الوحدة الثامنة: حساب المثلثات Trigonometry

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

1 – 8: التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب ، جيب التمام ، الظل)

جزء 1: الدوال الجيبية.

جزء 2: التمثيل البياني لدالة الجيب.

جزء 3: التمثيل البياني لدالة جيب التمام.

جزء 4: التمثيل البياني لدالة الظل.

2 – 8: التحويلات الهندسية للدوال الجيبية

جزء 1: التحويلات على الدوال الجيبية.

3 – 8: قانون الجيب

جزء 1: تعريف قانون الجيب.

جزء 2: استخدام قانون الجيب في حل المثلث.

جزء 3: تحديد عدد المثلثات والحالة الغامضة.

4 – 8: قانون جيب التمام

جزء 1: تعريف قانون جيب التمام.

جزء 2: استخدام قانون جيب التمام في حل المثلث.

5 – 8: مساحة المثلث

جزء 1: إيجاد مساحة مثلث وقاعدة هيرون.

مقدمة الوحدة

الاحتباس الحراري والتصحر عنوانان بدأ كل واحد منا يسمعهما يوميًّا إذ يحملان في طياتهما مخاوف وأسئلة محيرة تتناول كل نواحي الحياة وديمومتها.

إن هذين العنوانين هما نتيجة لارتفاع درجة الحرارة في بيئة يتغير فيها سيلان الطاقة الحرارية منها وإليها.

وقد تنبه العلماء إلى مخاطر هذه الظاهرة على كل نواحي الحياة على الأرض، وعُقدت المؤتمرات وأُخذت قرارات وتوصيات، ولكن حتى الآن بقيت الأمور على حالها.

والمعروف أن إنتاج المصانع لمزيد من الغازات السامة المسببة للاحتباس الحراري على سطح الأرض يؤدي إلى ارتفاع درجة الحرارة. ولمعرفة أهمية هذه الظاهرة وتأثيرها على الحياة، نذكر أنه عندما انخفضت درجة الحرارة نصف درجة مئوية عن معدلها العام لمدة قرنين منذ سنة 1570 ميلادية، تعرضت أوروبا لموجة جليد جعلت الفلاحين ينزحون عن أراضيهم ويعانون من المجاعة لقلة المحاصيل الزراعية. ومن جهة ثانية، إذا ازدادت درجة الحرارة زيادة طفيفة عن معدلها العام فستطول فترة الدفء على سطح الأرض وفي الوقت نفسه ستتقلص فترات الصقيع والبرد، مما يؤدي إلى نمو النباتات بسرعة أكبر وتضاعف المحاصيل وانتشار الحشرات المعمرة، وهذا ما يشكل عدم توازن بين عناصر المخلوقات المنتشرة ومكوناتها على سطح كوكبنا.

والآن، لا بد من الإشارة إلى العلاقة بين الاحتباس الحراري وغاز الأوزون، فبعض الحسابات تبيّن زيادة في الاحتباس الحراري، تتبعها زيادة في تحلل الأوزون، وإن انبعاث بعض الغازات التي تزيد من تحلل غاز الأوزون يؤدي إلى زيادة اتساع ثقب الأوزون، ويعمل أيضًا على رفع درجة حرارة سطح الأرض.

- الظواهر المرتبطة بالاحتباس الحراري حتى الآن:
  - – ارتفاع مستوى مياه البحار من 9 إلى 21 m خلال القرن الماضي.
  - – ارتفاع درجة الحرارة على سطح الأرض ما بين 0.4 و0.8 درجة مئوية خلال القرن الماضي بحسب تقرير اللجنة الدولية لتغير المناخ التابعة للأمم المتحدة.

الوحدة الثامنة

حساب المثلثات

Trigonometry

مشروع الوحدة: تغير درجات الحرارة

1. **مقدمة المشروع:** تتغيّر درجات الحرارة خلال أشهر السنة وعادة ما تكون متقاربة من سنة إلى أخرى (قبل تأثير الاحتباس الحراري). في بعض البلدان يكون التغيّر واضحًا ومداه كبير وتكون الفصول الأربعة متمايزة.
2. **الهدف:** وضع تمثيل بياني لدالة جيبية تمثل تغيّر درجات الحرارة خلال أشهر السنة في منطقة ما ومقارنتها بتغيّر درجات الحرارة في دولة الكويت.
3. **اللوازم:** ورق رسم بياني، آلة حاسبة مبرمجة، حاسوب.
4. **أسئلة حول التطبيق:**

يبيّن الجدول المقابل معدل درجات الحرارة المسجلة في إحدى المناطق خلال أشهر السنة.

الشهر	معدل درجة الحرارة
يناير	11
فبراير	13
مارس	17
أبريل	19
مايو	25
يونيو	30
يوليو	32
أغسطس	32
سبتمبر	29
أكتوبر	22
نوفمبر	15
ديسمبر	11

a. على ورقة رسم بياني ضع مخطط انتشار للبيانات. يبيّن محور السينات أشهر السنة (يناير = 1، فبراير = 2، ...) محور الصادات معدل درجات الحرارة.

b. يمكن تمثيل البيانات بدالة جيبية على الشكل: $y = a\sin(wx - \phi) + b$،

حيث: a: السعة = $\dfrac{\text{أعلى درجة حرارة} - \text{أدنى درجة حرارة}}{2}$

b: الإزاحة الرأسية = $\dfrac{\text{أعلى درجة حرارة} + \text{أدنى درجة حرارة}}{2}$

w: الزمن الدوري = $\dfrac{2\pi}{\text{عدد الأشهر}}$

$\dfrac{\phi}{\omega}$: الإزاحة الأفقية لإيجاد قيمة ϕ يمكن استخدام الزوج المرتب $(1, 11)$ الذي يمثّل معدل درجة الحرارة في شهر يناير والتعويض في المعادلة.

c. ارسم بيان الدالة التي حصلت عليها على الورقة حيث مخطط الانتشار.

d. ابحث في المراجع عن درجات الحرارة المسجّلة خلال أشهر إحدى السنوات في دولة الكويت أوجد الدالة الجيبيّة المناظرة ومثّل بيانها.

5. **التقرير:** ضع تقريرًا مفصّلًا يبيّن مراحل عملك على المشروع. ضمّن تقريرك التمثيلات البيانية المطلوبة. اكتب فقرة لا تتعدى 25 كلمة تقارن بين تغيّر درجات الحرارة في الكويت وفي الجدول.

دروس الوحدة

التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب، جيب التمام، الظل)	التحويلات الهندسية للدوال الجيبية	قانون الجيب	قانون جيب التمام	مساحة المثلث
8–1	8–2	8–3	8–4	8–5

- – ذوبان الجليد في المحيطين المتجمد الشمالي والمتجمد الجنوبي وقمم جبال أستراليا.
- – تزايد الدفء في مواسم الشتاء خلال العقود الأخيرة وتناقص فتراته بحيث بدأ الربيع يحل باكرًا.
- – تغير مجاري التيارات المائية داخل المحيطات ما أثّر على التوازن الحراري، وهذا ما دفع بالعلماء إلى توقع حدوث أعاصير في أماكن لم تكن تحدث فيها من قبل.

