الوحدة الخامسة: المتجهات Vectors

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

1 – 5: المتجه في المستوى

جزء 1: الكميات القياسية والكميات المتجهة.

جزء 2: متجه الموضع.

جزء 3: تكافؤ قطعتين موجهتين.

جزء 4: طول (معيار) متجه واتجاهه.

جزء 5: متجه الوحدة.

جزء 6: تساوي متجهين.

جزء 7: المتجه المعاكس.

جزء 8: ضرب متجه في عدد حقيقي.

2 – 5: جمع المتجهات وطرحها

جزء 1: جمع المتجهات هندسيًّا.

جزء 2: خواص عملية جمع المتجهات في المستوي.

جزء 3: مجموع متجهين جبريًّا.

جزء 4: طرح المتجهات.

جزء 5: الفرق بين متجهين جبريًّا.

جزء 6: التعبير عن متجه بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين.

3 – 5: الضرب الداخلي

جزء 1: الضرب الداخلي لمتجهين.

جزء 2: خواص الضرب الداخلي.

جزء 3: قياس الزاوية بين متجهين.

مقدمة الوحدة

الوحدة الخامسة

المتجهات

Vectors

مشروع الوحدة:

1 مقدمة المشروع: استخدم الفيزيائيون والمهندسون المتجهات خاصة في النصف الثاني من القرن التاسع عشر وفي بداية القرن العشرين. بالنسبة إليهم، المتجهات هي قوى وانتقالات وسرعات وحقول كهربائية وحقول مغناطيسية.

2 الأهداف: عند إقلاع الطائرات تتعرض لتيارات هوائية قد تغير في اتجاهها.

سوف ندرس في هذا المشروع تأثير هذه التيارات على مسار الطائرة.

3 اللوازم: أوراق رسم، آلة حاسبة، جهاز إسقاط (Data Show)، حاسوب.

4 أسئلة حول التطبيق:

تبلغ سرعة طيران إحدى الطائرات في الهواء الساكن 850 km/h. عند انطلاقها باتجاه الشرق واجهت هواء بسرعة 50 km/h اتجاهه 40° من الجنوب إلى الغرب.

a عبّر عن كلّ من المتجهين بزوج مرتّب لكي تنطلق الطائرة باتجاه الشرق.

b أوجد مجموع المتجهين وطول المتجه الناتج.

c قم بزيارة لإحدى شركات الطيران واسأل أحد الطيارين عن كيفية حساب الاتجاه المناسب للطائرة أثناء الإقلاع وتأثير الهواء على ذلك ثم اسأله عن السرعة الأرضية للطائرة.

5 التقرير: اكتب تقريرًا مفصلًا يبيّن كيف استفدت من دروس هذه الوحدة ومن لقاءك مع قائد الطائرة لتنفيذ المشروع. ادعم تقريرك بعرض على الحاسوب أو بواسطة جهاز الإسقاط (Data show) لتبيّن عملك بشكل أوضح.

دروس الوحدة

المتجه في المستوى	جمع المتجهات وطرحها	الضرب الداخلي
5–1	5–2	5–3

166

يعتبر السير "وليام هاملتون"، الرياضي الإيرلندي (1805–1865) أول من استخدم تعبير «المتجه» لحل مسائل هندسية. استخدم "ديكارت" الإحداثيات وترجم منحنيات هندسية إلى معادلات.

وفي ألمانيا حوالى العام 1840، عمل "غراسمان" على الهندسة التحليلية من دون الأخذ في الاعتبار إحداثيات النقاط. كانت نقطة الانطلاق جمع قوى وسرعات، أي جمع متجهات على أنها قطع موجهة. وقد أودت به أعماله إلى ضرب المتجهات فسميت «الضرب الخطي»، وتعود تسمية «الضرب الداخلي» إلى "هاملتون" سنة 1853.

تطبق حاليًّا المتجهات في مجالات متعددة، مثل الاقتصاد ومعالجة الصور. تطوّر علم المتجهات على خطين متقاربين: الجبر والهندسة.

فاستخدمت الإحداثيات في المستوى وفي الفضاء للتعامل مع المتجهات، ثم أضيف إليها البعد الرابع وهو الزمن في الفيزياء الحديثة. هندسيًّا يعبر عن المتجه بانسحاب. قام شال بتطوير نظريته التي تقول إن الشغل المبذول لا يعتمد على المسار بين نقطتين: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

في الفيزياء، يسمح الضرب الداخلي باحتساب الشغل عندما نعرف متجه إزاحة الشيء ومتجه القوة:

$W = F \times d \times \cos\theta$

مشروع الوحدة

يوفر هذا المشروع فرصة أمام الطلاب للتفاعل مع مواقف حياتية يتعاملون من خلالها مع عنصر مهم في الرياضيات وهو القطعة الموجهة، حيث أحدث ثورة علمية في مجال الفيزياء فكانت القوى، والانتقال، والسرعة المتجهة، والحقول الكهربائية، والحقول المغناطيسية متجهات ساعدت كثيرًا على إجراء العمليات وإيجاد النتائج بطرائق سهلة ومبسطة. وفي هذا المشروع سنستخدم المتجه لتمثيل السرعة المتجهة للطائرة وأيضًا لتمثيل السرعة المتجهة للهواء.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

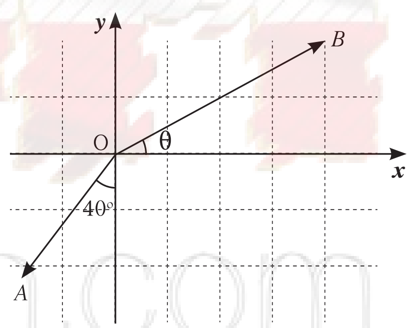
4 (a) $<\overrightarrow{OA}>$ السرعة المتجهة للهواء

$<\overrightarrow{OB}>$ يمثل السرعةالمتجهة للطائرة

$$<\overrightarrow{OA}> = <-50\cos 50° \ , \ -50\sin 50°>$$

$$<\overrightarrow{OA}> = <-32.14 \ , \ -38.30>$$

$$<\overrightarrow{OB}> = <850\cos\theta \ , \ 850\sin\theta>$$



(b) لكي يكون اتجاه الطائرة ناحية الشرق، يجب أن يكون المركّب الثاني لمتجه المجموع يساوي الصفر حيث إن:

$$<\overrightarrow{OA}> + <\overrightarrow{OB}> = <-50\cos 50° + 850\cos\theta, \ -50\sin 50° + 850\sin\theta>$$

أي: $-50\sin 50° + 850\sin\theta = 0$

$$\sin\theta = \frac{50\sin 50°}{850}$$

ومنه نحصل على: $\theta \approx 2.5827°$

$$<\overrightarrow{OA}> = <-32.14, -38.30>, <\overrightarrow{OB}> = <849.14, 38.30>$$

$$<\overrightarrow{OD}> = <\overrightarrow{OA}> + <\overrightarrow{OB}> = <817, 0>$$

(c) تتنوع الإجابات.


الوحدة الخامسة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت الهندسة الإحداثية وقوانينها.
- تعلمت إحداثيات النقطة في المستوي.
- تعلمت الجذور التربيعية.
- تعلمت النسب المثلثية ومقلوباتها.

ماذا سوف تتعلم؟

- المتجهات.
- ضرب المتجه في عدد حقيقي.
- جمع المتجهات وطرحها.
- إيجاد مركبات (إحداثيات) المتجهات.
- الضرب الداخلي.
- استخدام الضرب الداخلي ومركبات (إحداثيات) المتجهات لحل مسائل هندسية.

أضف إلى معلوماتك

ساهم الفلكي وليم هاملتون **William Hamilton** في تطوير حساب المتجهات. وهو أول من استخدم سنة 1843 تعبير متجه «Vector» وهو كلمة مشتقة من اللاتينية وتعني «الذي ينقل».

كذلك استخدم الرسام شفروي (1786 – 1899) «Chevreuil» معادلة تسمح بتركيب أكثر من ألف لون انطلاقًا من الألوان: الأزرق b، الأحمر r، الأخضر g:

$$b<\overrightarrow{mb}>+r<\overrightarrow{mr}>+g<\overrightarrow{mg}>=\vec{0}$$

حيث b, r, g نسب الألوان الثلاث للحصول على اللون الجديد m.

عندما تؤثر على السفينة قوّتان $\overrightarrow{or}$, $\overrightarrow{ob}$ فإن انتقال السفينة يكون باتجاه $\overrightarrow{og}$.

المصطلحات الأساسية

المتجه – تساوي متجهين – متجه الوحدة – المتجه المعاكس – الزاوية المحددة بمتجهين – المتجه الصفري – مركِبات المتجه – جمع متجهين – متجها الوحدة الأساسيان – المتجهان المتوازيان – الضرب الداخلي – الزاوية الموجهة – القطعة الموجهة – نقطة بداية – نقطة نهاية – متجه الموضع – تكافؤ قطعتين موجهتين.

167

التقرير

قدم تقريرًا عن أعمالك إلى زملائك في غرفة الصف. ناقش معهم النتائج والحسابات التي توصلت إليها، وأعد النظر ببعضها إذا كان ذلك ضروريًّا، ثمّ اعرض ما حصلت عليه من مقابلاتك.

سلّم التقييم	
4	يعرض الطالب المشروع بشكل كامل – يقوم بالحسابات ويعطي الإجابات والأشكال والتفسيرات كلها بأسلوب منظم ودقيق.
3	يعرض الطالب المشروع بشكل عام – يقوم بالحسابات ويعطي الإجابات كلها مرتكبًا أخطاء قليلة، ويعطي التفسيرات بأسلوب منظم.
2	يعرض الطالب المشروع بشكل كامل – يرتكب الكثير من الأخطاء في الحسابات ويعطي إجابات غير دقيقة، كما أن التفسيرات غير واضحة وغير منظمة.
1	معظم العناصر في المشروع غير كاملة أو ناقصة.

5-1: المتجه في المستوى

1 الأهداف

- يتعرف القطعة الموجهة.
- يتعرف المتجه.
- يتعرف تكافؤ القطع الموجهة.
- يتعرف المتجهين المتعاكسين.
- يتعرف متجه الموضع.
- يوجد قياس الزاوية المحددة بمتجهين.
- يتعرف تساوي متجهين.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

محور سيني – محور صادي – عدد قياسي – القطعة الموجهة – متجه الموضع – المتجه – قطعتان موجهتان متكافئتان– طول المتجه – متجه معاكس.

3 الأدوات والوسائل

ورق رسم بياني – آلة حاسبة علمية – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب.

4 التمهيد

(a) أعط الطلاب 3 نقاط ليست على استقامة واحدة، واطلب إليهم إكمال متوازي الأضلاع، ثم اسألهم: هل يوجد أكثر من متوازي أضلاع يمكن تكوينه من هذه النقاط؟

(b) ذكّر الطلاب بالمتباينة المثلثية: في المثلث طول كل ضلع أصغر من مجموع طولي الضلعين الآخرين.

(c) اسأل الطلاب عن مفهوم الانسحاب، وضع نقطتين على السبورة، ثم اطلب إلى أحدهم شرح الانسحاب الممكن. استخدم البلاط في أرضية غرفة الصف (أو ارسم مربعات على السبورة)، واطلب إلى أحد الطلاب تنفيذ انسحاب مستخدمًا هذه المربعات.

(d) ما النسبة التي تعطي ظل زاوية حادة في المثلث القائم؟


5-1

المتجه في المستوى

The Vector in the Plane

سوف تتعلم
- القطعة الموجهة.
- متجه الموضع.
- تكافؤ القطع الموجهة.
- المتجه.
- تساوي متجهين.
- متجهين متعاكسين.
- الزاوية المحددة بمتجهين وقياسها.

المفردات والمصطلحات:
- محور سيني x–axis
- محور صادي y–axis
- عدد قياسي Scalar Number
- القطعة الموجهة Oriented Segment
- متجه الموضع Position Vector
- قطعتان موجهتان متكافئتان Two Equivalent Oriented Segments
- متجه Vector
- طول المتجه Length of the Vector
- متجه معاكس Opposite Vector

فلنعمل معًا

في الشكل المقابل، القطع المستقيمة المتساوية الطول مبيّنة.

1 حدّد ثلاثة متوازيي أضلاع في الشكل.

2 أكمل:

a في الانسحاب الذي يحوّل A إلى B، يحوّل... إلى...، ويحوّل... إلى... .

b في الانسحاب الذي يحوّل... إلى...، يحوّل... إلى...، ويحوّل F إلى B

c في الانسحاب الذي يحوّل... إلى...، يحوّل F إلى E ويحوّل... إلى... .

3 في السؤال 2 a أكمل النص بعد تبديل A , B

4 ما العلاقة بين الانسحاب الذي يحوّل E إلى B ثم B إلى F والانسحاب الذي يحول E إلى F؟

الكميات القياسية والكميات المتجهة

Scalar Quantities and Oriented Quantities

تقسم الكميات إلى نوعين:

كميات قياسية (عددية): هي كميات يلزم لتعريفها **مقدار عددي ووحدة قياس.**

مثل: الحرارة – المسافة – العمر – الحجم – الزمن – الكتلة.

فمثلًا: طول مسطرة يساوي 30 cm

كميات متجهة: هي كميات يلزم لتعريفها **مقدار عددي واتجاه.**

مثل: السرعة – العجلة – الإزاحة – القوة – الوزن.

فمثلًا: إذا قلنا أن سيارة تحركت بسرعة 60 km/h فقط فهذا لا يتمم المعنى لأن تحركها قد يكون شمالًا أو في أي اتجاه آخر وتمثّل مثل هذه الكميات **بقطعة موجهة.**

القطعة الموجهة $\overrightarrow{PQ}$ لها **نقطة بداية** P و**نقطة نهاية** Q.

يمثّل الرمز $\|\overrightarrow{PQ}\|$ **طول القطعة الموجهة** $\overrightarrow{PQ}$

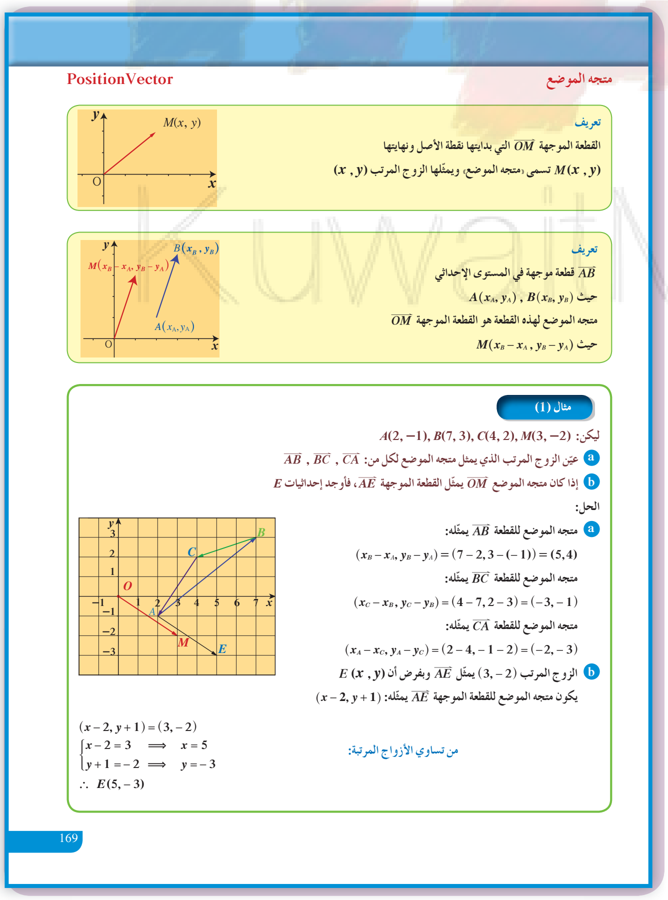
أي المسافة بين نقطة البداية P ونقطة النهاية Q.

اتجاه $\overrightarrow{PQ}$ هو من P إلى Q.

القطعة الموجهة $\overrightarrow{QP}$ لها طول $\overrightarrow{PQ}$ نفسه

ولكن في **الاتجاه المعاكس** أي من Q إلى P.

168


متجه الموضع PositionVector

تعريف

القطعة الموجهة $\overrightarrow{OM}$ التي بدايتها نقطة الأصل ونهايتها $M(x , y)$ تسمى «متجه الموضع» ويمثّلها الزوج المرتب (x , y)

تعريف

$\overrightarrow{AB}$ قطعة موجهة في المستوى الإحداثي

حيث $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$

متجه الموضع لهذه القطعة هو القطعة الموجهة $\overrightarrow{OM}$

حيث $M(x_B - x_A , y_B - y_A)$

مثال (1)

ليكن: $A(2, -1), B(7, 3), C(4, 2), M(3, -2)$

a عيّن الزوج المرتب الذي يمثل متجه الموضع لكل من: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$

b إذا كان متجه الموضع $\overrightarrow{OM}$ يمثّل القطعة الموجهة $\overrightarrow{AE}$، فأوجد إحداثيات E

الحل:

a متجه الموضع للقطعة $\overrightarrow{AB}$ يمثّله:

$(x_B - x_A, y_B - y_A) = (7 - 2, 3 - (-1)) = (5, 4)$

متجه الموضع للقطعة $\overrightarrow{BC}$ يمثّله:

$(x_C - x_B, y_C - y_B) = (4 - 7, 2 - 3) = (-3, -1)$

متجه الموضع للقطعة $\overrightarrow{CA}$ يمثّله:

$(x_A - x_C, y_A - y_C) = (2 - 4, -1 - 2) = (-2, -3)$

b الزوج المرتب $(3, -2)$ يمثّل $\overrightarrow{AE}$ وبفرض أن $E(x , y)$

يكون متجه الموضع للقطعة الموجهة $\overrightarrow{AE}$ يمثّله: $(x - 2, y + 1)$

من تساوي الأزواج المرتبة:

$(x - 2, y + 1) = (3, -2)$

$$\begin{cases} x - 2 = 3 \implies x = 5 \\ y + 1 = -2 \implies y = -3 \end{cases}$$

$\therefore\ E(5, -3)$

169

5 التدريس

ارسم على السبورة عدة تمثيلات لمتجه، ثم اشرح للطلاب فكرة أن كل هذه التمثيلات هي لمتجه واحد ولا تمثل عدة متجهات. شدّد على أنه يمكن رسم «تمثيل المتجه أينما نريد أو وفق الحاجة في المسألة شرط المحافظة على الاتجاه والطول.

المتجه الصفري: الطول = 0، من دون طرح موضوع الاتجاه للمتجه الصفري.

أعدهم إلى الشكل في فقرة «فلنعمل معًا». ألفت انتباههم إلى العلاقة بين متوازي الأضلاع والمتجهات المتساوية. يمكنك الاستفادة من هذا الشكل للتركيز على المتجه المعاكس.

ثمّ شدّد على أن عليهم الانتباه إلى متجه الموضع الذي يمثل حالة خاصة لكل قطعة موجهة.

راجع مع الطلاب العلاقة بين إشارة k وتحول اتجاه المتجه نتيجة ضربه في عدد غير صفري.

أكد على أن $\|\overrightarrow{A}\| \times |k|$، كمية موجبة دومًا.

أشر إلى العلاقة بين ضرب متجه في عدد حقيقي والمتجهات المتوازية. يكون المتجهان $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$ متوازيين إذا وفقط إذا أمكن إيجاد عدد حقيقي $k \neq 0$ بحيث يكون $\overrightarrow{A} = k\overrightarrow{B}$.

اطرح على الطلاب فكرة النقاط على استقامة واحدة، واسألهم عن كيفية إثبات ذلك.

– يجب أن يكون المتجهان متوازيين وأن تكون نقطة مشتركة بين المتجهين، مثال: $<\overrightarrow{AB}> = 3<\overrightarrow{AC}>$.

– المتجهان $<\overrightarrow{AB}>, <\overrightarrow{AC}>$ متوازيان والنقطة A مشتركة.

$\therefore$ النقاط A, B, C على استقامة واحدة.

في المثال (1)

اشرح بإسهاب الربط بين القطعة الموجهة ومتجه الموضع.

حاول أن تحل

1 ليكن: $A(1,-3),\ B(2,2),\ C(2,3),\ D(-2,-1)$

a عيّن الزوج المرتب الذي يمثّل متجه الموضع لكل من: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}$

b متجه الموضع $\overrightarrow{DC}$ يمثّل القطعة الموجهة $\overrightarrow{KD}$. أوجد إحداثيات K

تكافؤ قطعتين موجهتين — Two Equivalent Oriented Segments

تكون قطعتان موجهتان متكافئتين إذا كان لهما الطول نفسه والاتجاه نفسه ولكل قطعتين موجهتين متكافئتين متجه الموضع نفسه.

فمثلًا من الشكل المرسوم $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$ قطعتين موجهتين متكافئتين و $\overrightarrow{OM}$ متجه الموضع لهما.

خاصية

إذا كانت القطعتان الموجهتان $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$ متكافئتين، فإن الشكل $ABDC$ هو متوازي أضلاع حيث النقاط A, B, C, D ليست على استقامة واحدة.

مجموعة كل القطع الموجهة المكافئة للقطعة الموجهة $\overrightarrow{PQ}$ تكوّن المتجه $\overrightarrow{PQ}$ ويرمز له بالرمز $<\overrightarrow{PQ}>$ حيث طوله واتجاهه هما طول القطعة الموجهة $\overrightarrow{PQ}$ واتجاهها.

ويوجد عدد لا نهائي من القطع الموجهة لها الطول والاتجاه نفسه.

تعريف المتجه

المتجه هو مجموعة غير منتهية من القطع الموجهة المتكافئة والتي أحدها متجه الموضع.

