الوحدة الحادية عشرة: الجبر المتقطع Discrete Algebra

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

1 – 11: مبدأ العد والتباديل والتوافيق

جزء 1: مبدأ العد.

جزء 2: التباديل

جزء 3: التوافيق.

2 – 11: نظرية ذات الحدين

جزء 1: مفكوك ذات الحدين.

جزء 2: مثلث باسكال.

جزء 3: نظرية ذات الحدين.

جزء 4: خواص نظرية ذات الحدين.

3 – 11: الاحتمال

جزء 1: التجربة العشوائية وفضاء العينة.

جزء 2: أنواع الأحداث.

جزء 3: خواص الاحتمال.

جزء 4: احتمال ذات الحدين.

مقدمة الوحدة

يعتبر الجبر المتقطع فرعًا مهمًّا جدًّا في مجال الرياضيات المتقطعة. يتضمن الجبر المتقطع:

- الجبر البولياني (Boolean Algebra) المستخدم في توزيع الدارة الكهربائية والبرمجة.
- الجبر المرتبط المستخدم في قواعد البيانات.
- الجبر المنتهي والذي يتناول دراسة الزمر (Groups)، الحلقات (Rings) والحقول (Fields).
- نظرية المجموعات (Sets Theory) التي تهتم بتجميع العناصر المنتهية مثل {أحمر، أخضر، أصفر} أو غير المنتهية مثل الأعداد الكلية.
- التباديل والتوافيق تستخدم في عملية العد وهي طرائق ترتكز على اختيار عدد من العناصر وإذا أُخذ بالاعتبار ترتيب موقع كل عنصر في هذا الاختيارتسمى بعملية (التباديل) ومن جهة ثانية إذا لم يأخذ بالاعتبار ترتيب موقع العنصر في هذا الاختيار تسمى العملية (التوافيق).
- الاحتمال وهو يستخدم لدراسة أحداث معينة تظهر في فضاء عينة محددة، مثل احتمال الحصول على عدد أصغر من 3 عند إلقاء حجر النرد.

ولكن من أين بدأت فكرة الجبر المتقطع؟

في سنة 1852 م طرح فرنسيس غوثري المسألة التالية وقد عرفت في ما بعد بـ «مسألة الألوان الأربعة»: هل من الممكن تلوين أي خريطة جغرافية للدول باستخدام أربعة ألوان فقط بشرط أساسي وهو ألا نلوّن دولتين متجاورتين بالألوان نفسها؟

الوحدة الحادية عشرة

الجبر المتقطع

Discrete Algebra

مشروع الوحدة: لوحة غالتون (Galton).

1 مقدمة المشروع: هي آلة اخترعها السير فرنسيس غالتون Galton (1911–1822).
وتتألف من لوحة مستطيلة الشكل غرزت فيها مسامير على مسافات متساوية ومرتبة كما في الشكل.
بحيث إذا أفلتت كرة ما على هذه اللوحة، فهي لا بد من أن تمر إما عن يمين مسمار أو عن يساره، ولكلتا الحالتين الاحتمال نفسه، حيث إنها تنهي مسارها بوصولها إلى إحدى الخانات الموجودة في أسفل هذه اللوحة.

2 الهدف: إيجاد ومقارنة احتمال وصول الكرة إلى كل خانة من الخانات.

3 اللوازم: ورق مقوى، لوحة خشبية، مسامير، أقلام تلوين، كرات متماثلة، مادة لاصقة، حاسوب، جهاز إسقاط (Data Show).

4 أسئلة حول التطبيق:

a ارسم مخطط الشجرة البيانية ممثلًا كل الطرق التي يمكن أن تسلكها الكرة عند إفلاتها من أعلى اللوحة (أي من أعلى النقطة A).

b نفذ لوحة غالتون أي اللوحة المبينة أعلاه.

c أفلت كرة من أعلى النقطة A، ثم دوّن رقم الخانة التي تقع فيها. كرر العملية نفسها 49 مرّة.

d ارسم تمثيلًا بيانيًّا بالأعمدة يبيّن النسب المئوية لوقوع الكرة في كل خانة من الخانات المرقمة من صفر إلى أربعة.

e مستخدمًا مخطط الشجرة البيانية، أوجد احتمال سقوط الكرة في كل خانة من الخانات الخمس.

f قارن بين الاحتمال الذي وجدته والنسب المئوية التي حصلت عليها في d .

إذا كنت متمكنًا من البرمجة، ضع برنامجًا على الحاسوب يحاكي لوحة غالتون التي صنعتها، ثم ارسم تمثيلًا بيانيًّا بالأعمدة يبيّن النسب المئوية إذا أفلتت الكرة 500 مرّة، وقارن النسب التي حصلت عليها بما حصلت عليه في e .

5 التقرير: ضعْ تقريرًا مفصلًا حول تنفيذ المشروع مستفيدًا من دروس الوحدة.
اعرض اللوحة التي نفذتها، وضع ملصقًا يبيّن التمثيل البياني الذي رسمته.

نموذج لآلة غالتون

دروس الوحدة

مبدأ العد والتباديل والتوافيق	نظرية ذات الحدين	الاحتمال
11–1	11–2	11–3

150

لقد اهتم الرياضيون كثيرًا بهذه المسألة واستمروا في محاولة حلها بعمل جماعي وجهد متواصل لمدة 124 سنة، حيث توصلوا إلى برهان أثار كثيرًا من النقاشات لأنه ألحق أضرارًا بمفهوم البرهان الرياضي كونهم استخدموا الحاسوب ليجدوا الحل في سنة 1976 م. وهنا لا بد من الإشارة إلى أن عالمي الرياضيات آبل وهاكن توصلا إلى الحل باستخدام عمليات حسابية معقدة، حيث إن الخطوة الأخيرة في البرهان تطلبت ثلاثة من الحواسيب السريعة ولمدة 1 200 ساعة.

مشروع الوحدة

يتناول مشروع الوحدة آلة بسيطة يمكن استخدامها لإيجاد احتمال لحدث معين. والمطلوب في هذا المشروع استخدام طرائق متعددة لإيجاد الاحتمال منها طريقة العد وطريقة مخطط الشجرة البيانية.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

تتنوّع بحسب مسار الكرة على اللوحة.

(تحقق من إجابات الطلاب).

التقرير

يجب أن يتضمن التقرير شرحًا مفصلًا لكل الخطوات المتبعة والطرائق المستخدمة لإيجاد النواتج الممكنة ونواتج الحدث الملائم. كما يجب أن يتضمن التمثيل البياني بالأعمدة.

اعرض تقريرك أمام زملائك في الصف. ناقش معهم النواتج كافة التي حصلت عليها. استمع جيدًا إلى ملاحظاتهم.

أعد النظر في بعض الحسابات والنتائج إذا كان ذلك ضروريًّا.

الوحدة
الحادية عشرة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت رسم مخطط الشجرة البيانية واستخدامه في العد.
- تعرفت طرائق العد ومنها التباديل والتوافيق.
- حللت مسائل باستخدام طرائق العد.
- تعرفت الاحتمالات المشروطة.

ماذا سوف تتعلم؟

- حل مسائل باستخدام مبدأ العد والتباديل والتوافيق.
- استخدام مثلث باسكال.
- استخدام نظرية ذات الحدين.
- تتعرف التجربة العشوائية وفضاء العينة.
- تعيين احتمالات بعض الأحداث.
- تعيين احتمال ذات الحدّين.

المصطلحات الأساسية

مبدأ العد – التباديل – الحالة الخاصة – التوافيق – مفكوك ذات الحدين – مثلث باسكال – نظرية ذات الحدين – التجربة العشوائية – فضاء العينة – الحدث – الحدث البسيط – الحدث المركب – الحدث المستحيل – الحدث المؤكد – الحدثان المتنافيان – الحدث المتمم – الحدثان المستقلان – التقاطع – الاتحاد – المتمم – احتمال ذات الحدين.

أضف إلى معلوماتك

قام عالم الرياضيات السويسري جاكوب برنولي Jacob Bernouilli (1667–1784) بدراسة التجارب العشوائية المستقلة لأول مرة وذلك في كتابه «فن الحدس Ars Conjectandi»، الذي نشره حفيده نقولا Nicolas بعد 8 سنوات من وفاته.

يبيّن برنويي النتيجة التالية: إن تكرار ظهور ناتج في جملة تجارب يقترب كثيرًا من احتمال حدوث هذا الحدث.

على سبيل المثال، إذا رميت مكعبًا منتظمًا مرقمًا، فإن احتمال ظهور الرقم 2 هو $\frac{1}{6}$. إذا كررنا رميه المكعب عددًا n كبيرًا من المرات فإنه من شبه المؤكد أن ظهور الرقم 2 هو m من المرات يحقق العلاقة $\frac{1}{6} = \frac{m}{n}$.

وقد سُمِّي هذا التعبير الرياضي بقانون الأعداد الكبيرة.

أما حاليًّا فتستخدم المحاكاة على الحاسوب للتحقق مما جاء في كتاب برنولي.

151

سلّم التقييم

4	جميع الطرائق دقيقة وهادفة – الحسابات صحيحة – التمثيل البياني واضح ودقيق – التقرير مفصل وواضح ويعبر عن جهد كبير.
3	معظم الطرائق دقيقة – أخطاء طفيفة في الحسابات – التمثيل البياني واضح – التقرير مفصل ولكن ينقصه بعض الوضوح.
2	بعض الطرائق دقيق – أخطاء كثيرة في الحسابات – التمثيل البياني غير واضح – التقرير مبهم وبحاجة إلى تنظيم ووضوح.
1	معظم عناصر المشروع ناقصة وبحاجة إلى إعادة.

1–11: مبدأ العد والتباديل والتوافيق

1 الأهداف

- يستخدم مبدأ العد في حل مسائل.
- يستخدم التباديل والتوافيق لعد الطرائق الممكنة والطرائق الملائمة لحدث معين.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

مبدأ العد – التباديل – التوافيق – قانون التباديل – قانون التوافيق – المضروب.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

استخدم الآلة الحاسبة لتوجد ما يلي:

(a) $7!\ ,\ 9!\ ,\ \dfrac{12!}{8!}$

(b) أوجد الأزواج المرتبة بين عناصر $X \times Y$،

حيث $X = \{a, b, c\},\ Y = \{1, 2\}$

(c) نأخذ المجموعة: $H = \{a, b, c, d\}$،

اكتب كل المجموعات الجزئية من H المؤلفة من عنصرين.

(d) نأخذ المجموعة: $X = \{1, 2, 3\}$،

اكتب كل الأزواج المرتبة من X.

5 التدريس

يعتبر هذا الدرس مدخلًا مهمًّا للطلاب بحيث إنه يوفر لهم فرصة لاختبار قدراتهم في فهم عملية العد ضمن مجموعة من عناصر عددها محدود وذلك بشروط واضحة تعبّر عن حدث معيّن.

11–1

مبدأ العد والتباديل والتوافيق

Counting Principle, Permutations and Combinations

سوف تتعلم
- استخدام مبدأ العد في حل مسائل عملية.
- استخدام التباديل والتوافيق لعد الطرائق الممكنة في عملية ما.

المفردات والمصطلحات:
- مبدأ العد Counting Principle
- التباديل Permutations
- المضروب Factorial
- قانون التباديل Law of Permutations
- التوافيق Combinations

دعنا نفكر ونتناقش

يوجد في فصلكم 24 طالبًا وتريدون تشكيل وفد من n طالب ليمثل الفصل.

1 هل ترتيب طلاب الوفد مهم؟ متى يصبح الترتيب مهمًا؟

2 هل يمكن اختيار الطالب نفسه لأكثر من مرّة في الوفد نفسه؟

3 ما قيمة n التي تسمح بتشكيل أكبر عدد ممكن من الوفود؟ بيّن طريقة عملك.

4 ما قيمة n التي تسمح بتشكيل أكبر عدد ممكن من الوفود إذا كان عدد طلاب الفصل 25؟

مبدأ العد Counting Principle

تريد تنفيذ عمل على 3 مراحل متتابعة. هناك 3 طرائق مختلفة لتنفيذ المرحلة الأولى، و4 طرائق مختلفة لتنفيذ المرحلة الثانية، وطريقة واحدة لتنفيذ المرحلة الثالثة.

ما عدد الطرائق الممكنة لتنفيذ هذا العمل؟

عدد الطرائق الممكنة: طريقة $3 \times 4 \times 1 = 12$

A B C D

المرحلة الأولى المرحلة الثانية المرحلة الثالثة

مبدأ العد Counting Principle

لإجراء عملية على عدد من المراحل المتتابعة، كما يلي:

المرحلة الأولى بـ r_1 طريقة مختلفة،

المرحلة الثانية بـ r_2 طريقة مختلفة،

المرحلة الثالثة بـ r_3 طريقة مختلفة،

.....وهكذا حتى المرحلة n بـ r_n طريقة مختلفة

فإن عدد طرائق إجراء هذه العملية هو: $r_1 \times r_2 \times r_3 \times ... \times r_n$

مثال (1)

لتكن: $A = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

يراد تكوين أعداد ذات ثلاثة منازل باستخدام عناصر A

أوجد:

a عدد الأعداد الممكن تكوينها.

b عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

c عدد الأعداد الفردية مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

152

الحل:

نفرض أن: r_1: عدد طرائق اختيار رقم من A لمنزلة الآحاد

r_2: عدد طرائق اختيار رقم من A لمنزلة العشرات

r_3: عدد طرائق اختيار رقم من A لمنزلة المئات

a ∵ الأعداد المطلوبة يمكن تكرار الأرقام فيها

$\therefore r_1 = 5,\ r_2 = 5,\ r_3 = 5$

فيكون عدد الأعداد الممكن تكوينها هو:

$r_1 \times r_2 \times r_3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ (عددًا)

b ∵ الأعداد المطلوبة مختلفة الأرقام

$\therefore r_1 = 5,\ r_2 = 4,\ r_3 = 3$

$r_1 \times r_2 \times r_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ (عددًا)

c ∵ الأعداد فردية ∴ الرقم في منزلة الآحاد هو 5 أو 1: طريقتان أي أن $r_1 = 2$

يبقى 4 طرائق مختلفة للرقم في منزلة العشرات أي أن $r_2 = 4$

و3 طرائق مختلفة للرقم في منزلة المئات أي أن $r_3 = 3$

عدد الأعداد الفردية مختلفة الأرقام الممكن تكوينها: $2 \times 4 \times 3 = 24$ (عددًا)

حاول أن تحل

1 من مثال (1)، أوجد:

a عدد الأعداد الفردية الممكن تكوينها.

b عدد الأعداد الزوجية الممكن تكوينها.

c عدد الأعداد الزوجية المختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

مثال (2)

لتكن: $B = \{0, 3, 4, 5, 7, 9\}$

تم تكوين أعداد ذات أربعة منازل باستخدام عناصر المجموعة B

أوجد:

a عدد الأعداد الممكن تكوينها.

b عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 5 الممكن تكوينها.

c عدد الأعداد مختلفة الأرقام والمحصورة بين 7 000، 4 000 الممكن تكوينها.

الحل:

a هناك 6 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة الآحاد

و6 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة العشرات

و6 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة المئات

و5 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة الألوف (لا يمكن اختيار الصفر)

الألوف	المئات	العشرات	الآحاد
5	6	6	6

∴ يمكن تكون $5 \times 6 \times 6 \times 6 = 1080$ عددًا مختلفًا.

153

في المثال (1)

اطلب إلى الطلاب وضع لوائح منظمة للإجابة منعًا للسهو والخطأ. أشر إلى أن العدد الفردي من المجموعة ينتهي بـ 1 أو 5.

في المثال (2)

ذكّر الطلاب بأن العدد ذو أربع منازل لا يمكن أن يتضمن الصفر في منزلة الآلاف. ذكّرهم أيضًا بقابلية القسمة على 5.

في المثال (3)

تعتبر عملية تنظيم القوائم مهمة جدًّا عندما يكون عدد العناصر في مجموعة منتهية صغيرًا. تساعد القائمة المنظمة على فهم مبدأ العد ضمن الشروط التي ذكرناها. يمكن للمعلم عرض أمثلة بديلة تساعد الطلاب على تنظيم قوائم بشكل سريع.

في المثال (4)

يجب ترتيب اليخوت الثلاثة الأولى، وبالتالي يعتبر هذا المثال تطبيقًا مباشرًا لمفهوم التراتيب.
ساعدهم على استخدام الآلة الحاسبة نظرًا لأهمية الوقت.

في المثال (5)

يساعد قانون التباديل على حل بعض المعادلات.

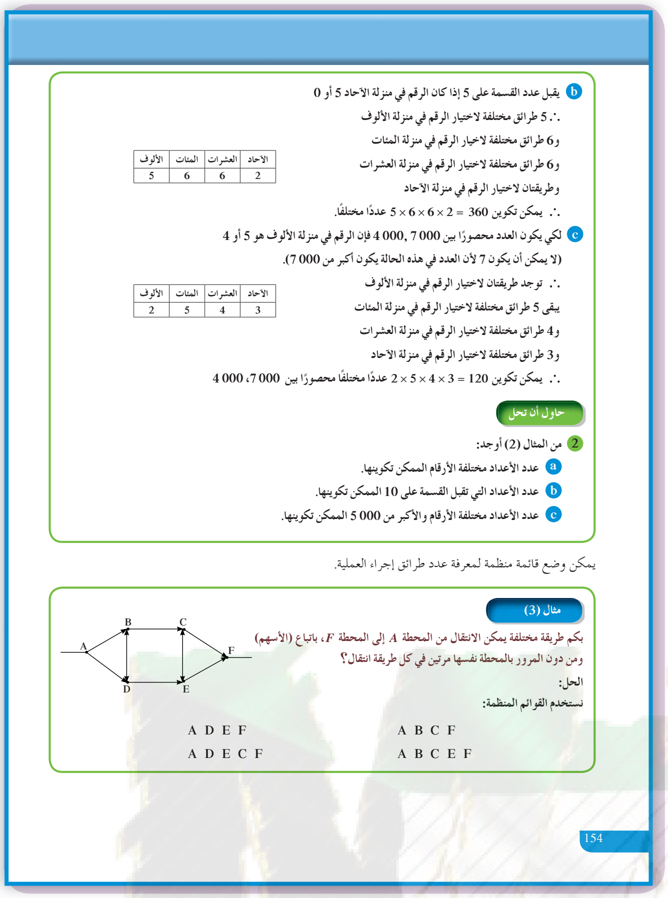
ركّز مع الطلاب أن n , r في القانون هما عددان صحيحان موجبان (غير الصفر) حيث $n \geq r$.