- الظواهر المتوقعة نتيجة الاحتباس الحراري:
  - – ارتفاع مستوى سطح البحر نتيجة لاستمرار ذوبان الجليد.
  - – غرق الجزر المنخفضة والمدن الساحلية.
  - – ازدياد الفيضانات.
  - – حدوث جفاف في مساحات واسعة من الأرض وتصحرها.
  - – زيادة في عدد العواصف والأعاصير وشدتها.
  - – انتشار الأمراض المعدية.
  - – انقراض العديد من الكائنات الحية.
  - – حدوث كوارث زراعية وفقدان بعض المحاصيل.
  - – زيادة عدد الحرائق في الغابات.

مشروع الوحدة

يعالج هذا المشروع تغير درجات الحرارة في منطقة معينة من سطح الأرض، وكيفية استخدام الدوال الجيبية في التعبير عن هذا التغير.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

4 **(a)** تحقق من عمل الطلاب.

(b) $a = \dfrac{32 - 11}{2} = 10.5$

$b = \dfrac{32 + 11}{2} = 21.5$

$\omega = \dfrac{2\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6}$

لإيجاد قيمة ϕ:

$$11 = 10.5 \sin\left(\frac{\pi}{6} \times 1 - \phi\right) + 21.5$$

نحصل على $\phi = -\dfrac{4\pi}{3}$

(c) تحقق من رسومات الطلاب.

(d) تحقق من عمل الطلاب.

التقرير

يجب أن يتضمن التقرير عرضًا مفصلًا يبيّن مراحل العمل في المشروع، إضافة إلى التمثيلات البيانية والمقارنة بين تغير درجات الحرارة في دولة الكويت.

قدّم شرحًا عن هذا التقرير إلى زملائك في غرفة الصف.

ناقش معهم الحسابات والنتائج كافة التي توصلت إليها.

أعد النظر في بعضها إذا رأيت ذلك ضروريًّا.

الوحدة الثامنة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت تمثيل بعض الدوال بيانيًّا.
- تعلمت إيجاد معادلة الدائرة.
- تعلمت الأنماط والدوال الدورية.
- تعلمت قياس الزاوية بالدرجات وبالراديان.

ماذا سوف تتعلم؟

- التمثيل البياني للدوال: الجيب، جيب التمام، الظل.
- التحويلات على الدوال الجيبية.
- خصائص الدوال الجيبية.
- قانون الجيب واستخدامه في حل مسائل متنوعة.
- استخدام قانون جيب التمام في حل المثلث.
- إيجاد مساحة المثلث بدلالة قياسات زواياه وأطوال أضلاعه.

المصطلحات الأساسية

دالة الجيب — دالة جيب التمام — قيمة عظمى — قيمة صغرى — التمدد الرأسي — الانكماش الرأسي — التمدد الأفقي — الانكماش الأفقي — سعة الدالة — دالة زوجية — دالة فردية — دورة الدالة — قانون الجيب — قانون جيب التمام — قاعدة هيرون.

أضف إلى معلوماتك

علم المثلثات Trigonometry مأخوذة من اللغة اليونانية القديمة.

Trigone: مثلث، Metron: قياس.

يعتبر البابليون أول من درسوا علم المثلثات من خلال عملهم في علم الفلك ومحاولتهم قياس المسافات بين الكواكب ومن هنا يأتي النظام الستيني في قياس الزوايا $(1^\circ = 60' \,,\, 1' = 60'')$.

طوّر العلماء المسلمون علم المثلثات، نذكر منهم الخوارزمي وأبو الوفا، وقد استخدموا جداول مثلثية للجيب والظل على فترات 0.25° وبدقة تصل إلى جزء من مئة من المليون.

43

سلّم التقييم

4	الحسابات صحيحة بالكامل – التمثيلات البيانية دقيقة – التقرير مفصل ومنظم.
3	معظم الحسابات صحيحة – التمثيلات البيانية صحيحة – معظم محتويات التقرير مفصلة ومنظمة.
2	بعض الحسابات صحيحة – التمثيلات البيانية بحاجة إلى إعادة نظر – محتويات التقرير غير مفصلة وغير منظمة.
1	معظم عناصر المشروع ناقصة وبحاجة إلى مراجعة.

1–8: التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب، جيب التمام، الظل)

1 الأهداف

- تمثيل دالة الجيب بيانيًّا.
- تمثيل دالة جيب التمام بيانيًّا.
- تمثيل دالة الظل بيانيًّا.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

دوال جيبية – دالة الجيب – دالة جيب التمام – دالة الظل – دالة زوجية – دالة فردية – محور تناظر – مركز تناظر.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة بيانية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

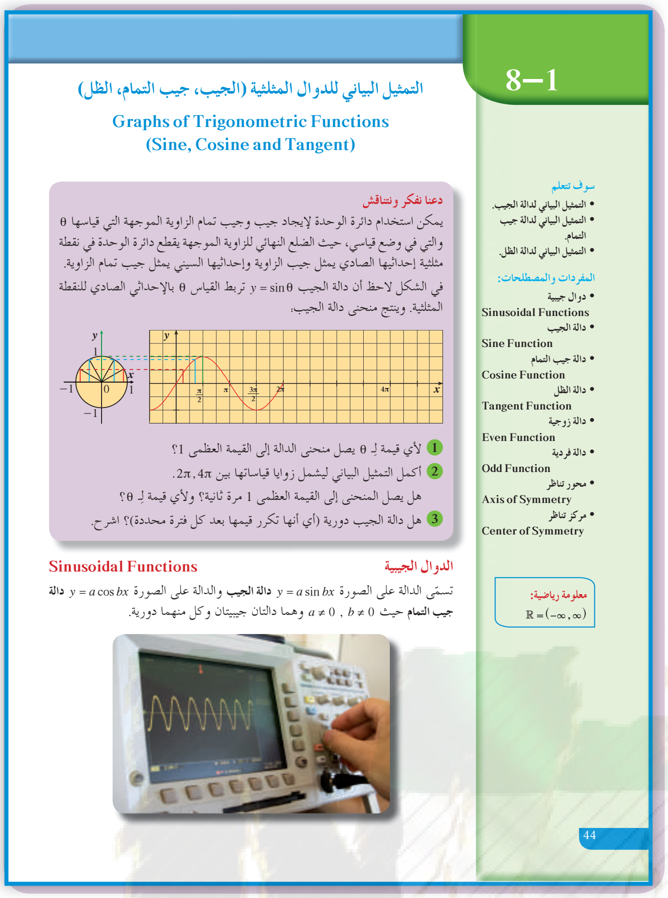
اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