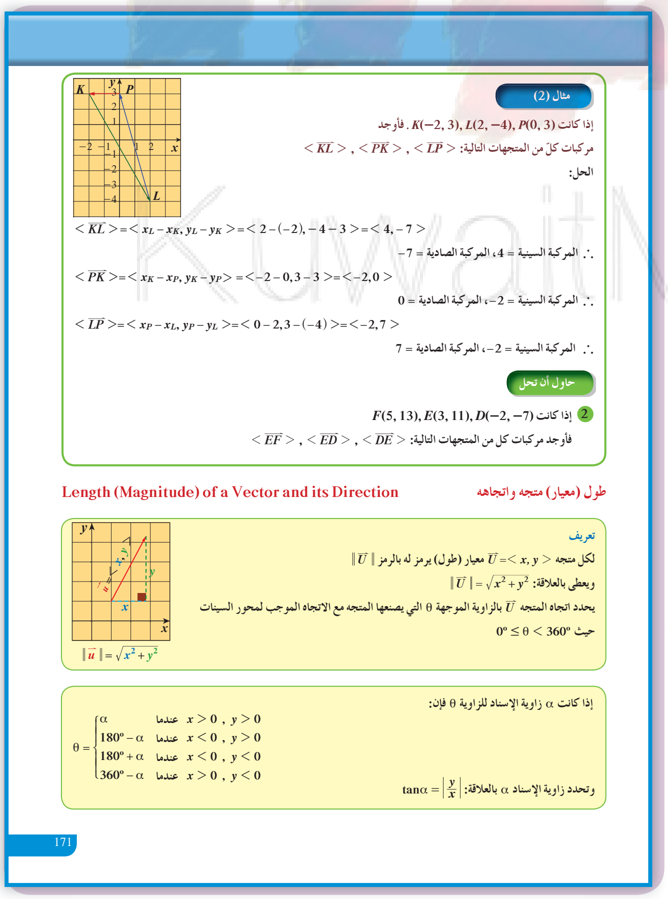
إذا كان $\overrightarrow{OM}$ متجه الموضع حيث $M(x_M, y_M)$، فيرمز لهذا المتجه بالرمز $\overrightarrow{M}$

ويكتب على الصورة $\overrightarrow{M} = < x_M , y_M >$

وتسمى y_M , x_M مركبتي المتجه $\overrightarrow{M}$

x_M المركبة الأفقية (السينية)، y_M المركبة الرأسية(الصادية) للمتجه $\overrightarrow{M}$

170



مثال (2)

إذا كانت $K(-2, 3), L(2, -4), P(0, 3)$. فأوجد

مركبات كلّ من المتجهات التالية: $<\overrightarrow{KL}>, <\overrightarrow{PK}>, <\overrightarrow{LP}>$

الحل:

$<\overrightarrow{KL}> = < x_L - x_K, y_L - y_K > = < 2-(-2), -4-3 > = < 4, -7 >$

$\therefore$ المركبة السينية = 4، المركبة الصادية = -7

$<\overrightarrow{PK}> = < x_K - x_P, y_K - y_P > = < -2-0, 3-3 > = < -2, 0 >$

$\therefore$ المركبة السينية = -2، المركبة الصادية = 0

$<\overrightarrow{LP}> = < x_P - x_L, y_P - y_L > = < 0-2, 3-(-4) > = < -2, 7 >$

$\therefore$ المركبة السينية = -2، المركبة الصادية = 7

حاول أن تحل

2 إذا كانت $F(5, 13), E(3, 11), D(-2, -7)$

فأوجد مركبات كل من المتجهات التالية: $<\overrightarrow{EF}>, <\overrightarrow{ED}>, <\overrightarrow{DE}>$

طول (معيار) متجه واتجاهه — Length (Magnitude) of a Vector and its Direction

تعريف

لكل متجه $\overrightarrow{U} = < x, y >$ معيار (طول) يرمز له بالرمز $\|\overrightarrow{U}\|$

ويعطى بالعلاقة: $\|\overrightarrow{U}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

يحدد اتجاه المتجه $\overrightarrow{U}$ بالزاوية الموجهة θ التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات حيث $0° \le \theta < 360°$

$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

إذا كانت α زاوية الإسناد للزاوية θ فإن:

$$\theta = \begin{cases} \alpha & \text{عندما } x > 0 , y > 0 \\ 180° - \alpha & \text{عندما } x < 0 , y > 0 \\ 180° + \alpha & \text{عندما } x < 0 , y < 0 \\ 360° - \alpha & \text{عندما } x > 0 , y < 0 \end{cases}$$

وتحدد زاوية الإسناد α بالعلاقة: $\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right|$

171

في المثال (2)

تأكد من أن الطلاب قد فهموا جيّدًا كيفية إيجاد مركّبات المتجه، ثمّ اطلب إلى عدد من الطلاب كتابة القاعدة على السبورة وذلك لإيجاد مركبات $\overline{AB}$ إذا كانت:

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ فيكون $< \overline{AB} > = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

في المثال (3)

توسع في المناقشة حول إيجاد الزاوية بين متجه والاتجاه الموجب لمحور السينات، ثمّ حدّد في كل حالة من الحالات الأربع كيفية إيجاد قياس الزاوية باستخدام الظل وزاوية الإسناد.

في المثال (4)

يساعد هذا المثال الطالب على تطبيق التعريف لمتجه الوحدة حيث يستخدم $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$، أي أن المعيار لهذا المتجه هو 1، ومنه يحل المعادلة لإيجاد مجهول.

أخبر الطلاب أن x^2 أو y^2 في المعادلة تعطينا قيمتين مقبولتين للمتغير x أو قيمتين مقبولتين للمتغير y.

في المثال (5)

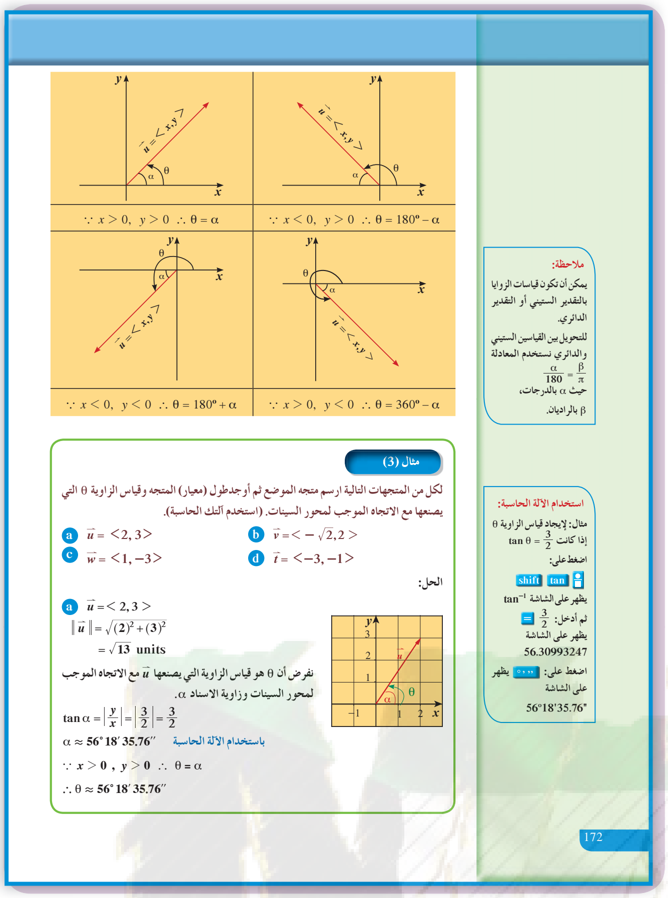
يقدم هذا المثال فرصة للطالب كي يطبق قواعد إيجاد المركبات السينية والصادية للمتجهات، كي يثبت تكافؤ متجهين أو أكثر وذلك بالمساواة بين المركبات السينية والمساواة بين المركبات الصادية.

في المثال (6)

يساعد هذا المثال الطالب على استخدام المساواة بين متجهين بحيث يكتب المساواة بين المركبات السينية والمركبات الصادية ثم يحل ليجد المتغير.

في المثال (7)

بعد حل المثال، أكّد على العلاقة بين قطع مستقيمة في أشكال هندسية والمتجهات، ثمّ اطلب إليهم كتابة أمثلة بديلة على السبورة تؤكد العلاقة بين قطع مستقيمة في الأشكال الرباعية والمتجهات مثل المستطيل والمربع ومتوازي الأضلاع.



$\because x > 0,\ y > 0\ \therefore \theta = \alpha$	$\because x < 0,\ y > 0\ \therefore \theta = 180^\circ - \alpha$
$\because x < 0,\ y < 0\ \therefore \theta = 180^\circ + \alpha$	$\because x > 0,\ y < 0\ \therefore \theta = 360^\circ - \alpha$

ملاحظة:
يمكن أن تكون قياسات الزوايا بالتقدير الستيني أو التقدير الدائري.
للتحويل بين القياسين الستيني والدائري نستخدم المعادلة $\frac{\alpha}{180} = \frac{\beta}{\pi}$ حيث α بالدرجات، β بالراديان.

مثال (3)

لكل من المتجهات التالية ارسم متجه الموضع ثم أوجد طول (معيار) المتجه وقياس الزاوية θ التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. (استخدم آلتك الحاسبة).

a $\vec{u} = <2, 3>$ b $\vec{v} = <-\sqrt{2}, 2>$
c $\vec{w} = <1, -3>$ d $\vec{t} = <-3, -1>$

الحل:

a $\vec{u} = <2, 3>$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2}$

$= \sqrt{13}$ units

نفرض أن θ هو قياس الزاوية التي يصنعها $\vec{u}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وزاوية الاسناد α.

$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$

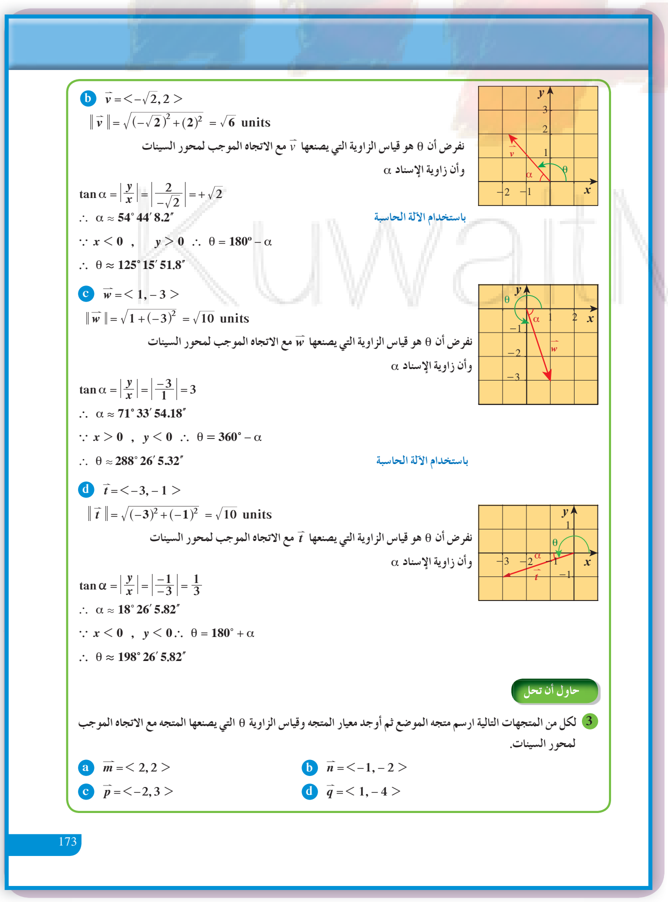
$\alpha \approx 56^\circ 18' 35.76''$ باستخدام الآلة الحاسبة

$\because x > 0, y > 0 \therefore \theta = \alpha$

$\therefore \theta \approx 56^\circ 18' 35.76''$

استخدام الآلة الحاسبة:
مثال: لإيجاد قياس الزاوية θ إذا كانت $\tan\theta = \frac{3}{2}$
اضغط على: shift tan
يظهر على الشاشة $\tan^{-1}$
ثم أدخل: $\frac{3}{2}$ =
يظهر على الشاشة 56.30993247
اضغط على: ° ' '' يظهر على الشاشة 56°18'35.76"

172



b $\vec{v} = <-\sqrt{2}, 2>$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (2)^2} = \sqrt{6}$ units

نفرض أن θ هو قياس الزاوية التي يصنعها $\vec{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وأن زاوية الإسناد α

$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{2}{-\sqrt{2}}\right| = +\sqrt{2}$

$\therefore \alpha \approx 54^\circ 44' 8.2''$ باستخدام الآلة الحاسبة

$\because x < 0, y > 0 \therefore \theta = 180^\circ - \alpha$

$\therefore \theta \approx 125^\circ 15' 51.8''$

c $\vec{w} = <1, -3>$

$\|\vec{w}\| = \sqrt{1 + (-3)^2} = \sqrt{10}$ units

نفرض أن θ هو قياس الزاوية التي يصنعها $\vec{w}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وأن زاوية الإسناد α

$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{-3}{1}\right| = 3$

$\therefore \alpha \approx 71^\circ 33' 54.18''$

$\because x > 0, y < 0 \therefore \theta = 360^\circ - \alpha$

$\therefore \theta \approx 288^\circ 26' 5.32''$ باستخدام الآلة الحاسبة

d $\vec{t} = <-3, -1>$

$\|\vec{t}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ units

نفرض أن θ هو قياس الزاوية التي يصنعها $\vec{t}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وأن زاوية الإسناد α

$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{-1}{-3}\right| = \frac{1}{3}$

$\therefore \alpha \approx 18^\circ 26' 5.82''$

$\because x < 0, y < 0 \therefore \theta = 180^\circ + \alpha$

$\therefore \theta \approx 198^\circ 26' 5.82''$

حاول أن تحل

3 لكل من المتجهات التالية ارسم متجه الموضع ثم أوجد معيار المتجه وقياس الزاوية θ التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

a $\vec{m} = <2, 2>$ b $\vec{n} = <-1, -2>$
c $\vec{p} = <-2, 3>$ d $\vec{q} = <1, -4>$

173

في المثال (8)

يبيّن هذا المثال كيفية ضرب متجه بعدد حقيقي غير الصفر، وكيف أن مركبات المتجه هي التي يتم ضربها بالعدد الحقيقي، علمًا أنه إذا كان العدد الحقيقي موجبًا نحصل على متجه له الاتجاه نفسه للمتجه الأساسي، ولكن إذا كان العدد الحقيقي سالبًا نحصل على متجه له اتجاه معاكس للمتجه الأساسي.

في المثال (9)

أكّد للطلاب أن النقاط تكون على استقامة واحدة إذا أمكن إيجاد متجهين أحدهما يساوي المتجه الآخر مضروبًا بعدد حقيقي غير صفري، وبشرط وجود نقطة مشتركة.

في المثال (10)

يساعد هذا المثال الطلاب على فهم كيفية استخدام ناتج ضرب العدد القياسي (موجب أو سالب) بالقطعة الموجهة، وذلك لرسم نقاط تقع على القطعة الموجهة نفسها.

6 الربط

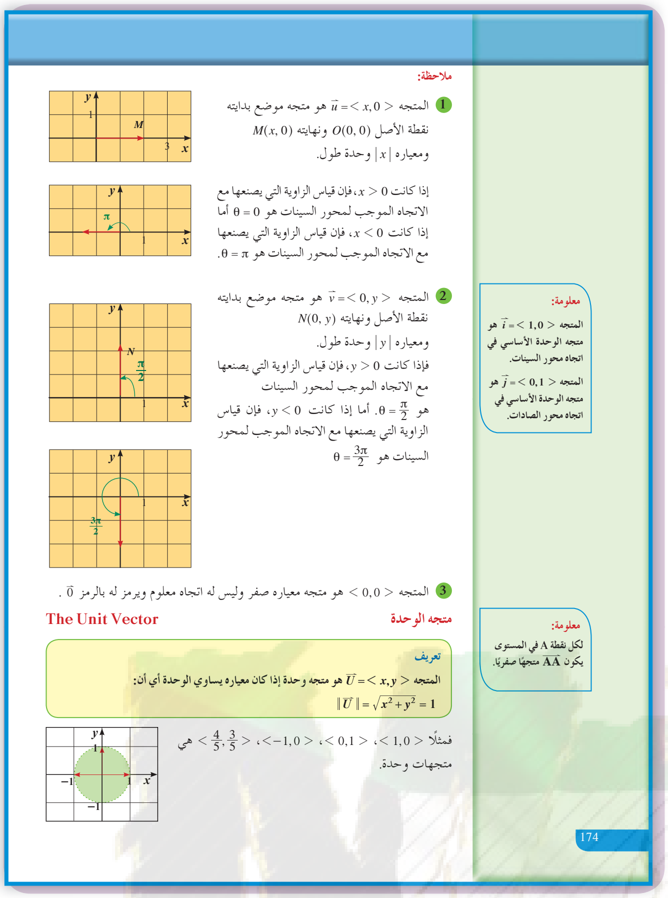
لا يوجد.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

معظم الأخطاء التي يقع فيها الطلاب هي عدم مراعاة الاتجاه عند التعامل مع المتجهات. اطلب إليهم أن يسألوا أنفسهم دائمًا عن الاتجاه في كل تمرين أو نشاط في هذا الدرس.

8 التقييم

راقب الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل»، ثمّ تأكد من صحة عملهم ودقته.



ملاحظة:

1 المتجه $\vec{u} = < x, 0 >$ هو متجه موضع بدايته نقطة الأصل $O(0,0)$ ونهايته $M(x,0)$ ومعياره $|x|$ وحدة طول.

إذا كانت $x > 0$، فإن قياس الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هو $\theta = 0$ أما إذا كانت $x < 0$، فإن قياس الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هو $\theta = \pi$.

2 المتجه $\vec{v} = < 0, y >$ هو متجه موضع بدايته نقطة الأصل ونهايته $N(0,y)$ ومعياره $|y|$ وحدة طول.

فإذا كانت $y > 0$، فإن قياس الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هو $\theta = \frac{\pi}{2}$. أما إذا كانت $y < 0$، فإن قياس الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هو $\theta = \frac{3\pi}{2}$

3 المتجه $< 0, 0 >$ هو متجه معياره صفر وليس له اتجاه معلوم ويرمز له بالرمز $\vec{0}$.

معلومة:
المتجه $\vec{i} = < 1, 0 >$ هو متجه الوحدة الأساسي في اتجاه محور السينات.
المتجه $\vec{j} = < 0, 1 >$ هو متجه الوحدة الأساسي في اتجاه محور الصادات.

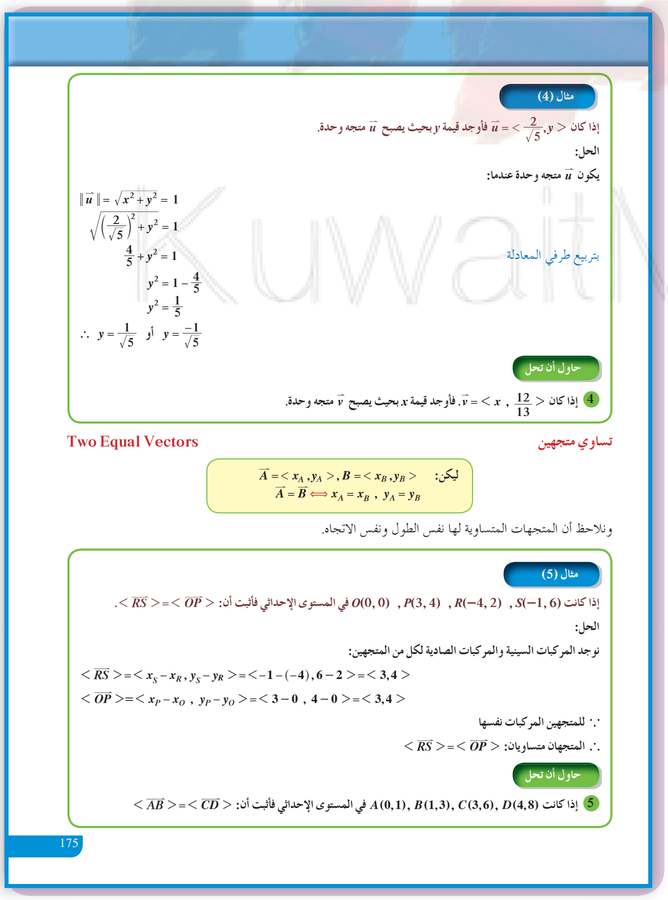
متجه الوحدة — The Unit Vector

تعريف
المتجه $\vec{U} = < x, y >$ هو متجه وحدة إذا كان معياره يساوي الوحدة أي أن:
$\|\vec{U}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$

فمثلًا $< 1, 0 >$، $< 0, 1 >$، $< -1, 0 >$، $< \frac{4}{5}, \frac{3}{5} >$ هي متجهات وحدة.

معلومة:
لكل نقطة A في المستوى يكون $\overrightarrow{AA}$ متجهًا صفريًا.

174



مثال (4)

إذا كان $\vec{u} = < \frac{2}{\sqrt{5}}, y >$ فأوجد قيمة y بحيث يصبح $\vec{u}$ متجه وحدة.

الحل:

يكون $\vec{u}$ متجه وحدة عندما:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

$$\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + y^2} = 1$$

بتربيع طرفي المعادلة

$$\frac{4}{5} + y^2 = 1$$

$$y^2 = 1 - \frac{4}{5}$$

$$y^2 = \frac{1}{5}$$

$$\therefore\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ أو } y = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

حاول أن تحل

4 إذا كان $\vec{v} = < x, \frac{12}{13} >$. فأوجد قيمة x بحيث يصبح $\vec{v}$ متجه وحدة.

تساوي متجهين — Two Equal Vectors

ليكن: $\vec{A} = < x_A, y_A >, \vec{B} = < x_B, y_B >$
$\vec{A} = \vec{B} \iff x_A = x_B,\ y_A = y_B$

ونلاحظ أن المتجهات المتساوية لها نفس الطول ونفس الاتجاه.

مثال (5)

إذا كانت $S(-1,6)$, $R(-4,2)$, $P(3,4)$, $O(0,0)$ في المستوى الإحداثي فأثبت أن: $< \overrightarrow{RS} > = < \overrightarrow{OP} >$.