ففي **(a)** أشر إلى أن $n \geq 5$ وفي **(b)** $r \leq 6$.

اطلب إليهم إيجاد الحل بالتبسيط أولًا بين البسط والمقام.

في المثال (6)

وضّح للطلاب أن اختيار 4 كتب للمطالعة من بين 15 كتابًا لا يستند إلى قانون الترتيب، كما أن كل كتاب يختلف عن الآخر، وبالتالي فإن هذا الاختيار هو توافيق أي 4 كتب من بين 15 كتابًا.



b يقبل عدد القسمة على 5 إذا كان الرقم في منزلة الآحاد 5 أو 0

∴ 5 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة الألوف

و 6 طرائق مختلفة لاخيار الرقم في منزلة المئات

و 6 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة العشرات

وطريقتان لاختيار الرقم في منزلة الآحاد

الآحاد	العشرات	المئات	الألوف
2	6	6	5

∴ يمكن تكوين $360 = 2 \times 6 \times 6 \times 5$ عددًا مختلفًا.

c لكي يكون العدد محصورًا بين 000 4 ,000 7 فإن الرقم في منزلة الألوف هو 5 أو 4

(لا يمكن أن يكون 7 لأن العدد في هذه الحالة يكون أكبر من 000 7).

∴ توجد طريقتان لاختيار الرقم في منزلة الألوف

يبقى 5 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة المئات

و 4 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة العشرات

و 3 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة الآحاد

الآحاد	العشرات	المئات	الألوف
3	4	5	2

∴ يمكن تكوين $120 = 3 \times 4 \times 5 \times 2$ عددًا مختلفًا محصورًا بين 000 7، 000 4

حاول أن تحل

2 من المثال (2) أوجد:

a عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

b عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 10 الممكن تكوينها.

c عدد الأعداد مختلفة الأرقام والأكبر من 000 5 الممكن تكوينها.

يمكن وضع قائمة منظمة لمعرفة عدد طرائق إجراء العملية.

مثال (3)

بكم طريقة مختلفة يمكن الانتقال من المحطة A إلى المحطة F، باتباع (الأسهم) ومن دون المرور بالمحطة نفسها مرتين في كل طريقة انتقال؟

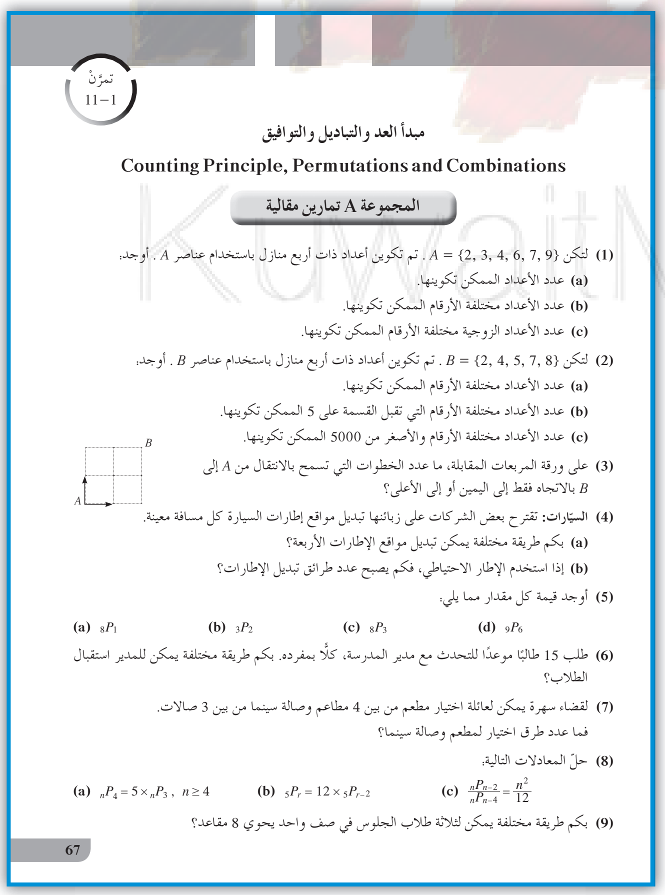
الحل:

نستخدم القوائم المنظمة:

A B C F　　A D E F

A B C E F　　A D E C F

154



تمرَّنْ 11−1

مبدأ العد والتباديل والتوافيق

Counting Principle, Permutations and Combinations

المجموعة A تمارين مقالية

(1) لتكن $A = \{2, 3, 4, 6, 7, 9\}$. تم تكوين أعداد ذات أربع منازل باستخدام عناصر A . أوجد:

(a) عدد الأعداد الممكن تكوينها.

(b) عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

(c) عدد الأعداد الزوجية مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

(2) لتكن $B = \{2, 4, 5, 7, 8\}$. تم تكوين أعداد ذات أربع منازل باستخدام عناصر B . أوجد:

(a) عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

(b) عدد الأعداد مختلفة الأرقام التي تقبل القسمة على 5 الممكن تكوينها.

(c) عدد الأعداد مختلفة الأرقام والأصغر من 5000 الممكن تكوينها.

(3) على ورقة المربعات المقابلة، ما عدد الخطوات التي تسمح بالانتقال من A إلى B بالاتجاه فقط إلى اليمين أو إلى الأعلى؟

(4) **السيّارات:** تقترح بعض الشركات على زبائنها تبديل مواقع إطارات السيارة كل مسافة معينة.

(a) بكم طريقة مختلفة يمكن تبديل مواقع الإطارات الأربعة؟

(b) إذا استخدم الإطار الاحتياطي، فكم يصبح عدد طرائق تبديل الإطارات؟

(5) أوجد قيمة كل مقدار مما يلي:

(a) ${}_8P_1$　**(b)** ${}_3P_2$　**(c)** ${}_8P_3$　**(d)** ${}_9P_6$

(6) طلب 15 طالبًا موعدًا للتحدث مع مدير المدرسة، كلًّا بمفرده. بكم طريقة مختلفة يمكن للمدير استقبال الطلاب؟

(7) لقضاء سهرة يمكن لعائلة اختيار مطعم من بين 4 مطاعم وصالة سينما من بين 3 صالات. فما عدد طرق اختيار لمطعم وصالة سينما؟

(8) حلّ المعادلات التالية:

(a) ${}_nP_4 = 5 \times {}_nP_3 \,,\ n \geq 4$　**(b)** ${}_5P_r = 12 \times {}_5P_{r-2}$　**(c)** $\dfrac{{}_nP_{n-2}}{{}_nP_{n-4}} = \dfrac{n^2}{12}$

(9) بكم طريقة مختلفة يمكن لثلاثة طلاب الجلوس في صف واحد يحوي 8 مقاعد؟

67

قدّم لهم أمثلة بديلة توضّح بها عملية ترتيب n عنصر في مجموعة من n عنصر في هذه المجموعة حيث هي حالة خاصة من التباديل. لإيضاح فكرة التوافيق

مثل: ترتيب عناصر المجموعة: $\{a,b\}$

اثنين اثنين يكون: (a,b) , (b,a)

وترتيب عناصر المجموعة: $\{a,b,c\}$ ثلاثة ثلاثة يكون:

$\{a,b,c\}$, $\{a,c,b\}$, $\{c,b,a\}$, $\{c,a,b\}$, $\{b,c,a\}$, $\{b,a,c\}$

وعددها 6 تراتيب.

في المثال (7)

أهمية هذا المثال أنه وللمرة الأولى يعطى الطالب مثالاً حيث يتم اختيار 3 أو أقل وهذا يعني اختيار 3 أو 2 أو 1 أو الصفر، ثم يجمع النواتج.

في المثال (8)

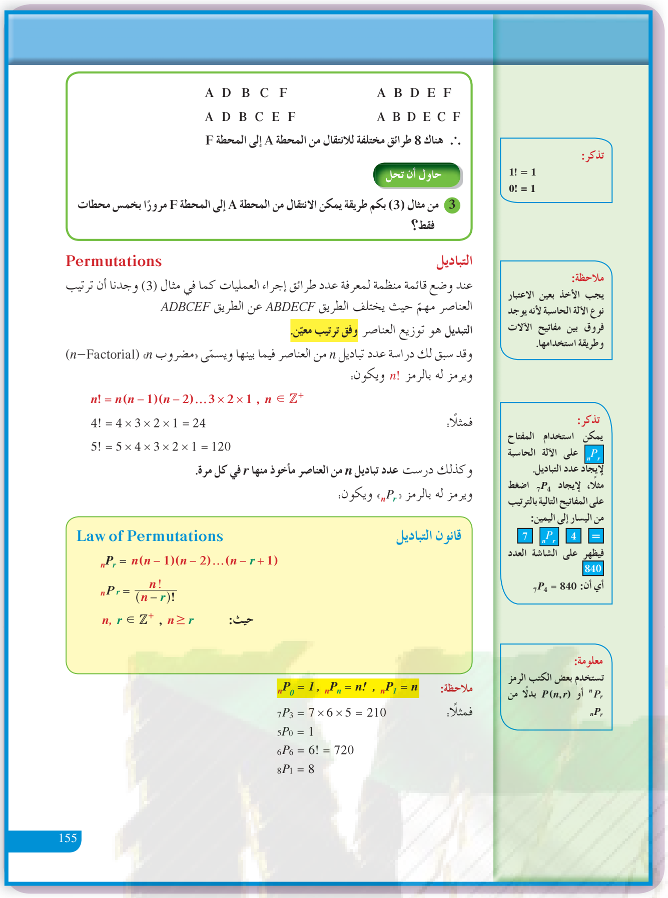
هذا المثال تعميم لعملية الاختيار وعلى الطالب أخذ عدة اختيارات، ثم تحضيره للاحتمالات المشروطة لاحقًا.

في المثال (9)

هذا المثال تعبير عن التوافيق أي أن ترتيب العناصر ليس مهمًّا في كل جزء نأخذه من مجموعة معينة.

في المثال (10)

يتم في هذا المثال استخدام قاعدة التوافيق لحل معادلات تتضمن متغيرًا على أن تكون الإجابة عددًا كليًّا. شجع الطلاب على توسيع مضروب العدد بما يتناسب مع تبسيط الكسر وإيجاد الإجابة المقبولة.



A D B C F   A B D E F

A D B C E F   A B D E C F

$\therefore$ هناك 8 طرائق مختلفة للانتقال من المحطة A إلى المحطة F

حاول أن تحل

3 من مثال (3) بكم طريقة يمكن الانتقال من المحطة A إلى المحطة F مرورًا بخمس محطات فقط؟

التباديل **Permutations**

عند وضع قائمة منظمة لمعرفة عدد طرائق إجراء العمليات كما في مثال (3) وجدنا أن ترتيب العناصر مهمّ حيث يختلف الطريق $ABDECF$ عن الطريق $ADBCEF$

التبديل هو توزيع العناصر **وفق ترتيب معيّن.**

وقد سبق لك دراسة عدد تباديل n من العناصر فيما بينها ويسمّى «مضروب n» (n−Factorial) ويرمز له بالرمز $n!$ ويكون:

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots3\times2\times1\ ,\ n\in\mathbb{Z}^+$$

فمثلًا:

$4! = 4\times3\times2\times1 = 24$

$5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$

وكذلك درست **عدد تباديل n من العناصر مأخوذ منها r في كل مرة.**

ويرمز له بالرمز «${}_nP_r$» ويكون:

قانون التباديل **Law of Permutations**

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

حيث: $n, r\in\mathbb{Z}^+\ ,\ n\geq r$

ملاحظة: ${}_nP_0 = 1\ ,\ {}_nP_n = n!\ ,\ {}_nP_1 = n$

فمثلًا:

${}_7P_3 = 7\times6\times5 = 210$

${}_5P_0 = 1$

${}_6P_6 = 6! = 720$

${}_8P_1 = 8$

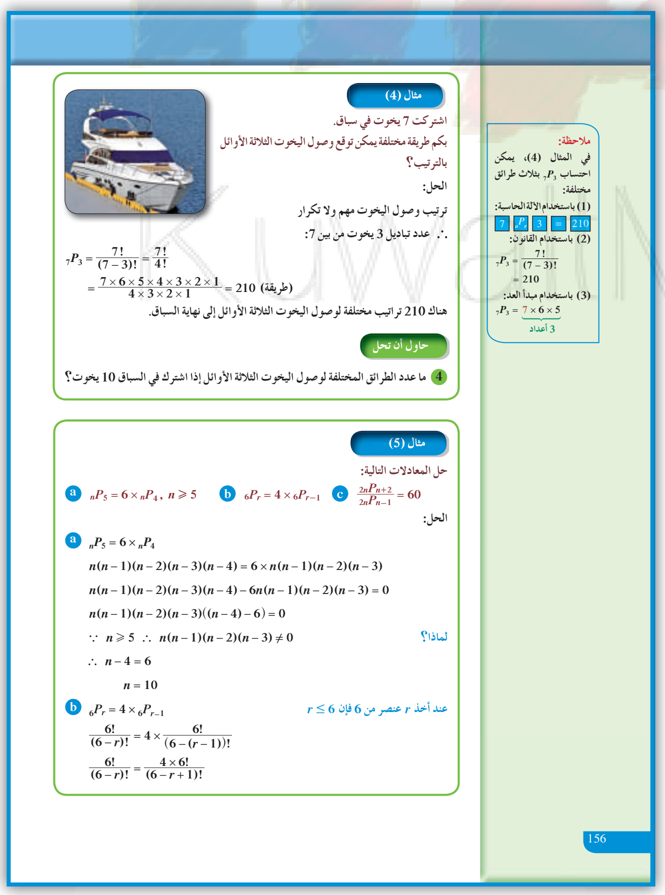
تذكر:
$1! = 1$
$0! = 1$

ملاحظة:
يجب الأخذ بعين الاعتبار نوع الآلة الحاسبة لأنه يوجد فروق بين مفاتيح الآلات وطريقة استخدامها.

تذكر:
يمكن استخدام المفتاح ${}_nP_r$ على الآلة الحاسبة لإيجاد عدد التباديل.
مثلًا، لإيجاد ${}_7P_4$ اضغط على المفاتيح التالية بالترتيب من اليسار إلى اليمين:
7 ${}_nP_r$ 4 =
فيظهر على الشاشة العدد 840
أي أن: ${}_7P_4 = 840$

معلومة:
تستخدم بعض الكتب الرمز ${}^nP_r$ أو $P(n,r)$ بدلًا من ${}_nP_r$

155



مثال (4)

اشتركت 7 يخوت في سباق.

بكم طريقة مختلفة يمكن توقع وصول اليخوت الثلاثة الأوائل بالترتيب؟

الحل:

ترتيب وصول اليخوت مهم ولا تكرار

$\therefore$ عدد تباديل 3 يخوت من بين 7:

$${}_7P_3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!}$$

$$= \frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1} = 210 \text{ (طريقة)}$$

هناك 210 تراتيب مختلفة لوصول اليخوت الثلاثة الأوائل إلى نهاية السباق.

حاول أن تحل

4 ما عدد الطرائق المختلفة لوصول اليخوت الثلاثة الأوائل إذا اشترك في السباق 10 يخوت؟

مثال (5)

حل المعادلات التالية:

a ${}_nP_5 = 6\times{}_nP_4\ ,\ n\geqslant5$ b ${}_6P_r = 4\times{}_6P_{r-1}$ c $\frac{{}_{2n}P_{n+2}}{{}_{2n}P_{n-1}} = 60$

الحل:

a ${}_nP_5 = 6\times{}_nP_4$

$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 6\times n(n-1)(n-2)(n-3)$

$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) - 6n(n-1)(n-2)(n-3) = 0$

$n(n-1)(n-2)(n-3)((n-4)-6) = 0$

لماذا؟ $\because\ n\geqslant5\ \therefore\ n(n-1)(n-2)(n-3)\neq0$

$\therefore\ n-4 = 6$

$n = 10$

b ${}_6P_r = 4\times{}_6P_{r-1}$ عند أخذ r عنصر من 6 فإن $r\leq6$

$$\frac{6!}{(6-r)!} = 4\times\frac{6!}{(6-(r-1))!}$$

$$\frac{6!}{(6-r)!} = \frac{4\times6!}{(6-r+1)!}$$

ملاحظة:
في المثال (4)، يمكن احتساب ${}_7P_3$ بثلاث طرائق مختلفة:
(1) باستخدام الآلة الحاسبة:
7 ${}_nP_r$ 3 = 210
(2) باستخدام القانون:
$${}_7P_3 = \frac{7!}{(7-3)!} = 210$$
(3) باستخدام مبدأ العد:
$${}_7P_3 = \underbrace{7\times6\times5}_{\text{3 أعداد}}$$

156

6 الربط

من الملاحظ أن معظم الأمثلة في هذا الدرس هي ربط بين مفاهيم هذا الدرس ومهاراته وبين مواقف حياتية يمكن مصادفتها.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تحديد الفرق بين التباديل والتوافيق. ساعدهم في التركيز على فهم معطيات المسألة ليتعرفوا نوعية السؤال يحتاج إلى ترتيب أم لا.

8 التقييم

من المهم جدًّا متابعة الطلاب بدقة وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» للتأكد من أنهم يميّزون بين التباديل والتوافيق ويستخدمون القانون المناسب.