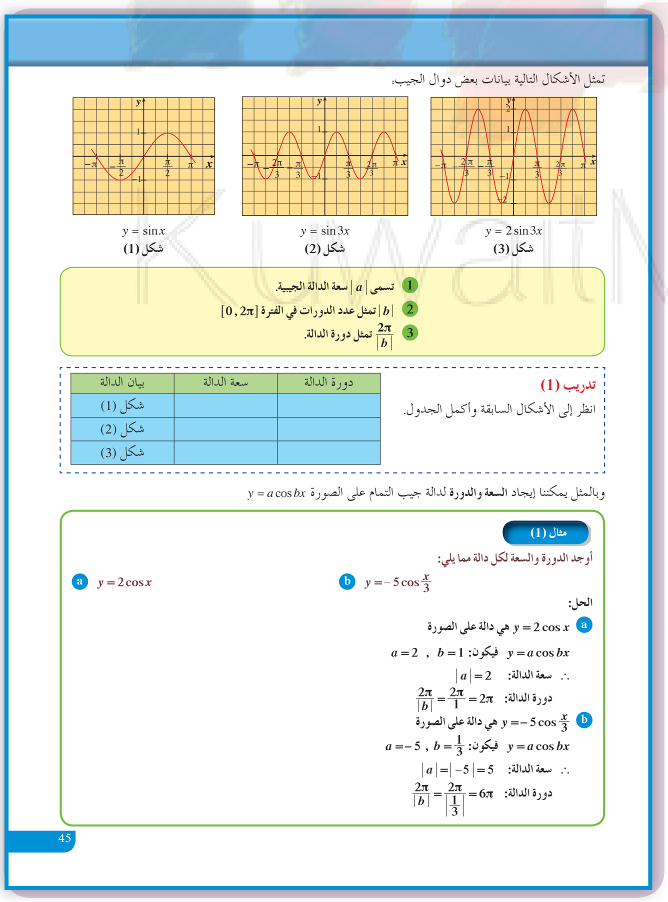
بسّط التعابير المثلثية التالية:

(a) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(\pi-x)$

(b) $\sin(\pi+x)+\cos(\pi+x)+\sin(-x)$

(c) $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\tan(-\pi+x)$





5 التدريس

يعتبر التمثيل البياني للدوال المثلثية الأكثر أهمية، لأن الطالب سوف يواجه هذه التمثيلات في مواقف حياتية متنوعة مثل الكهرباء والإلكترونيات... لذا يتوجب التعامل مع هذا الدرس بدقة وروية.

في المثال (1)

هذا المثال هو تطبيق مباشر لمفهومي الدورة والسعة لدوال الجيب وجيب التمام.

في المثال (2)

يتعرف الطالب في هذا المثال على كيفية كتابة معادلة دالة الجيب على الصورة $y = a\sin bx$ بمعلومية a (السعة) والدورة.

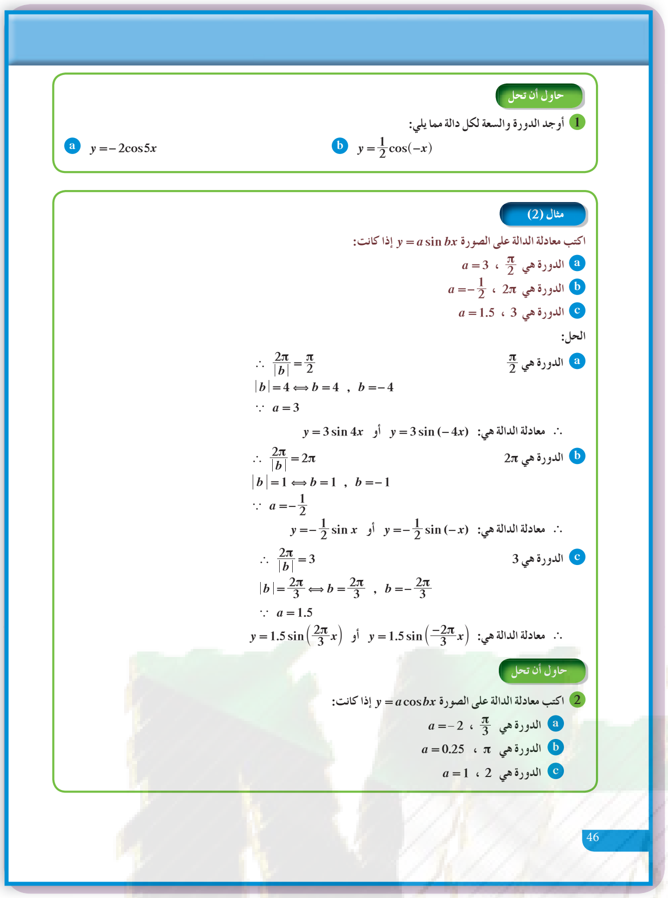
في المثالين (3), (4)

يبيّن هذان المثالان كيفية رسم بيان دالة جيبية بعد إيجاد السعة والدورة. شدّد على أهمية هذه التمارين ودور الجدول في رسم بيان الدالة.

شجّع الطلاب على إيجاد ربع الدورة وتكوين الجدول المرافق حيث الأهمية في الربط مع التمثيل البياني.

في المثال (5)

يوفّر هذا المثال فرصة للطالب كي يتعرف على التمثيل البياني لدالة الظل وطبيعة النقاط غير المعرفة وموقع بيان الدالة مقارنة بالمستقيمات المقاربة (المحاذية).



حاول أن تحل

1 أوجد الدورة والسعة لكل دالة مما يلي:

a $y = -2\cos 5x$ b $y = \frac{1}{2}\cos(-x)$

مثال (2)

اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\sin bx$ إذا كانت:

a الدورة هي $\frac{\pi}{2}$ ، $a = 3$

b الدورة هي 2π ، $a = -\frac{1}{2}$

c الدورة هي 3 ، $a = 1.5$

الحل:

a الدورة هي $\frac{\pi}{2}$

$\therefore \frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2}$

$|b| = 4 \Leftrightarrow b = 4 \ , \ b = -4$

$\because a = 3$

$\therefore$ معادلة الدالة هي: $y = 3\sin(-4x)$ أو $y = 3\sin 4x$

b الدورة هي 2π

$\therefore \frac{2\pi}{|b|} = 2\pi$

$|b| = 1 \Leftrightarrow b = 1 \ , \ b = -1$

$\because a = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ معادلة الدالة هي: $y = -\frac{1}{2}\sin(-x)$ أو $y = -\frac{1}{2}\sin x$

c الدورة هي 3

$\therefore \frac{2\pi}{|b|} = 3$

$|b| = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow b = \frac{2\pi}{3} \ , \ b = -\frac{2\pi}{3}$

$\because a = 1.5$

$\therefore$ معادلة الدالة هي: $y = 1.5\sin\left(\frac{-2\pi}{3}x\right)$ أو $y = 1.5\sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$