الحل:

نوجد المركبات السينية والمركبات الصادية لكل من المتجهين:

$< \overrightarrow{RS} > = < x_S - x_R, y_S - y_R > = < -1-(-4), 6-2 > = < 3, 4 >$

$< \overrightarrow{OP} > = < x_P - x_O, y_P - y_O > = < 3-0, 4-0 > = < 3, 4 >$

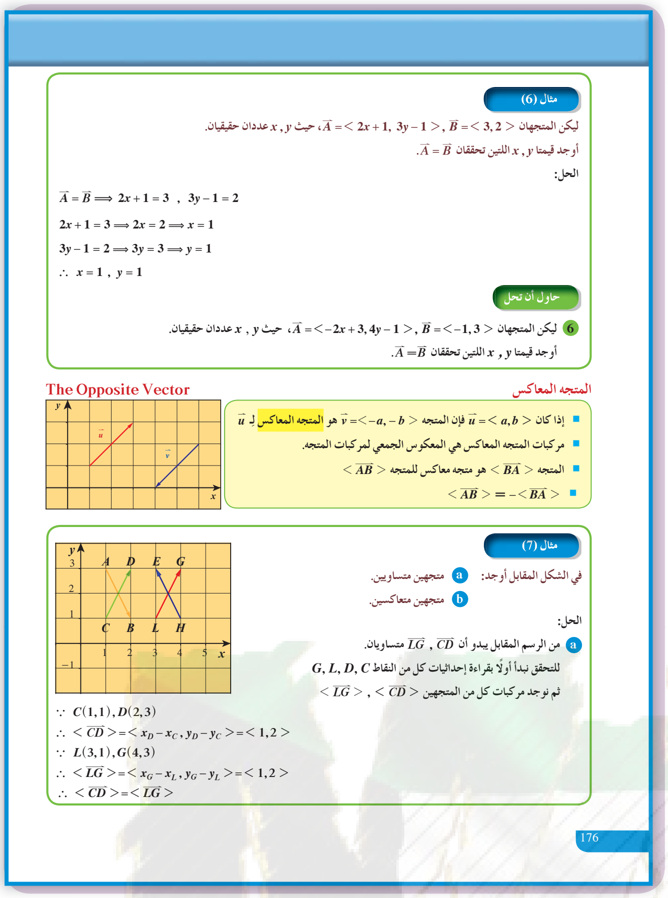
$\because$ للمتجهين المركبات نفسها

$\therefore$ المتجهان متساويان: $< \overrightarrow{RS} > = < \overrightarrow{OP} >$

حاول أن تحل

5 إذا كانت $A(0,1), B(1,3), C(3,6), D(4,8)$ في المستوى الإحداثي فأثبت أن: $< \overrightarrow{AB} > = < \overrightarrow{CD} >$

175



مثال (6)

ليكن المتجهان $\vec{B} = < 3, 2 >$ ، $\vec{A} = < 2x+1,\ 3y-1 >$، حيث x, y عددان حقيقيان.

أوجد قيمتا y , x اللتين تحققان $\vec{A} = \vec{B}$.

الحل:

$\vec{A} = \vec{B} \Longrightarrow 2x+1 = 3 \ , \ 3y-1 = 2$

$2x+1 = 3 \Longrightarrow 2x = 2 \Longrightarrow x = 1$

$3y-1 = 2 \Longrightarrow 3y = 3 \Longrightarrow y = 1$

$\therefore\ x = 1 \ , \ y = 1$

حاول أن تحل

6 ليكن المتجهان $\vec{B} = < -1, 3 >$ ، $\vec{A} = < -2x+3, 4y-1 >$، حيث y , x عددان حقيقيان.

أوجد قيمتا y , x اللتين تحققان $\vec{A} = \vec{B}$.

المتجه المعاكس The Opposite Vector

- إذا كان $\vec{u} = < a, b >$ فإن المتجه $\vec{v} = < -a, -b >$ هو المتجه المعاكس لِـ $\vec{u}$
- مركبات المتجه المعاكس هي المعكوس الجمعي لمركبات المتجه.
- المتجه $< \overline{BA} >$ هو متجه معاكس للمتجه $< \overline{AB} >$
- $< \overline{AB} > = - < \overline{BA} >$

مثال (7)

في الشكل المقابل أوجد: (a) متجهين متساويين. (b) متجهين متعاكسين.

الحل:

(a) من الرسم المقابل يبدو أن $\overline{CD}$, $\overline{LG}$ متساويان.

للتحقق نبدأ أولًا بقراءة إحداثيات كل من النقاط G, L, D, C

ثم نوجد مركبات كل من المتجهين $< \overline{CD} >$, $< \overline{LG} >$

$\because\ C(1,1), D(2,3)$

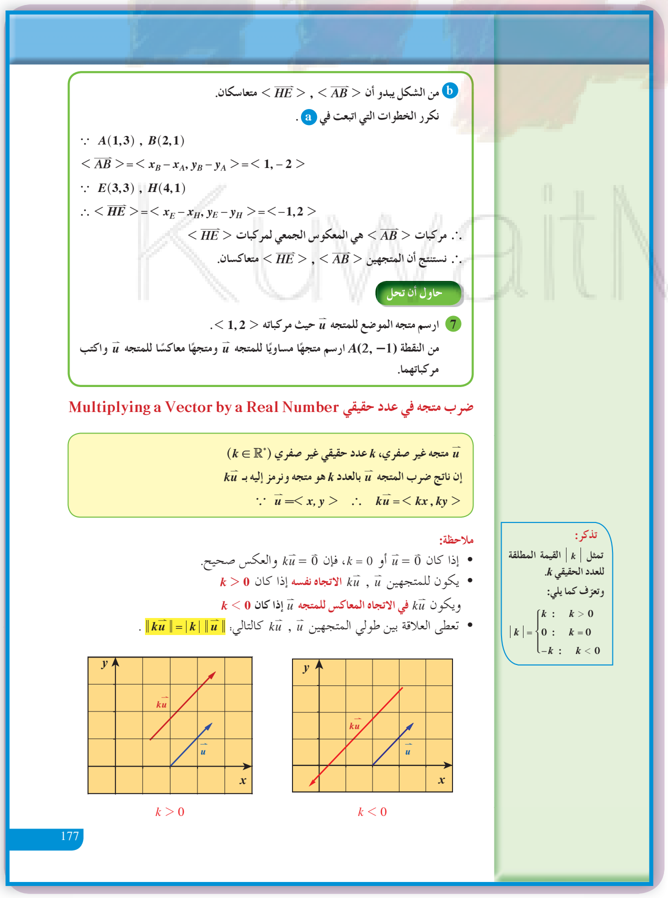
$\therefore\ < \overline{CD} > = < x_D - x_C, y_D - y_C > = < 1, 2 >$

$\because\ L(3,1), G(4,3)$

$\therefore\ < \overline{LG} > = < x_G - x_L, y_G - y_L > = < 1, 2 >$

$\therefore\ < \overline{CD} > = < \overline{LG} >$

176



(b) من الشكل يبدو أن $< \overline{AB} >$, $< \overline{HE} >$ متعاكسان.

نكرر الخطوات التي اتبعت في (a).

$\because\ A(1,3)\ ,\ B(2,1)$

$< \overline{AB} > = < x_B - x_A, y_B - y_A > = < 1, -2 >$

$\because\ E(3,3)\ ,\ H(4,1)$

$\therefore < \overline{HE} > = < x_E - x_H, y_E - y_H > = < -1, 2 >$

∴ مركبات $< \overline{AB} >$ هي المعكوس الجمعي لمركبات $< \overline{HE} >$

∴ نستنتج أن المتجهين $< \overline{AB} >$, $< \overline{HE} >$ متعاكسان.

حاول أن تحل

7 ارسم متجه الموضع للمتجه $\vec{u}$ حيث مركباته $< 1, 2 >$.

من النقطة $A(2, -1)$ ارسم متجهًا مساويًا للمتجه $\vec{u}$ ومتجهًا معاكسًا للمتجه $\vec{u}$ واكتب مركباتهما.

ضرب متجه في عدد حقيقي Multiplying a Vector by a Real Number

$\vec{u}$ متجه غير صفري، k عدد حقيقي غير صفري $(k \in \mathbb{R}^*)$

إن ناتج ضرب المتجه $\vec{u}$ بالعدد k هو متجه ونرمز إليه بـ $k\vec{u}$

$\because\ \vec{u} = < x, y > \quad \therefore\ k\vec{u} = < kx, ky >$

ملاحظة:

- إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$ أو $k = 0$، فإن $k\vec{u} = \vec{0}$ والعكس صحيح.
- يكون للمتجهين $\vec{u}$, $k\vec{u}$ الاتجاه نفسه إذا كان $k > 0$
  ويكون $k\vec{u}$ في الاتجاه المعاكس للمتجه $\vec{u}$ إذا كان $k < 0$
- تعطى العلاقة بين طولي المتجهين $\vec{u}$, $k\vec{u}$ كالتالي: $\| k\vec{u} \| = |k| \, \| \vec{u} \|$.

$k > 0$ $k < 0$

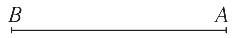
تذكر: تمثل $|k|$ القيمة المطلقة للعدد الحقيقي k. وتعرّف كما يلي:

$|k| = \begin{cases} k : & k > 0 \\ 0 : & k = 0 \\ -k : & k < 0 \end{cases}$

177

اختبار سريع

1 A, B نقطتان في المستوى.



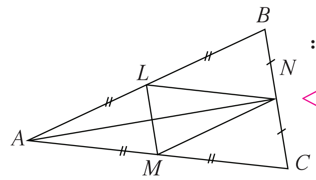
ضع النقاط M, N حيث

$< \overline{AM} > = 2 < \overline{AB} >, < \overline{AN} > = -0.5 < \overline{AB} >$

2 انظر إلى الشكل أدناه، ثم أكمل:

$< \overline{AL} > = < \overline{MN} > = < \overline{LB} >$

معاكس $< \overline{LM} >$ هو: $< \overline{CN} >$ أو $< \overline{NB} >$



9 إجابات وحلول

«فلنعمل معًا»

1 $BFDC$, $BFED$, $ABDF$

2 (a) B إلى C، F إلى D

(b) E إلى D، D إلى C

(c) A إلى F، B إلى D

3 C إلى B، D إلى F

4 كلاهما يحوّل E إلى F

«حاول أن تحل»

1 (a) $< \overline{AB} > = < 2-1, 2-(-3) >$

$< \overline{AB} > = < 1, 5 >$

$< \overline{BD} > = < -2-2, -1-2 >$

$< \overline{BD} > = < -4, -3 >$

(b) $< \overline{OC} > = < \overline{KD} >$

$< 2, 3 > = < -2-x, -1-y >$

$-2-x = 2 ; x = -4$

$-1-y = 3 ; y = -4$

ومنه $K(-4, -4)$

2 $< \overline{EF} > = \langle 5-3, 13-11 \rangle = \langle 2, 2 \rangle$

$< \overline{ED} > = \langle -2-3, -7-11 \rangle = \langle -5, -18 \rangle$

$< \overline{DE} > = \langle 3-(-2), 11-(-7) \rangle = \langle 5, 18 \rangle$

خواص

1. يكون للمتجهين غير الصفريين $<\overrightarrow{CD}>$, $<\overrightarrow{AB}>$ الاتجاه نفسه إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي موجب k يحقق $<\overrightarrow{AB}>=k<\overrightarrow{CD}>$
2. يكون للمتجهين غير الصفريين $<\overrightarrow{CD}>$, $<\overrightarrow{AB}>$ اتجاهين متعاكسين إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي سالب k يحقق $<\overrightarrow{AB}>=k<\overrightarrow{CD}>$
3. تكون النقاط A, B, C على استقامة واحدة إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير صفري k يحقق $<\overrightarrow{AB}>=k<\overrightarrow{AC}>$

مثال (8)

إذا كان $\overrightarrow{A}=<-1,2>$ فأوجد:

a $2\overrightarrow{A}$ b $-\overrightarrow{A}$ c $0.5\overrightarrow{A}$

الحل:

a $2\overrightarrow{A}=<2(-1),2(2)>=<-2,4>$

b $-\overrightarrow{A}=<-(-1),-(2)>=<1,-2>$

c $0.5\overrightarrow{A}=<0.5(-1),0.5(2)>=<-0.5,1>$

حاول أن تحل

8 إذا كان $\overrightarrow{B}=<3,-2>$ فأوجد:

a $3\overrightarrow{B}$ b $-5\overrightarrow{B}$ c $\frac{3}{2}\overrightarrow{B}$

مثال (9)

باستخدام خواص المتجهات أثبت أن النقاط $A(2,3)$, $B(-2,5)$, $C(10,-1)$ على استقامة واحدة.

الحل:

لكي نثبت أن النقاط A, B, C على استقامة واحدة نحدد أحد المتجهات وليكن $\overrightarrow{AB}$ ثم نبحث عن متجه آخر يساوي $k<\overrightarrow{AB}>$ حيث k عدد حقيقي غير صفري.

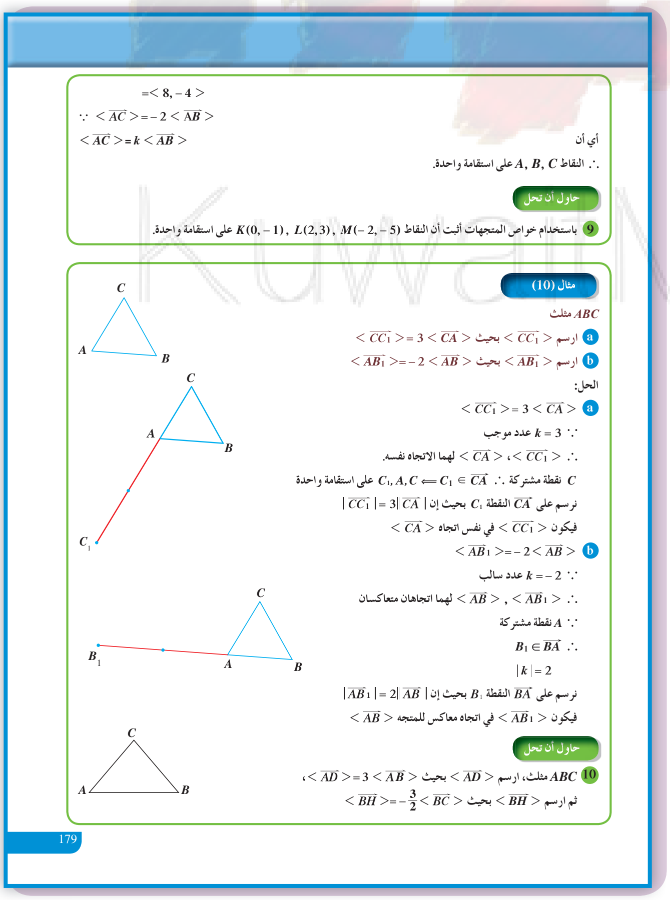
$<\overrightarrow{AB}>=<x_B-x_A, y_B-y_A>=<-2-2, 5-3>$

$=<-4,2>$

نختبر المتجه $<\overrightarrow{AC}>$

$<\overrightarrow{AC}>=<x_C-x_A, y_C-y_A>=<10-2, -1-3>$

178



$=<8,-4>$

$\because <\overrightarrow{AC}>=-2<\overrightarrow{AB}>$

أي أن $<\overrightarrow{AC}>=k<\overrightarrow{AB}>$

$\therefore$ النقاط A, B, C على استقامة واحدة.

حاول أن تحل

9 باستخدام خواص المتجهات أثبت أن النقاط $K(0,-1)$, $L(2,3)$, $M(-2,-5)$ على استقامة واحدة.

مثال (10)

ABC مثلث

a ارسم $<\overrightarrow{CC_1}>$ بحيث $<\overrightarrow{CC_1}>=3<\overrightarrow{CA}>$

b ارسم $<\overrightarrow{AB_1}>$ بحيث $<\overrightarrow{AB_1}>=-2<\overrightarrow{AB}>$

الحل:

a $<\overrightarrow{CC_1}>=3<\overrightarrow{CA}>$

$\because k=3$ عدد موجب

$\therefore <\overrightarrow{CC_1}>$ ، $<\overrightarrow{CA}>$ لهما الاتجاه نفسه.

C نقطة مشتركة $\therefore C_1 \in \overrightarrow{CA} \Longleftarrow C_1, A, C$ على استقامة واحدة

نرسم على $\overrightarrow{CA}$ النقطة C_1 بحيث إن $\|\overrightarrow{CC_1}\|=3\|\overrightarrow{CA}\|$

فيكون $<\overrightarrow{CC_1}>$ في نفس اتجاه $<\overrightarrow{CA}>$

b $<\overrightarrow{AB_1}>=-2<\overrightarrow{AB}>$

$\because k=-2$ عدد سالب

$\therefore <\overrightarrow{AB_1}>$, $<\overrightarrow{AB}>$ لهما اتجاهان متعاكسان

$\because A$ نقطة مشتركة

$\therefore B_1 \in \overrightarrow{BA}$

$|k|=2$

نرسم على $\overrightarrow{BA}$ النقطة B_1 بحيث إن $\|\overrightarrow{AB_1}\|=2\|\overrightarrow{AB}\|$

فيكون $<\overrightarrow{AB_1}>$ في اتجاه معاكس للمتجه $<\overrightarrow{AB}>$

حاول أن تحل

10 ABC مثلث، ارسم $<\overrightarrow{AD}>$ بحيث $<\overrightarrow{AD}>=3<\overrightarrow{AB}>$ ،

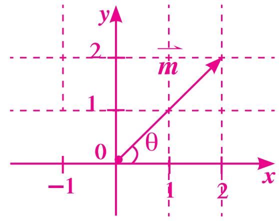
ثم ارسم $<\overrightarrow{BH}>$ بحيث $<\overrightarrow{BH}>=-\frac{3}{2}<\overrightarrow{BC}>$

179

3 **(a)** $\theta_1=(\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{m})$

$\tan\alpha=\left|\frac{y}{x}\right|=\left|\frac{2}{2}\right|=1 \quad , \quad \because \; x>0, y>0$

$\therefore \; \theta_1=\alpha=45^\circ$



(b) $\theta_2=(\overrightarrow{ox}\;, \;\overrightarrow{n})$

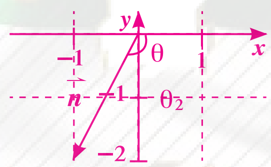
$\tan\alpha=\left|\frac{y}{x}\right|=\left|\frac{-2}{-1}\right|=2, \; \Rightarrow \alpha=63.4349$

$\because \; x<0, y<0$

$\therefore \; \theta_2=180+\alpha$

$=243.4349$

$\theta_2=243^\circ 26' 5.82''$



(c) $\theta_3=(\overrightarrow{0x}, \overrightarrow{p})$

$\tan\alpha=\left|\frac{y}{x}\right|=\left|\frac{3}{-2}\right|=1.5$

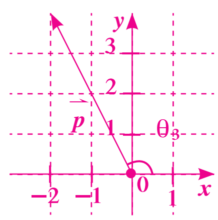
$\therefore \; \alpha=56.3099$

$\because \; x<0 \;, \; y>0$

$\therefore \theta_3=180-\alpha$

$=123.6912$

$\therefore \; \theta_3=123^\circ 41' 24''$



(d) $\theta_4=(\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{q})$

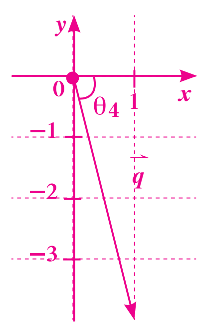
$\tan\alpha=\left|\frac{y}{x}\right|=\left|\frac{-4}{1}\right|=4$

$\alpha=75.9637$

$\because \; x>0 \;, \; y<0$

$\therefore \; \theta_4=360-\alpha$

$=284^\circ 2' 10''$



تمرَّنْ 5−1

المتجه في المستوى
The Vector in the Plane

المجموعة A تمارين مقالية

(1) لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: $A(-3,4), B(2,-1), C(3,5)$

(a) عيّن الزوج المرتب الذي يمثل متجه الموضع لكلّ من: $<\overrightarrow{AB}>, <\overrightarrow{BC}>, <\overrightarrow{CA}>$

(b) إذا كان متجه الموضع $\overline{OM}$ حيث $M(4,3)$ يمثّل القطعة الموجهة $\overline{BE}$

فأوجد إحداثيات E بفرض أن $E(x,y)$

(2) لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: $E(-3,2), F(2,-1), G(4,-2)$

أوجد مركّبات كل من المتجات التالية: $<\overrightarrow{EF}>, <\overrightarrow{GF}>, <\overrightarrow{EG}>$

(3) **(a)** لكل من المتجهات التالية: $\vec{u}=<3,2>, \vec{v}=<-2,4>, \vec{w}=<-3,-2>, \vec{t}=<2,-3>$

ارسم متجه الموضع.

(b) أوجد طول كل متجه وقياس الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

(4) إذا كان $\vec{u}=<x, \frac{3}{5}>$ فأوجد قيمة x بحيث يصبح $\vec{u}$ متجه وحدة.

(5) لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: $A(3,-1), B(5,-4), C(2,4), D(4,1)$

أثبت أن: $<\overrightarrow{AB}>=<\overrightarrow{CD}>$

(6) ليكن: $\vec{A}=<4,-3>, \vec{B}=<3x-2, 4y+1>$ أوجد قيمتي x, y بحيث يكون: $\vec{A}=\vec{B}$

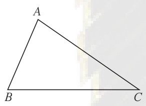
(7) لنأخذ في المستوى الإحداثي: $A(5,2), B(-2,6), C(-3,3), D(4,-1)$

أثبت أن: $<\overrightarrow{AB}>$ معاكس لـ $<\overrightarrow{CD}>$

(8) لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: $A(2,-3), B(-1,3), C(1,-1)$

أثبت أن النقاط الثلاث على استقامة واحدة.