اختبار سريع

1 في الصف 15 طاولة، تتسع كل طاولة لطالبين. بكم طريقة مختلفة يمكن توزيع 30 طالبًا على هذه الطاولات؟

كل طاولة تتسع لطالبين يمكن لهذين الطالبين الجلوس على الطاولة بطريقتين مختلفتين إذًا فهي عملية ترتيب اثنين ويكون عدد الطرائق:

$$_{30}P_2 = \frac{30!}{(30-2)!} = \frac{30!}{28!}$$

$$= 30 \times 29$$

$$= 870$$

870 ترتيب زوج مختلف من الطلاب يمكن توزيعهم على 15 طاولة.

2 في الصف 12 كرسيًّا، لكل طالب كرسيّ واحد. بكم طريقة مختلفة يمكن توزيع 12 طالبًا للجلوس على 12 كرسيًّا.

إنها عملية تباديل خاصة $_{12}P_{12} = 12!$

أي يوجد 479 001 600 طريقة مختلفة.

$$\frac{6!}{(6-r)!} = \frac{4 \times 6!}{(6-r+1)\times(6-r)!}$$

بضرب كلًّا من الطرفين في $\frac{(6-r)!}{6!}$

$$1 = \frac{4}{6-r+1}$$

$$6-r+1 = 4$$

$$r = 3$$

c $\frac{_{2n}P_{n+2}}{_{2n}P_{n-1}} = 60$

$$\frac{\frac{(2n)!}{(2n-n-2)!}}{\frac{2n!}{(2n-n+1)!}} = 60$$

$$\frac{\cancel{(2n)}!}{(n-2)!} \times \frac{(n+1)!}{\cancel{(2n)}!} = 60 \Longrightarrow \frac{(n+1)!}{(n-2)!} = 60$$

$$\frac{(n+1)(n)(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 60$$

$$(n+1)(n)(n-1) = 60$$

خمّن

$$(n+1)(n)(n-1) = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

$$\therefore\ n = 4$$

معلومة: يمكن استخدام الآلة الحاسبة في حل مثال (c) (5)، وذلك باعتبار أن $(n+1)n(n-1) = 0$ $\Longrightarrow n^3 - n - 60 = 0$ أو بحل معادلة التكعيبية

حاول أن تحل

5 حل المعادلات التالية:

a $_nP_7 = 12 \times {_nP_5}$ b $_8P_r = 4 \times {_8P_{r-1}}$

التوافيق Combinations

سبق لك دراسة التوافيق حيث تحتاج أحيانًا إلى معرفة عدد المجموعات الجزئية والتي يمكن اختيارها من مجموعة ما.

عندما نتكلم عن **مجموعة** فهذا يعني أن **ترتيب العناصر غير مهم**. لذلك نحسب عدد **التوافيق**. نرمز لعدد توافيق r عنصرًا مأخوذة من مجموعة عدد عناصرها n بالرمز $_nC_r$ ويكون:

قانون التوافيق Law of Combinations

$$_nC_r = \frac{_nP_r}{r!}$$

$$_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

حيث: $n,\ r \in \mathbb{Z}^+\ ,\ n \geq r$

معلومة: تستخدم بعض الكتب الرمز ^nC_r أو $C(n,r)$ أو $\binom{n}{r}$ للتعبير عن عدد التوافيق.

ملاحظة:

$$_nC_0 = 1\ ,\ _nC_1 = n\ ,\ _nC_n = 1$$

157

---

(10) أوجد قيمة كل مقدار مما يلي:

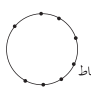
(a) $_6C_2$ (b) $_7C_3 \times {_9C_5}$ (c) $_4C_4$ (d) $_6C_2 + {_6C_3}$

(11) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار مجموعة من 4 عناصر من مجموعة مؤلفة من 300 عنصر؟

(12) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار مجموعة من 4 أرقام من المجموعة:
{0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9}؟

(13) فاز 16 طالبًا بعضوية فريق كرة القدم في المدرسة. بكم طريقة ممكنة يمكن اختيار 11 لاعبًا منهم علمًا أنه يوجد بين الطلاب حارس مرمى واحد؟

(14) نوّاف طالب جامعي، يريد اختيار رفيقين أو 3 للسكن معه في المبنى الجامعي. بكم طريقة ممكنة يمكنه الاختيار إذا كان عدد رفاقه 25؟



(15) **الهندسة:** في الشكل المقابل، هناك 8 نقاط على الدائرة.

(a) ما عدد المثلثات المختلفة التي يمكنك الحصول عليها باستخدام 3 من هذه النقاط المختلفة؟

(b) ما عدد المضلعات الخماسية المختلفة التي يمكنك الحصول عليها باستخدام 5 من هذه النقاط؟

(c) فسّر، لماذا يجب أن تتساوى الإجابتان في **(a)**، **(b)**.

(16) في الصفّ الحادي عشر «الشعبة A» 24 طالبًا وفي «الشعبة B» 22 طالبًا. أراد معلم الأنشطة الفنية اختيار 7 طلاب للتدرب على عمل مسرحي. ما عدد الخيارات الممكنة شرط أن تتضمن مجموعة الطلاب المختارة على الأقل طالبين من الشعبة A؟

(17) حلّ المعادلات التالية:

(a) $_nC_3 + {_nC_2} = 3n(n-1)$ (b) $_nC_4 = {_nC_{n-2}}$ (c) $_{2n}C_4 = \frac{1}{2}\ {_{2n}C_5}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) قيمة المقدار !10 هي 3 628 800 (a) (b)

(2) قيمة المقدار !4 × !5 هي 360 (a) (b)

(3) عدد طرق جلوس 4 أشخاص على 4 مقاعد في صفّ هو !4 (a) (b)

(4) قيمة المقدار $3 \times {_5C_4}$ هي 15 (a) (b)

(5) $(n-r)! = n! - r!$ (a) (b)

68

3 كم عددًا يوجد أكبر من 100 وأصغر من 1 000 مكوّن كل منها من أرقام مختلفة؟

الأعداد أكبر من 100 وأصغر من 1 000 جميعها مكونة من ثلاثة أرقام وهذه الأرقام مأخوذة من بين 10 أرقام هي:

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ وبما أنها مكوّنة من أرقام مختلفة لذا فهي تباديل ثلاثة ثلاثة من بين 10 ولكن عندما يكون الصفر في منزلة المئات فلن يكون لدينا عدد من ثلاثة أرقام بل سيصبح من رقمين مثل 032 وبالتالي عدد الأعداد هو:

$$_{10}P_3 - {_9P_3} = \frac{10!}{7!} - \frac{9!}{6!} = 216$$

4 في كيس 5 أقراص حمراء اللون و4 أقراص زرقاء اللون. سحبت من الكيس عشوائيًّا 3 أقراص. بكم طريقة يمكن الحصول على اثنين من اللون الأحمر وواحد من اللون الأزرق أو اثنين من اللون الأزرق وواحد من اللون الأحمر؟

$$_5C_2 \times {_4C_1} + {_5C_1} \times {_4C_2} = 70$$

70 طريقة ممكنة.


مثال (6)

في مكتبة المدرسة 15 كتابًا مختلفًا من مجموعة روايات التاريخ الإسلامي.
بكم طريقة يمكنك اختيار 4 كتب منها للمطالعة؟

الحل:

تريد اختيار 4 كتب من مجموعة مكونة من 15 كتابًا.

ترتيب الكتب المختارة غير مهم، وليس هناك تكرار (أي لا يمكن اختيار الكتاب نفسه أكثر من مرة واحدة).

∴ عليك معرفة عدد توافيق 4 كتب من بين 15 كتابًا.

$$_{15}C_4 = \frac{15!}{(15-4)! \times 4!}$$
$$= \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times (11)!}{(11)! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$
$$= 1365$$

يمكنك اختيار الكتب الأربعة بـ 365 1 طريقة مختلفة.

معلومة:
يمكنك حل المثال (6) باستخدام الآلة الحاسبة.

حاول أن تحل

6 في المثال (6): a بكم طريقة مختلفة يمكنك اختيار 7 كتب؟
b بكم طريقة مختلفة يمكنك اختيار 8 كتب؟
c ماذا تلاحظ؟

مثال (7)

ترشح 10 طلاب لتمثيل القسم العلمي من مدرستك. يجري اختيار الممثلين الثلاثة بالاقتراع السري.
يمكنك اختيار ثلاثة طلاب أو أقل. بكم طريقة مختلفة يمكنك أن تقترع؟

الحل:

المطلوب اختيار مجموعة من 3 طلاب على الأكثر والترتيب غير مهم وليس هناك تكرار.

∴ نحسب عدد التوافيق.

يمكنك أن تقترع لِـ:

3 طلاب فيكون عدد الطرق: $_{10}C_3$

أو طالبين فيكون عدد الطرق: $_{10}C_2$

أو طالب واحد فيكون عدد الطرق: $_{10}C_1$

أو ورقة بيضاء فيكون عدد الطرق: $_{10}C_0$

∴ عدد طرائق الاقتراع: $_{10}C_3 + {_{10}C_2} + {_{10}C_1} + {_{10}C_0}$

$= 120 + 45 + 10 + 1$

$= 176$

يمكنك الاقتراع بـ 176 طريقة مختلفة.

158


حاول أن تحل

7 في المثال (7)، بكم طريقة مختلفة يمكنك الاقتراع لـ 5 طلاب أو أقل؟

مثال (8)

في الصف الحادي عشر 28 طالبًا وفي الصف الثاني عشر 24 طالبًا.
أراد معلم الرياضة اختيار 5 طلاب لتشكيل فريق لكرة السلة، شرط أن يتضمن الفريق على الأقل لاعبًا واحدًا من الصف الحادي عشر. ما عدد الخيارات الممكنة؟

الحل:

طريقة أولى:

حيث إن ترتيب العناصر غير مهم ∴ الخيارات هي توافيق،

يمكن أن يتكون الفريق من لاعب واحد من الصف الحادي عشر و4 لاعبين من الصف الثاني عشر: $_{28}C_1 \times {_{24}C_4}$

أو لاعبين اثنين من الصف الحادي عشر: $_{28}C_2 \times {_{24}C_3}$

أو 3 لاعبين من الصف الحادي عشر: $_{28}C_3 \times {_{24}C_2}$

أو 4 لاعبين من الصف الحادي عشر: $_{28}C_4 \times {_{24}C_1}$

أو 5 لاعبين من الصف الحادي عشر: $_{28}C_5 \times {_{24}C_0}$

عدد الخيارات: $_{28}C_1 \times {_{24}C_4} + {_{28}C_2} \times {_{24}C_3} + {_{28}C_3} \times {_{24}C_2} + {_{28}C_4} \times {_{24}C_1} + {_{28}C_5} \times {_{24}C_0}$

$= 297\,528 + 765\,072 + 904\,176 + 491\,400 + 98\,280$

$= 25\,564\,56$

طريقة ثانية:

يمكن أخذ كل الخيارات الممكنة لـ 5 طلاب من بين $52 = 24 + 28$ ورفض الخيارات التي تتضمن صفر طالب من الصف الحادي عشر أي اختيار الخمسة طلاب من الصف الثاني عشر.

$_{52}C_5 - {_{24}C_5} = 25\,564\,56$

حاول أن تحل

8 في مثال (8)، ما عدد الخيارات الممكنة شرط أن يتضمن الفريق على الأقل لاعبين من الصف الثاني عشر؟

خواص أخرى للتوافيق

$_nC_m = {_nC_{n-m}}$

$_nC_m = {_{n-1}C_m} + {_{n-1}C_{m-1}}$

159

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1 الترتيب ليس مهمًّا. مثلًا إذا أردنا تعيين رئيس ونائب رئيس للوفد.

2 لا يمكن اختيار الطالب نفسه مرتين.

3 12، $_{24}C_{12}$ توفيقة.

4 12, 13

«حاول أن تحل»

1 (a) $5 \times 5 \times 2 = 50$

(b) $5 \times 5 \times 3 = 75$

(c) $4 \times 3 \times 3 = 36$

2 (a) $5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300$

(b) $5 \times 6 \times 6 \times 1 = 180$

(c) $3 \times 5 \times 4 \times 2 = 120$

3 $ABCEF \quad ADECF$

$ADBCF \quad ABDEF$

4 $_{10}P_3 = 720$

5 (a) $\dfrac{n!}{(n-7)!} = 12 \times \dfrac{n!}{(n-5)!}$

$\dfrac{n!}{(n-7)!} \times \dfrac{(n-5)!}{n!} = 12$

$(n-5)(n-6) = 12$

$n = 9 \ \ (n \geq 7)$

(b) $\dfrac{8!}{(8-r)!} \times \dfrac{(8-r+1)!}{8!} = 4 \ ;$

$8 - r + 1 = 4 \ ; \ r = 5 \ \ (r \leq 8)$

مثال (9)

في الصف الحادي عشر 20 طالبًا. يريد المدير اختيار وفد من 4 طلاب لتمثيل طلاب من الصف الحادي عشر.

a أوجد عدد الوفود المختلفة الممكن تكوينها.

b أوجد عدد الوفود المختلفة الممكن تكوينها شرط أن يكون الطالب سالم (من طلاب الصف الحادي عشر) مشاركًا في الوفد.

c أوجد عدد الوفود المختلفة الممكن تكوينها شرط ألّا يكون الطالب سالم (من طلاب الصف الحادي عشر) مشاركًا في الوفد.

d قارن بين إجابة a ومجموع إجابتي c و b . فسِّر.

الحل:

a في عملية اختيار الوفد ترتيب العناصر غير مهم لذلك نحسب عدد التوافيق.

نختار 4 طلاب من بين 20:

$$_{20}C_4 = \frac{_{20}P_4}{4!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 4\,845$$

b إذا كان سالم مشاركًا في الوفد فهذا يعني أنه يجب اختيار 3 طلاب من بين بقية الطلاب أي من بين $19 = 1 - 20$ طالبًا.

$$_{19}C_3 = \frac{_{19}P_3}{3!} = \frac{19 \times 18 \times 17}{3 \times 2 \times 1} = 969$$

c إذا استثنى سالم من المشاركة في الوفد فهذا يعني أنه يجب اختيار 4 طلاب من بين $19 = 1 - 20$ طالبًا.

$$_{19}C_4 = \frac{_{19}P_4}{4!} = \frac{19 \times 18 \times 17 \times 16}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 3\,876$$

d $969 + 3\,876 = 4\,845$

أي: $_{19}C_3 + {_{19}C_4} = {_{20}C_4}$

وهذا يتفق مع الخاصية $_nC_m = {_{n-1}C_m} + {_{n-1}C_{m-1}}$

حاول أن تحل

9 يتكون فريق كرة القدم في المدرسة من 18 لاعبًا. يريد المدرب تشكيل فريق من 11 لاعبًا.

a أوجد عدد الفرق المختلفة الممكن تكوينها.

b أوجد عدد الفرق المختلفة الممكن تكوينها إذا أراد المدرب أن يتضمن الفريق اللاعب عبد العزيز.

c أوجد عدد الفرق المختلفة الممكن تكوينها إذا استثنى المدرب اللاعب عبد العزيز من تشكيلة الفريق بطريقتين مختلفتين.

مثال (10)

أوجد قيمة n في كل مما يلي:

a $_nC_3 = {_nC_4}$

b $\dfrac{_nC_7}{_{(n-1)}C_6} = \dfrac{8}{7}$

الحل:

a $_nC_3 = {_nC_4}$

$\dfrac{_nP_3}{3!} = \dfrac{_nP_4}{4!}$

$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3!}$

$4n(n-1)(n-2) = n(n-1)(n-2)(n-3)$

160

في التمارين (15–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) قيمة المقدار $\frac{10!}{7!3!}$ هي:

a $\frac{10}{21}$ b $\frac{1}{120}$ c 120 d 1

(7) قيمة المقدار $_{10}C_6 \times {_6P_4}$ هي:

a 75 600 b 7 560 c 2.5 d 210

(8) قيمة المقدار $_9C_2 \times \frac{_7C_4}{_9C_4}$ هي:

a 18 b 5.184 c 10 d 735

(9) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار 5 لاعبين لفريق السلة من بين 12 لاعبًا إذا كان ترتيب المراكز في الفريق مهمًّا؟

a 95 040 b 475 200 c 392 d 11 404 800

(10) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار 3 أعلام من مجموعة من 7 أعلام مختلفة؟

a 210 b 35 c 840 d 24

(11) إذا كان هناك طريق واحدة تصل بين كل مدينتين. فما عدد الطرق التي تصل بين 8 مدن.

a 20 160 b 2 520 c 40 320 d 5 040

(12) في المخزن 6 بطاريات من ماركات مختلفة، 3 بطاريات جديدة و3 مستخدمة. بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار على الأقل بطارية واحدة جديدة من 3 بطاريات؟

a 1 b 19 c 9 d 6

(13) بكم طريقة مختلفة يجلس أحمد ومحمد وعلي وجاسم وفهد بشرط تجاور محمد وأحمد؟

a 5! b 4! c 2! × 4! d 2! × 5!