حاول أن تحل

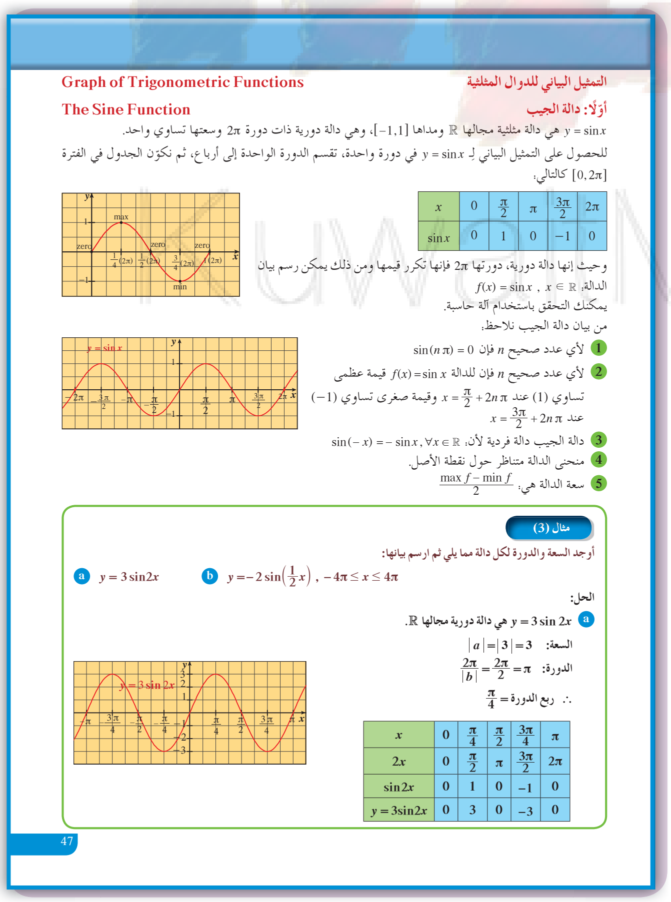
2 اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\cos bx$ إذا كانت:

a الدورة هي $\frac{\pi}{3}$ ، $a = -2$

b الدورة هي π ، $a = 0.25$

c الدورة هي 2 ، $a = 1$

46



التمثيل البياني للدوال المثلثية Graph of Trigonometric Functions

أوّلًا: دالة الجيب The Sine Function

$y = \sin x$ هي دالة مثلثية مجالها $\mathbb{R}$ ومداها $[-1,1]$، وهي دالة دورية ذات دورة 2π وسعتها تساوي واحد.

للحصول على التمثيل البياني لِـ $y = \sin x$ في دورة واحدة، تقسم الدورة الواحدة إلى أرباع، ثم نكوّن الجدول في الفترة $[0, 2\pi]$ كالتالي:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0

وحيث إنها دالة دورية، دورتها 2π فإنها تكرر قيمها ومن ذلك يمكن رسم بيان الدالة: $f(x) = \sin x \ , \ x \in \mathbb{R}$

يمكنك التحقق باستخدام آلة حاسبة.

من بيان دالة الجيب نلاحظ:

1 لأي عدد صحيح n فإن $\sin(n\pi) = 0$

2 لأي عدد صحيح n فإن للدالة $f(x) = \sin x$ قيمة عظمى تساوي (1) عند $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ وقيمة صغرى تساوي (-1) عند $x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$

3 دالة الجيب دالة فردية لأن: $\sin(-x) = -\sin x, \forall x \in \mathbb{R}$

4 منحنى الدالة متناظر حول نقطة الأصل.

5 سعة الدالة هي: $\frac{\max f - \min f}{2}$

مثال (3)

أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

a $y = 3\sin 2x$ b $y = -2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \ , \ -4\pi \le x \le 4\pi$

الحل:

a $y = 3\sin 2x$ هي دالة دورية مجالها $\mathbb{R}$.

السعة: $|a| = |3| = 3$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{\pi}{4}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin 2x$	0	1	0	-1	0
$y = 3\sin 2x$	0	3	0	-3	0

47

6 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تكوين جدول القيم الخاصة بعد تحديد ربع الدورة. ساعدهم على تخطي هذه الأخطاء باستخدام أمثلة بديلة.

7 التقييم

لاحظ الطلاب كيف يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من فهمهم لتكوين الجدول والربط مع التمثيل البياني للدالة.

اختبار سريع

1 أوجد السعة والدورة، ثم ارسم بيان الدالة:

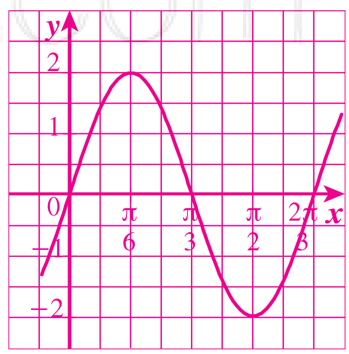
$y = 2\sin 3x$

السعة: $|a| = |2| = 2$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{\pi}{6}$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$3x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin 3x$	0	1	0	-1	0
$y = 2\sin 3x$	0	2	0	-2	0



---

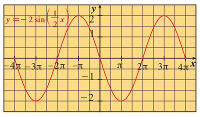
b $y = -2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ هي دالة دورية.

السعة: $|a| = |-2| = 2$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$

$\therefore$ ربع الدورة $= \pi$

x	0	π	2π	3π	4π
$\frac{1}{2}x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$	0	1	0	-1	0
$y = -2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$	0	-2	0	2	0



وحيث أن منحنى الدالة متناظر حول نقطة الأصل يتم كذلك رسم المنحنى على الفترة $[-4\pi, 0]$

حاول أن تحل

3 أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

a $y = \frac{1}{2}\sin 4x$

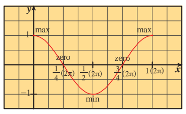
b $y = -4\sin x \ , \ x \in [-\pi \ , \ 2\pi]$

ثانيًا: دالة جيب التمام The Cosine Function

$y = \cos x$ هي دالة مثلثية مجالها هو أيضًا $\mathbb{R}$ ومداها هو $[-1,1]$، وهي دالة دورية ذات دورة 2π وسعتها تساوي واحد.

ونستطيع الحصول على التمثيل البياني للدالة $y = \cos x$ على مجالها عن طريق رسمها على الفترة $[0, 2\pi]$ تمامًا مثلما فعلنا في دالة الجيب.

وتكرر نفسها ونحصل على البيان التالي:



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1

يمكنك التحقق باستخدام الآلة الحاسبة.

من بيان دالة جيب التمام نلاحظ أن:

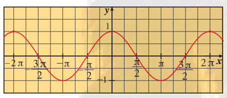
1 لأي عدد صحيح n فإن $\cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0$

2 لأي عدد صحيح n فإن للدالة $f(x) = \cos x$ قيمة عظمى تساوي (1) عند $x = 2n\pi$ وقيمة صغرى تساوي (1 −) عند $x = \pi + 2n\pi$

3 دالة جيب التمام دالة زوجية لأن: $\cos(-x) = \cos x \ , \ \forall x \in \mathbb{R}$

4 محور الصادات هو خط تناظر لمنحنى الدالة.