(9) مثلث ABC



(a) ارسم $<\overrightarrow{AE}>$ حيث: $<\overrightarrow{AE}>=-\frac{1}{2}<\overrightarrow{AB}>$

(b) ارسم $<\overrightarrow{BD}>$ حيث: $<\overrightarrow{BD}>=\frac{3}{2}<\overrightarrow{BC}>$

72

(10) لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: $A(3,2), B(1,5), C(7,4)$

(a) أوجد إحداثيات النقطة D حيث: $<\overrightarrow{BD}>=-\frac{1}{2}<\overrightarrow{BA}>$

(b) أوجد إحداثيات النقطة E حيث: $<\overrightarrow{AE}>=\frac{3}{2}<\overrightarrow{AC}>$

(c) أثبت أن: $<\overrightarrow{BC}>, <\overrightarrow{DE}>$ لهما الاتجاه نفسه.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط التالية: $A(2,1), B(-3,0), C(3,-4), D(x,y)$

(1) الزوج المرتب الذي يمثل متجه الموضع لـ $\overrightarrow{BA}$: هو $(-5,-1)$ (a) (b)

(2) مركّبات $\overrightarrow{BC}$ هي $<6,4>$ (a) (b)

(3) المثلث ABC هو متطابق الضلعين. (a) (b)

(4) إذا كان $<\overrightarrow{AB}>=<\overrightarrow{CD}>$ فإن: $x=-2, y=-5$ (a) (b)

في التمارين (5–8)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) في المستوى الإحداثي إذا كان $\vec{u}=<-2,2>$

فإن قياس الزاوية التي يصنعها $\vec{u}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يساوي:

(a) 45° (b) -45° (c) 135° (d) 225°

(6) لنأخذ في المستوى الإحداثي $\vec{u}=<\frac{12}{13}, y>$. إذا كان $\vec{u}$ متجه وحدة فإن y يساوي:

(a) $\frac{1}{13}$ (b) $\frac{\sqrt{13}}{13}$ (c) $\frac{5}{13}$ (d) $\pm\frac{5}{13}$

(7) لتكن في المستوى الإحداثي النقاط: $A(1,3), B(3,2), C(0,-1), D(-4,1)$ فيكون:

(a) $<\overrightarrow{AB}>=<\overrightarrow{CD}>$ (b) $<\overrightarrow{AB}>=-<\overrightarrow{CD}>$

(c) $<\overrightarrow{CD}>=-2<\overrightarrow{AB}>$ (d) $<\overrightarrow{AB}>=-2<\overrightarrow{CD}>$

(8) لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: $E(2,4), F(-1,-5), G(x,y)$ إذا كان: $<\overrightarrow{EF}>=<\overrightarrow{EG}>$ فإن (x, y) يساوي:

(a) $(-1,-5)$ (b) $(-5,-13)$ (c) $(5,13)$ (d) $(1,5)$

73

4 $\|\vec{v}\|^2 = x^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1^2$

$x^2 = 1 - \frac{144}{169}$

$x^2 = \frac{25}{169}$; $x = \pm\frac{5}{13}$

5 $\vec{U} = <\overline{AB}> = \langle 1-0, 3-1 \rangle = \langle 1,2 \rangle$

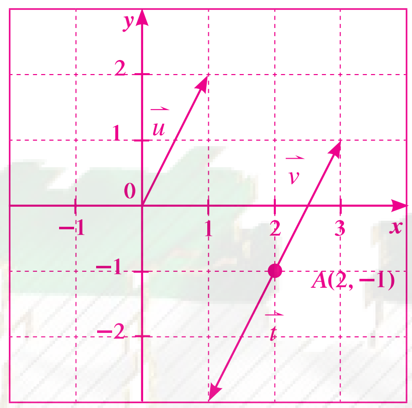
$\vec{V} = <\overline{CD}> = \langle 4-3, 8-6 \rangle = \langle 1,2 \rangle$

$\vec{U} = \vec{V} = \langle 1,2 \rangle$

6 $\vec{A} = \vec{B}$; $-2x+3=-1 \Rightarrow x=2$

$4y-1=3 \Rightarrow y=1$

7



$\vec{v} = \langle 1,2 \rangle$

$\vec{t} = \langle -1,-2 \rangle$

8 **(a)** $3\vec{B} = <9,-6>$

(b) $-5\vec{B} = <-15,10>$

(c) $\frac{3}{2}\vec{B} = <\frac{9}{2},-3>$

9 $<\overline{KL}> = <2,4>$

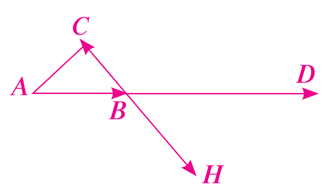
$<\overline{KM}> = <-2,-4>$

$\therefore <\overline{KL}> = -<\overline{KM}>$

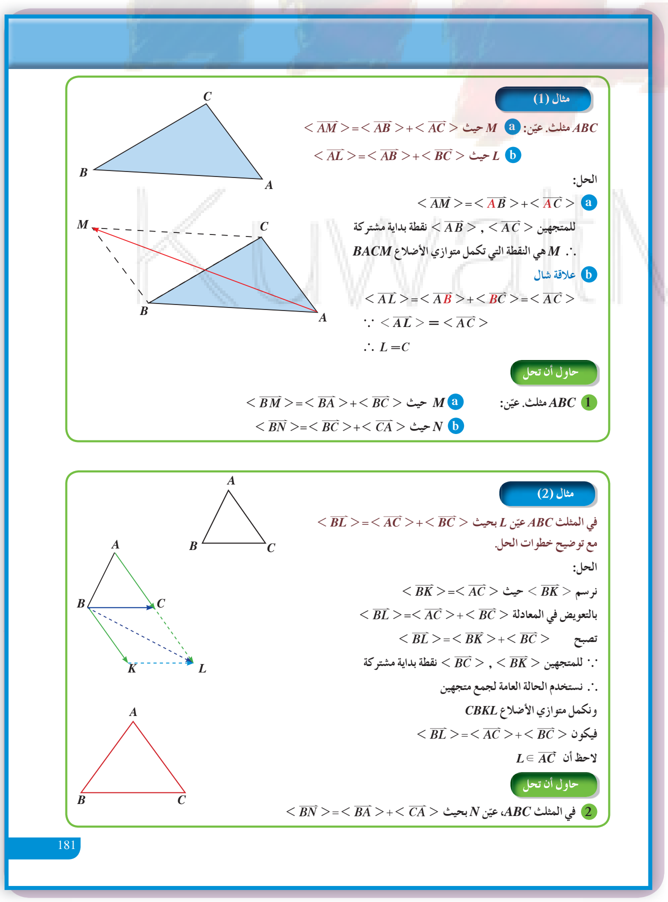
K نقطة مشتركة

K, L, M على استقامة واحد

10 $<\overline{AD}> = 3<\overline{AB}>$ فيكون A, B, D على استقامة واحدة والاتجاه نفسه، ثم $<\overline{BH}> = -\frac{3}{2}<\overline{BC}>$ فيكون B, C, H على استقامة واحدة. $<\overline{BH}>$ باتجاه معاكس مع $<\overline{BC}>$.



2–5: جمع المتجهات وطرحها



1 الأهداف

- يجمع المتجهات.
- يطرح المتجهات.
- يتعرف خصائص جمع المتجهات.
- يكتب متجه بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين.
- يوجد مركِّبات المتجهات.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

جمع المتجهات – علاقة "شال" – قانون متوازي الأضلاع – مركِّبات المتجه .

3 الأدوات والوسائل

ورق رسم بياني – آلة حاسبة بيانية – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) ما هو متجه الموضع؟

(b) $A(2,-3), B(5,1), C(-1,-2), D(2,2)$

هل $\overline{AB}$ متكافئ مع $\overline{CD}$؟

(c) هل $\overline{AB} = \langle 2,-3\rangle$ متعاكس مع $<\overline{CD}> = <-6,9>$؟

5 التدريس

اطرح على الطلاب فكرة "شال": الجهد المبذول لا يعتمد على المسار بين نقطتين واكتب على السبورة: $<\overline{AB}> + <\overline{BC}> = <\overline{AC}>$. يمكن تفسير علاقة شال بواسطة الإزاحة: الإزاحة من A إلى B ثم من B إلى C تكافئ الإزاحة من A إلى C.

أشر إلى أنه يمكن تعميم علاقة "شال" لأكثر من 3 نقاط.

فمثلًا: $<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{BC}>+<\overrightarrow{CD}>=<\overrightarrow{AD}>$

لأن: $<\overrightarrow{AB}> + <\overrightarrow{BC}> + <\overrightarrow{CD}>$

$$=(<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{BC}>)+<\overrightarrow{CD}>$$
$$=<\overrightarrow{AC}>+<\overrightarrow{CD}>$$
$$=<\overrightarrow{AD}>$$

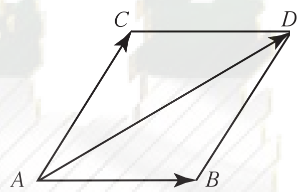
كذلك $<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{BC}>+<\overrightarrow{CD}>+<\overrightarrow{DA}>=\vec{0}$

وهذه العلاقة تفسر كالآتي: الإزاحة من A حتى الوصول إلى A تعني كأن الشيء بقي مكانه ولم يتحرك.

يمكن تفسير الطريقة الثانية في جمع المتجهات:

طريقة متوازي الأضلاع باستخدام علاقة "شال":

$$<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{AC}>=<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{BD}>$$
$$=<\overrightarrow{AD}>\ (<\overrightarrow{AC}>=<\overrightarrow{BD}>)$$



في الحالة العامة لجمع متجهين، أعد التركيز على أن موضع متجه الجمع يتغير مع اختيار نقطة الأساس، لكن كل المتجهات التي نحصل عليها تكون متساوية (الاتجاه نفسه، الطول نفسه). لطرح متجه نجمع المتجه المعاكس:

$$<\overrightarrow{AB}>-<\overrightarrow{CD}>=<\overrightarrow{AB}>+(-<\overrightarrow{CD}>)$$
$$=<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{DC}>$$

أشر إلى أنه أحيانًا في حل التمارين، يستحسن استبدال $-<\overrightarrow{AB}>$ بـ $<\overrightarrow{BA}>$

إذا كانت O نقطة الأصل، فبيّن للطلاب العلاقة بين إحداثيات النقطة M ومركبات $<\overrightarrow{OM}>$

اطلب إلى أحد الطلاب أن يرسم على السبورة جدولًا يضمنه قواعد الحساب بالإحداثيات مع أمثلة تطبيقية.

خواص عملية جمع المتجهات في المستوي Properties of Adding Vectors in the Plane

لأي ثلاثة متجهات $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ في المستوي

- خاصية الإبدال في جمع المتجهات $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$
- خاصية العنصر المحايد $\vec{0}$ $\vec{A}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{A}=\vec{A}$
- خاصية التجميع في جمع المتجهات $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$
- خاصية المعكوس الجمعي $\vec{A}+(-\vec{A})=(-\vec{A})+\vec{A}=\vec{0}$
- خاصية الحذف $\vec{A}+\vec{C}=\vec{B}+\vec{C} \Rightarrow \vec{A}=\vec{B}$
- خاصية التوزيع مع عدد حقيقي غير الصفر $K(\vec{A}+\vec{B})=K\vec{A}+K\vec{B}$

مثال (3)

ABC مثلث. أوجد:

a $\vec{L}=<\overrightarrow{AC}>+<\overrightarrow{BA}>+<\overrightarrow{CB}>$

b $\vec{K}=<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{CA}>+<\overrightarrow{BC}>+<\overrightarrow{AB}>$

الحل:

a $\vec{L}=<\overrightarrow{AC}>+<\overrightarrow{BA}>+<\overrightarrow{CB}>$

$=(<\overrightarrow{AC}>+<\overrightarrow{BA}>)+<\overrightarrow{CB}>$ خاصية التجميع

$=(<\overrightarrow{BA}>+<\overrightarrow{AC}>)+<\overrightarrow{CB}>$ خاصية الإبدال

$=<\overrightarrow{BC}>+<\overrightarrow{CB}>$ علاقة شال

$=<\overrightarrow{BB}>$ علاقة شال

$=\vec{0}$ $\overrightarrow{BB}$ المتجه الصفري

b $\vec{K}=<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{CA}>+<\overrightarrow{BC}>+<\overrightarrow{AB}>$

$=(<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{CA}>)+(<\overrightarrow{BC}>+<\overrightarrow{AB}>)$ خاصية التجميع

$=(<\overrightarrow{CA}>+<\overrightarrow{AB}>)+(<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{BC}>)$ خاصية الإبدال

$=<\overrightarrow{CB}>+<\overrightarrow{AC}>$ علاقة شال

$=<\overrightarrow{AC}>+<\overrightarrow{CB}>$ خاصية الإبدال

$=<\overrightarrow{AB}>$ علاقة شال

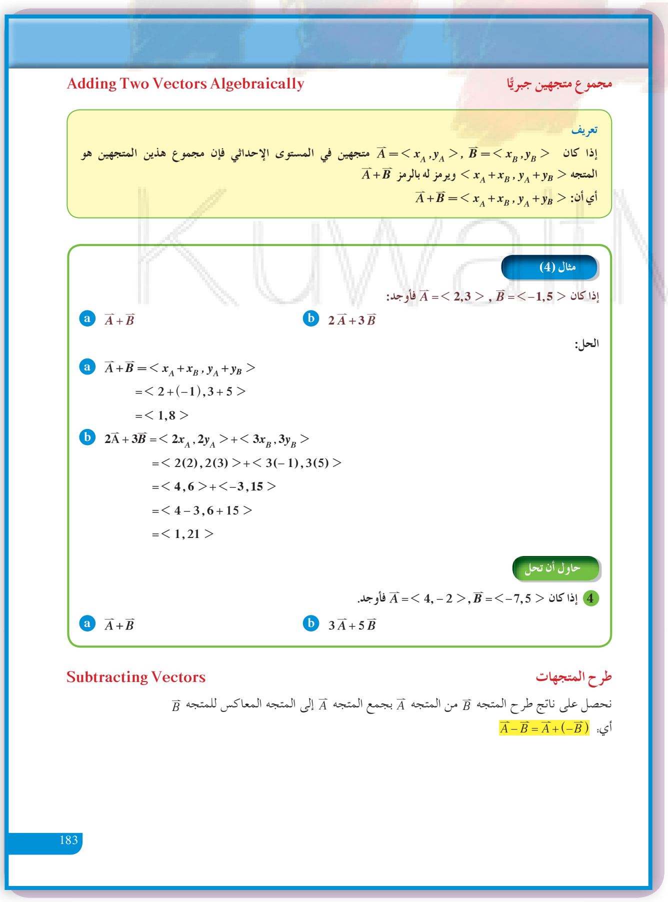
حاول أن تحل

3 $ABCD$ مضلع. أوجد:

a $<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{CD}>+<\overrightarrow{BC}>$

b $<\overrightarrow{AD}>+<\overrightarrow{CA}>+<\overrightarrow{BC}>+<\overrightarrow{DB}>$

182



مجموع متجهين جبريًا Adding Two Vectors Algebraically

تعريف

إذا كان $\vec{A}=<x_A, y_A>, \vec{B}=<x_B, y_B>$ متجهين في المستوى الإحداثي فإن مجموع هذين المتجهين هو المتجه $<x_A+x_B, y_A+y_B>$ ويرمز له بالرمز $\vec{A}+\vec{B}$

أي أن: $\vec{A}+\vec{B}=<x_A+x_B, y_A+y_B>$

مثال (4)

إذا كان $\vec{A}=<2,3>, \vec{B}=<-1,5>$ فأوجد:

a $\vec{A}+\vec{B}$

b $2\vec{A}+3\vec{B}$

الحل:

a $\vec{A}+\vec{B}=<x_A+x_B, y_A+y_B>$

$=<2+(-1), 3+5>$

$=<1,8>$

b $2\vec{A}+3\vec{B}=<2x_A, 2y_A>+<3x_B, 3y_B>$

$=<2(2), 2(3)>+<3(-1), 3(5)>$

$=<4,6>+<-3,15>$

$=<4-3, 6+15>$

$=<1,21>$

حاول أن تحل

4 إذا كان $\vec{A}=<4,-2>, \vec{B}=<-7,5>$ فأوجد.

a $\vec{A}+\vec{B}$

b $3\vec{A}+5\vec{B}$

طرح المتجهات Subtracting Vectors

نحصل على ناتج طرح المتجه $\vec{B}$ من المتجه $\vec{A}$ بجمع المتجه $\vec{A}$ إلى المتجه المعاكس للمتجه $\vec{B}$

أي: $\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$

183

في المثال (1)

اشرح للطلاب أن هذا المثال هو تطبيق مباشر لجمع متجهين باستخدام التعريف وهو مقدمة للمثال (2).

في المثال (2)

ركّز مع الطلاب على فكرة إنشاء نقطة باستخدام ناتج جمع متجهين، وذلك وفق شروط معينة على شكل هندسي، وكيفية استخدام المتجه المعاكس والمتجه المكافئ.

في المثالين (3), (5)

أعط أمثلة بديلة للطلاب، ثمّ اطلب إليهم استخدام خاصية الإبدال وخاصية التجميع بهدف استخدام علاقة "شال" وجمع المتجهات.

في المثالين (6), (4)

شدّد للطلاب على المعلومات التالية:

في المستوى الإحداثي عند جمع المتجهات نوجد ناتج جمع المركبات المناظرة على المحور السيني وعلى المحور الصادي، وعند طرح المتجهات نوجد ناتج طرح المركبات المناظرة على المحور السيني وعلى المحور الصادي.

في المثال (8)

من المهم جدًّا تركيز فكرة الربط بين أي متجه مع متجهي الوحدة الأساسيين $\vec{i}\,,\vec{j}$ لأن ذلك سوف يسهّل أمام الطلاب كتابة المتجه بدلالة متجهي الوحدة.

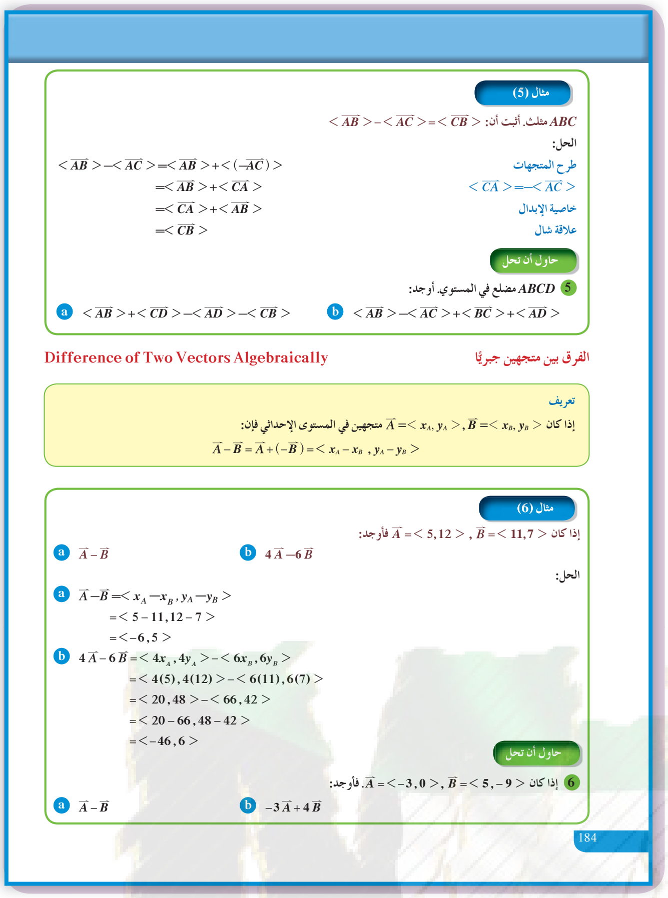
6 الربط

يقدم المثال (7) نموذجًا عن كيفية استخدام المتجهات في مواقف حياتية.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب عند جمع المتجهات باستخدام طريقة بدل الأخرى (علاقة "شال"، طريقة متوازي الأضلاع).

بيّن لهم أن علاقة "شال" تُعتمد عندما يكون المتجهان متتابعين (أي يبدأ المتجه الثاني حيث ينتهي الأول) وتُعتمد طريقة متوازي الأضلاع عندما يكون للمتجهين نقطة



مثال (5)

ABC مثلث. أثبت أن: $\langle \overrightarrow{AB} \rangle - \langle \overrightarrow{AC} \rangle = \langle \overrightarrow{CB} \rangle$

الحل:

طرح المتجهات: $\langle \overrightarrow{AB} \rangle - \langle \overrightarrow{AC} \rangle = \langle \overrightarrow{AB} \rangle + \langle (-\overrightarrow{AC}) \rangle$

$\langle \overrightarrow{CA} \rangle = -\langle \overrightarrow{AC} \rangle$: $= \langle \overrightarrow{AB} \rangle + \langle \overrightarrow{CA} \rangle$

خاصية الإبدال: $= \langle \overrightarrow{CA} \rangle + \langle \overrightarrow{AB} \rangle$

علاقة شال: $= \langle \overrightarrow{CB} \rangle$

حاول أن تحل

5 $ABCD$ مضلع في المستوي. أوجد:

a $\langle \overrightarrow{AB} \rangle + \langle \overrightarrow{CD} \rangle - \langle \overrightarrow{AD} \rangle - \langle \overrightarrow{CB} \rangle$

b $\langle \overrightarrow{AB} \rangle - \langle \overrightarrow{AC} \rangle + \langle \overrightarrow{BC} \rangle + \langle \overrightarrow{AD} \rangle$

الفرق بين متجهين جبريًّا

Difference of Two Vectors Algebraically

تعريف

إذا كان $\vec{A} = \langle x_A, y_A \rangle , \vec{B} = \langle x_B, y_B \rangle$ متجهين في المستوى الإحداثي فإن:

$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) = \langle x_A - x_B , y_A - y_B \rangle$

مثال (6)

إذا كان $\vec{A} = \langle 5,12 \rangle , \vec{B} = \langle 11,7 \rangle$ فأوجد:

a $\vec{A} - \vec{B}$

b $4\vec{A} - 6\vec{B}$

الحل:

a $\vec{A} - \vec{B} = \langle x_A - x_B , y_A - y_B \rangle$
$= \langle 5-11, 12-7 \rangle$
$= \langle -6, 5 \rangle$

b $4\vec{A} - 6\vec{B} = \langle 4x_A, 4y_A \rangle - \langle 6x_B, 6y_B \rangle$
$= \langle 4(5), 4(12) \rangle - \langle 6(11), 6(7) \rangle$
$= \langle 20, 48 \rangle - \langle 66, 42 \rangle$
$= \langle 20-66, 48-42 \rangle$
$= \langle -46, 6 \rangle$

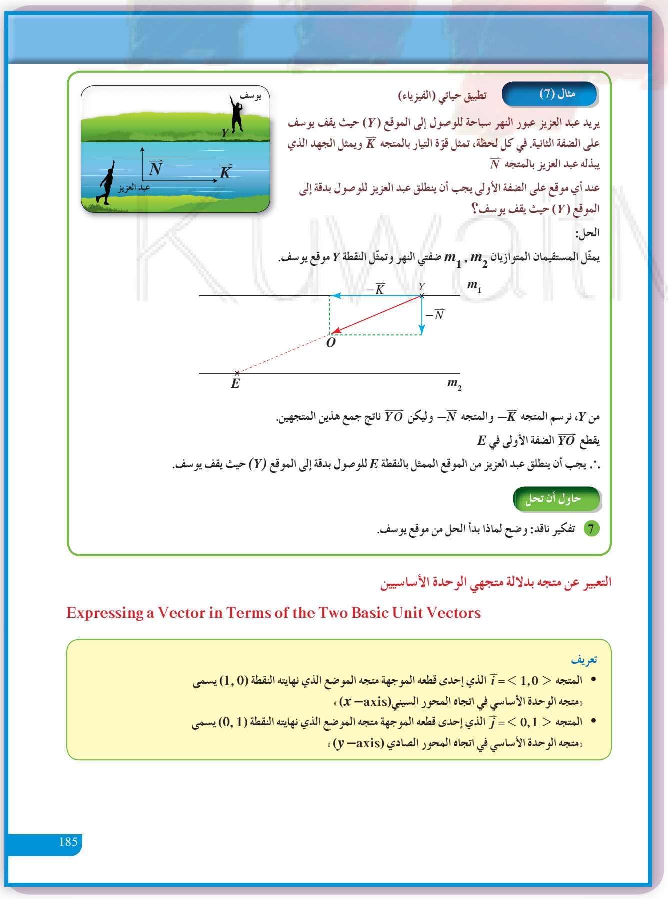
حاول أن تحل

6 إذا كان $\vec{A} = \langle -3, 0 \rangle , \vec{B} = \langle 5, -9 \rangle$. فأوجد:

a $\vec{A} - \vec{B}$

b $-3\vec{A} + 4\vec{B}$

184



مثال (7) تطبيق حياتي (الفيزياء)

يريد عبد العزيز عبور النهر سباحة للوصول إلى الموقع (Y) حيث يقف يوسف على الضفة الثانية. في كل لحظة، تمثل قوّة التيار بالمتجه $\vec{K}$ ويمثل الجهد الذي يبذله عبد العزيز بالمتجه $\vec{N}$

عند أي موقع على الضفة الأولى يجب أن ينطلق عبد العزيز للوصول بدقة إلى الموقع (Y) حيث يقف يوسف؟

الحل:

يمثّل المستقيمان المتوازيان m_1 , m_2 ضفتي النهر وتمثّل النقطة Y موقع يوسف.