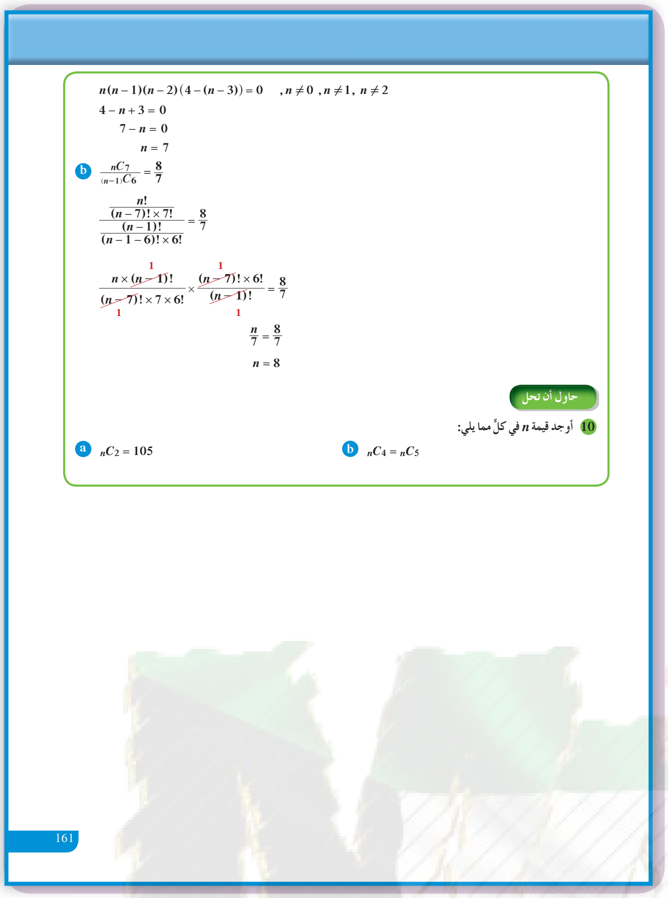
(14) إذا كان: $_nP_3 = 60$ فإن n تساوي

a 6 b 5 c 4 d 2

(15) مجموعة حلّ المعادلة: $_6C_r = 15$ هي:

a {2} b {4} c {2, 4} d {3}

69


$n(n-1)(n-2)(4-(n-3))=0 \quad , n \neq 0 \ , n \neq 1, \ n \neq 2$

$4-n+3=0$

$7-n=0$

$n=7$

b $\dfrac{{}_{n}C_7}{{}_{(n-1)}C_6}=\dfrac{8}{7}$

$$\dfrac{\dfrac{n!}{(n-7)!\times 7!}}{\dfrac{(n-1)!}{(n-1-6)!\times 6!}}=\dfrac{8}{7}$$

$$\dfrac{n\times \cancel{(n-1)!}^{\,1}}{\cancel{(n-7)!}_{\,1}\times 7\times 6!}\times\dfrac{\cancel{(n-7)!}^{\,1}\times 6!}{\cancel{(n-1)!}_{\,1}}=\dfrac{8}{7}$$

$\dfrac{n}{7}=\dfrac{8}{7}$

$n=8$

حاول أن تحل

10 أوجد قيمة n في كلٍّ مما يلي:

a ${}_{n}C_2=105$

b ${}_{n}C_4={}_{n}C_5$

161

6 **(a)** ${}_{15}C_7=\dfrac{15!}{8!7!}=6\,435$ (طريقة)

(b) ${}_{15}C_8=\dfrac{15!}{8!7!}=6\,435$

(c) ${}_{15}C_7={}_{15}C_8$

7 ${}_{10}C_5+{}_{10}C_4+{}_{10}C_3+{}_{10}C_2+{}_{10}C_1+{}_{10}C_0$

$=252+210+120+45+10+1$

$=638$

8 ${}_{24}C_2\times{}_{28}C_3+{}_{24}C_3\times{}_{28}C_2$

$+{}_{24}C_4\times{}_{28}C_1+{}_{24}C_5\times{}_{28}C_0$

$=2\,009\,280$

9 **(a)** ${}_{18}C_{11}=31\,824$

(b) ${}_{17}C_{10}=19\,448$

(c) ${}_{17}C_{11}=12\,376$

طريقة ثانية:

${}_{18}C_{11}-{}_{17}C_{10}=12\,376$

10 **(a)** $\dfrac{n!}{(n-2)!2!}=105 \ ; \ n(n-1)=2\times 105$

$n=15 \ \ (n\geq 2)$

(b) $(n-4)!\times 4!=(n-5)!\times 5!$

$\cancel{4!}\cancel{(n-4)}\times(n-5)!=5\times\cancel{4!}\cancel{(n-5)}!$

$n-4=5 \quad \therefore \ \ n=9$

2–11: نظرية ذات الحدين

1 الأهداف

- يستخدم مثلث باسكال.
- يوجد معامل مفكوك ذات الحدين.
- يطبّق نظرية ذات الحدين.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

مثلث باسكال – مفكوك ذات الحدين – نظرية ذات الحدين.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(1) أوجد مفكوك ما يلي:

(a) $(3x+3y)^2$

(b) $(3x-y)^2$

(c) $(x-3)^3$

(d) $(2-x)^3$

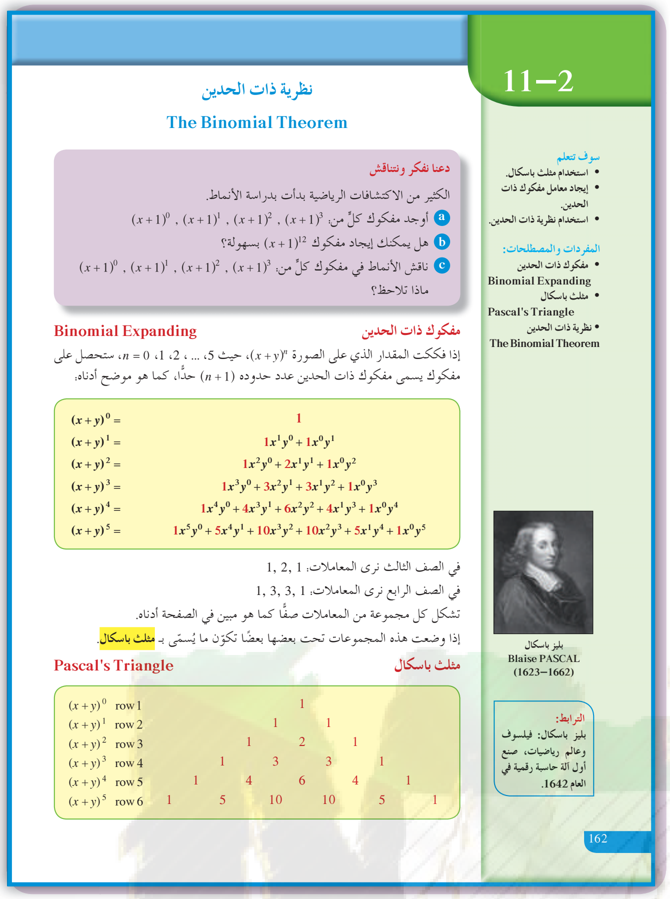
(2) أوجد ناتج ما يلي:

(a) ${}_7P_3$

(b) ${}_8C_5$

(c) $7!$

(3) في كيس 4 أقراص صفراء اللون و3 أقراص حمراء اللون. سحب عشوائيًّا من الكيس 3 أقراص. بكم طريقة يمكن الحصول على قرص أصفر اللون وقرصين أحمري اللون؟



11–2

سوف تتعلم
- استخدام مثلث باسكال.
- إيجاد معامل مفكوك ذات الحدين.
- استخدام نظرية ذات الحدين.

المفردات والمصطلحات:
- مفكوك ذات الحدين Binomial Expanding
- مثلث باسكال Pascal's Triangle
- نظرية ذات الحدين The Binomial Theorem

نظرية ذات الحدين

The Binomial Theorem

دعنا نفكر ونتناقش

الكثير من الاكتشافات الرياضية بدأت بدراسة الأنماط.

a أوجد مفكوك كلٍّ من: $(x+1)^0$, $(x+1)^1$, $(x+1)^2$, $(x+1)^3$

b هل يمكنك إيجاد مفكوك $(x+1)^{12}$ بسهولة؟

c ناقش الأنماط في مفكوك كلٍّ من: $(x+1)^0$, $(x+1)^1$, $(x+1)^2$, $(x+1)^3$ ماذا تلاحظ؟

مفكوك ذات الحدين Binomial Expanding

إذا فككت المقدار الذي على الصورة $(x+y)^n$، حيث $n = 0$، 1، 2، ... ، 5، ستحصل على مفكوك يسمى مفكوك ذات الحدين عدد حدوده $(n+1)$ حدًّا، كما هو موضح أدناه:

$(x+y)^0 = 1$

$(x+y)^1 = 1x^1y^0 + 1x^0y^1$

$(x+y)^2 = 1x^2y^0 + 2x^1y^1 + 1x^0y^2$

$(x+y)^3 = 1x^3y^0 + 3x^2y^1 + 3x^1y^2 + 1x^0y^3$

$(x+y)^4 = 1x^4y^0 + 4x^3y^1 + 6x^2y^2 + 4x^1y^3 + 1x^0y^4$

$(x+y)^5 = 1x^5y^0 + 5x^4y^1 + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5x^1y^4 + 1x^0y^5$

في الصف الثالث نرى المعاملات: 1, 2, 1

في الصف الرابع نرى المعاملات: 1, 3, 3, 1

تشكل كل مجموعة من المعاملات صفًّا كما هو مبين في الصفحة أدناه.

إذا وضعت هذه المجموعات تحت بعضها بعضًا تكوّن ما يُسمّى بـ **مثلث باسكال**.

مثلث باسكال Pascal's Triangle

$(x+y)^0$ row 1						1						
$(x+y)^1$ row 2					1		1					
$(x+y)^2$ row 3				1		2		1				
$(x+y)^3$ row 4			1		3		3		1			
$(x+y)^4$ row 5		1		4		6		4		1		
$(x+y)^5$ row 6	1		5		10		10		5		1	

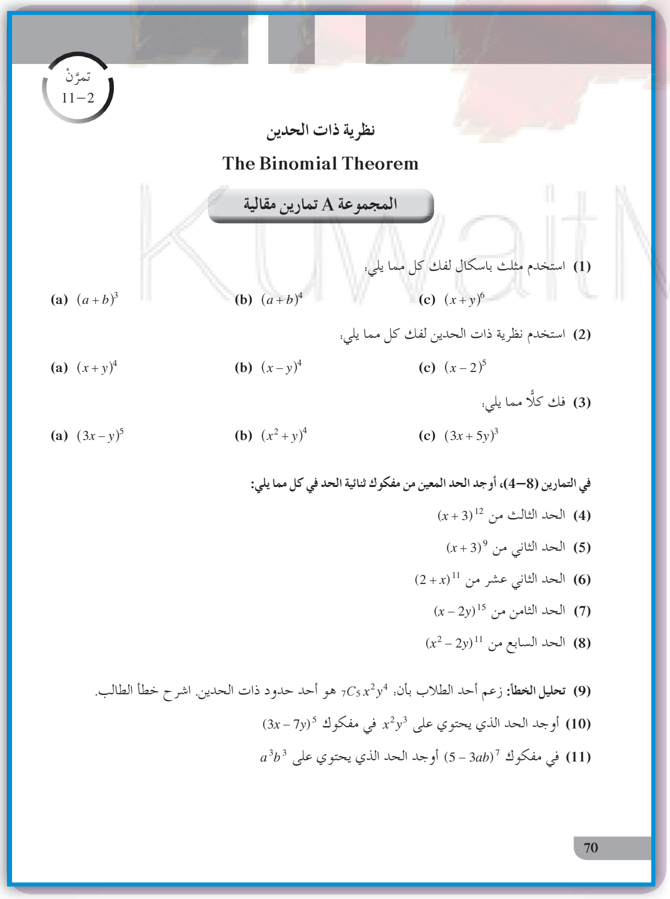
بليز باسكال

Blaise PASCAL

(1623–1662)

الترابط: بليز باسكال: فيلسوف وعالم رياضيات، صنع أول آلة حاسبة رقمية في العام 1642.

162



تمرَّنْ 11–2

نظرية ذات الحدين

The Binomial Theorem

المجموعة A تمارين مقالية

(1) استخدم مثلث باسكال لفك كل مما يلي:

(a) $(a+b)^3$ (b) $(a+b)^4$ (c) $(x+y)^6$

(2) استخدم نظرية ذات الحدين لفك كل مما يلي:

(a) $(x+y)^4$ (b) $(x-y)^4$ (c) $(x-2)^5$

(3) فك كلًّا مما يلي:

(a) $(3x-y)^5$ (b) $(x^2+y)^4$ (c) $(3x+5y)^3$

في التمارين (4–8)، أوجد الحد المعين من مفكوك ثنائية الحد في كل مما يلي:

(4) الحد الثالث من $(x+3)^{12}$

(5) الحد الثاني من $(x+3)^9$

(6) الحد الثاني عشر من $(2+x)^{11}$

(7) الحد الثامن من $(x-2y)^{15}$

(8) الحد السابع من $(x^2-2y)^{11}$

(9) تحليل الخطأ: زعم أحد الطلاب بأن: ${}_7C_5\,x^2y^4$ هو أحد حدود ذات الحدين. اشرح خطأ الطالب.

(10) أوجد الحد الذي يحتوي على x^2y^3 في مفكوك $(3x-7y)^5$

(11) في مفكوك $(5-3ab)^7$ أوجد الحد الذي يحتوي على a^3b^3

70

لاحظ النمط في مثلث بسكال:

- **الحافات الخارجية تساوي 1.**
- **أي عدد غير الواحد في كل صف يساوي مجموع العددين الواقعين فوقه.**

فمثلًا للحصول على الصف الخامس، نجمع كل عددين متجاورين من الصف الرابع (الذي هو أعلى من الصف الخامس مباشرة) ولا ننسى أن الصف يبدأ بـ 1 وينتهي بـ 1 أيضًا.

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

نشاط

استخدم مثلث باسكال السابق لفك: $(x+y)^6$

الحل:

عدد حدود المفكوك = ...

من مثلث باسكال، الصف السادس: ....

يمكن إيجاد الصف السابع من الصف السادس كما يلي:

يبدأ كل صف بالعدد

ينتهي كل صف بالعدد

1 5 10 10 5 1

1 6 15 $\square$ $\square$ $\square$ 1

استخدم الأعداد في الصف السادس كمعاملات.

تبدأ أسس x بـ 6 وتتناقص...

$$(x+y)^6 = 1x^6y^0 + 6x^5y^1 + 15x^4y^2 + 20x^{\square}y^3 + 15x^2y^{\square} + 6x^{\square}y^5 + 1x^{\square}y^{\square}$$

تبدأ أسس y بـ 0 وتتزايد

نظرية ذات الحدين The Binomial Theorem

الأعداد في مثلث باسكال تمثل معاملات حدود مفكوك ذات الحدين $(x+y)^n$. ويمكن إيجاد قيمة هذه الأعداد عن طريق تكرار صف بعد صف باستخدام الطريقة في النشاط السابق.

يمكن أن نوجد أيضًا معاملات مفكوك ذات الحدين عن طريق استخدام **التوافيق**.

إذا حسبنا: $_3C_0$, $_3C_1$, $_3C_2$, $_3C_3$ نحصل على 1, 3 , 3, 1 وهي تتطابق مع قيم الصف الرابع من مثلث باسكال.

كذلك إذا حسبنا $_4C_0$, $_4C_1$, $_4C_2$, $_4C_3$, $_4C_4$ نحصل على 1, 4, 6, 4, 1 وهي تتطابق مع قيم الصف الخامس من مثلث باسكال.

معلومة: كان هذا النمط العددي المثلثي معروفًا بين عامي 200 − 300 ق.م. من خلال العالم الرياضي الهندي هلايودا Halayudha والعالم العربي الكرخي وغيرهما إلّا أنه سمّي مثلث باسكال نسبة إلى عالم الرياضيات الفرنسي بليز باسكال Blaise Pascal

أبو بكر محمد بن الحسن الكرخي من علماء الرياضيات المسلمين قضى حياته في بغداد، برع في الهندسة والأنماط الرياضية ووضع المثلث المشهور الذي يعرف اليوم بمثلث باسكال.

ملاحظة: لاحظ أن مجموع الأسين في كل حد من حدود المفكوك $(x+y)^6$ يساوي 6 دائمًا.

163

5 التدريس

يساعد مثلث باسكال على إيجاد مفكوك ذات الحدين مرفوعًا على الأس الذي نريده لذا من المفيد جدًّا أن يتمرن الطلاب على صنع هذا المثلث.

ساعدهم على إيجاد العلاقة النمطية بين الأعداد في الصفوف المتتابعة مثل:

$$1 \xrightarrow{+} 4 \xrightarrow{+} 6 \xrightarrow{+} 4 \xrightarrow{+} 1$$

4 هي الأس لذات الحدين

وهو الصف الرابع في مثلث باسكال. فيكون الصف الخامس كما يلي:

1 $\quad 4+1=5 \quad 4+6=10 \quad 4+6=10 \quad 4+1=5 \quad$ 1

العدد الأول دائمًا 1 والعدد الأخير 1

لاحظ أنها مشابهة إلى حد ما لطريقة متتالية فيبوناتشي.

في المثال (1)

اطلب إلى الطلاب إيجاد الصف السادس في مثلث باسكال وذلك باستخدام الطريقة أعلاه على الشكل التالي:

$$1 \xrightarrow{+} 5 \xrightarrow{+} 10 \xrightarrow{+} 10 \xrightarrow{+} 5 \xrightarrow{+} 1$$

الصف السادس:

1 6 15 20 15 6 1

6 هو الأس لذات الحدين

وبعد ذلك أخبرهم أن مفكوك ذات الحدين مرفوع إلى أي أس يكون كما يلي:

مثلًا:

$$(a+b)^6 = 1a^6 + 6a^5b^1 + 15a^4b^2 + 20a^3b^3$$

$$+15a^2b^4 + 6a^1b^5 + b^6$$

ركّز أفكار الطلاب على الأس الذي يبدأ مع a، ثم كيف يتناقص لمصلحة أس b بشرط أن يبقى مجموع الأسين على a , b هو 6 دائمًا، ولكي نكمل مفكوك $(a+b)^6$ نضع على الترتيب معامل كل حد من الصف السادس في مثلث باسكال.

في المثال (2)

لا يختلف هذا المثال عن الشكل العام لذات الحدين $(a+b)^n$ حيث إننا نستخدم بدلًا من a العدد $2x$ وبدلًا من b العدد $-3y^2$ ثم نستخدم $T_{r+1} = {}_nC_r(X)^{n-r}(-Y)^r$.