5 سعة الدالة هي: $\frac{\max f - \min f}{2}$



48

مثال (4)

أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي، ثم ارسم بيانها.

a $y = 2\cos 4x$

b $y = -5\cos\left(\frac{2}{3}x\right) \ , \ x \in [-3\pi \ , \ 3\pi]$

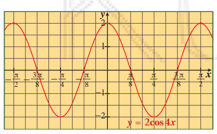
الحل:

a الدالة $y = 2\cos 4x$ هي دالة دورية.

السعة: $|a| = |2| = 2$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{\pi}{8}$



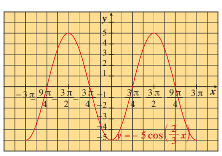
x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$4x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos 4x$	1	0	-1	0	1
$2\cos 4x$	2	0	-2	0	2

b الدالة $y = -5\cos\left(\frac{2}{3}x\right)$ هي دالة دورية.

السعة: $|a| = |-5| = 5$

الدورة: $\frac{2\pi}{\left|\frac{2}{3}\right|} = \frac{3}{2} \times 2\pi = 3\pi$

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{3\pi}{4}$



x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{4}$	3π
$\frac{2x}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos\left(\frac{2x}{3}\right)$	1	0	-1	0	1
$y = -5\cos\left(\frac{2}{3}x\right)$	-5	0	5	0	-5

حاول أن تحل

4 أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها.

a $y = 3\cos 2x$

b $y = -2\cos\left(\frac{3}{4}x\right) \ , \ 0 \le x \le 2\pi$

49

2 أوجد السعة والدورة ثم ارسم بيان الدالة:

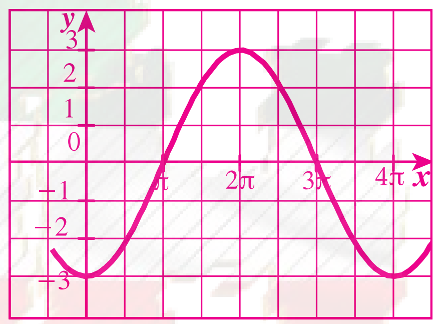
$$y = -3\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$$

السعة: $|a| = |-3| = 3$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

$\therefore$ ربع الدورة $= \pi = \frac{4\pi}{4}$

x	0	π	2π	3π	4π
$\frac{1}{2}x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos\frac{1}{2}x$	1	0	-1	0	1
$y = -3\cos\frac{1}{2}x$	-3	0	3	0	-3



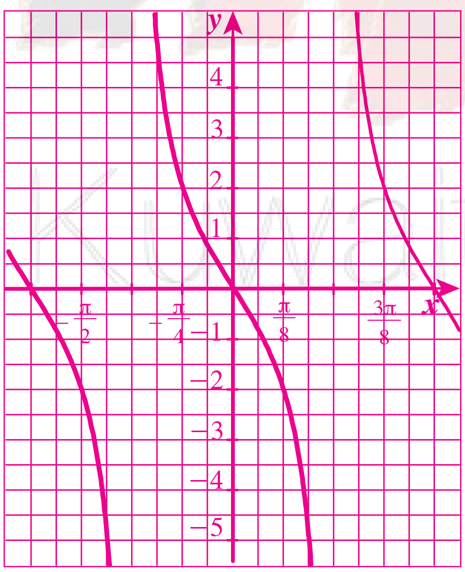
3 أوجد الدورة، ثم ارسم بيان الدالة:

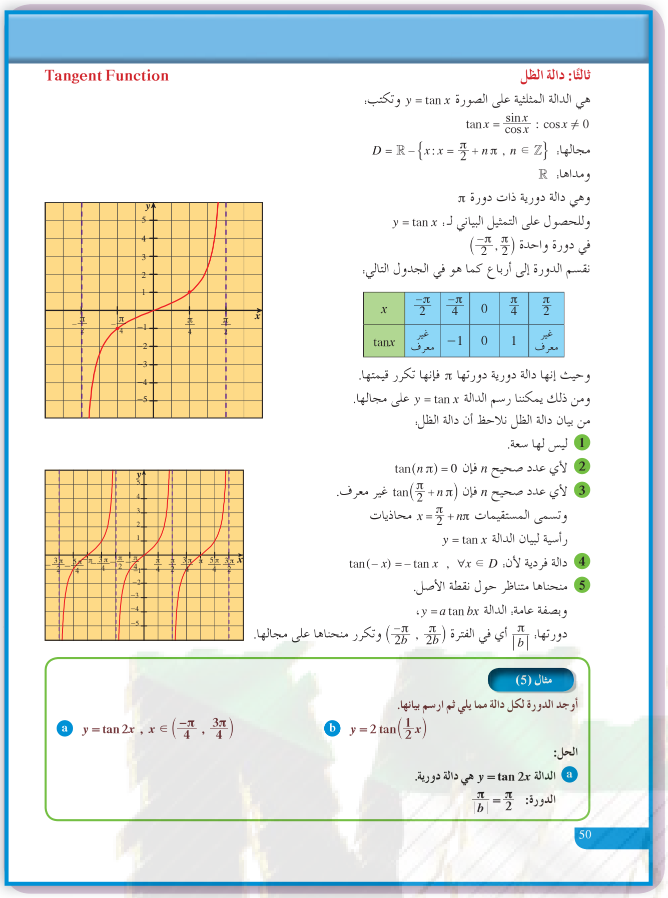
$$y = -2\tan(2x)$$

الدورة: $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{\pi}{8}$

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$2x$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\tan 2x$	0	1	غير معرف	-1	0
$y = -2\tan 2x$	0	-2	غير معرف	2	0





Tangent Function

ثالثًا: دالة الظل

هي الدالة المثلثية على الصورة $y = \tan x$ وتكتب:

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\ :\ \cos x \neq 0$

مجالها: $D = \mathbb{R} - \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + n\pi\ ,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$

ومداها: $\mathbb{R}$

وهي دالة دورية ذات دورة π

وللحصول على التمثيل البياني لـ: $y = \tan x$

في دورة واحدة $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

نقسم الدورة إلى أرباع كما هو في الجدول التالي:

x	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	غير معرف	-1	0	1	غير معرف

وحيث إنها دالة دورية دورتها π فإنها تكرر قيمتها.

ومن ذلك يمكننا رسم الدالة $y = \tan x$ على مجالها.

من بيان دالة الظل نلاحظ أن دالة الظل:

1 ليس لها سعة.

2 لأي عدد صحيح n فإن $\tan(n\pi) = 0$

3 لأي عدد صحيح n فإن $\tan\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ غير معرف.

وتسمى المستقيمات $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ محاذيات رأسية لبيان الدالة $y = \tan x$

4 دالة فردية لأن: $\tan(-x) = -\tan x\ ,\ \forall x \in D$

5 منحناها متناظر حول نقطة الأصل.