من Y، نرسم المتجه $-\vec{K}$ والمتجه $-\vec{N}$ وليكن $\overrightarrow{YO}$ ناتج جمع هذين المتجهين.

يقطع $\overrightarrow{YO}$ الضفة الأولى في E

∴ يجب أن ينطلق عبد العزيز من الموقع الممثل بالنقطة E للوصول بدقة إلى الموقع (Y) حيث يقف يوسف.

حاول أن تحل

7 تفكير ناقد: وضح لماذا بدأ الحل من موقع يوسف.

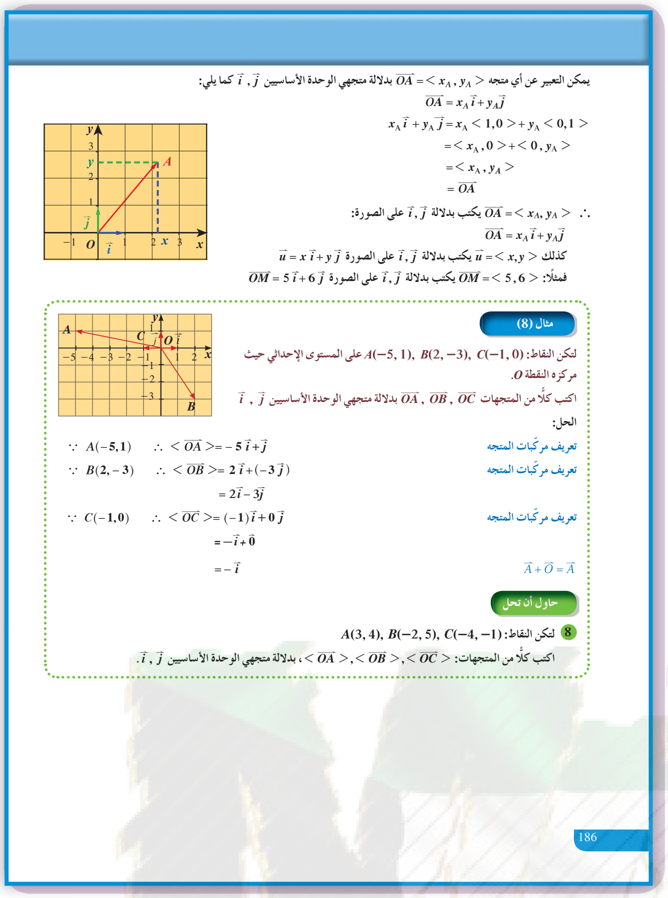
التعبير عن متجه بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين

Expressing a Vector in Terms of the Two Basic Unit Vectors

تعريف

- المتجه $\vec{i} = \langle 1,0 \rangle$ الذي إحدى قطعه الموجهة متجه الموضع الذي نهايته النقطة $(1, 0)$ يسمى «متجه الوحدة الأساسي في اتجاه المحور السيني$(x-\text{axis})$»
- المتجه $\vec{j} = \langle 0,1 \rangle$ الذي إحدى قطعه الموجهة متجه الموضع الذي نهايته النقطة $(0, 1)$ يسمى «متجه الوحدة الأساسي في اتجاه المحور الصادي $(y-\text{axis})$»

185



يمكن التعبير عن أي متجه $\overrightarrow{OA} = < x_A , y_A >$ بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين $\vec{i}\,,\,\vec{j}$ كما يلي:

$$\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$$

$$x_A\vec{i} + y_A\vec{j} = x_A < 1,0 > + y_A < 0,1 >$$
$$= < x_A , 0 > + < 0 , y_A >$$
$$= < x_A , y_A >$$
$$= \overrightarrow{OA}$$

$\therefore$ $\overrightarrow{OA} = < x_A, y_A >$ يكتب بدلالة $\vec{i}, \vec{j}$ على الصورة:

$$\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$$

كذلك $\vec{u} = < x,y >$ يكتب بدلالة $\vec{i}, \vec{j}$ على الصورة $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$

فمثلًا: $\overrightarrow{OM} = < 5 , 6 >$ يكتب بدلالة $\vec{i}, \vec{j}$ على الصورة $\overrightarrow{OM} = 5\,\vec{i} + 6\,\vec{j}$

مثال (8)

لتكن النقاط: $A(-5, 1),\ B(2, -3),\ C(-1, 0)$ على المستوى الإحداثي حيث مركزه النقطة O.

اكتب كلًّا من المتجهات $\overrightarrow{OA}\,,\,\overrightarrow{OB}\,,\,\overrightarrow{OC}$ بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين $\vec{i}\,,\,\vec{j}$

الحل:

تعريف مركّبات المتجه $\because A(-5,1) \quad \therefore < \overrightarrow{OA} > = -5\,\vec{i} + \vec{j}$

تعريف مركّبات المتجه $\because B(2,-3) \quad \therefore < \overrightarrow{OB} > = 2\,\vec{i} + (-3\,\vec{j})$

$$= 2\vec{i} - 3\vec{j}$$

تعريف مركّبات المتجه $\because C(-1,0) \quad \therefore < \overrightarrow{OC} > = (-1)\vec{i} + 0\,\vec{j}$

$$= -\vec{i} + \vec{0}$$

$\vec{A} + \vec{O} = \vec{A}$ $$= -\vec{i}$$

حاول أن تحل

8 لتكن النقاط: $A(3, 4),\ B(-2, 5),\ C(-4, -1)$

اكتب كلًّا من المتجهات: $< \overrightarrow{OA} >, < \overrightarrow{OB} >, < \overrightarrow{OC} >$، بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين $\vec{i}\,,\,\vec{j}$.

186

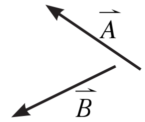
مشتركة.

8 التقييم

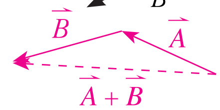
راقب الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل»، وتحقق من صحة عملهم.

اختبار سريع

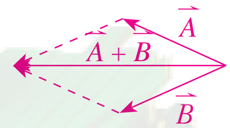
1 أوجد بطريقتين مختلفتين ناتج جمع المتجهين التاليين:



طريقة أولى:



طريقة ثانية:



2 إذا كانت:

$$A(2,2), B(6,4), C(-2,-4), D(-3,3)$$

نقاط في المستوى الإحداثي.

أوجد:

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = < 4 , 2 > + < -8 , -8 >$$
$$= < -4 , -6 >$$

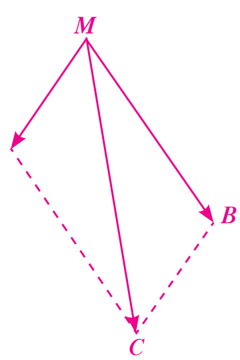
(b) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CD}$

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CD} = < -4 , -6 > - < -1 , 7 >$$
$$= < -3 , -13 >$$

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1

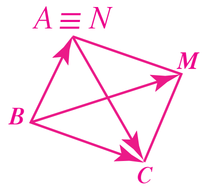


تحقق من عمل الطلاب.

2 نعم، يتغير المسار فكلما صغر قياس الزاوية أصبح $\|\overrightarrow{MC}\|$ أطول وبالعكس.

3 نعم، تتغير عناصر $\|\overline{MC}\|$ الثلاثة مع تغير $\|\overline{MB}\|$.

«حاول أن تحل»



1 (a) $CBAM$ متوازي الأضلاع.

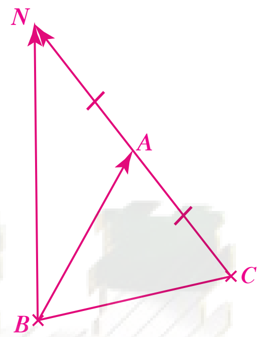
(b) تحقق من عمل الطلاب:

$$<\overrightarrow{BN}> = <\overrightarrow{BA}>$$

$$N \equiv A$$

2 $<\overrightarrow{BN}> - <\overrightarrow{BA}> = <\overrightarrow{CA}>$

$\therefore \ <\overrightarrow{AN}> = <\overrightarrow{CA}>$



3 (a) $(<\overrightarrow{AB}> + <\overrightarrow{BC}>) + <\overrightarrow{CD}>$

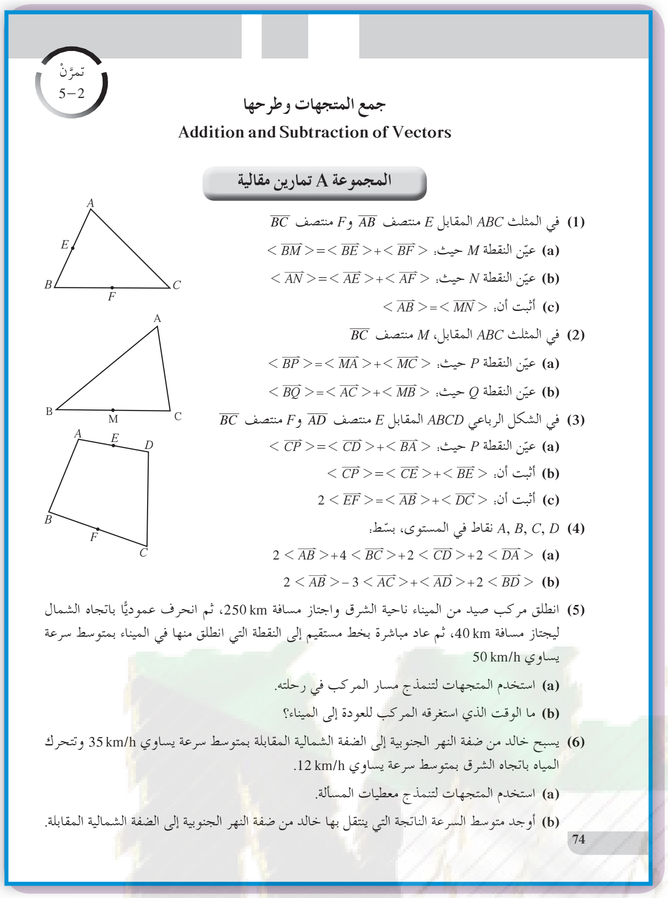
$<\overrightarrow{AC}> + <\overrightarrow{CD}> = <\overrightarrow{AD}>$

(b) $(<\overrightarrow{AD}> + <\overrightarrow{DB}>) + (<\overrightarrow{BC}> + <\overrightarrow{CA}>)$

$<\overrightarrow{AB}> + <\overrightarrow{BA}> = <\overrightarrow{AA}> = <\vec{0}>$

4 (a) $\vec{A} + \vec{B} = <-3, 3>$

(b) $3\vec{A} + 5\vec{B} = <-23, 19>$


تمرّنْ
5–2

جمع المتجهات وطرحها

Addition and Subtraction of Vectors

المجموعة A تمارين مقالية

(1) في المثلث ABC المقابل E منتصف $\overline{AB}$ وF منتصف $\overline{BC}$

(a) عيّن النقطة M حيث: $<\overrightarrow{BM}> = <\overrightarrow{BE}> + <\overrightarrow{BF}>$

(b) عيّن النقطة N حيث: $<\overrightarrow{AN}> = <\overrightarrow{AE}> + <\overrightarrow{AF}>$

(c) أثبت أن: $<\overrightarrow{AB}> = <\overrightarrow{MN}>$

(2) في المثلث ABC المقابل، M منتصف $\overline{BC}$

(a) عيّن النقطة P حيث: $<\overrightarrow{BP}> = <\overrightarrow{MA}> + <\overrightarrow{MC}>$

(b) عيّن النقطة Q حيث: $<\overrightarrow{BQ}> = <\overrightarrow{AC}> + <\overrightarrow{MB}>$

(3) في الشكل الرباعي $ABCD$ المقابل E منتصف $\overline{AD}$ وF منتصف $\overline{BC}$

(a) عيّن النقطة P حيث: $<\overrightarrow{CP}> = <\overrightarrow{CD}> + <\overrightarrow{BA}>$

(b) أثبت أن: $<\overrightarrow{CP}> = <\overrightarrow{CE}> + <\overrightarrow{BE}>$

(c) أثبت أن: $2<\overrightarrow{EF}> = <\overrightarrow{AB}> + <\overrightarrow{DC}>$

(4) A, B, C, D نقاط في المستوى، بسّط:

(a) $2<\overrightarrow{AB}> + 4<\overrightarrow{BC}> + 2<\overrightarrow{CD}> + 2<\overrightarrow{DA}>$

(b) $2<\overrightarrow{AB}> - 3<\overrightarrow{AC}> + <\overrightarrow{AD}> + 2<\overrightarrow{BD}>$

(5) انطلق مركب صيد من الميناء ناحية الشرق واجتاز مسافة 250 km، ثم انحرف عموديًّا باتجاه الشمال ليجتاز مسافة 40 km، ثم عاد مباشرة بخط مستقيم إلى النقطة التي انطلق منها في الميناء بمتوسط سرعة يساوي 50 km/h

(a) استخدم المتجهات لتنمذج مسار المركب في رحلته.

(b) ما الوقت الذي استغرقه المركب للعودة إلى الميناء؟

(6) يسبح خالد من ضفة النهر الجنوبية إلى الضفة الشمالية المقابلة بمتوسط سرعة يساوي 35 km/h وتتحرك المياه باتجاه الشرق بمتوسط سرعة يساوي 12 km/h.

(a) استخدم المتجهات لتنمذج معطيات المسألة.

(b) أوجد متوسط السرعة الناتجة التي ينتقل بها خالد من ضفة النهر الجنوبية إلى الضفة الشمالية المقابلة.

74

5 **(a)** $(<AB>-<AD>)+(<\overrightarrow{CD}>-<\overrightarrow{CB}>)$

$=<\overrightarrow{DB}>+<\overrightarrow{BD}>$

$=<\overrightarrow{DD}>=<\vec{0}>$

(b) $<\overrightarrow{CB}>+<\overrightarrow{BC}>+<\overrightarrow{AD}>$

$=<\vec{0}>+<\overrightarrow{AD}>$

$=<\overrightarrow{AD}>$

6 **(a)** $\vec{A}-\vec{B}=<-8,9>$

(b) $-3\vec{A}+4\vec{B}=<29,-36>$

7 لأننا نعرف إلى أين سوف يصل عبد العزيز وهو الموقع الثابت الذي يقف عنده يوسف، لذلك اعتمدنا الحل انطلاقاً من نقطة الوصول حيث استخدمنا مفهوم جمع المتجهين ومفهوم المتجه المعاكس.

8 $<\overrightarrow{OA}>=3\vec{i}+4\vec{j}$

$<\overrightarrow{OB}>=-2\vec{i}+5\vec{j}$

$<\overrightarrow{OC}>=-4\vec{i}-\vec{j}$

(7) مثّل النقاط التالية في المستوى الإحداثي حيث O نقطة الأصل، $\vec{i},\vec{j}$ متجهي الوحدة الأساسيان

$\overrightarrow{OA}=3\vec{i}-4\vec{j}$, $\overrightarrow{OB}=-2\vec{i}+3\vec{j}$ ، $\overrightarrow{OC}=-4\vec{i}-\vec{j}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

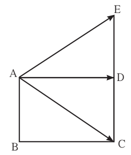
(1) إذا كان $<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{BC}>=<\overrightarrow{AC}>$ فإن: $AB+BC=AC$ (a) (b)

(2) $<\overrightarrow{AC}>+<\overrightarrow{BA}>+<\overrightarrow{CB}>=\vec{0}$ (a) (b)

(3) $ABCF$ متوازي أضلاع حيث: $\overrightarrow{BF}=<1,4>$ ، $\overrightarrow{BA}=<-2,3>$

$\therefore \quad <\overrightarrow{BC}>=<3,1>$ (a) (b)

(4) في المستطيل $ABCD$: $<\overrightarrow{AE}>=<\overrightarrow{BD}>$ إذاً $<\overrightarrow{AC}>+<\overrightarrow{AD}>=<\overrightarrow{AE}>$ (a) (b)



(5) في المثلث ABC: $<\overrightarrow{AB}>-<\overrightarrow{AC}>+<\overrightarrow{BC}>-<\overrightarrow{BA}>=<\overrightarrow{AB}>$ (a) (b)

في التمارين (9–6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان $\vec{L}=<\overrightarrow{AC}>+2<\overrightarrow{AB}>-<\overrightarrow{BC}>$ فإن:

(a) $\vec{L}=\frac{1}{2}<\overrightarrow{AB}>$ (b) $\vec{L}=-\frac{1}{2}<\overrightarrow{AB}>$

(c) $\vec{L}=3<\overrightarrow{AB}>$ (d) $\vec{L}=-3<\overrightarrow{AB}>$

(7) إذا كان $<\overrightarrow{AM}>=2(3\vec{i}-\vec{j})+3(-2\vec{i})-2\vec{j}$ ، فإن $<\overrightarrow{AM}>$ يساوي:

(a) $2\vec{i}-3\vec{j}$ (b) $3\vec{i}-2\vec{j}$

(c) $-4\vec{j}$ (d) $6\vec{i}-6\vec{j}$

(8) $ABCD$ متوازي أضلاع حيث: $A(-2,1), B(0,-2), C(3,-1)$. إذاً إحداثيات D هي:

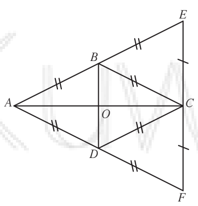
(a) $(2,2)$ (b) $(-1,2)$ (c) $(1,2)$ (d) $(1,-2)$

75

(9) $\vec{U}=4\vec{i}-2\vec{j}$, $\vec{V}=x\vec{i}-\vec{j}$ هما متجهان متوازيان. قيمة x هي:

(a) 2 (b) −2 (c) 8 (d) −8

في التمارين (13–10) لديك قائمتان، اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.



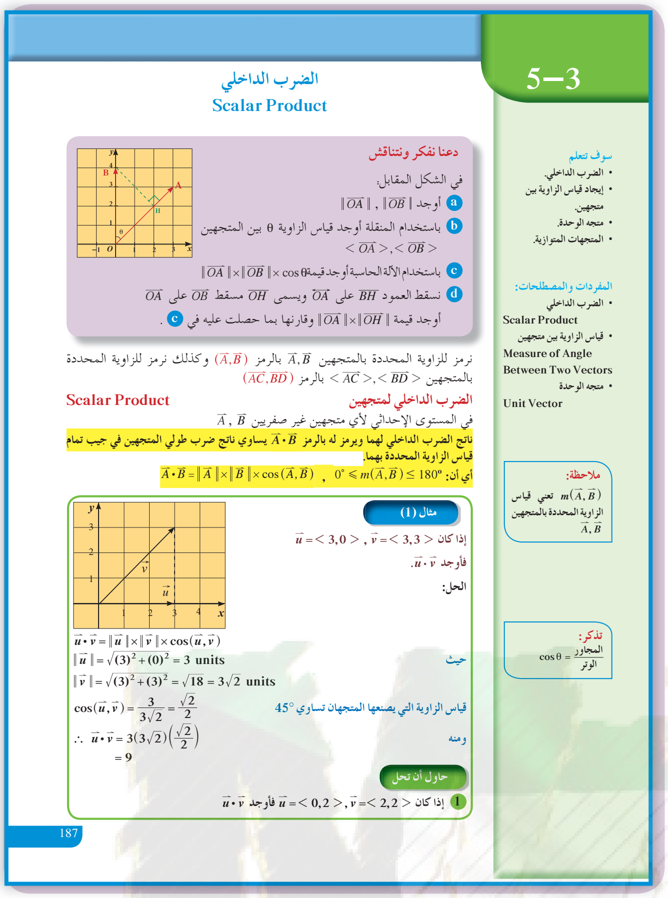
من الشكل أعلاه

القائمة (1)	القائمة (2)
(10) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=$ **(11)** $\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CF}=$	(a) $\overrightarrow{BD}$ (b) $\overrightarrow{AC}$ (c) $\vec{0}$ (d) $\overrightarrow{DB}$

القائمة (1)	القائمة (2)
(12) $\overrightarrow{EA}=$ **(13)** $2\overrightarrow{OC}=$	(a) $2\overrightarrow{BA}$ (b) $2\overrightarrow{BE}$ (c) $-\overrightarrow{CA}$ (d) $\overrightarrow{CA}$

76

3–5: الضرب الداخلي



5–3

الضرب الداخلي

Scalar Product

سوف تتعلم

- الضرب الداخلي.
- إيجاد قياس الزاوية بين متجهين.
- متجه الوحدة.
- المتجهات المتوازية.