في المثال (3)

أشر إلى أن رتبة الحد هي 5 على الرغم من أن $r = 4$، لأن مفكوك $(2x+3y)^7$ يبدأ بـ ${}_7C_0(2x)^7(3y)^0$ يجب الانتباه إلى الحد الذي معامله ${}_7C_0$

6 الربط

استفاد العلماء سابقًا من العلاقة بين مفكوك ذات الحدين ومثلث باسكال لإيجاد قيم ${}_nC_r$ التي كانت تشكل عبئًا نظرًا لعدم وجود آلات حاسبة.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في كتابة مفكوك ذات الحدين تنازليًّا مع الحد الأول وتصاعديًّا مع الحد الثاني. ساعدهم على فهم هذا المفكوك بحيث يكون ناتج جمع الأسين يساوي أس ذات الحدين.

8 التقييم

راقب عمل الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من حسن أدائهم في استخدام مثلث باسكال أو قيم التوافيق لإيجاد مفكوك ذات الحدين.

وكذلك تتطابق قيم ${}_5C_0$ إلى ${}_5C_5$ مع قيم الصف السادس من مثلث باسكال.

يمكننا الاستنتاج أن معاملات حدود x, y في المفكوك $(x+y)^n$ هي قيم ${}_nC_r$ حيث $r = 0,1,2,3,4,\dots,n$

نظرية ذات الحدين

لأي عدد صحيح موجب n،

$$(x+y)^n = {}_nC_0x^n + {}_nC_1x^{n-1}y + {}_nC_2x^{n-2}y^2 + \dots\dots + {}_nC_rx^{n-r}y^r + \dots\dots + {}_nC_{n-1}xy^{n-1} + {}_nC_ny^n$$

خواص نظرية ذات الحدين **Properties of the Binomial Theorem**

1. مفكوك $(x+y)^n$ يتضمن $n+1$ حدًّا يرمز لها بـ: $T_1, T_2, \dots, T_{r+1}, \dots, T_n, T_{n+1}$
2. الحد الأول في المفكوك هو x^n، ثم ينقص أس x في الحدود التالية بمقدار الواحد على التوالي.
3. يبدأ ظهور العدد y في الحد الثاني، ثم يزيد أس العدد y بمقدار الواحد على التوالي حتى نصل إلى الحد الأخير في المفكوك ويكون y^n.
4. مجموع أسي x وy في أي حد من حدود المفكوك **ثابت** ويساوي الأس n.
5. معامل الحد T_1 يساوي معامل الحد T_{n+1}، ومعامل الحد T_2 يساوي معامل الحد T_n، وهكذا ...
6. الحد العام الذي رتبته $r+1$ يرمز له بالرمز: T_{r+1}

$$T_{r+1} = {}_nC_r \cdot x^{n-r} \cdot y^r$$

مثال (1)

استخدم نظرية ذات الحدين لفك كل من:

a $(x+y)^5$ b $(x-3)^6$ c $(x^2+3y)^4$

الحل:

بتطبيق نظرية ذات الحدين:

a $(x+y)^5 = {}_5C_0x^5 + {}_5C_1x^4y + {}_5C_2x^3y^2 + {}_5C_3x^2y^3 + {}_5C_4xy^4 + {}_5C_5y^5$
$= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

164

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) مفكوك $(c+1)^5$ هو: $c^5 + 5c^4 + 10c^3 + 10c^2 + 5c + 1$ (a) (b)

(2) إذا كان الحد $126c^4d^5$ أحد حدود مفكوك $(c+d)^n$، فإنّ قيمة n هي 5 (a) (b)

(3) إذا كان معامل الحد الثاني في مفكوك $(r+x)^n$ هو 7 فإنّ قيمة n هي 7 (a) (b)

(4) الحدّ الثاني من $(x+3)^9$ هو $54x^8$ (a) (b)

(5) معامل الحد السابع في مفكوك $(x-y)^7$ هو عدد سالب. (a) (b)

في التمارين (6–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة:

(6) مفكوك $(a-b)^3$ هو:

(a) $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$ (b) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
(c) $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$ (d) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

(7) الحد الثالث من مفكوك $(a-b)^7$ هو:

(a) $-21a^5b^2$ (b) $-7a^6b$
(c) $7a^6b$ (d) $21a^5b^2$

(8) في مفكوك $(2a-3b)^6$ الحد الذي معامله 2 160 هو:

(a) الحدّ الثاني (b) الحد الثالث
(c) الحد الرابع (d) الحد الخامس

(9) معامل الحد الثالث في مفكوك $(3c-4b)^5$ هو:

(a) 5 170 (b) 3 312
(c) 4 320 (d) 2 316

(10) في مفكوك $(x+y)^9$ تكون رتبة الحد: $126x^5y^4$ هي:

(a) الرابعة (b) الخامسة (c) السادسة (d) التاسعة

(11) في مفكوك $(3x+2y)^8$ الحد الذي يحوي x^3y^5 هو:

(a) T_3 (b) T_6 (c) T_5 (d) T_8

71

b $(x-3)^6 = {}_6C_0x^6 + {}_6C_1x^5(-3) + {}_6C_2x^4(-3)^2 + {}_6C_3x^3(-3)^3 + {}_6C_4x^2(-3)^4 + {}_6C_5x(-3)^5 + {}_6C_6(-3)^6$

$= x^6 + (6)(-3)x^5 + (15)(-3)^2x^4 + (20)(-3)^3x^3 + (15)(-3)^4x^2 + (6)(-3)^5x + (-3)^6$

$= x^6 - 18x^5 + 135x^4 - 540x^3 + 1215x^2 - 1\,458x + 729$

c $(x^2+3y)^4 = {}_4C_0(x^2)^4 + {}_4C_1(x^2)^3(3y) + {}_4C_2(x^2)^2(3y)^2 + {}_4C_3(x^2)^1(3y)^3 + {}_4C_4(3y)^4$

$= x^8 + 12x^6y + 54x^4y^2 + 108x^2y^3 + 81y^4$

حاول أن تحل

1 استخدم نظرية ذات الحدين لفك كل من:

a $(a-b)^4$ b $(d+2)^7$ c $(2x-y^2)^5$

مثال (2)

في مفكوك: $(2x-3y^2)^{10}$ أوجد الحدّ السابع.

الحل:

تكتب $(2x-3y^2)^{10}$ على الصورة $(2x+(-3y^2))^{10}$

الحدّ السابع هو: $T_{r+1} = {}_nC_r \cdot x^{n-r} \cdot y^r$

$T_7 = T_{6+1}$

$T_7 = {}_{10}C_6(2x)^4 \times (-3y^2)^6$

$= (210)(2^4)(-3)^6(x^4)(y^2)^6$

$= 2\,449\,440\,x^4y^{12}$

حاول أن تحل

2 في مفكوك: $(3x^2-y)^{15}$ أوجد معامل T_{12}

مثال (3)

أوجد الحد الذي يحتوي على x^3y^4 في مفكوك $(2x+3y)^7$

الحل:

الحد الذي رتبته $r+1$ هو: $T_{r+1} = {}_nC_r \cdot x^{n-r} \cdot y^r$

في مفكوك كثيرة الحدود $(2x+3y)^7$ ، $n=7$

$\because$ أس y يساوي 4 $\therefore$ $r=4$

165

اختبار سريع

1 أوجد مفكوك $(3-x)^4$ باستخدام مثلث باسكال.

$(3-x)^4 : 3^4 + 3^3(-x)^1 + 3^2(-x)^2 + 3^1(-x)^3 + (-x)^4$

يبقى إيجاد معامل كل حد من مثلث باسكال.

$0 \longrightarrow 1$

$1 \longrightarrow 1 \quad 1$

$2 \longrightarrow 1 \quad 2 \quad 1$

$3 \longrightarrow 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$

$4 \longrightarrow \boxed{1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1}$

$(3-x)^4 = 81 - 108x + 54x^2 - 12x^3 + x^4$

2 أوجد مفكوك $(2-y)^5$ باستخدام نظرية ذات الحدين.

$(2-y)^5 = {}_5C_0(2)^5 + {}_5C_1(2)^4(-y)^1$

$+ {}_5C_2(2)^3(-y)^2 + {}_5C_3(2)^2(-y)^3 + {}_5C_4(2)(-y)^4$

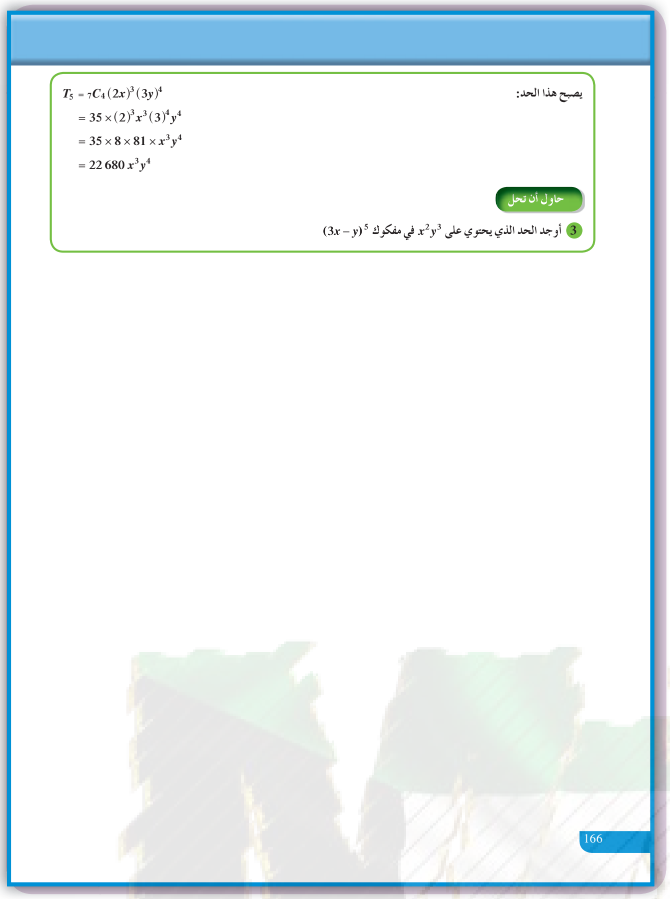
$+ {}_5C_5(2)(-y)^5$

$(2-y)^5 = 32 - 80y + 80y^2 - 40y^3 + 10y^4 - y^5$

3 أوجد الحد الذي يحتوي على x^4y^5 في مفكوك $(3x+2y)^9$

هذا الحد سوف يكون على الصورة

${}_9C_5(3x)^4(2y)^5$ وقيمته هي: $326\,592x^4y^5$



يصبح هذا الحد:

$$T_5 = {}_7C_4(2x)^3(3y)^4$$
$$= 35 \times (2)^3 x^3 (3)^4 y^4$$
$$= 35 \times 8 \times 81 \times x^3 y^4$$
$$= 22\,680\, x^3 y^4$$

حاول أن تحل

3 أوجد الحد الذي يحتوي على x^2y^3 في مفكوك $(3x-y)^5$

166

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a) $(x+1)^0 = 1$

$(x+1)^1 = x+1$

$(x+1)^2 = x^2+2x+1$

$(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$

(b) لا يمكن إيجاد مفكوك $(x+1)^{12}$ بسهولة.

(c) تتنوع الإجابات. مثال يتناقص أس x، 1 كل مرّة.

«حاول أن تحل»

1 **(a)** $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

(b) $(d+2)^7 = d^7 + 14d^6 + 84d^5 + 280d^4 + 560d^3$

$+672d^2 + 448d + 128$

(c) $(2x-y^2)^5 = 32x^5 - 80x^4y^2 + 80x^3y^4$

$-40x^2y^6 + 10xy^8 - y^{10}$

2 $T_{12} = {}_{15}C_{11} \times (3x^2)^4 \times (-y)^{11}$

معامله: $-110\,565$

3 $T_4 = {}_5C_3 \times (3x)^2(-y)^3$

$= -90x^2y^3$

«نشاط»

$6+1=7$

1 6 15 20 15 6 1

$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y^1 + 15x^4y^2 + 20x^3y^3$

$+15x^2y^4 + 6x^1y^5 + y^6$

3–11: الاحتمال

1 الأهداف

- يتعرف التجربة العشوائية.
- يتعرف فضاء العينة.
- يتعرف بعض نظريات الاحتمال.
- يوجد احتمالات الأحداث.
- يوجد احتمالات الأحداث المتنافية ومتمم الحدث.
- يوجد احتمالات الأحداث المستقلة.
- يوجد احتمال ذات الحدين.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

الاحتمال – التجربة العشوائية – فضاء العينة – حدث بسيط – حدث مركب – حدث مستحيل – حدث مؤكد – حدثان متنافيان – حدث متمم – حدثان مستقلان – التقاطع – الاتحاد – المتمم – احتمال ذات الحدين.

3 الأدوات والوسائل

أحجار نرد – آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show) – قطع نقود معدنية – كرات ملونة – كرات مرقمة.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

أوجد مفكوك ما يلي:

(a) $(x+4)^6$ **(b)** $(2x-4)^4$ **(c)** $(3x+2y)^7$

أوجد النواتج الممكنة لكل حدث مما يلي:

(a) إذا ألقيت قطعة نقود معدنية.

(b) إذا دحرجت مكعبًا مرقمًا بالأعداد من 1 إلى 6 بحيث إن كل وجه يحمل عددًا واحدًا.

(c) درجة اختبار في إحدى المواد حيث النهاية العظمى 20 درجة.

5 التدريس

لقد أصبح لدى الطالب مكتسبات مهمة لاحتمال حدث معين وذلك من المرحلة الابتدائية مرورًا بالمرحلة المتوسطة وصولًا إلى المرحلة الثانوية ولم يعد مفهوم احتمال حدث معين ظاهرة جديدة للطالب. في هذا الدرس سوف يكمل الطالب بناء هذا المفهوم الرياضي باستكشاف التجربة العشوائية ومنها فضاء العينة.

اسأل الطلاب:

إذا ألقينا قطعة نقود معدنية فهل نعرف مسبقًا على أي وجه ستقع؟

إذا دحرجنا حجر النرد فهل نعرف مسبقًا أي عدد سوف يظهر على الوجه العلوي؟

إذا تقدمت إلى اختبار في مادة الرياضيات فهل تعرف الدرجة التي سوف تحصل عليها؟

وغيرها من الأسئلة التي يمكن أن تجول في الخاطر.

اشرح لهم بإسهاب التجربة العشوائية وأن النواتج كافة الممكنة الحدوث تشكل فضاء العينة.

في المثال (1)

ركّز للطلاب على الفرق بين فضاء العينة الذي يتضمن النتائج الممكنة كافة والحدث الذي هو جزء من فضاء العينة. اعرض أمامهم أمثلة متنوعة، ثم اسألهم في كل مثل عن فضاء العينة ونوعية الحدث الذي تختاره. استمع إلى شرحهم عن الحدث البسيط، والحدث المركب، والحدث المستحيل، والحدث المؤكد، والحدثين المتنافيين، والحدث المتمم لحدث معين وأخيرًا الحدثين المستقلين. اطلب إلى بعض منهم عرض أمثلة عن تجارب عشوائية لتحديد فضاء العينة والأحداث التي سبق أن عرضناها.

في المثال (2)

أخبرهم أن: $\text{احتمال الحدث} = \dfrac{\text{عدد النواتج في الحدث}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$

هو قاعدة الاحتمال لحدث عندما يكون كل عنصر في فضاء العينة له فرصة الظهور مثل كل عنصر آخر. وأن عدد النواتج في الحدث يشكل جزءًا من فضاء العينة والذي هو عدد النواتج الممكنة وبالتالي احتمال وقوع حدث ما يكون دائمًا عددًا ينتمي إلى الفترة $[0, 1]$.

حدثان مستقلان

Independant Events

يقال للحدثين A, B أنهما مستقلان إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر على وقوع الآخر أثناء التجربة العشوائية.

مثال توضيحي

عند رمي حجر نرد أعط مثالًا على كل من:

a حدث بسيط
b حدث مركب
c حدث مستحيل
d حدث مؤكد
e حدثين متنافيين
f حدث متمم
g حدثين مستقلين

الحل:

a ظهور العدد 5 هو حدث بسيط.
b ظهور أحد مضاعفات العدد 3 هو حدث مركب.
c ظهور العدد 8 هو حدث مستحيل.
d ظهور عدد من 1 إلى 6 هو حدث مؤكد.
e الحدثان: A: «ظهور أحد العددين 5 أو 6»،
B: «ظهور عدد أصغر من 4» هما حدثان متنافيان.
f إذا كان الحدث A: «ظهور أحد العددين 5 أو 6»
فإن الحدث $\overline{A}$: «ظهور عدد أصغر من أو يساوي 4» هو الحدث المتمم للحدث A
g إذا رمينا حجر النرد مرتين، الحدثان A: «ظهور العدد 5 في المرة الأولى»،
B: «ظهور العدد 4 في المرة الثانية» هما حدثان مستقلان.

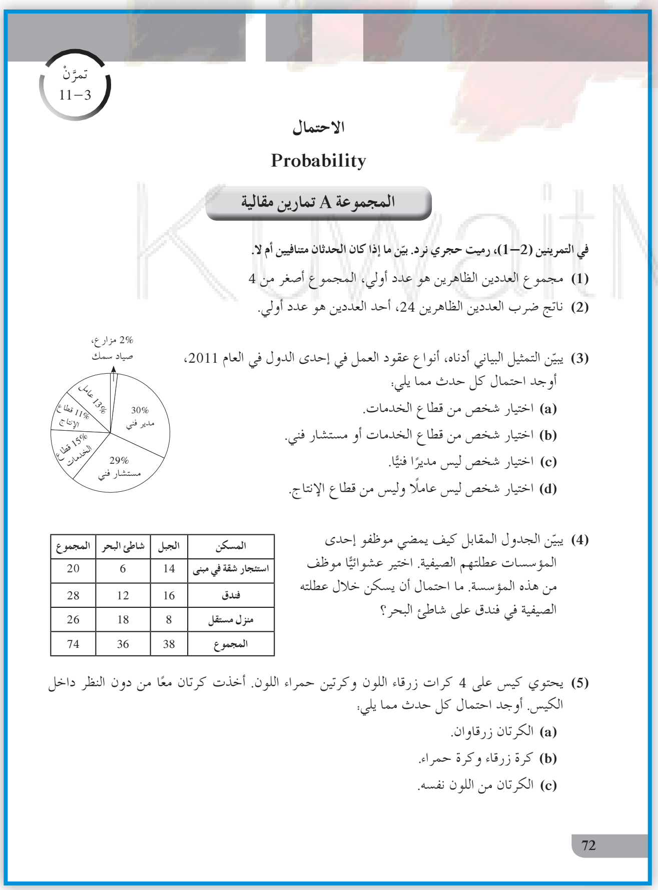
مثال (1)

في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة وملاحظة الوجه العلوي.