وبصفة عامة: الدالة $y = a\tan bx$،

دورتها: $\frac{\pi}{|b|}$ أي في الفترة $\left(\frac{-\pi}{2b}, \frac{\pi}{2b}\right)$ وتكرر منحناها على مجالها.

مثال (5)

أوجد الدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها.

a $y = \tan 2x\ ,\ x \in \left(\frac{-\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$

b $y = 2\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$

الحل:

a الدالة $y = \tan 2x$ هي دالة دورية.

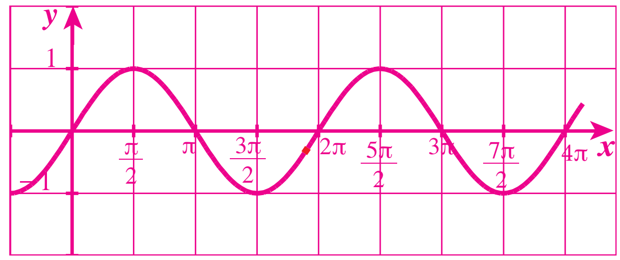
الدورة: $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2}$

50

8 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1. $\theta = \frac{\pi}{2}$

2. 

نعم، $\theta = \frac{5\pi}{2}$

3. نعم. بيان الدالة على الفترة $[0, 2\pi]$ يتكرر كما هو مبيّن.

«حاول أن تحل»

1. (a) السعة: $|a| = 2$، دورة الدالة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{5}$

(b) السعة: $|a| = \frac{1}{2}$، دورة الدالة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

2. (a) $y = -2\cos 6x$

(b) $y = 0.25\cos 2x$

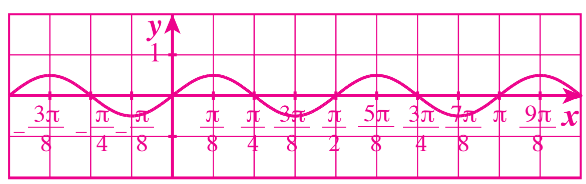
(c) $y = \cos \pi x$

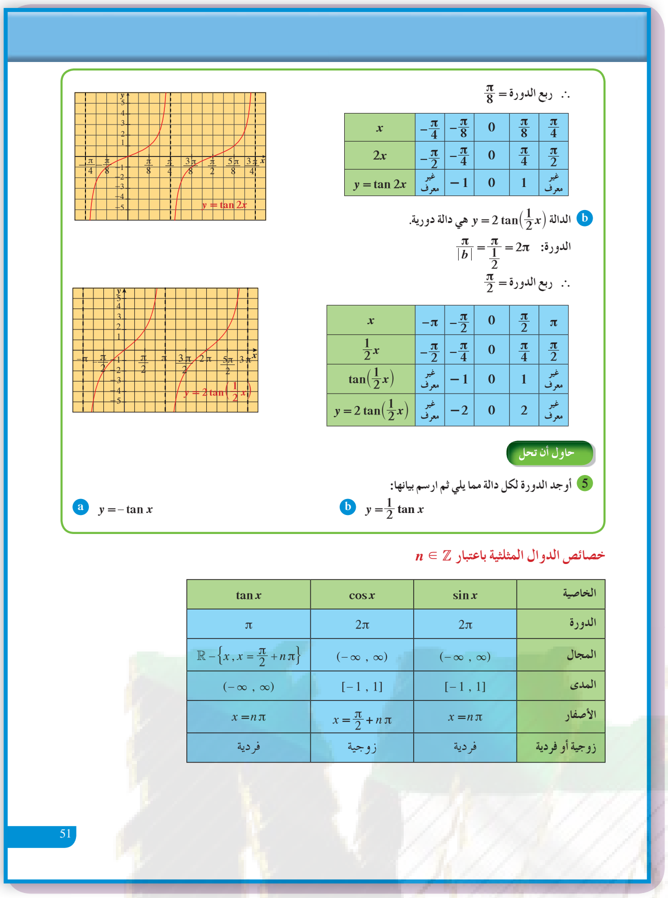
3. (a) السعة: $|a| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{\pi}{8}$

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$4x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin 4x$	0	1	0	-1	0
$y = \frac{1}{2}\sin 4x$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0




$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{\pi}{8}$

x	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$
$2x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$y = \tan 2x$	غير معرف	-1	0	1	غير معرف

b الدالة $y = 2\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$ هي دالة دورية.

الدورة: $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{\pi}{2}$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\frac{1}{2}x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$	غير معرف	-1	0	1	غير معرف
$y = 2\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$	غير معرف	-2	0	2	غير معرف

حاول أن تحل

5 أوجد الدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

a $y = -\tan x$ b $y = \frac{1}{2}\tan x$

خصائص الدوال المثلثية باعتبار $n \in \mathbb{Z}$

الخاصية	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
الدورة	2π	2π	π
المجال	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R} - \left\{x, x = \frac{\pi}{2} + n\pi\right\}$
المدى	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$(-\infty, \infty)$
الأصفار	$x = n\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$	$x = n\pi$
زوجية أو فردية	فردية	زوجية	فردية

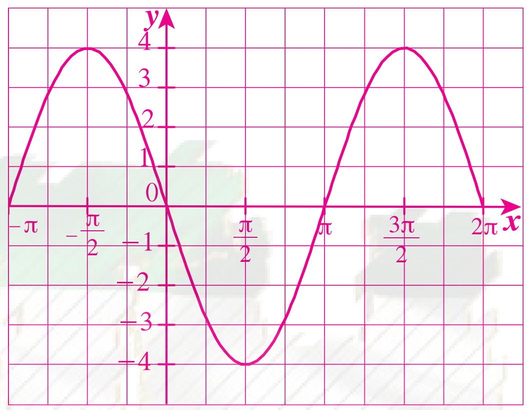
51

(b) السعة: $|a| = |-4| = 4$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{\pi}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$1x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$y = -4\sin x$	0	-4	0	4	0