المفردات والمصطلحات:

- الضرب الداخلي Scalar Product
- قياس الزاوية بين متجهين Measure of Angle Between Two Vectors
- متجه الوحدة Unit Vector

دعنا نفكر ونتناقش

في الشكل المقابل:

a أوجد $\|\overline{OA}\| , \|\overline{OB}\|$

b باستخدام المنقلة أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $<\overline{OA}>, <\overline{OB}>$

c باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة $\|\overline{OA}\| \times \|\overline{OB}\| \times \cos\theta$

d نسقط العمود $\overline{BH}$ على $\overleftrightarrow{OA}$ ويسمى $\overline{OH}$ مسقط $\overline{OB}$ على $\overline{OA}$

أوجد قيمة $\|\overline{OA}\| \times \|\overline{OH}\|$ وقارنها بما حصلت عليه في c .

نرمز للزاوية المحددة بالمتجهين $\vec{A}, \vec{B}$ بالرمز $(\vec{A}, \vec{B})$ وكذلك نرمز للزاوية المحددة بالمتجهين $<\overrightarrow{AC}>, <\overrightarrow{BD}>$ بالرمز $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})$

الضرب الداخلي لمتجهين Scalar Product

في المستوى الإحداثي لأي متجهين غير صفريين $\vec{A}, \vec{B}$

ناتج الضرب الداخلي لهما ويرمز له بالرمز $\vec{A} \cdot \vec{B}$ يساوي ناتج ضرب طولي المتجهين في جيب تمام قياس الزاوية المحددة بهما.

أي أن: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \times \|\vec{B}\| \times \cos(\vec{A}, \vec{B})$, $0^\circ \leqslant m(\vec{A}, \vec{B}) \leq 180^\circ$

ملاحظة: $m(\vec{A}, \vec{B})$ تعني قياس الزاوية المحددة بالمتجهين $\vec{A}, \vec{B}$

مثال (1)

إذا كان $\vec{u} = <3,0> , \vec{v} = <3,3>$

فأوجد $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

الحل:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

حيث

$\|\vec{u}\| = \sqrt{(3)^2 + (0)^2} = 3$ units

$\|\vec{v}\| = \sqrt{(3)^2 + (3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ units

قياس الزاوية التي يصنعها المتجهان تساوي 45°

$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ومنه

$\therefore\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 3(3\sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= 9$

تذكر: $\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

حاول أن تحل

1 إذا كان $\vec{u} = <0,2>, \vec{v} = <2,2>$ فأوجد $\vec{u} \cdot \vec{v}$

187

1 الأهداف

- يتعرف الضرب الداخلي.
- يوجد قياس الزاوية بين متجهين.
- يوجد متجه الوحدة في اتجاه متجه.
- يدرس توازي متجهين.
- يدرس تعامد متجهين.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

الضرب الداخلي – قياس الزاوية بين متجهين – متجه الوحدة.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب إيجاد:

(a) $\cos 60^\circ, \cos 45^\circ, \cos(30^\circ), \cos(120^\circ)$

(b) راجع مع الطلاب خصائص المثلث متطابق الأضلاع، والمثلث ثلاثيني – ستيني، والمثلث القائم، والمتطابق الضلعين، وذكرهم بالعلاقة بين أطوال أضلاع المثلث في كل حالة.

(c) اطلب إليهم استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد: $0^\circ < \theta < 180^\circ$ في الحالات التالية:

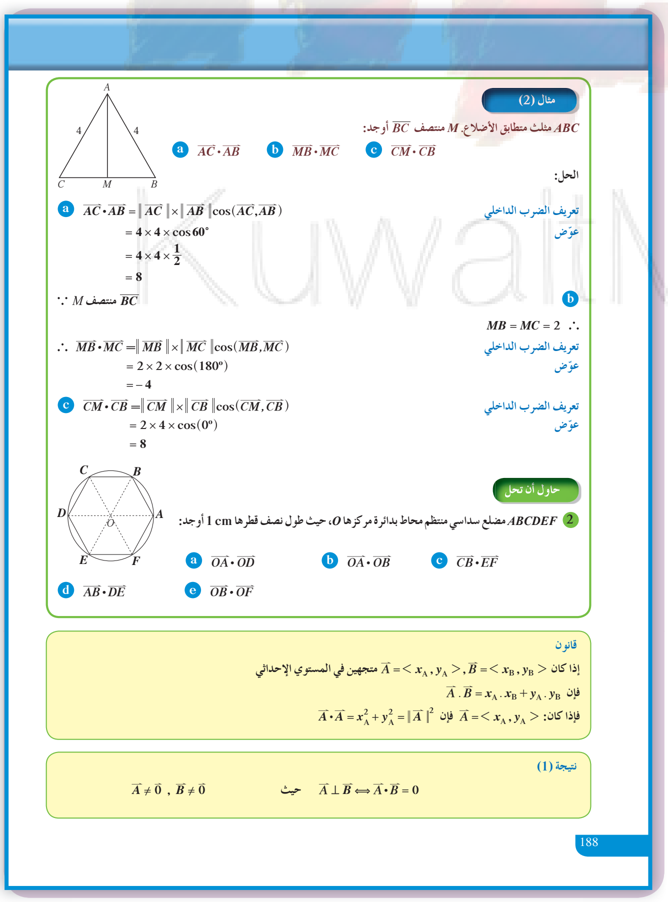
(a) $\cos\theta = 0.7843$

(b) $\cos\theta = -0.4567$

(d) راجع مع الطلاب إذا كان:

$A = <1, -2> , B = <3, 4>$

أوجد: $\|\vec{A}\| , \|\vec{B}\|$



مثال (2)

ABC مثلث متطابق الأضلاع. M منتصف $\overline{BC}$ أوجد:

a $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$ b $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}$ c $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB}$

الحل:

a تعريف الضرب الداخلي $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AC}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$

عوّض $= 4 \times 4 \times \cos 60^\circ$

$= 4 \times 4 \times \frac{1}{2}$

$= 8$

b $\because$ M منتصف $\overline{BC}$

$\therefore\ MB = MC = 2$

تعريف الضرب الداخلي $\therefore\ \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = \|\overrightarrow{MB}\| \times \|\overrightarrow{MC}\| \cos(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})$

عوّض $= 2 \times 2 \times \cos(180^\circ)$

$= -4$

c تعريف الضرب الداخلي $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{CM}\| \times \|\overrightarrow{CB}\| \cos(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CB})$

عوّض $= 2 \times 4 \times \cos(0^\circ)$

$= 8$

حاول أن تحل

2 $ABCDEF$ مضلع سداسي منتظم محاط بدائرة مركزها O، حيث طول نصف قطرها 1 cm أوجد:

a $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}$ b $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ c $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{EF}$

d $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE}$ e $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OF}$

قانون

إذا كان $\vec{A} = <x_A, y_A>, \vec{B} = <x_B, y_B>$ متجهين في المستوي الإحداثي

فإن $\vec{A} . \vec{B} = x_A . x_B + y_A . y_B$

فإذا كان: $\vec{A} = <x_A, y_A>$ فإن $\vec{A} \cdot \vec{A} = x_A^2 + y_A^2 = \|\vec{A}\|^2$

نتيجة (1)

$\vec{A} \perp \vec{B} \Longleftrightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ حيث $\vec{A} \neq \vec{0}\ ,\ \vec{B} \neq \vec{0}$

188

5 التدريس

بعد مناقشة الضرب الداخلي للمتجهات، اسألهم:

هل $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{A}$ ؟ ولماذا؟ أشر إلى أن الفرق يكمن في قياس الزاوية بين المتجهين، ولكن بما أن $\cos(-\theta)=\cos\theta$ فإن $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{A}$

اسألهم: ماذا نستنتج إذا كان $\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}=0$ أو A, B متعامدين؟

أشر إلى أنه إذا استبدلنا $\overrightarrow{A}$ بمعكوسه $(-\overrightarrow{A})$ نعكس قيمة الضرب الداخلي $(-\overrightarrow{A})\cdot\overrightarrow{B}=-(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B})$

- يكتب أحد الطلاب خواص الضرب الداخلي على السبورة ويعطي الطلاب أمثلة عن كل خاصية.
- أشر إلى أنه لا يمكن ضرب 3 متجهات داخليًّا. لا معنى رياضيًّا لِـ $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{C}$، بينما يمكن احتساب $(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B})\times\overrightarrow{C}$ ونحصل على متجه موازٍ لِـ $\overrightarrow{C}$، وبالتالي الضرب الداخلي ليس تجميعيًّا.

اطلب إليهم إيجاد $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{A}$ إذا كان $\overrightarrow{A}$ متجه الوحدة.

$\|\overrightarrow{A}\|^2=1$

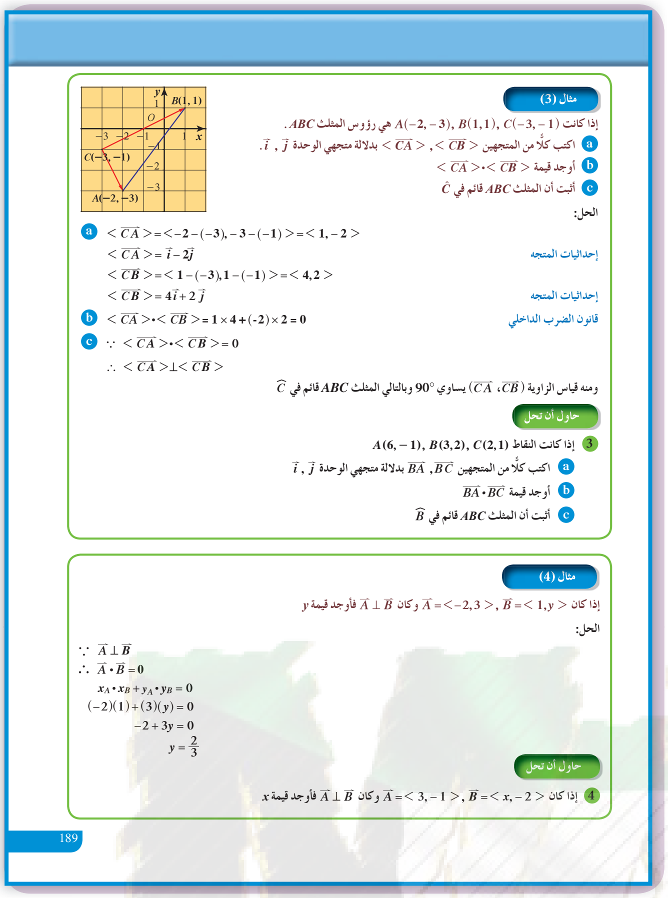
اطلب إليهم مقارنة $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$ بطول $(\overrightarrow{AB})^2$

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2=AB^2=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

أشر إلى أنه لإيجاد قياس الزاوية بين متجهين، نستخدم الصيغتين المختلفتين للضرب الداخلي معًا.

في المثال (1)

ناقش مع الطلاب النتائج في هذا المثال لتحقيق فكرة الضرب الداخلي بين متجهين بخاصة أن هذه العملية على المتجهين لا تعطي متجهًا بل تعطي عددًا حقيقيًّا.


مثال (3)

إذا كانت $A(-2,-3), B(1,1), C(-3,-1)$ هي رؤوس المثلث ABC.

a اكتب كلًّا من المتجهين $<\overrightarrow{CB}>, <\overrightarrow{CA}>$ بدلالة متجهي الوحدة $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$.

b أوجد قيمة $<\overrightarrow{CA}>\cdot<\overrightarrow{CB}>$

c أثبت أن المثلث ABC قائم في $\hat{C}$

الحل:

a $<\overrightarrow{CA}>=<-2-(-3),-3-(-1)>=<1,-2>$

إحداثيات المتجه $<\overrightarrow{CA}>=\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}$

$<\overrightarrow{CB}>=<1-(-3),1-(-1)>=<4,2>$

إحداثيات المتجه $<\overrightarrow{CB}>=4\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}$

b قانون الضرب الداخلي $<\overrightarrow{CA}>\cdot<\overrightarrow{CB}>=1\times4+(-2)\times2=0$

c $\because\ <\overrightarrow{CA}>\cdot<\overrightarrow{CB}>=0$

$\therefore\ <\overrightarrow{CA}>\perp<\overrightarrow{CB}>$

ومنه قياس الزاوية $(\overrightarrow{CB}$ ،$\overrightarrow{CA})$ يساوي $90°$ وبالتالي المثلث ABC قائم في $\widehat{C}$

حاول أن تحل

3 إذا كانت النقاط $A(6,-1), B(3,2), C(2,1)$

a اكتب كلًّا من المتجهين $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$ بدلالة متجهي الوحدة $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$

b أوجد قيمة $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

c أثبت أن المثلث ABC قائم في $\widehat{B}$

مثال (4)

إذا كان $\overrightarrow{A}=<-2,3>, \overrightarrow{B}=<1,y>$ وكان $\overrightarrow{A}\perp\overrightarrow{B}$ فأوجد قيمة y

الحل:

$\because\ \overrightarrow{A}\perp\overrightarrow{B}$

$\therefore\ \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=0$

$x_A\cdot x_B+y_A\cdot y_B=0$

$(-2)(1)+(3)(y)=0$

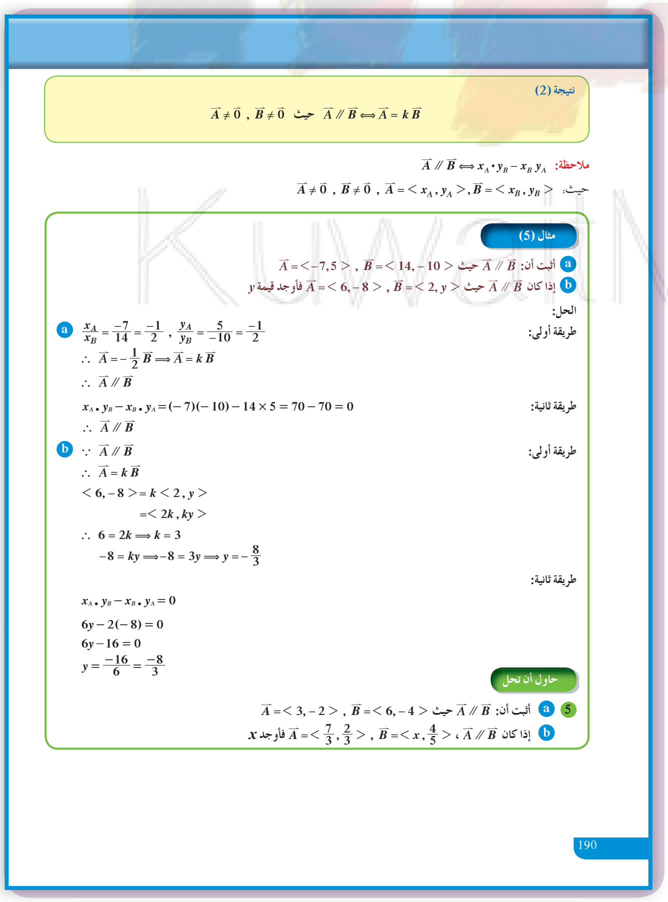
$-2+3y=0$

$y=\frac{2}{3}$

حاول أن تحل

4 إذا كان $\overrightarrow{A}=<3,-1>, \overrightarrow{B}=<x,-2>$ وكان $\overrightarrow{A}\perp\overrightarrow{B}$ فأوجد قيمة x

189


نتيجة (2)

$\overrightarrow{A}\,/\!/\,\overrightarrow{B}\Longleftrightarrow\overrightarrow{A}=k\overrightarrow{B}$ حيث $\overrightarrow{A}\neq\overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{B}\neq\overrightarrow{0}$

ملاحظة: $\overrightarrow{A}\,/\!/\,\overrightarrow{B}\Longleftrightarrow x_A\cdot y_B-x_B\,y_A$

حيث: $\overrightarrow{A}\neq\overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{B}\neq\overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{A}=<x_A,y_A>,\overrightarrow{B}=<x_B,y_B>$

مثال (5)

a أثبت أن: $\overrightarrow{A}\,/\!/\,\overrightarrow{B}$ حيث $\overrightarrow{A}=<-7,5>$, $\overrightarrow{B}=<14,-10>$

b إذا كان $\overrightarrow{A}\,/\!/\,\overrightarrow{B}$ حيث $\overrightarrow{A}=<6,-8>$, $\overrightarrow{B}=<2,y>$ فأوجد قيمة y

الحل:

طريقة أولى:

a $\frac{x_A}{x_B}=\frac{-7}{14}=\frac{-1}{2}$, $\frac{y_A}{y_B}=\frac{5}{-10}=\frac{-1}{2}$

$\therefore\ \overrightarrow{A}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{B}\Longrightarrow\overrightarrow{A}=k\overrightarrow{B}$

$\therefore\ \overrightarrow{A}\,/\!/\,\overrightarrow{B}$

طريقة ثانية:

$x_A\cdot y_B-x_B\cdot y_A=(-7)(-10)-14\times5=70-70=0$

$\therefore\ \overrightarrow{A}\,/\!/\,\overrightarrow{B}$

طريقة أولى:

b $\because\ \overrightarrow{A}\,/\!/\,\overrightarrow{B}$

$\therefore\ \overrightarrow{A}=k\overrightarrow{B}$

$<6,-8>=k<2,y>$

$=<2k,ky>$

$\therefore\ 6=2k\Longrightarrow k=3$

$-8=ky\Longrightarrow-8=3y\Longrightarrow y=-\frac{8}{3}$

طريقة ثانية:

$x_A\cdot y_B-x_B\cdot y_A=0$

$6y-2(-8)=0$

$6y-16=0$

$y=\frac{-16}{6}=\frac{-8}{3}$

حاول أن تحل

5 a أثبت أن: $\overrightarrow{A}\,/\!/\,\overrightarrow{B}$ حيث $\overrightarrow{A}=<3,-2>$, $\overrightarrow{B}=<6,-4>$

b إذا كان $\overrightarrow{A}\,/\!/\,\overrightarrow{B}$ ، $\overrightarrow{B}=<x,\frac{4}{5}>$, $\overrightarrow{A}=<\frac{7}{3},\frac{2}{3}>$ فأوجد x

190

في المثال (2)

أعطِ الطلاب أمثلة بديلة عن أشكال هندسيّة منتظمة، واطلب إليهم إيجاد الضرب الداخلي للمتجهات، ثمّ ناقش معهم النتائج.

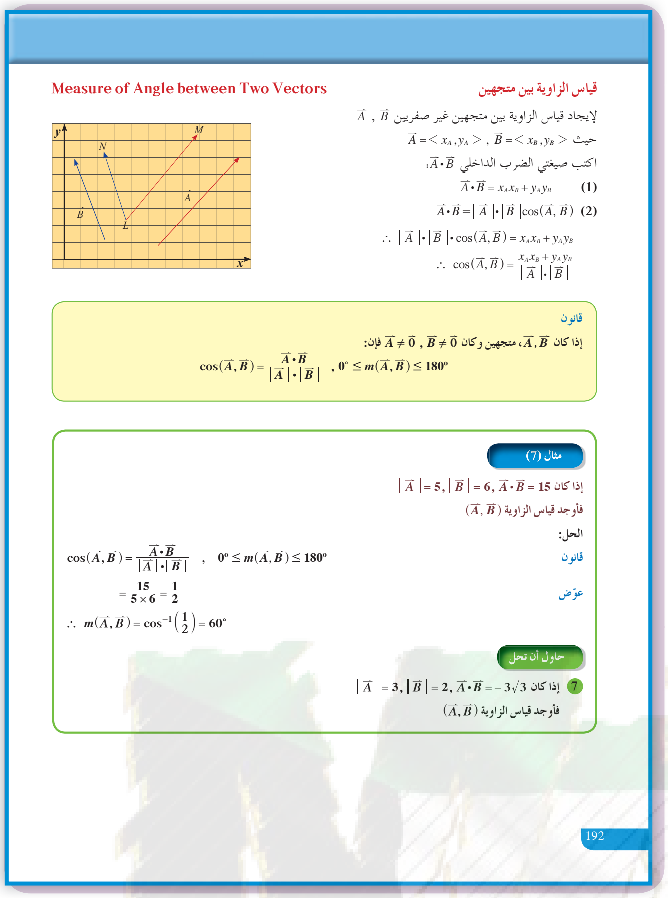
في المثال (3)

أكد للطلاب أن القاعدة: $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = x_A \times x_B + y_A \times y_B$ لا يمكن استخدامها إلا إذا كان المتجهان في مستوى إحداثي حيث $\|\overrightarrow{i}\| = \|\overrightarrow{j}\| = 1$ (وحدة قياس).

شجعهم على استخدام الضرب الداخلي في إثبات مثلث قائم. إذا كان $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ تكون A زاوية قائمة.

في المثال (4)

يساعد هذا المثال الطلاب على استخدام شرط التعامد بين متجهين لإيجاد قيم متغيرة في مركبات أحد المتجهين.