1 اكتب وحدد نوع كلٍ من الأحداث التالية:
a A: ظهور عدد أكبر من 5
b B: ظهور عدد فردي
c C: ظهور عدد زوجي
d D: ظهور عدد أصغر من 7

2 a أثبت أن B, C حدثان متتامان.
b بيّن فيما إذا كان الحدثان C, D متنافيان أم لا.

169



تمرَّنْ
11−3

الاحتمال

Probability

المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (2−1)، رميت حجري نرد. بيّن ما إذا كان الحدثان متنافيين أم لا.

(1) مجموع العددين الظاهرين هو عدد أولي، المجموع أصغر من 4
(2) ناتج ضرب العددين الظاهرين 24، أحد العددين هو عدد أولي.

(3) يبيّن التمثيل البياني أدناه، أنواع عقود العمل في إحدى الدول في العام 2011،
أوجد احتمال كل حدث مما يلي:
(a) اختيار شخص من قطاع الخدمات.
(b) اختيار شخص من قطاع الخدمات أو مستشار فني.
(c) اختيار شخص ليس مديرًا فنيًّا.
(d) اختيار شخص ليس عاملًا وليس من قطاع الإنتاج.

(4) يبيّن الجدول المقابل كيف يمضي موظفو إحدى المؤسسات عطلتهم الصيفية. اختير عشوائيًّا موظف من هذه المؤسسة. ما احتمال أن يسكن خلال عطلته الصيفية في فندق على شاطئ البحر؟

المسكن	الجبل	شاطئ البحر	المجموع
استئجار شقة في مبنى	14	6	20
فندق	16	12	28
منزل مستقل	8	18	26
المجموع	38	36	74

(5) يحتوي كيس على 4 كرات زرقاء اللون وكرتين حمراء اللون. أخذت كرتان معًا من دون النظر داخل الكيس. أوجد احتمال كل حدث مما يلي:
(a) الكرتان زرقاوان.
(b) كرة زرقاء وكرة حمراء.
(c) الكرتان من اللون نفسه.

72

احتمال الحدث المستحيل = صفر

احتمال الحدث المؤكد = 1

ويمكن كتابة (الحدث)P على صورة كسر اعتيادي كما يمكن تحويله إلى كسر عشري أو نسبة مئوية.

أخبر الطلاب أن هذا الجدول يدعى الجدول ذا مدخلين حيث يدرس الطالب حدثين معًا: وسيلة النقل والشعبة. ويسمح هذا الجدول باتخاذ قرارات واضحة ودقيقة.

في المثال (3)

هذا المثال هو تطبيق مباشر لمفهوم الاحتمال:

$$\frac{\text{عدد النواتج في الحدث}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$$

مع التنبيه إلى أن اختيار محمد هو ملزم ويكفي اختيار طالبين من بين بقية الطلاب.

في المثال (4)

اشرح لهم من خلال أمثلة معنى الحدثين المتنافيين والحدثين المستقلين فإذا كان:

$A \cap B = \varnothing$ $(A, B$ متنافيان) فمن الطبيعي أن $P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$ وإذا كان:

A, B مستقلين فإن: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

توسع في حالة الاحتمال لاتحاد حدثين لجهة إذا كانا متنافيين أو إذا كانا غير مستقلين.

في المثال (5)

يعبر هذا المثال عن حالة الاحتمال لحدثين متنافيين، حيث إنه لا يوجد تقاطع بين الطلاب الذين أعمارهم أصغر من 25 سنة والطلاب الذين أعمارهم أكبر من 34 سنة. لهذا السبب:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

ملاحظة:
نرمز لاحتمال الحدث E بالرمز $P(E)$.

الحل:

1 a $A = \{6\}$, $n(A) = 1$

$\therefore$ A حدث بسيط.

b $B = \{1, 3, 5\}$, $n(B) = 3$

$\therefore$ B حدث مركب.

c $C = \{2, 4, 6\}$, $n(C) = 3$

$\therefore$ C حدث مركب.

d $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $n(D) = 6$

$\therefore$ D حدث مؤكد.

2 ليكن S فضاء العينة.

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

a $B \cup C = \{1, 3, 5, 2, 4, 6\} = S, B \cap C = \phi$

$\therefore$ B, C حدثان متتامان.

b $C \cap D = \{2, 4, 6\} \neq \phi$

$\therefore$ الحدثان C, D ليسا متنافيان.

حاول أن تحل

1 في أحد المخيمات الصيفية يشارك الطالب في مجموعة من الأنشطة وهي: كرة القدم، كرة السلة، كرة المضرب، الكرة الطائرة، السباحة وركوب الدراجات.

a اكتب وحدد نوع كل من الأحداث التالية:

(1) A: المشاركة في كرة المضرب فقط.

(2) B: المشاركة في الأنشطة التي تستخدم فيها كرة كبيرة.

(3) C: المشاركة في الأنشطة التي لا تستخدم فيها كرة.

b (1) بيّن فيما إذا كان الحدثان B, C متتامان أم لا.

(2) أعط مثالًا عن حدثين متنافيين.

الاحتمال Probability

إذا كانت جميع نواتج التجربة العشوائية لها فرصة الظهور نفسها فإن احتمال الحدث هو:

$$P(E) = \frac{E \text{ عدد نواتج الحدث}}{S \text{ عدد نواتج فضاء العينة}} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

170

لأن أي حدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة، فإن عدد نواتج حدث ما يكون دائمًا **أصغر من أو يساوي** عدد نواتج فضاء العينة لذلك فإن احتمال وقوع حدث ما يكون دائمًا **عددًا ينتمي إلى الفترة [0, 1]**

خواص الاحتمال لحدث ما Properties of the Probabilty of an Event

E حدث في فضاء عينة S حيث S منته وغير خالٍ

a $0 \leq P(E) \leq 1$

b إذا كان E حدثًا مستحيلًا، فإن $P(E) = 0$

c إذا كان E حدثًا مؤكدًا، فإن $P(E) = 1$

d مجموع احتمالات كل الأحداث البسيطة في فضاء العينة = 1

مثال (2)

يبيّن الجدول المقابل وسيلة النقل التي يستخدمها طلاب الصف الحادي عشر بشعبتيه للمجيء إلى المدرسة.

اختير طالب عشوائيًّا من بين طلاب شعبتي الصف الحادي عشر.

ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الذين يستقلون الحافلة المدرسية للمجيء إلى المدرسة؟

وسيلة النقل	الشعبة A	الشعبة B	المجموع
الحافلة المدرسية	16	15	31
مع الأهل	6	8	14
سيارة نقل عام	2	5	7
المجموع	24	28	52

الحل:

لنفرض الحدث E: «المجيء بالحافلة المدرسيّة إلى المدرسة».

عدد نواتج الحدث E: $16 + 15 = 31$

عدد نواتج فضاء العينة S: $(16 + 6 + 2) + (15 + 8 + 5) = 52$

$P(E) = \frac{31}{52}$

حاول أن تحل

2 في المثال (2)، a ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الذين يقلونهم أهلهم إلى المدرسة؟

b ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الشعبة B؟

مثال (3)

حصل الطلاب: مصطفى، محمد، طه، أحمد، أمين على الدرجة النهائية العظمى في اختبار الرياضيات وأراد مدير المدرسة اختيار 3 منهم لتمثيل المدرسة في مسابقة ثقافية.

ما احتمال اختيار «محمد»؟

171

في المثال (6)

يعبّر هذا المثال عن حالة الاحتمال لحدثين غير متنافيين إذ يوجد تقاطع بين الحدث الأول A(مضاعفات العدد 3) والحدث الثاني B(عدد زوجي) لهذا السبب:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ركّز مع الطلاب مفهوم احتمال ذات الحدين وأنه لا يمكن استخدام قاعدة هذا الاحتمال إلا في تحقق الشرطين التاليين معًا كما ورد في كتاب الطالب:

- إذا تكرر الحدث عدة مرات.
- إذا كان هناك ناتجان للحدث فقط.

أكّد لهم أن الشرط $P(A) + P(B) = 1$ هو أساسي لاستخدام احتمال ذات الحدين وأنه في التجربة العشوائية إذا كان حصول الحدث A هو k مرة من أصل n مرة فيكون: $P(A) = {}_nC_k (P(A))^k \times (P(B))^{n-k}$

توسع في النقاش والحوار مع الطلاب أثناء العمل في المثالين (8)، (9)، حيث تتنوع في التطبيق لاحتمال ذات الحدين.

في المثال (7)

هذا المثال هو تطبيق لمبدأ احتمال ذات الحدين لأنه مع راشد 3 بطاقات والفوز بجائزتين يعني أن بطاقتين هما فائزتان وبطاقة غير فائزة باحتمال: $100\% - 40\% = 60\%$

في المثال (8)

هذا المثال هو تطبيق لاحتمال ذات الحدين، الحالة الخاصة حيث $k = 4$ وتعني أن تخدم كل من البطاريات الأربع مدة عام.

6 الربط

إن الأمثلة كافة في هذا الدرس توفر الربط بين المفاهيم والمهارات والمواقف الحياتية التي نصادفها.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

يمكن أن تتعدد الأخطاء في هذا الدرس فلا يميز الطلاب بين الأحداث المتنافية والأحداث المستقلة أو كيفية استخدام احتمال ذات الحدين. ساعدهم على فهم هذه الأحداث.

الحل:

احتمال الحدث:

$$P(E) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث } E}{\text{عدد نواتج فضاء العينة } S} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

∵ نتكلم عن المجموعة ∴ ترتيب العناصر غير مهم.

(i) عدد نواتج فضاء العينة:

اختيار 3 طلاب من بين 5: $n(S) = {}_5C_3 = \frac{5!}{(5-3)! \times 3!} = 10$

(ii) عدد نواتج الحدث E:

اختيار محمد بطريقة واحدة $_1C_1 = 1$

يبقى اختيار طالبين من بين الأربعة المتبقين: $_4C_2 = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = 6$

∴ عدد نواتج الحدث E: $_1C_1 \times {}_4C_2 = 1 \times 6 = 6$

$P(E) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

احتمال اختيار «محمد» يساوي $\frac{3}{5}$

حاول أن تحل

3 في المثال (3)، اعتذر طه عن المشاركة. فما احتمال اختيار «محمد»؟

درست فيما سبق بعض القواعد التي تساعد في إيجاد احتمال بعض الأحداث A، B في فضاء العينة S:

A، B حدثان فإن $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

A، B حدثان متنافيان $\Longleftrightarrow$ $P(A \cap B) = 0$

A، B حدثان مستقلان $\Longleftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\overline{A}$ هو الحدث المتمم للحدث A $\Longleftrightarrow$ $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

معلومة:

$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$

$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

مثال (4)

يتصل المستمعون بإحدى الإذاعات، لتسمية أغنيتهم المفضلة.
تختار إدارة الإذاعة كل ساعة 4 مستمعين وتبث أغانيهم.
اتصلت مرتين، الأولى بعد الثامنة صباحًا والثانية بعد الثالثة بعد الظهر.
الجدول المقابل يبيّن عدد المتصلين، فما احتمال أن تبث الإذاعة الأغنيتين المفضلتين لديك؟

الساعة	عدد المتصلين
الثامنة صباحًا	125
الثالثة بعد الظهر	200

الحل:

ليكن الحدث A: «تم اختيارك من بين متصلي الساعة الثامنة»

الحدث B: «تم اختيارك من بين متصلي الساعة الثالثة»

توضيح:
اختيارك بين متصلي الساعة الثامنة يعني اختيارك واختيار 3 من بقية المتصلين أي من بين 124

172

---

(6) إذا كان الحدثان r, t غير متنافيين، أكمل الجدول أدناه لإيجاد كل احتمال.

	$P(t)$	$P(r)$	$P(t \cap r)$	$P(t \cup r)$
(a)	$\frac{7}{11}$	$\frac{3}{11}$		$\frac{9}{11}$
(b)	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$
(c)		$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$
(d)	$\frac{2}{x}$	$\frac{3}{2x}$	$\frac{1}{x}$	

(7) إذا كان الحدثان r, t متنافيان. أوجد $P(t \cup r)$.

(a) $P(t) = \frac{5}{8}$, $P(r) = \frac{1}{8}$ (b) $P(t) = 12\%$, $P(r) = 27\%$

(8) إذا كان الحدثان m, n مستقلّان. أوجد $P(m \cap n)$.

(a) $P(m) = \frac{1}{4}$; $P(n) = \frac{2}{3}$ (b) $P(m) = 0.6$; $P(n) = 0.9$

(9) في أحد البلدان، 30% من السكان هم تحت سن العشرين، 17% فوق الستين. اختير شخص من السكان عشوائيًّا. فما احتمال أن يكون تحت سن العشرين أو فوق الستين؟

(10) رميت حجر نرد. أوجد احتمال كل من الأحداث التالية:

(a) 3 أو عدد فردي.

(b) عدد زوجي أو عدد أصغر من 4

(c) عدد فردي أو عدد أولي.

(d) 4 أو عدد أصغر من 6

(11) في إحدى المدن، وافق 40% من السكان على مرور القطار السريع في الغابة قرب مدينتهم. اختير 10 أشخاص عشوائيًّا من سكان المدينة، فما احتمال أن يكون 4 منهم قد وافقوا على مرور القطار السريع؟

(12) يستخدم حوالى 11% من الطلاب اليد اليسرى للكتابة. يوجد في أحد الصفوف 30 طالبًا. فما احتمال أن يكون 4 طلاب من هذا الصف يستخدمون اليد اليسرى للكتابة؟

73

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يتعاملون مع تمارين فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من قدرتهم على استيعاب المفاهيم والمهارات التي وردت في هذا الدرس.

اختبار سريع

1 اكتب فضاء العينة إذا ألقيت قطعة نقود معدنية لمرتين متتاليتين، بحيث إن أحد الوجوه يحمل كتابة (T) والوجه الآخر يحمل صورة (H).

فضاء العينة: $E = \{TT, HT, TH, HH\}$

2 في كيس 4 كرات حمراء اللون، 6 كرات صفراء اللون سحبت عشوائيًّا 3 كرات من هذا الكيس. ما احتمال الحصول على كرة واحدة حمراء اللون وكرتين صفراوي اللون؟

$$P(\text{الحدث}) = \frac{{}_4C_1 \times {}_6C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{4 \times 15}{120}$$
$$= \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

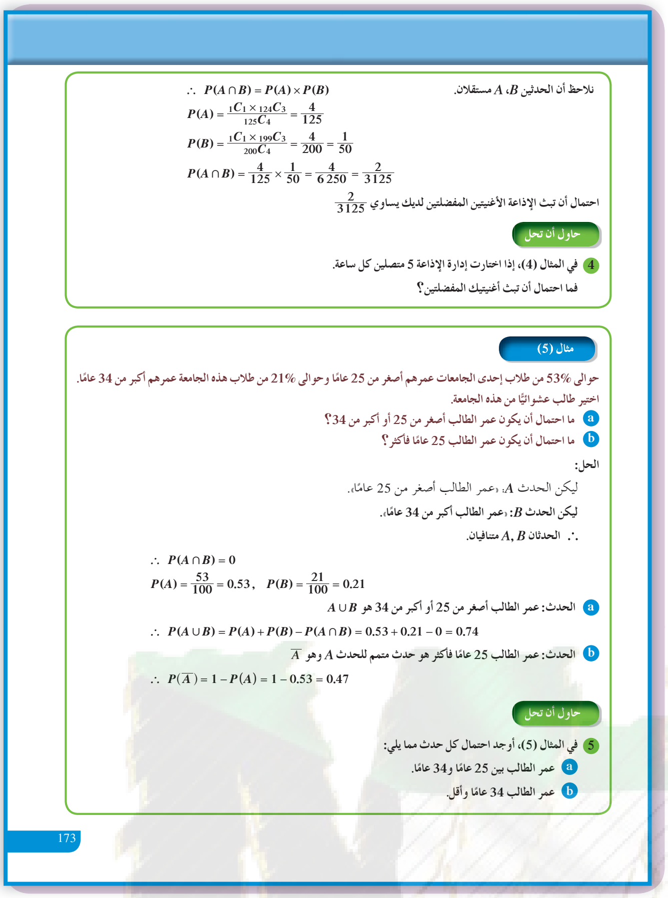
3 في كيس كرات مرقمة من 1 إلى 10 سحبت من الكيس عشوائيًّا كرة واحدة. ما احتمال أن تحمل هذه الكرة عددًا من مضاعفات 2 أو عددًا أصغر من 7؟

فضاء العينة: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

الحدث: $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

الحدث: $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$A \cap B = \{2, 4, 6\}$$
$$P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$
$$P(A \cap B) = \frac{3}{10}$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{5}{10} + \frac{6}{10} - \frac{3}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$


نلاحظ أن الحدثين A، B مستقلان.

$$\therefore \; P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$
$$P(A) = \frac{{}_1C_1 \times {}_{124}C_3}{{}_{125}C_4} = \frac{4}{125}$$
$$P(B) = \frac{{}_1C_1 \times {}_{199}C_3}{{}_{200}C_4} = \frac{4}{200} = \frac{1}{50}$$
$$P(A \cap B) = \frac{4}{125} \times \frac{1}{50} = \frac{4}{6\,250} = \frac{2}{3125}$$

احتمال أن تبث الإذاعة الأغنيتين المفضلتين لديك يساوي $\frac{2}{3125}$

حاول أن تحل

4 في المثال (4)، إذا اختارت إدارة الإذاعة 5 متصلين كل ساعة.
فما احتمال أن تبث أغنيتيك المفضلتين؟

مثال (5)

حوالى 53% من طلاب إحدى الجامعات عمرهم أصغر من 25 عامًا وحوالى 21% من طلاب هذه الجامعة عمرهم أكبر من 34 عامًا.
اختير طالب عشوائيًّا من هذه الجامعة.

a ما احتمال أن يكون عمر الطالب أصغر من 25 أو أكبر من 34؟

b ما احتمال أن يكون عمر الطالب 25 عامًا فأكثر؟

الحل:

ليكن الحدث A: «عمر الطالب أصغر من 25 عامًا».

