = k\log_b m\ ,\ k \in \mathbb{R}$

- المعادلة الأسية هي على الشكل $a = b^{cx}$، حيث الأس يتغير.
- $\forall a\ ,\ b \in \mathbb{R}^+\ , m \in \mathbb{R}^+ - \{1\}\ ,\ a = b \Longleftrightarrow \log_m a = \log_m b$
- بحساب اللوغاريتمات بأي أساس يمكنك استخدام خاصيّة تغيير الأساس لأي أعداد حقيقية موجبة $c\ , b\ , m$ حيث $b \neq 1\ , c \neq 1$

$$\log_b m = \frac{\log_c m}{\log_c b}$$

$$e \approx 2.71828$$

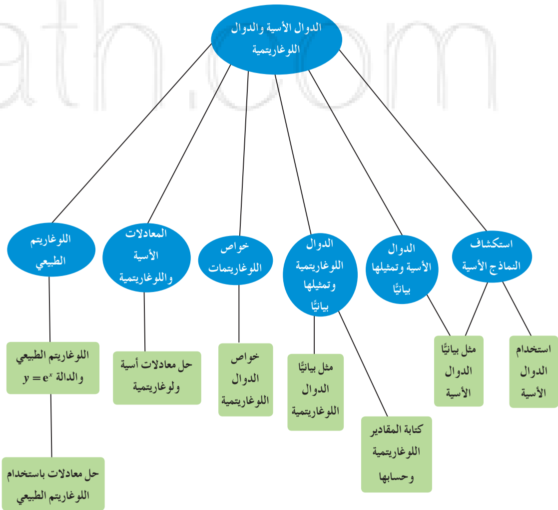
$$e^{ln\,x} = x$$

$$ln\,e^x = x$$

$$ln\,e = 1$$

165

مخطط تنظيمي للوحدة الرابعة



164

(26) $\log_x(3x + 4) = 2$ **(27)** $ln(x - 2) + ln\ x = 1$ **(28)** $ln(x + 1) + ln(x - 1) = 4$

(29) $ln\,x + ln(2x - 1) = 7$ **(30)** $3\,ln\,x - ln\,2 = 4$

(31) لنفترض أن ثمن آلة تستخدم في صناعة سلعة ما لها عامل تضاؤل سنوي قيمته 0.75. إذا بلغ ثمن الآلة 10 000 دينار بعد 5 سنوات من الاستخدام، فما قيمتها الأساسية؟

(32) **الدراسات الاجتماعية:** عام 1991 كان عدد سكان كاراتشي في باكستان حوالى 8 ملايين نسمة، وكان عامل النمو السنوي في هذا الوقت 1.039.

(a) ما عدد السكان المتوقع في عام 2010؟

(b) ما معدل الزيادة السنوية المتوقع؟

(c) متى يصل عدد السكان إلى 10 ملايين نسمة؟

(33) **سكان العالم:** بلغ عدد سكان العالم في عام 1994 حوالى 5.63 بلايين نسمة، ويقال إنه ينمو بمعدل 2% سنويًّا.

(a) اكتب معادلة أسية لوصف هذا النمو.

(b) صف نمو عدد السكان كل 35 سنة.

(c) صف نمو عدد السكان في نصف المدة الزمنية المحددة في الجزء (b).

70