قياس الزاوية بين متجهين — **Measure of Angle between Two Vectors**

لإيجاد قياس الزاوية بين متجهين غير صفريين $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$

حيث $\overrightarrow{A} = < x_A , y_A >$, $\overrightarrow{B} = < x_B , y_B >$

اكتب صيغتي الضرب الداخلي $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}$:

(1) $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = x_A x_B + y_A y_B$

(2) $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = \|\overrightarrow{A}\| \cdot \|\overrightarrow{B}\| \cos(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B})$

$\therefore \|\overrightarrow{A}\| \cdot \|\overrightarrow{B}\| \cdot \cos(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = x_A x_B + y_A y_B$

$\therefore \cos(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = \dfrac{x_A x_B + y_A y_B}{\|\overrightarrow{A}\| \cdot \|\overrightarrow{B}\|}$

قانون

إذا كان $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$، متجهين وكان $\overrightarrow{A} \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{B} \neq \overrightarrow{0}$ فإن:

$$\cos(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = \frac{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}{\|\overrightarrow{A}\| \cdot \|\overrightarrow{B}\|} \quad , 0^\circ \leq m(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) \leq 180^\circ$$

مثال (7)

إذا كان $\|\overrightarrow{A}\| = 5, \|\overrightarrow{B}\| = 6, \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = 15$

فأوجد قياس الزاوية $(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B})$

الحل:

قانون $\cos(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = \dfrac{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}{\|\overrightarrow{A}\| \cdot \|\overrightarrow{B}\|} \quad , \quad 0^\circ \leq m(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) \leq 180^\circ$

عوّض $= \dfrac{15}{5 \times 6} = \dfrac{1}{2}$

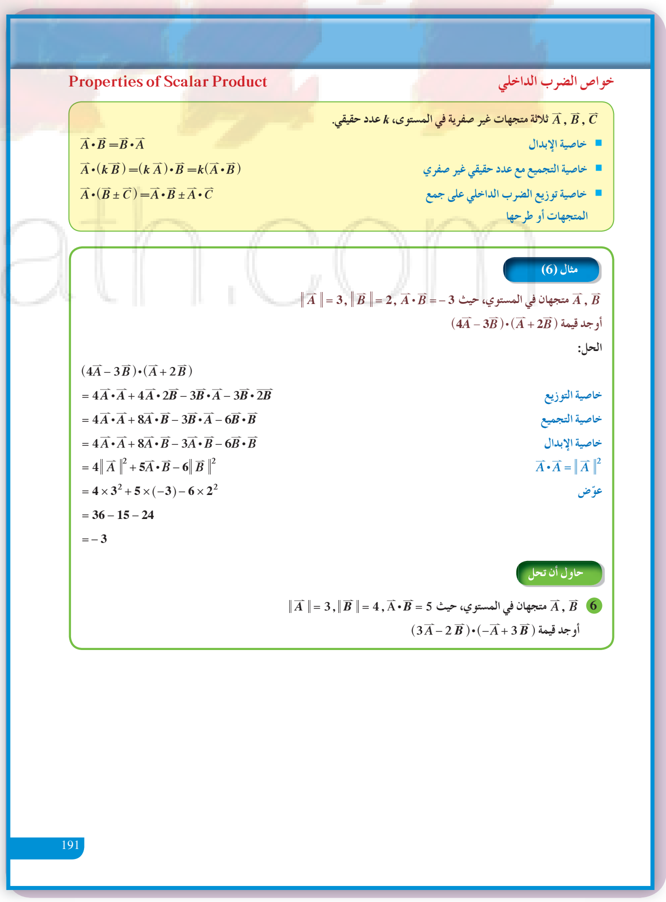
$\therefore m(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 60^\circ$

حاول أن تحل

7 إذا كان $\|\overrightarrow{A}\| = 3, \|\overrightarrow{B}\| = 2, \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = -3\sqrt{3}$

فأوجد قياس الزاوية $(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B})$

192



خواص الضرب الداخلي — **Properties of Scalar Product**

$\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$ ثلاثة متجهات غير صفرية في المستوى، k عدد حقيقي.

- خاصية الإبدال $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{A}$
- خاصية التجميع مع عدد حقيقي غير صفري $\overrightarrow{A} \cdot (k\overrightarrow{B}) = (k\overrightarrow{A}) \cdot \overrightarrow{B} = k(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B})$
- خاصية توزيع الضرب الداخلي على جمع المتجهات أو طرحها $\overrightarrow{A} \cdot (\overrightarrow{B} \pm \overrightarrow{C}) = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} \pm \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C}$

مثال (6)

$\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ متجهان في المستوي، حيث $\|\overrightarrow{A}\| = 3, \|\overrightarrow{B}\| = 2, \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = -3$

أوجد قيمة $(4\overrightarrow{A} - 3\overrightarrow{B}) \cdot (\overrightarrow{A} + 2\overrightarrow{B})$

الحل:

$(4\overrightarrow{A} - 3\overrightarrow{B}) \cdot (\overrightarrow{A} + 2\overrightarrow{B})$

خاصية التوزيع $= 4\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{A} + 4\overrightarrow{A} \cdot 2\overrightarrow{B} - 3\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{A} - 3\overrightarrow{B} \cdot 2\overrightarrow{B}$

خاصية التجميع $= 4\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{A} + 8\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} - 3\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{A} - 6\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{B}$

خاصية الإبدال $= 4\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{A} + 8\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} - 3\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} - 6\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{B}$

$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{A} = \|\overrightarrow{A}\|^2$ $= 4\|\overrightarrow{A}\|^2 + 5\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} - 6\|\overrightarrow{B}\|^2$

عوّض $= 4 \times 3^2 + 5 \times (-3) - 6 \times 2^2$

$= 36 - 15 - 24$

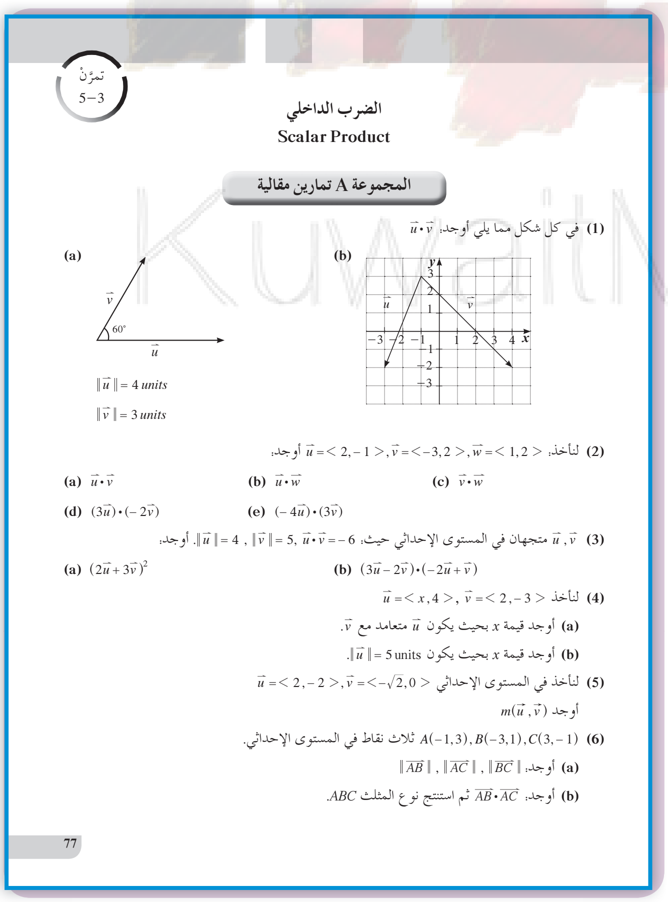
$= -3$

حاول أن تحل

6 $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ متجهان في المستوي، حيث $\|\overrightarrow{A}\| = 3, \|\overrightarrow{B}\| = 4, \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = 5$

أوجد قيمة $(3\overrightarrow{A} - 2\overrightarrow{B}) \cdot (-\overrightarrow{A} + 3\overrightarrow{B})$

191



تمرّنْ 5−3

الضرب الداخلي

Scalar Product

المجموعة A تمارين مقالية

(1) في كل شكل مما يلي أوجد: $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$

(a)

$\|\overrightarrow{u}\| = 4$ *units*

$\|\overrightarrow{v}\| = 3$ *units*

(b)

(2) لنأخذ: $\overrightarrow{u} = < 2, -1 >, \overrightarrow{v} = < -3, 2 >, \overrightarrow{w} = < 1, 2 >$ أوجد:

(a) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ (b) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$ (c) $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$

(d) $(3\overrightarrow{u}) \cdot (-2\overrightarrow{v})$ (e) $(-4\overrightarrow{u}) \cdot (3\overrightarrow{v})$

(3) $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ متجهان في المستوى الإحداثي حيث: $\|\overrightarrow{u}\| = 4$, $\|\overrightarrow{v}\| = 5$, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -6$. أوجد:

(a) $(2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v})^2$ (b) $(3\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}) \cdot (-2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$

(4) لنأخذ $\overrightarrow{u} = < x, 4 >, \overrightarrow{v} = < 2, -3 >$

(a) أوجد قيمة x بحيث يكون $\overrightarrow{u}$ متعامد مع $\overrightarrow{v}$.

(b) أوجد قيمة x بحيث يكون $\|\overrightarrow{u}\| = 5$ units.

(5) لنأخذ في المستوى الإحداثي $\overrightarrow{u} = < 2, -2 >, \overrightarrow{v} = < -\sqrt{2}, 0 >$

أوجد $m(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

(6) $A(-1,3), B(-3,1), C(3,-1)$ ثلاث نقاط في المستوى الإحداثي.

(a) أوجد: $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{AC}\|$, $\|\overrightarrow{BC}\|$

(b) أوجد: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ثم استنتج نوع المثلث ABC.

77

في المثال (5)

يوفر هذا المثال للطلاب طرائق يستخدمونها لإثبات توازي متجهين أو لإيجاد متغير في أحد المتجهين إذا كان هذان المتجهان متوازيين.

في المثال (6)

يساعد هذا المثال الطلاب على التعامل مع الضرب الداخلي للمتجهات، وذلك باستخدام الطرح والجمع لمتجهات مع مُعامل كأعداد حقيقية.

في المثالين (8), (7)

من أهم ميزات الضرب الداخلي أنه يوفر للطلاب فرصة مهمة لإيجاد قياس زاوية بين متجهين، ويكون مقدمة لإيجاد قياس زاوية بين مستقيمين في ما بعد.

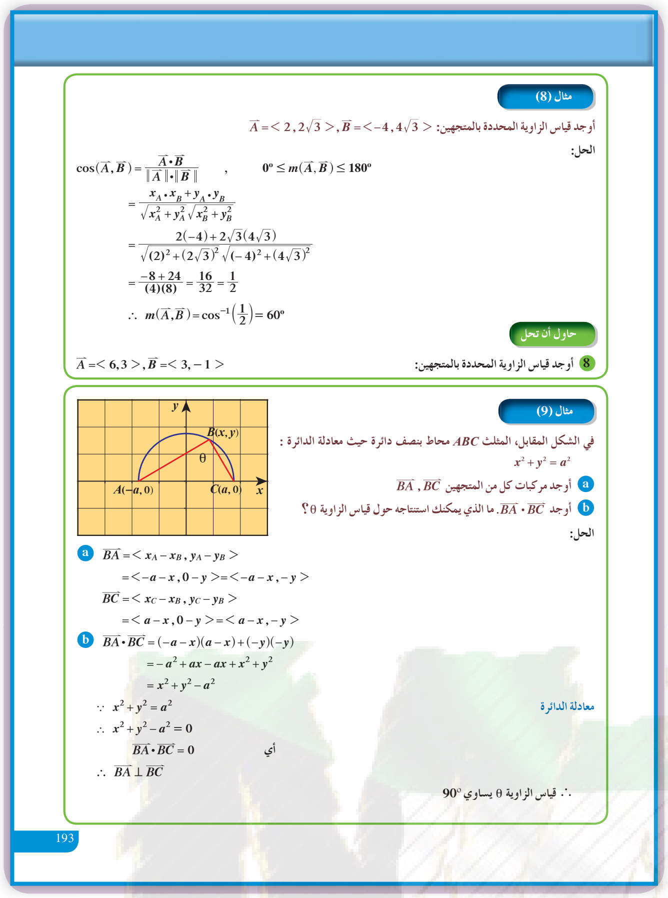
ساعدهم على استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد قياس زاوية إذا كان جيب التمام لهذه الزاوية عددًا معلومًا.

6 الربط

انظر المثال (9).

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في كتابة: $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} = x_A \times x_B + y_A \times y_B$ ويستبدلون إشارة الجمع بإشارة الطرح لتصبح $x_A \times x_B - y_A \times y_B$، شدد على الفرق بين الصيغة التي تعطي مركبات المتجه وتستخدم فيها إشارة الطرح وصيغة الضرب الداخلي وتستخدم فيها إشارة الجمع.



مثال (8)

أوجد قياس الزاوية المحددة بالمتجهين: $\overrightarrow{A} = <2, 2\sqrt{3}>, \overrightarrow{B} = <-4, 4\sqrt{3}>$

الحل:

$$\cos(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}) = \frac{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}}{\|\overrightarrow{A}\|\cdot\|\overrightarrow{B}\|} \quad , \quad 0^\circ \le m(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}) \le 180^\circ$$

$$= \frac{x_A \cdot x_B + y_A \cdot y_B}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}\sqrt{x_B^2 + y_B^2}}$$

$$= \frac{2(-4) + 2\sqrt{3}(4\sqrt{3})}{\sqrt{(2)^2 + (2\sqrt{3})^2}\sqrt{(-4)^2 + (4\sqrt{3})^2}}$$

$$= \frac{-8+24}{(4)(8)} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ m(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$

حاول أن تحل

8 أوجد قياس الزاوية المحددة بالمتجهين: $\overrightarrow{A} = <6, 3>, \overrightarrow{B} = <3, -1>$

مثال (9)

في الشكل المقابل، المثلث ABC محاط بنصف دائرة حيث معادلة الدائرة : $x^2 + y^2 = a^2$

a أوجد مركبات كل من المتجهين $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$

b أوجد $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$. ما الذي يمكنك استنتاجه حول قياس الزاوية θ؟

الحل:

a $\overrightarrow{BA} = <x_A - x_B, y_A - y_B>$

$= <-a - x, 0 - y> = <-a - x, -y>$

$\overrightarrow{BC} = <x_C - x_B, y_C - y_B>$

$= <a - x, 0 - y> = <a - x, -y>$

b $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = (-a - x)(a - x) + (-y)(-y)$

$= -a^2 + ax - ax + x^2 + y^2$

$= x^2 + y^2 - a^2$

$\because\ x^2 + y^2 = a^2$ معادلة الدائرة

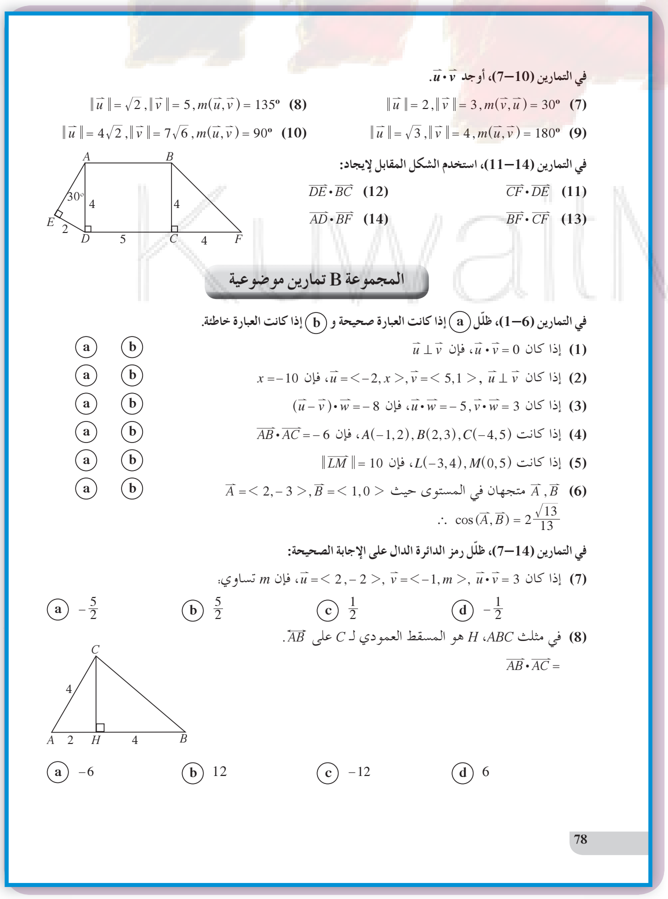
$\therefore\ x^2 + y^2 - a^2 = 0$

أي $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$

$\therefore\ \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$

∴ قياس الزاوية θ يساوي 90°

193



في التمارين (7–10)، أوجد $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

(7) $\|\vec{u}\| = 2, \|\vec{v}\| = 3, m(\vec{v},\vec{u}) = 30^\circ$

(8) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}, \|\vec{v}\| = 5, m(\vec{u},\vec{v}) = 135^\circ$

(9) $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}, \|\vec{v}\| = 4, m(\vec{u},\vec{v}) = 180^\circ$

(10) $\|\vec{u}\| = 4\sqrt{2}, \|\vec{v}\| = 7\sqrt{6}, m(\vec{u},\vec{v}) = 90^\circ$

في التمارين (11–14)، استخدم الشكل المقابل لإيجاد:

(11) $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{DE}$

(12) $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BC}$

(13) $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}$

(14) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BF}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$، فإن $\vec{u} \perp \vec{v}$ (a) (b)

(2) إذا كان $\vec{u} \perp \vec{v}$, $\vec{u} = <-2, x>, \vec{v} = <5, 1>$، فإن $x = -10$ (a) (b)

(3) إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{w} = -5, \vec{v}\cdot\vec{w} = 3$، فإن $(\vec{u} - \vec{v})\cdot\vec{w} = -8$ (a) (b)

(4) إذا كانت $A(-1,2), B(2,3), C(-4,5)$، فإن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -6$ (a) (b)

(5) إذا كانت $L(-3,4), M(0,5)$، فإن $\|\overrightarrow{LM}\| = 10$ (a) (b)

(6) $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$ متجهان في المستوى حيث $\overrightarrow{A} = <2, -3>, \overrightarrow{B} = <1, 0>$ (a) (b)

$\therefore\ \cos(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}) = 2\frac{\sqrt{13}}{13}$

في التمارين (7–14)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

(7) إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3$, $\vec{u} = <2, -2>, \vec{v} = <-1, m>$، فإن m تساوي:

(a) $-\frac{5}{2}$ (b) $\frac{5}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

(8) في مثلث ABC، H هو المسقط العمودي لـ C على $\overleftrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} =$

(a) −6 (b) 12 (c) −12 (d) 6

78

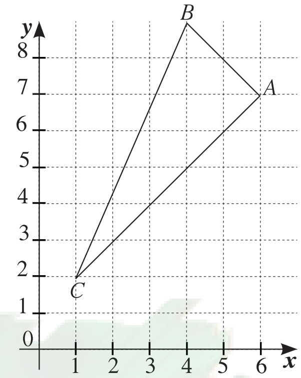
8 التقييم

راقب الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل»، ثم تحقق من صحة عملهم.

اختبار سريع

1 أوجد $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ في كل من الحالات التالية:

(a)



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

(b) $A(1,-3), B(0,4), C(2,-5)$ $\quad -15$

(c) $\|\overrightarrow{AB}\| = 3, \|\overrightarrow{AC}\| = 2, \theta = \frac{\pi}{4}$ $\quad 3\sqrt{2}$

2 إذا كان $\|\overrightarrow{A}\| = 5, \|\overrightarrow{B}\| = 2, \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = -1$،
فأوجد قياس الزاوية بين $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$.

95.739°

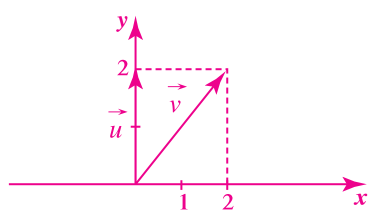
9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

تحقق من إجابات الطلاب.

«حاول أن تحل»

1



$\|\vec{u}\| = \sqrt{(0)^2 + (2)^2} = 2$ units

$\|\vec{v}\| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{2}$ units

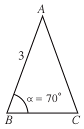
$m(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -45^{\circ}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 2\sqrt{2} \times \cos(-45^{\circ})$

$= 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

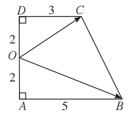
$= 4$

(9) في الشكل المقابل $AB = AC = 3\,cm$, $m(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = 70^{\circ}$
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ يساوي تقريبًا:



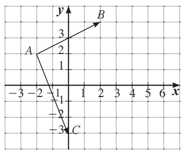
ⓐ 2.3 ⓑ 6.89 ⓒ 3 ⓓ −2.3

(10) $ABCD$ شبه منحرف قائم (انظر الشكل المقابل) حيث:
$AB = 5\,cm, AO = 2\,cm, OD = 2\,cm, CD = 3\,cm$
$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$ يساوي:



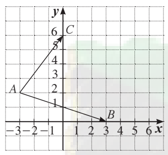
ⓐ 11 ⓑ −11 ⓒ 12 ⓓ −12

(11) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$



ⓐ 2 ⓑ −2 ⓒ 18 ⓓ 0

(12) في الشكل المقابل، $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) =$



ⓐ 0 ⓑ $\frac{3}{5}$ ⓒ $\frac{1}{2}$ ⓓ $\frac{1}{\sqrt{10}}$

79

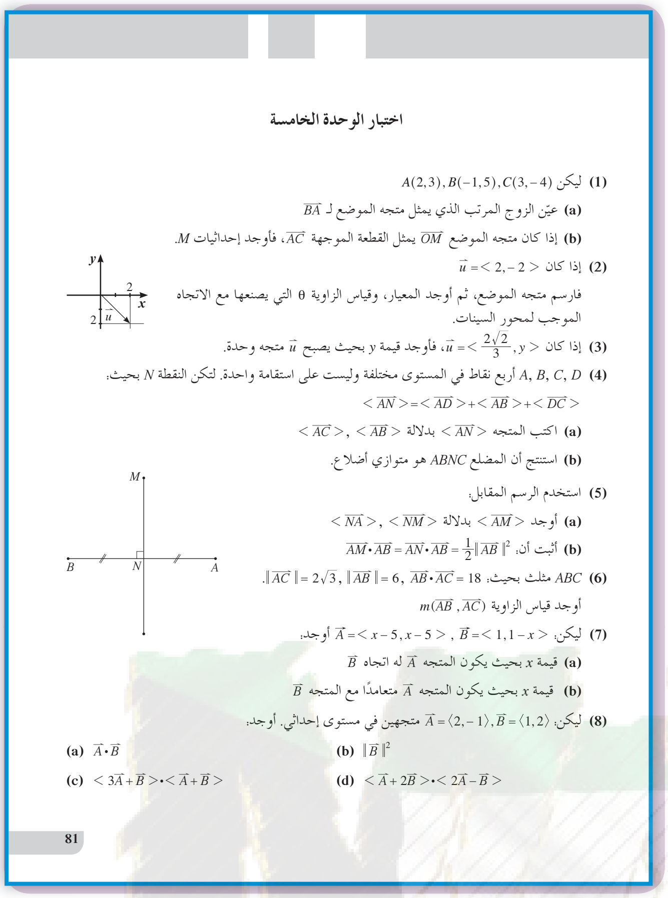
(13) إذا كان $\vec{u} \perp \vec{v}$، $\vec{u} = \langle -5, m \rangle, \vec{v} = \langle 2, 3 \rangle$ فإن m تساوي:

ⓐ $\frac{10}{3}$ ⓑ $-\frac{3}{10}$ ⓒ $\frac{-10}{3}$ ⓓ $\frac{15}{2}$

(14) إذا كان $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -2$ فإن $m(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ **لا يمكن** أن يساوي:

ⓐ 60° ⓑ 28° ⓒ 122° ⓓ 50°

80



اختبار الوحدة الخامسة

(1) ليكن $A(2,3), B(-1,5), C(3,-4)$

(a) عيّن الزوج المرتب الذي يمثل متجه الموضع لـ $\overrightarrow{BA}$

(b) إذا كان متجه الموضع $\overrightarrow{OM}$ يمثل القطعة الموجهة $\overrightarrow{AC}$، فأوجد إحداثيات M.