ليكن الحدث B: «عمر الطالب أكبر من 34 عامًا».

$\therefore$ الحدثان A, B متنافيان.

$$\therefore \; P(A \cap B) = 0$$
$$P(A) = \frac{53}{100} = 0.53, \quad P(B) = \frac{21}{100} = 0.21$$

a الحدث: عمر الطالب أصغر من 25 أو أكبر من 34 هو $A \cup B$

$$\therefore \; P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.53 + 0.21 - 0 = 0.74$$

b الحدث: عمر الطالب 25 عامًا فأكثر هو حدث متمم للحدث A وهو $\overline{A}$

$$\therefore \; P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.53 = 0.47$$

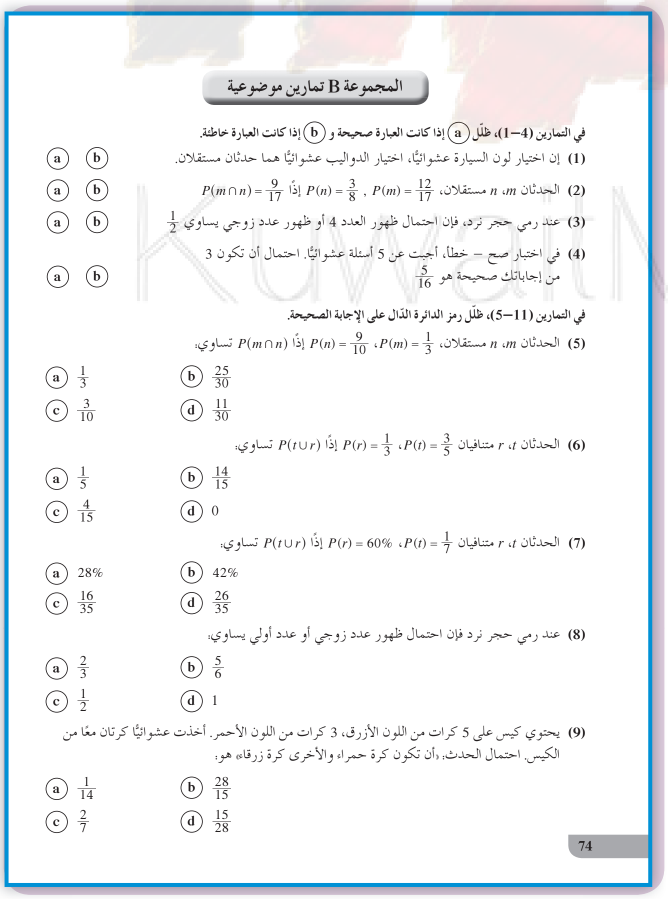
حاول أن تحل

5 في المثال (5)، أوجد احتمال كل حدث مما يلي:

a عمر الطالب بين 25 عامًا و34 عامًا.

b عمر الطالب 34 عامًا وأقل.

173


المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إن اختيار لون السيارة عشوائيًّا، اختيار الدواليب عشوائيًّا هما حدثان مستقلان. (a) (b)

(2) الحدثان m، n مستقلان، $P(m) = \frac{12}{17}$ ، $P(n) = \frac{3}{8}$ إذًا $P(m \cap n) = \frac{9}{17}$ (a) (b)

(3) عند رمي حجر نرد، فإن احتمال ظهور العدد 4 أو ظهور عدد زوجي يساوي $\frac{1}{2}$ (a) (b)

(4) في اختبار صح – خطأ، أجبت عن 5 أسئلة عشوائيًّا. احتمال أن تكون 3 من إجاباتك صحيحة هو $\frac{5}{16}$ (a) (b)

في التمارين (5–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) الحدثان m، n مستقلان، $P(m) = \frac{1}{3}$، $P(n) = \frac{9}{10}$ إذًا $P(m \cap n)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{25}{30}$
(c) $\frac{3}{10}$ (d) $\frac{11}{30}$

(6) الحدثان t، r متنافيان $P(t) = \frac{3}{5}$، $P(r) = \frac{1}{3}$ إذًا $P(t \cup r)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{14}{15}$
(c) $\frac{4}{15}$ (d) 0

(7) الحدثان t، r متنافيان $P(t) = \frac{1}{7}$، $P(r) = 60\%$ إذًا $P(t \cup r)$ تساوي:

(a) 28% (b) 42%
(c) $\frac{16}{35}$ (d) $\frac{26}{35}$

(8) عند رمي حجر نرد فإن احتمال ظهور عدد زوجي أو عدد أولي يساوي:

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{5}{6}$
(c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

(9) يحتوي كيس على 5 كرات من اللون الأزرق، 3 كرات من اللون الأحمر. أخذت عشوائيًّا كرتان معًا من الكيس. احتمال الحدث: «أن تكون كرة حمراء والأخرى كرة زرقاء» هو:

(a) $\frac{1}{14}$ (b) $\frac{28}{15}$
(c) $\frac{2}{7}$ (d) $\frac{15}{28}$

74

4 إحدى قطع النقود المعدنية صنعت بشكل خاطئ إذ تبيّن أن احتمال الحصول على وجه الكتابة هو 0.65 أي $P(T) = 0.65$ واحتمال الحصول على وجه الصورة هو 0.35 أي $P(H) = 0.35$.
ألقيت هذه القطعة 10 مرات متتالية.
ما احتمال الحصول على وجه الكتابة 8 مرات؟

نستخدم احتمال ذات الحدين.

$$P(\text{الحدث}) = {}_{10}C_8\,(0.65)^8 \times (0.35)^2$$

$$\approx 45 \times 0.032 \times 0.1225 \approx 0.176$$

9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

1 تتعدد إجابات الطلاب كلّ بحسب النتائج التي يحصل عليها.

2 شكل الخيمة الأكثر توقعًا والحرف الأقل توقعًا.

3 الوجهة الصغرى: 20%

الوجهة الكبرى: 30%

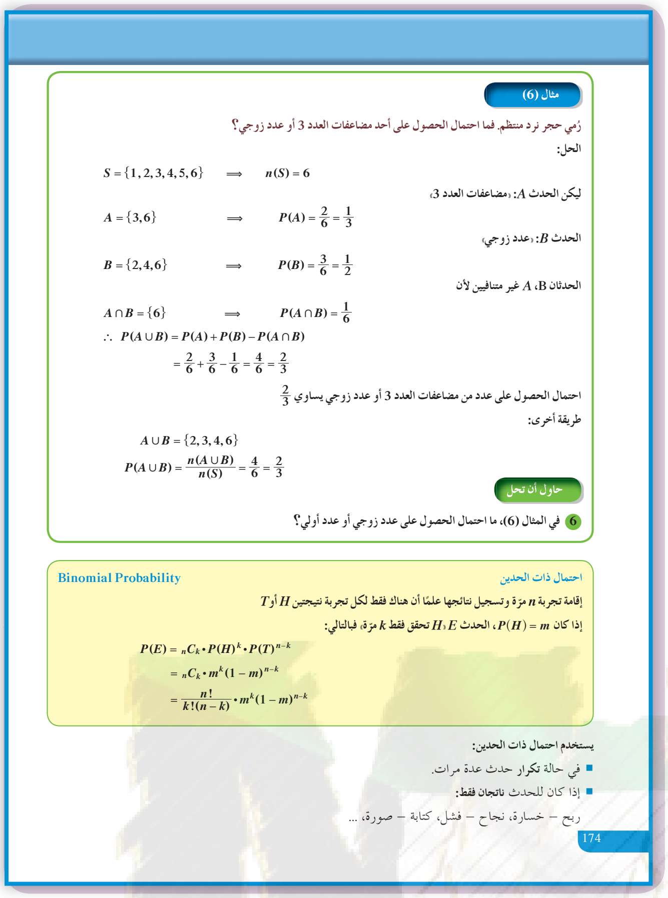
شكل الخيمة: 35%

الحرف: 15%

4 **(a)** قد تختلف الإجابات.

(b) قد تختلف الإجابات.

(c) تحقق من إجابات الطلاب. يمكن تحسين التوقع بزيادة المحاولات لإفلات الورقة.



مثال (6)

رُمي حجر نرد منتظم. فما احتمال الحصول على أحد مضاعفات العدد 3 أو عدد زوجي؟

الحل:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \implies n(S) = 6$

ليكن الحدث A: «مضاعفات العدد 3»

$A = \{3, 6\} \implies P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

الحدث B: «عدد زوجي»

$B = \{2, 4, 6\} \implies P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

الحدثان B، A غير متنافيين لأن

$A \cap B = \{6\} \implies P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$\therefore\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

احتمال الحصول على عدد من مضاعفات العدد 3 أو عدد زوجي يساوي $\frac{2}{3}$

طريقة أخرى:

$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$

$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

حاول أن تحل

6 في المثال (6)، ما احتمال الحصول على عدد زوجي أو عدد أولي؟

احتمال ذات الحدين **Binomial Probability**

إقامة تجربة n مرّة وتسجيل نتائجها علمًا أن هناك فقط لكل تجربة نتيجتين H أو T

إذا كان $P(H) = m$، الحدث E، H تحقق فقط k مرّة، فبالتالي:

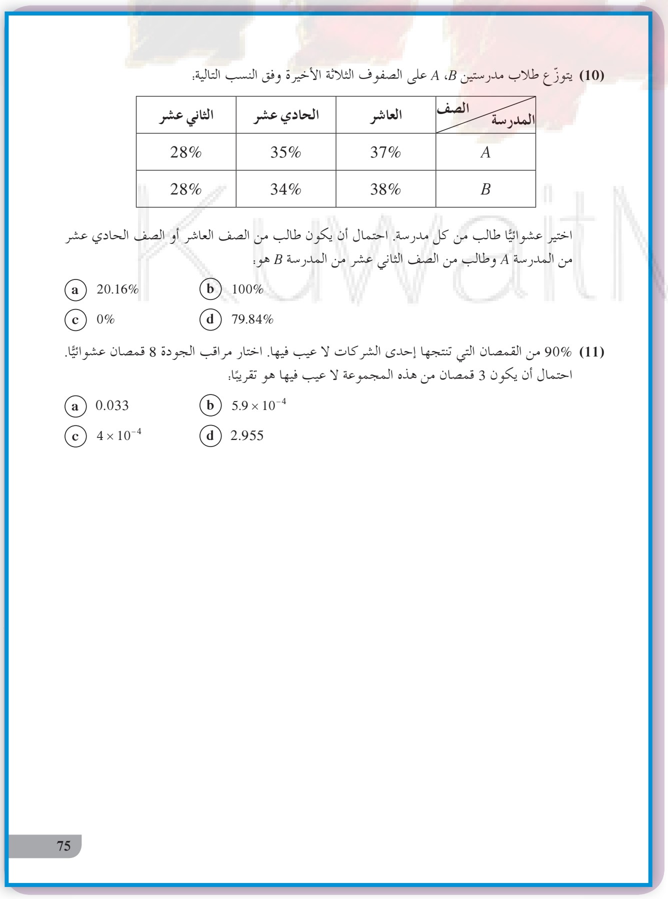
$$P(E) = {}_nC_k \cdot P(H)^k \cdot P(T)^{n-k}$$
$$= {}_nC_k \cdot m^k (1 - m)^{n-k}$$
$$= \frac{n!}{k!(n-k)} \cdot m^k (1 - m)^{n-k}$$

يستخدم احتمال ذات الحدين:

- في حالة **تكرار** حدث عدة مرات.
- إذا كان للحدث **ناتجان فقط:**

ربح – خسارة، نجاح – فشل، كتابة – صورة، ...

174



(10) يتوزّع طلاب مدرستين B، A على الصفوف الثلاثة الأخيرة وفق النسب التالية:

المدرسة \ الصف	العاشر	الحادي عشر	الثاني عشر
A	37%	35%	28%
B	38%	34%	28%

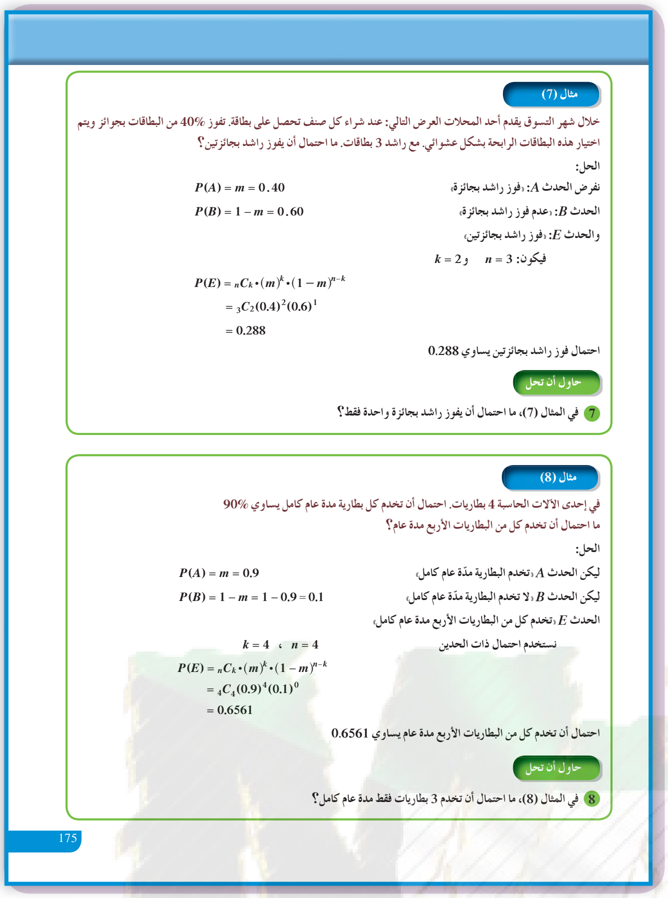
اختير عشوائيًا طالب من كل مدرسة. احتمال أن يكون طالب من الصف العاشر أو الصف الحادي عشر من المدرسة A وطالب من الصف الثاني عشر من المدرسة B هو:

(a) 20.16% (b) 100%
(c) 0% (d) 79.84%

(11) 90% من القمصان التي تنتجها إحدى الشركات لا عيب فيها. اختار مراقب الجودة 8 قمصان عشوائيًا. احتمال أن يكون 3 قمصان من هذه المجموعة لا عيب فيها هو تقريبًا:

(a) 0.033 (b) 5.9×10^{-4}
(c) 4×10^{-4} (d) 2.955

75


مثال (7)

خلال شهر التسوق يقدم أحد المحلات العرض التالي: عند شراء كل صنف تحصل على بطاقة. تفوز 40% من البطاقات بجوائز ويتم اختيار هذه البطاقات الرابحة بشكل عشوائي. مع راشد 3 بطاقات. ما احتمال أن يفوز راشد بجائزتين؟

الحل:

نفرض الحدث A: «فوز راشد بجائزة» $P(A) = m = 0.40$

الحدث B: «عدم فوز راشد بجائزة» $P(B) = 1 - m = 0.60$

والحدث E: «فوز راشد بجائزتين»

فيكون: $n = 3$ و $k = 2$

$$P(E) = {}_nC_k \cdot (m)^k \cdot (1-m)^{n-k}$$
$$= {}_3C_2 (0.4)^2 (0.6)^1$$
$$= 0.288$$

احتمال فوز راشد بجائزتين يساوي 0.288

حاول أن تحل

7 في المثال (7)، ما احتمال أن يفوز راشد بجائزة واحدة فقط؟

مثال (8)

في إحدى الآلات الحاسبة 4 بطاريات. احتمال أن تخدم كل بطارية مدة عام كامل يساوي 90%
ما احتمال أن تخدم كل من البطاريات الأربع مدة عام؟

الحل:

ليكن الحدث A «تخدم البطارية مدّة عام كامل» $P(A) = m = 0.9$

ليكن الحدث B «لا تخدم البطارية مدّة عام كامل» $P(B) = 1 - m = 1 - 0.9 = 0.1$

الحدث E «تخدم كل من البطاريات الأربع مدة عام كامل»

نستخدم احتمال ذات الحدين $n = 4$ ، $k = 4$

$$P(E) = {}_nC_k \cdot (m)^k \cdot (1-m)^{n-k}$$
$$= {}_4C_4 (0.9)^4 (0.1)^0$$
$$= 0.6561$$

احتمال أن تخدم كل من البطاريات الأربع مدة عام يساوي 0.6561

حاول أن تحل

8 في المثال (8)، ما احتمال أن تخدم 3 بطاريات فقط مدة عام كامل؟

175

«حاول أن تحل»

1 (a) (1) حدث بسيط.

(2) حدث مركب.

(3) حدث مركب.

(b) (1) الحدثان غير متنامين.

$B =$ {كرة القدم، كرة السلة، الكرة الطائرة}

$C =$ {السباحة، ركوب الدراجات}

يبقى كرة المضرب.

(2) الحدثان: A: «ركوب الدراجات»

B: «كرة المضرب» هما حدثان متنافيان.