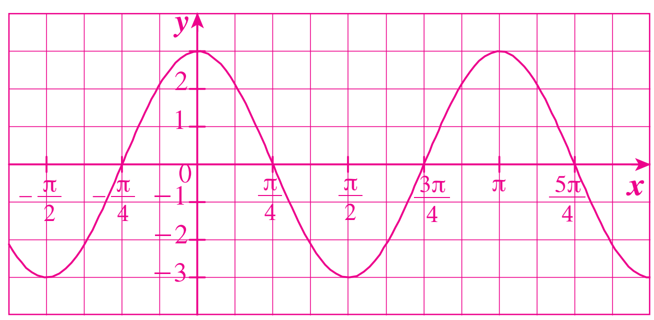


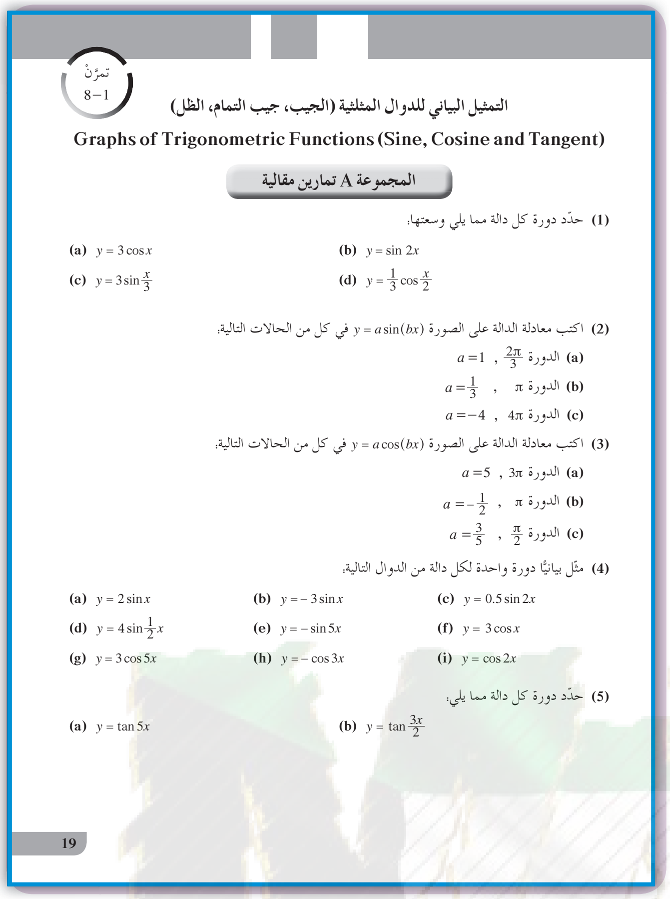
4 **(a)** السعة: $|a| = 3$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{\pi}{4}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos 2x$	1	0	-1	0	1
$y = 3\cos 2x$	3	0	-3	0	3




تمرَّنْ 8−1

التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب، جيب التمام، الظل)

Graphs of Trigonometric Functions (Sine, Cosine and Tangent)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) حدّد دورة كل دالة مما يلي وسعتها:

(a) $y = 3\cos x$ **(b)** $y = \sin 2x$

(c) $y = 3\sin\frac{x}{3}$ **(d)** $y = \frac{1}{3}\cos\frac{x}{2}$

(2) اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\sin(bx)$ في كل من الحالات التالية:

(a) الدورة $\frac{2\pi}{3}$, $a = 1$

(b) الدورة π , $a = \frac{1}{3}$

(c) الدورة 4π , $a = -4$

(3) اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\cos(bx)$ في كل من الحالات التالية:

(a) الدورة 3π , $a = 5$

(b) الدورة π , $a = -\frac{1}{2}$

(c) الدورة $\frac{\pi}{2}$, $a = \frac{3}{5}$

(4) مثّل بيانيًا دورة واحدة لكل دالة من الدوال التالية:

(a) $y = 2\sin x$ **(b)** $y = -3\sin x$ **(c)** $y = 0.5\sin 2x$

(d) $y = 4\sin\frac{1}{2}x$ **(e)** $y = -\sin 5x$ **(f)** $y = 3\cos x$

(g) $y = 3\cos 5x$ **(h)** $y = -\cos 3x$ **(i)** $y = \cos 2x$

(5) حدّد دورة كل دالة مما يلي:

(a) $y = \tan 5x$ **(b)** $y = \tan\frac{3x}{2}$

19

(6) اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = \tan(bx)$ في كل من الحالات التالية:

(a) الدورة $\frac{\pi}{5}$ (b) الدورة $\frac{2\pi}{3}$

(c) الدورة $\frac{\pi}{4}$

(7) مثّل بيانيًّا دورة واحدة لكل دالة من الدوال التالية:

(a) $y = \tan 2x$ (b) $y = \tan\frac{x}{2}$ (c) $y = -3\tan x$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (7—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) معادلة الدالة المثلثية $y = a\sin(b\theta)$ حيث السعة 5 والدورة 3π هي $y = 5\sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)$ (a) (b)

(2) الدالة التي دورتها $\frac{\pi}{2}$ وسعتها 3 يمكن أن تكون $y = 3\sin\left(\frac{\pi\theta}{2}\right)$ (a) (b)

(3) الدالة $y = 3\tan\left(\frac{3}{4}x\right)$ دورتها $\frac{4}{3}\pi$ (a) (b)

(4) الدالة التي دورتها $\frac{\pi}{3}$ وسعتها 4 يمكن أن تكون $y = -4\cos(6x)$ (a) (b)

(5) سعة الدالة $y = -5\cos 2x$ هي -5 (a) (b)

(6) في الدالة f حيث $f(x) = a\cos bx$ يكون: $2|a| = \max f + \min f$ (a) (b)

(7) الدالتان f, g حيث $g(x) = \tan 4x$ ، $f(x) = \cos 8x$ لهما نفس الدورة. (a) (b)

في التمارين (17—8)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(8) البيان التالي يمثل بيان الدالة:

(a) $f(x) = 3\cos x$ (b) $f(x) = 3\sin x$

(c) $f(x) = -3\sin x$ (d) $f(x) = \sin 3x$

(9) لتكن $f(x) = 3\tan 2x$ فإن:

(a) السعة = 1 (b) السعة = 2 (c) السعة = 3 (d) f ليس لها سعة

(10) ليكن بيان f كما في الشكل التالي:

فإن f يمكن أن تكون:

(a) $2\cos 2x$ (b) $\cos 2x$ (c) $\cos\frac{x}{2}$ (d) $\sin 2x$

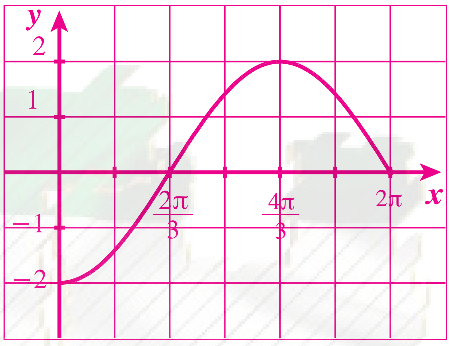
20

(b) السعة: $|a| = |-2| = 2$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{3}{4}\right|} = \frac{8\pi}{3}$

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{2\pi}{3}$

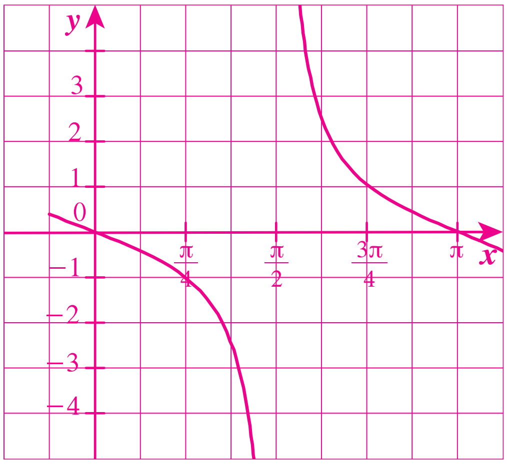
x	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π	$\frac{8\pi}{3}$
$\frac{3}{4}x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos\left(\frac{3}{4}x\right)$	1	0	-1	0	1
$y = -2\cos\left(\frac{3}{4}x\right)$	-2	0	2	0	-2