(2) إذا كان $\vec{u} = <2, -2>$

فارسم متجه الموضع، ثم أوجد المعيار، وقياس الزاوية θ التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

(3) إذا كان $\vec{u} = <\frac{2\sqrt{2}}{3}, y>$، فأوجد قيمة y بحيث يصبح $\vec{u}$ متجه وحدة.

(4) A, B, C, D أربع نقاط في المستوى مختلفة وليست على استقامة واحدة. لتكن النقطة N بحيث:

$<\overrightarrow{AN}> = <\overrightarrow{AD}> + <\overrightarrow{AB}> + <\overrightarrow{DC}>$

(a) اكتب المتجه $<\overrightarrow{AN}>$ بدلالة $<\overrightarrow{AC}>, <\overrightarrow{AB}>$

(b) استنتج أن المضلع $ABNC$ هو متوازي أضلاع.

(5) استخدم الرسم المقابل:

(a) أوجد $<\overrightarrow{AM}>$ بدلالة $<\overrightarrow{NA}>, <\overrightarrow{NM}>$

(b) أثبت أن: $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|^2$

(6) ABC مثلث بحيث: $\|\overrightarrow{AC}\| = 2\sqrt{3}, \|\overrightarrow{AB}\| = 6, \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 18$.

أوجد قياس الزاوية $m(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

(7) ليكن: $\vec{A} = <x-5, x-5>, \vec{B} = <1, 1-x>$ أوجد:

(a) قيمة x بحيث يكون المتجه $\vec{A}$ له اتجاه $\vec{B}$

(b) قيمة x بحيث يكون المتجه $\vec{A}$ متعامدًا مع المتجه $\vec{B}$

(8) ليكن: $\vec{A} = \langle 2,-1\rangle, \vec{B} = \langle 1,2\rangle$ متجهين في مستوى إحداثي. أوجد:

(a) $\vec{A}\cdot\vec{B}$

(b) $\|\vec{B}\|^2$

(c) $<3\vec{A}+\vec{B}>\cdot<\vec{A}+\vec{B}>$

(d) $<\vec{A}+2\vec{B}>\cdot<2\vec{A}-\vec{B}>$

81

---

2 **(a)** $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD} = -1$

(b) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = (1)(1)\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

(c) $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{EF} = 1$

(d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE} = -1$

(e) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OF} = (1)(1)\cos(-120^\circ) = -\frac{1}{2}$

3 **(a)** $\overrightarrow{BA} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$

$\overrightarrow{BC} = -\vec{i} - \vec{j}$

(b) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$

(c) $\because\ \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$

$\therefore$ المثلث ABC قائم الزاوية B

4 $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow$

$3x + 2 = 0 \Rightarrow$

$x = -\frac{2}{3}$

5 **(a)** $\because\ \frac{x_A}{x_B} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\frac{y_A}{y_B} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

$\therefore\ \vec{A} \,//\, \vec{B}$

(b) نأخذ القاعدة: $x_A \cdot y_B - x_B \cdot y_A = 0$

$\therefore\ \frac{7}{3}\times\frac{4}{5} - \frac{2}{3}\times x = 0\ ;\ x = \frac{14}{5}$

6 $-3\|\vec{A}\|^2 + 11\vec{A}\cdot\vec{B} - 6\|\vec{B}\|^2$

$= -3(9) + 11(5) - 6(16)$

$= -68$

7 $\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{-\sqrt{3}}{2}, m(\vec{A}, \vec{B}) = 150^\circ$

8 $\vec{A}\cdot\vec{B} = 18 - 3 = 15$

$\|\vec{A}\| = \sqrt{36+9} = 3\sqrt{5}$

$\|\vec{B}\| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{15}{3\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$m(\vec{A}, \vec{B}) = 45^\circ$

المرشد لحل المسائل

إجابة «مسألة إضافية»

طريقة أولى:

في المثلث BDC

$\overline{BF}$ قطعة متوسطة

$\overline{DE}$ قطعة متوسطة

$\overline{DE} \cap \overline{BF} = \{M\}$

$$DE = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$BF = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$MD = \frac{2}{3}DE = \frac{a\sqrt{5}}{3}$$

$$MF = \frac{1}{3}BF = \frac{a\sqrt{5}}{6}$$

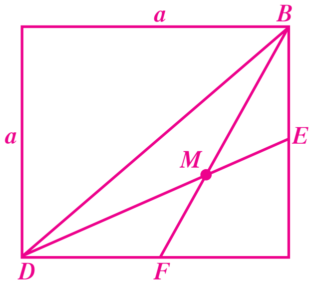
$$DF = \frac{a}{2}$$

في المثلث DMF نستخدم قانون جيب التمام:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{5}}{6}\right)^2 - 2 \times \frac{a\sqrt{5}}{3} \times \frac{a\sqrt{5}}{6} \times \cos(D\widehat{M}F)$$

$$\cos(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MF}) = \frac{4}{5}$$

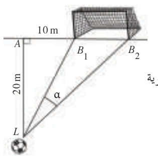
$$m(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MF}) \approx 36^\circ\, 52'\, 11''$$



المرشد لحل المسائل

مستخدمًا معطيات المخطط المقابل،

أوجد قياس زاوية ركل الكرة α. (طول المرمى: $B_1 B_2 = 7.32\text{ m}$).



كيف فكّر عبد العزيز

سأستخدم الضرب الداخلي. بما أنه لا توجد خاصية واحدة تسمح بمعرفة قياس الزاوية لذلك سأستخدم خاصيتين معًا.

أولًا: التحضير

بعد متطابقة فيثاغورث

$$(LB_1)^2 = 20^2 + 10^2 = 500$$
$$LB_1 \approx 22.36\text{ m}$$
$$(LB_2)^2 = 20^2 + (10 + 7.32)^2 \simeq 700$$
$$LB_2 \approx 26.46\text{ m}$$

ثانيًا: الضرب الداخلي – طريقة أولى

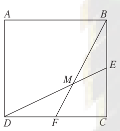
$$\begin{aligned}\overrightarrow{LB_1} \cdot \overrightarrow{LB_2} &= (\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AB_1}) \cdot (\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AB_2})\\ &= (LA)^2 + \vec{O} + \overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{AB_2}\\ &= (LA)^2 + AB_1 \times AB_2\\ &= 400 + 10 \times 17.32\\ &= 573.2\end{aligned}$$

ثالثًا: الضرب الداخلي – طريقة ثانية

$$\overrightarrow{LB_1} \cdot \overrightarrow{LB_2} = LB_1 \cdot LB_2 \cdot \cos(\alpha)$$
$$573.2 = 22.36 \times 26.46 \cdot \cos(\alpha)$$
$$\therefore \cos\alpha = \frac{573.2}{22.36 \times 26.46} = 0.9688$$
$$\alpha \approx 14^\circ\, 21'$$

يبلغ قياس زاوية ركل الكرة حوالى $14^\circ\, 21'$

مسألة إضافية



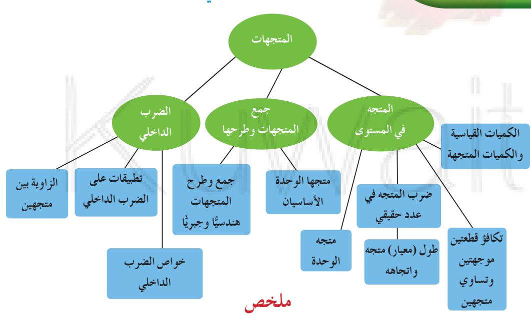
في المربع $ABCD$، F منتصف $\overline{CD}$، E منتصف $\overline{BC}$

تتقاطع $\overline{DE}$، $\overline{BF}$ في M

أوجد $m(\widehat{DMF})$

194

مخطط تنظيمي للوحدة الخامسة



ملخص

- للقطعة الموجهة اتجاه وقياس.
- القطعة الموجهة $\overrightarrow{OM}$ التي بدايتها نقطة الأصل ونهايتها $M(x, y)$ تسمى متجه الموضع ويمثلها الزوج المرتب (x, y)
- إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ قطعة موجهة و $\overrightarrow{OM}$ متجه الموضع لهذه القطعة فإن $M(x_B - x_A, y_B - y_A)$
- المتجه هو مجموعة كل القطع الموجهة المتكافئة والتي أحدها متجه الموضع.
- يكون متجهان متساويين إذا كانت القطعتان الموجهتان المناظرتان لهما متكافئتين.
- المتجهان $\langle c,d \rangle$, $\langle a,b \rangle$ متساويان إذا وفقط إذا $b = d$، $a = c$
- $\vec{A}$, $\vec{B}$ متجهان متوازيان إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي $k \neq 0$ يحقق $\vec{A} = k\vec{B}$
- تكون النقاط A, B, C على استقامة واحدة إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي $k \neq 0$ يحقق $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$
- جمع متجهين:

  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$، حيث $ABCD$ هو متوازي الأضلاع.

  $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ $\quad (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ $\quad \vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}, \vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$
- $\vec{B} = \langle x_B, y_B \rangle$, $\vec{A} = \langle x_A, y_A \rangle$، k عدد حقيقي.

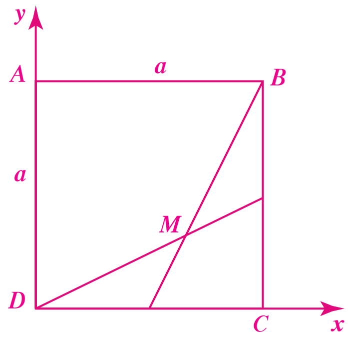
  $k\vec{A} = \langle kx_A, ky_B \rangle$، $\quad \vec{A} + \vec{B} = \langle x_A + x_B, y_A + y_B \rangle$

  $\vec{A} = \vec{B}$ إذا وفقط إذا $y_A = y_B$, $x_A = x_B$
- $\vec{A}$, $\vec{B}$ متوازيان إذا وفقط إذا $x_A \cdot y_B - x_A \cdot y_B = 0$
- $\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cos(\vec{A}, \vec{B}) = x_A x_B + y_A y_B$
- إذا $\vec{A}(x, y)$، فإن $\|\vec{A}\|^2 = x^2 + y^2$، $\|\vec{A}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\|}$
- إذا كان $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$، فإن $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

195

طريقة ثانية:

نأخذ نظامًا إحداثيًّا عموديًّا منتظمًا مركزه D



$D(0,0)$ $\quad$ $C(a,0)$

$A(0,a)$ $\quad$ $B(a,a)$

$E\left(a,\frac{a}{2}\right)$ $\quad$ $F\left(\frac{a}{2},0\right)$

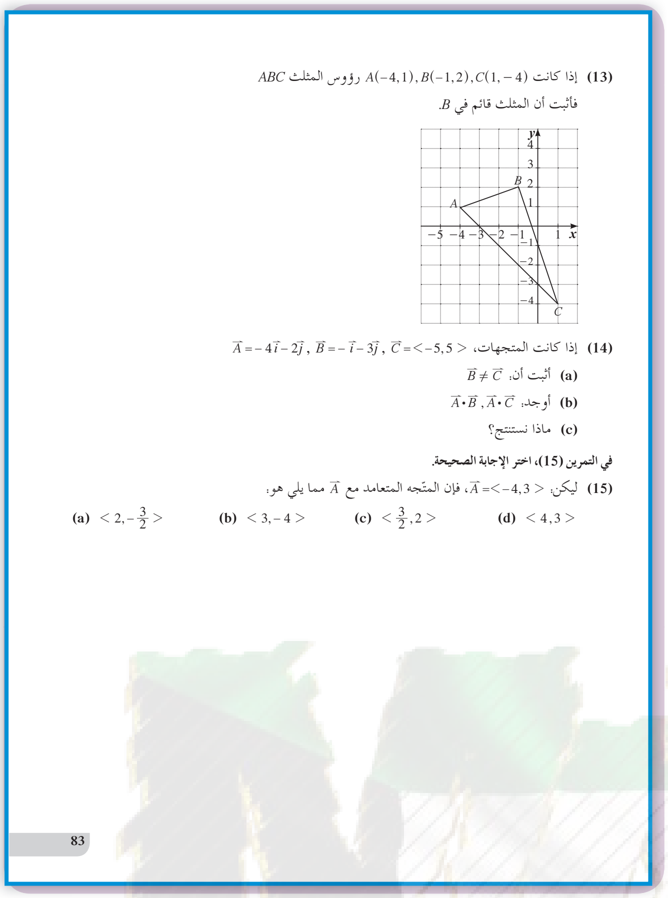
$M\left(\frac{2a}{3},\frac{a}{3}\right)$

$\overrightarrow{MD}=\left(\frac{-2a}{3},\frac{-a}{3}\right)$

$\overrightarrow{MF}=\left(-\frac{a}{6},-\frac{a}{3}\right)$

$$\cos(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MF})=\frac{x_1\times x_2+y_1\times y_2}{\|\overrightarrow{MD}\|\times\|\overrightarrow{MF}\|}=\frac{\frac{2a^2}{9}}{\frac{a\sqrt{5}}{3}\times\frac{a\sqrt{5}}{6}}$$

$$\cos(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MF})=0.8\,,\,m(D\widehat{M}F)=36°52'11''$$



(13) إذا كانت $A(-4,1),B(-1,2),C(1,-4)$ رؤوس المثلث ABC

فأثبت أن المثلث قائم في B.

(14) إذا كانت المتجهات، $\overrightarrow{A}=-4\vec{i}-2\vec{j}\,,\,\overrightarrow{B}=-\vec{i}-3\vec{j}\,,\,\overrightarrow{C}=<-5,5>$

(a) أثبت أن: $\overrightarrow{B}\neq\overrightarrow{C}$

(b) أوجد: $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}\,,\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C}$

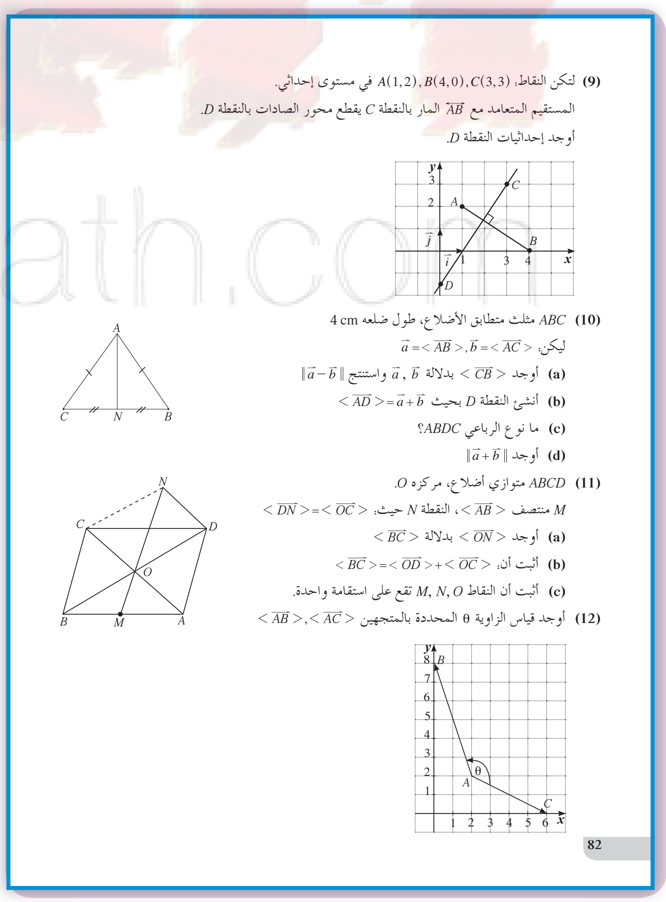
(c) ماذا نستنتج؟

في التمرين (15)، اختر الإجابة الصحيحة.

(15) ليكن: $\overrightarrow{A}=<-4,3>$، فإن المتّجه المتعامد مع $\overrightarrow{A}$ مما يلي هو:

(a) $<2,-\frac{3}{2}>$ $\quad$ **(b)** $<3,-4>$ $\quad$ **(c)** $<\frac{3}{2},2>$ $\quad$ **(d)** $<4,3>$

83



(9) لتكن النقاط: $A(1,2),B(4,0),C(3,3)$ في مستوى إحداثي.

المستقيم المتعامد مع $\overleftrightarrow{AB}$ المار بالنقطة C يقطع محور الصادات بالنقطة D.

أوجد إحداثيات النقطة D.

(10) ABC مثلث متطابق الأضلاع، طول ضلعه 4 cm

ليكن: $\vec{a}=<\overrightarrow{AB}>,\vec{b}=<\overrightarrow{AC}>$

(a) أوجد $<\overrightarrow{CB}>$ بدلالة $\vec{a}\,,\,\vec{b}$ واستنتج $\|\vec{a}-\vec{b}\|$

(b) أنشئ النقطة D بحيث $<\overrightarrow{AD}>=\vec{a}+\vec{b}$

(c) ما نوع الرباعي $ABDC$؟

(d) أوجد $\|\vec{a}+\vec{b}\|$

(11) $ABCD$ متوازي أضلاع، مركزه O.

M منتصف $<\overrightarrow{AB}>$، النقطة N حيث: $<\overrightarrow{DN}>=<\overrightarrow{OC}>$

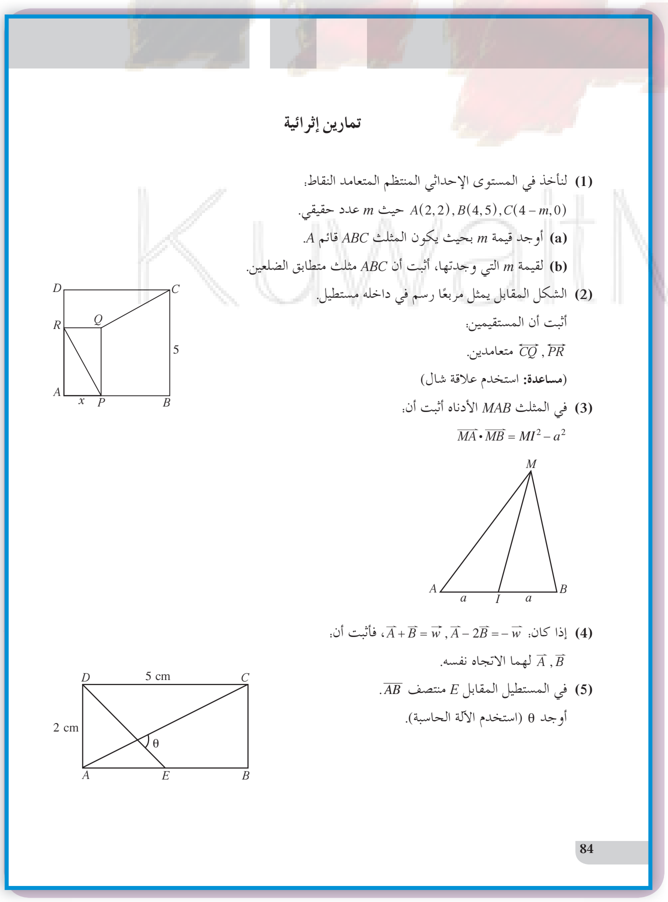
(a) أوجد $<\overrightarrow{BC}>$ بدلالة $<\overrightarrow{ON}>$

(b) أثبت أن: $<\overrightarrow{BC}>=<\overrightarrow{OD}>+<\overrightarrow{OC}>$

(c) أثبت أن النقاط M, N, O تقع على استقامة واحدة.

(12) أوجد قياس الزاوية θ المحددة بالمتجهين $<\overrightarrow{AB}>,<\overrightarrow{AC}>$

82



تمارين إثرائية

(1) لنأخذ في المستوى الإحداثي المنتظم المتعامد النقاط:

$A(2,2),B(4,5),C(4-m,0)$ حيث m عدد حقيقي.

(a) أوجد قيمة m بحيث يكون المثلث ABC قائم A.

(b) لقيمة m التي وجدتها، أثبت أن ABC مثلث متطابق الضلعين.

(2) الشكل المقابل يمثل مربعًا رسم في داخله مستطيل.

أثبت أن المستقيمين:

$\overleftrightarrow{CQ}\,,\overleftrightarrow{PR}$ متعامدين.

(**مساعدة:** استخدم علاقة شال)

(3) في المثلث MAB الأدناه أثبت أن:

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-a^2$

(4) إذا كان: $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}=\vec{w}\,,\overrightarrow{A}-2\overrightarrow{B}=-\vec{w}$، فأثبت أن:

$\overrightarrow{A}\,,\overrightarrow{B}$ لهما الاتجاه نفسه.

(5) في المستطيل المقابل E منتصف $\overline{AB}$.

أوجد θ (استخدم الآلة الحاسبة).

84