2 (a) $P = \frac{14}{52} = \frac{7}{26}$

(b) $\frac{28}{52} = \frac{7}{13}$

3 $\frac{{}_1C_1 \cdot {}_3C_2}{{}_4C_3} = \frac{3}{4}$

4 $\frac{{}_{124}C_4}{{}_{125}C_5} \times \frac{{}_{199}C_4}{{}_{200}C_5} = \frac{1}{25} \times \frac{1}{40} = \frac{1}{1000}$

5 (a) 26%

(b) 79%

6 $\frac{5}{6}$

7 ${}_3C_1 \times (0.40)^1 \times (0.60)^2 = 0.432$

8 ${}_4C_3 \times (0.9)^3 \times (0.1)^1 = 0.2916$

المرشد لحل المسائل

إجابة «مسألة إضافية»

$P(\text{يصيب الهدف}) = 0.2$

$P(\text{لا يصيب الهدف}) = 0.8$

$P(\text{على الأقل يصيب الهدف مرتين})$

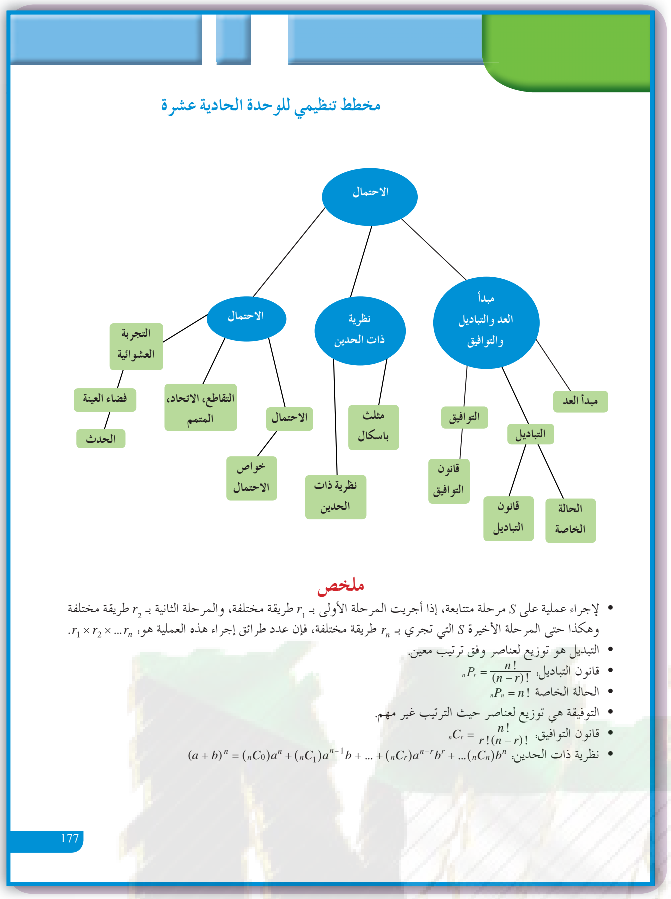
$$= {}_7C_2(0.2)^2(0.8)^5 + {}_7C_3(0.2)^3(0.8)^4$$

$$+ {}_7C_4(0.2)^4(0.8)^3 + {}_7C_5(0.2)^5(0.8)^2$$

$$+ {}_7C_6(0.2)^6(0.8)^1 + {}_7C_7(0.2)^7$$

$$\approx 0.2753 + 0.115 + 0.0287 + 0.0043$$

$$+ 0.001 + 0.00001 \approx 0.424$$

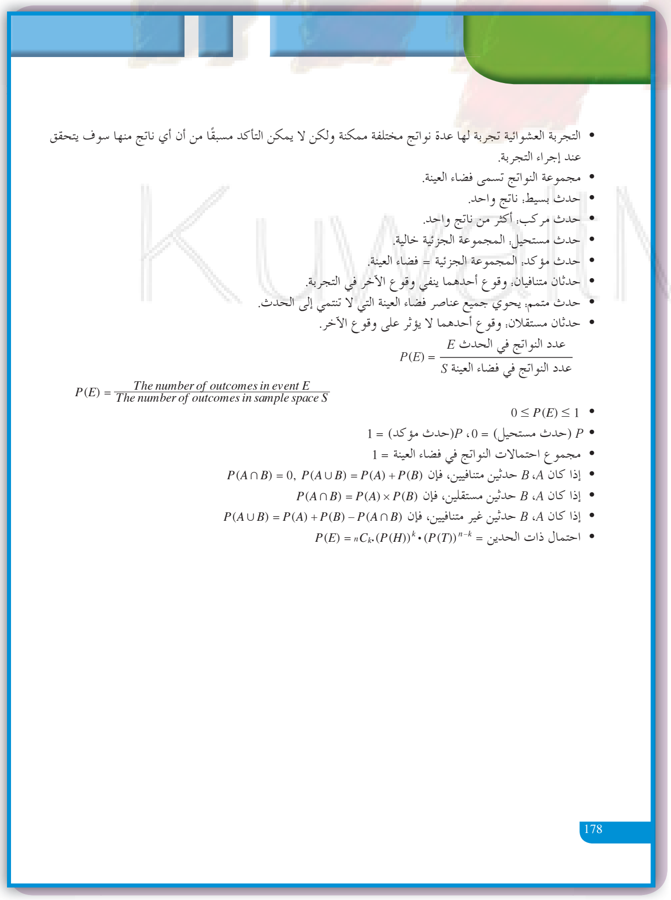


مخطط تنظيمي للوحدة الحادية عشرة

ملخص

- لإجراء عملية على S مرحلة متتابعة، إذا أجريت المرحلة الأولى بـ r_1 طريقة مختلفة، والمرحلة الثانية بـ r_2 طريقة مختلفة وهكذا حتى المرحلة الأخيرة S التي تجري بـ r_n طريقة مختلفة، فإن عدد طرائق إجراء هذه العملية هو: $r_1 \times r_2 \times ... r_n$.
- التبديل هو توزيع لعناصر وفق ترتيب معين.
- قانون التباديل: ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$،
- الحالة الخاصة: ${}_nP_n = n!$،
- التوفيقة هي توزيع لعناصر حيث الترتيب غير مهم.
- قانون التوافيق: ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$،
- نظرية ذات الحدين: $(a+b)^n = ({}_nC_0)a^n + ({}_nC_1)a^{n-1}b + ... + ({}_nC_r)a^{n-r}b^r + ...({}_nC_n)b^n$

177



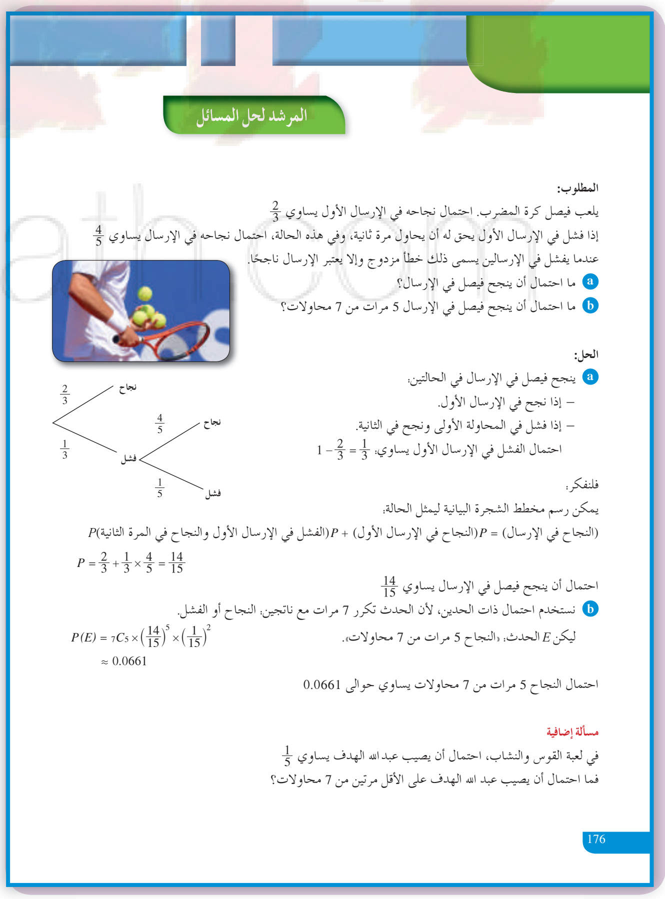
- التجربة العشوائية تجربة لها عدة نواتج مختلفة ممكنة ولكن لا يمكن التأكد مسبقًا من أن أي ناتج منها سوف يتحقق عند إجراء التجربة.
- مجموعة النواتج تسمى فضاء العينة.
- حدث بسيط: ناتج واحد.
- حدث مركب: أكثر من ناتج واحد.
- حدث مستحيل: المجموعة الجزئية خالية.
- حدث مؤكد: المجموعة الجزئية = فضاء العينة.
- حدثان متنافيان: وقوع أحدهما ينفي وقوع الآخر في التجربة.
- حدث متمم: يحوي جميع عناصر فضاء العينة التي لا تنتمي إلى الحدث.
- حدثان مستقلان: وقوع أحدهما لا يؤثر على وقوع الآخر.

$P(E) = \frac{E \text{ عدد النواتج في الحدث}}{S \text{ عدد النواتج في فضاء العينة}}$

$P(E) = \frac{\text{The number of outcomes in event } E}{\text{The number of outcomes in sample space } S}$

- $0 \le P(E) \le 1$
- $P(\text{حدث مستحيل}) = 0$، $P(\text{حدث مؤكد}) = 1$
- مجموع احتمالات النواتج في فضاء العينة = 1
- إذا كان A، B حدثين متنافيين، فإن $P(A \cap B) = 0,\ P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- إذا كان A، B حدثين مستقلين، فإن $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
- إذا كان A، B حدثين غير متنافيين، فإن $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- احتمال ذات الحدين $P(E) = {}_nC_k \cdot (P(H))^k \cdot (P(T))^{n-k}$

178



المرشد لحل المسائل

المطلوب:

يلعب فيصل كرة المضرب. احتمال نجاحه في الإرسال الأول يساوي $\frac{2}{3}$

إذا فشل في الإرسال الأول يحق له أن يحاول مرة ثانية، وفي هذه الحالة، احتمال نجاحه في الإرسال يساوي $\frac{4}{5}$

عندما يفشل في الإرسالين يسمى ذلك خطأ مزدوج ولا يعتبر الإرسال ناجحًا.

a ما احتمال أن ينجح فيصل في الإرسال؟

b ما احتمال أن ينجح فيصل في الإرسال 5 مرات من 7 محاولات؟

الحل:

a ينجح فيصل في الإرسال في الحالتين:

– إذا نجح في الإرسال الأول.

– إذا فشل في المحاولة الأولى ونجح في الثانية.

احتمال الفشل في الإرسال الأول يساوي: $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

فلنفكر:

يمكن رسم مخطط الشجرة البيانية ليمثل الحالة.

$P(\text{النجاح في الإرسال}) = P(\text{النجاح في الإرسال الأول}) + P(\text{الفشل في الإرسال الأول والنجاح في المرة الثانية})$

$P = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{14}{15}$

احتمال أن ينجح فيصل في الإرسال يساوي $\frac{14}{15}$

b نستخدم احتمال ذات الحدين، لأن الحدث تكرر 7 مرات مع ناتجين: النجاح أو الفشل.

ليكن E الحدث: النجاح 5 مرات من 7 محاولات.

$P(E) = {}_7C_5 \times \left(\frac{14}{15}\right)^5 \times \left(\frac{1}{15}\right)^2$

≈ 0.0661

احتمال النجاح 5 مرات من 7 محاولات يساوي حوالي 0.0661

مسألة إضافية

في لعبة القوس والنشاب، احتمال أن يصيب عبدالله الهدف يساوي $\frac{1}{5}$

فما احتمال أن يصيب عبد الله الهدف على الأقل مرتين من 7 محاولات؟

176

اختبار الوحدة الحادية عشرة

(1) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار 5 ممثلين من مجموعة مؤلفة من 11 ممثلًا لتحضير عمل مسرحي؟

(2) بكم طريقة مختلفة يمكن توزيع 15 طالبًا على مجموعات كل منها من 3 طلاب؟

(3) أنت تبحث عن منزل. هناك 5 منازل للإيجار، بكم طريقة مختلفة يمكن زيارة هذه المنازل؟

(4) أوجد مفكوك: $(1-2t)^4$

(5) أوجد قيمة التعبير: $2({}_5C_4) - {}_3C_2$

في التمرينين (7—6)، رميت حجري نرد. في كل حالة، حدّد ما إذا كان الحدثان متنافيين أم لا، ثم أوجد $P(A \cup B)$.

(6) A: «مجموع العددين الظاهرين = 12»؛ B: «كل من العددين هو عدد فردي».

(7) A: «العددان متساويان»؛ B: «مجموعهما من مضاعفات العدد 3».

(8) احتمال النجاح = 0.2، أوجد احتمال النجاح في 4 محاولات من بين 10

(9) احتمال الفوز = 0.6، أوجد احتمال الفوز 3 مرات في 8 محاولات.

(10) في مدرستك اشترى 30% من الطلاب شعار المدرسة، اخترت 5 طلاب عشوائيًّا. فما احتمال أن يكون:

(a) اثنان منهم قد اشتريا شعار المدرسة؟

(b) على الأقل اثنان قد اشتريا شعار المدرسة؟

(11) يوجد في واجهة أحد المحلات التجارية 6 مصابيح كهربائية. عند الاستخدام العادي، إمكانية أن يبقى كل مصباح يعمل لمدة سنتين هي95%

(a) فما احتمال أن تبقى المصابيح الستة تعمل لمدة سنتين؟

(b) فما احتمال أن تبقى 5 مصابيح تعمل خلال سنتين؟

(12) تقول إحدى الشركات أن 99% من علب رقائق الذرة التي تبيعها وزنها مطابق لما هو مدوّن على العلبة.

(a) في صندوق من 10 علب. ما احتمال ألا يطابق وزن علبة واحدة فقط ما هو مدوّن عليها؟

(b) ما احتمال أن تكون أوزان 3 علب من هذا الصندوق غير مطابقة لما هو مدوّن عليها؟

76

تمارين إثرائية

(1) يقول صاحب أحد محلات بيع الخضار والفاكهة أن 90% من ثمار الأناناس التي يبيعها تصبح ناضجة خلال 4 أيام. أوجد احتمال كل مما يلي لصندوق يحتوي على 12 ثمرة أناناس.

(a) كل الثمرات تصبح ناضجة خلال 4 أيام.

(b) على الأقل 10 ثمرات تصبح ناضجة خلال 4 أيام.

(c) ليس أكثر من 9 ثمرات تصبح ناضجة خلال 4 أيام.

(2) باستخدام الأحرف A, B, C نريد كتابة كلمات من 10 أحرف.

(a) ما عدد الكلمات التي يمكن كتابتها؟

(b) ما عدد الكلمات التي يمكن كتابتها:

(i) تبدأ بـ A؟

(ii) تنتهي بـ ABC؟

(iii) تتضمن الحرف A في الخانة السادسة؟

(iiii) الأحرف الثلاثة الأولى A, B, C دون الأخذ بعين الاعتبار الترتيب؟

(c) ما عدد الكلمات التي يمكن كتابتها وتتضمن:

(i) على الأقل حرف A مرة واحدة؟

(ii) بالتحديد 4 مرات الحرف B.

(iii) على الأكثر مرة واحدة C؟

(3) تتكوّن الشيفرة السرية لفتح الخزنة من حرف يليه عدد من 3 أرقام.

(a) الحرف هو أحد أحرف كلمة «كويت». فما عدد الشيفرات الممكنة؟

(b) الحرف هو ك لكن لا يوجد رقم متكرر.

(c) الحرف هو أحد أحرف كلمة «كويت» وعدد الشيفرة هو عدد زوجي.

(d) الحرف هو ت، يتضمن العدد على الأقل أحد الأرقام 9 ,8 ,7

(4) رمز المنزل مكوّن من 4 أرقام لا صفر فيها ولا تكرار. اختار يوسف رمزًا عشوائيًّا. فما احتمال أن يكون صحيحًا؟

(5) حل في n: ${}_nC_3 + {}_nC_2 = 5n(n-1)$

(6) تتألف الموسوعة العلمية من 20 جزءًا. وقد وضعت عشوائيًّا على رف المكتبة. فما احتمال أن يكون الجزءان 2 ,1 قرب بعضهما بعضًا.

77

(7) يوجد في واجهة أحد المحال التجارية صف من المصابيح الكهربائية. تعطى إمكانية أن تبقى بعض هذه المصابيح تعمل لأكثر من سنتين بالتعبير: ${}_5C_2(0.15)^2 \times (0.85)^3$

(a) ما عدد مصابيح واجهة المحل؟

(b) ما عدد المصابيح التي يتوقع أن تبقى تعمل لأكثر من سنتين؟

(c) ما احتمال أن تبقى جميع المصابيح تعمل لأكثر من سنتين؟

(8) في الكيس الأول 6 كرات سوداء اللون و4 بيضاء اللون. في الكيس الثاني، 8 كرات سوداء اللون و12 كرة بيضاء اللون. نختار كيسًا عشوائيًّا ثم نختار أيضًا عشوائيًّا كرة من الكيس.
فما احتمال أن تكون الكرة بيضاء اللون؟

(9) رميت قطعة نقود معدنية 6 مرات. احتمال الحصول على صورة 3 مرات وكتابة 3 مرات يساوي 0.3125، هل قطعة النقود هذه معدّلة؟

(10) لنفرض أنه اختير عشوائيًّا عدد من 10 إلى 100 ضمنًا.

(a) ما احتمال أن يكون من مضاعفات العدد 5؟

(b) ما احتمال أن يكون من مضاعفات العدد 4؟

(c) هل الحدثان متنافيان؟ اشرح.

(d) ما احتمال أن يكون العدد من مضاعفات العدد 5 والعدد 4؟

(11) في اختبار «الاختيار من متعدد» هناك 4 إجابات لكل سؤال.

(a) اختار طالب إجابة عشوائيًّا، فما احتمال أن تكون صحيحة؟

(b) اختار طالب ثلاثة أسئلة من الاختبار وأجاب عنها عشوائيًّا. فما احتمال أن تكون الإجابات الثلاث صحيحة؟

78