5 **(a)** الدورة: π

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{\pi}{4}$

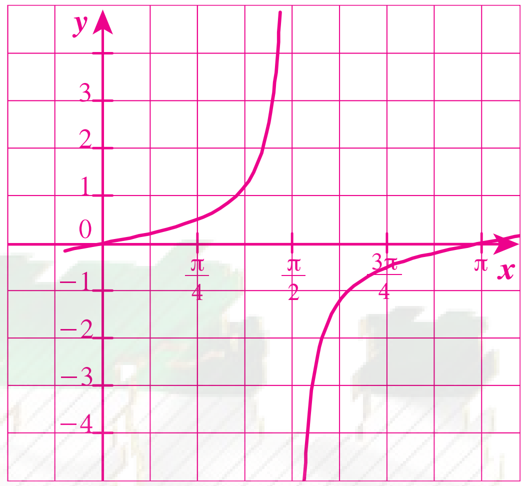
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\tan x$	0	1	غير معرف	-1	0
$y = -\tan x$	0	-1	غير معرف	1	0



(b) الدورة: π

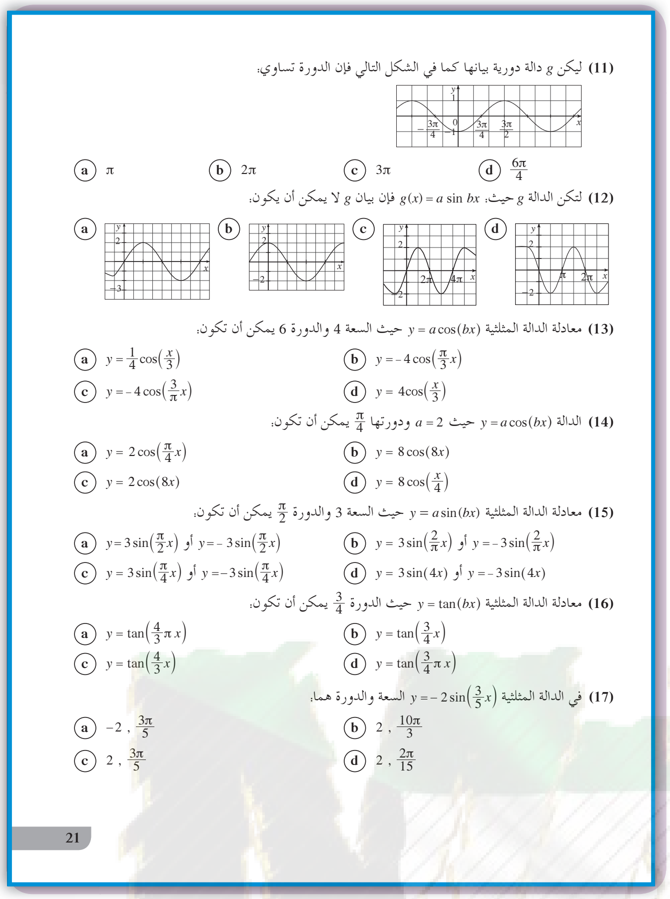
$\therefore$ ربع الدورة $= \dfrac{\pi}{4}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\tan x$	0	1	غير معرف	-1	0
$y = \frac{1}{2}\tan x$	0	$\frac{1}{2}$	غير معرف	$\frac{-1}{2}$	0



تدريب (1)

بيان الدالة	سعة الدالة	دورة الدالة
شكل (1)	1	2π
شكل (2)	1	$\frac{2\pi}{3}$
شكل (3)	2	$\frac{2\pi}{3}$



(11) ليكن g دالة دورية بيانها كما في الشكل التالي فإن الدورة تساوي:

ⓐ π ⓑ 2π ⓒ 3π ⓓ $\frac{6\pi}{4}$

(12) لتكن الدالة g حيث: $g(x) = a \sin bx$ فإن بيان g لا يمكن أن يكون:

ⓐ ⓑ ⓒ ⓓ

(13) معادلة الدالة المثلثية $y = a\cos(bx)$ حيث السعة 4 والدورة 6 يمكن أن تكون:

ⓐ $y = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{3}\right)$ ⓑ $y = -4\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

ⓒ $y = -4\cos\left(\frac{3}{\pi}x\right)$ ⓓ $y = 4\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

(14) الدالة $y = a\cos(bx)$ حيث $a = 2$ ودورتها $\frac{\pi}{4}$ يمكن أن تكون:

ⓐ $y = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ ⓑ $y = 8\cos(8x)$

ⓒ $y = 2\cos(8x)$ ⓓ $y = 8\cos\left(\frac{x}{4}\right)$

(15) معادلة الدالة المثلثية $y = a\sin(bx)$ حيث السعة 3 والدورة $\frac{\pi}{2}$ يمكن أن تكون:

ⓐ $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ أو $y = -3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ ⓑ $y = 3\sin\left(\frac{2}{\pi}x\right)$ أو $y = -3\sin\left(\frac{2}{\pi}x\right)$

ⓒ $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ أو $y = -3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ ⓓ $y = 3\sin(4x)$ أو $y = -3\sin(4x)$

(16) معادلة الدالة المثلثية $y = \tan(bx)$ حيث الدورة $\frac{3}{4}$ يمكن أن تكون:

ⓐ $y = \tan\left(\frac{4}{3}\pi x\right)$ ⓑ $y = \tan\left(\frac{3}{4}x\right)$

ⓒ $y = \tan\left(\frac{4}{3}x\right)$ ⓓ $y = \tan\left(\frac{3}{4}\pi x\right)$

(17) في الدالة المثلثية $y = -2\sin\left(\frac{3}{5}x\right)$ السعة والدورة هما:

ⓐ $-2 , \frac{3\pi}{5}$ ⓑ $2 , \frac{10\pi}{3}$

ⓒ $2 , \frac{3\pi}{5}$ ⓓ $2 , \frac{2\pi}{15}$

21

2–8: التحويلات الهندسية للدوال الجيبية

1 الأهداف

- يستخدم التحويلات الهندسية على الدوال الجيبية: تمدد – انكماش – إزاحة – انعكاس.
- يتعرف خصائص الدوال الجيبية.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

تحويلات هندسية – تمدد – انكماش – سعة – دورة – إزاحة رأسية – انعكاس – إزاحة أفقية.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(1) أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي:

(a) $y = 2\sin\left(\frac{3}{4}x\right)$ (b) $y = -3\cos\left(\frac{1}{3}x\right)$

(2) هل يوجد انعكاس بين التمثيل البياني للدالة $f(x) = x$ والتمثيل البياني للدالة $g(x) = -x$؟ إذا كانت الإجابة نعم، فما هو محور الانعكاس؟

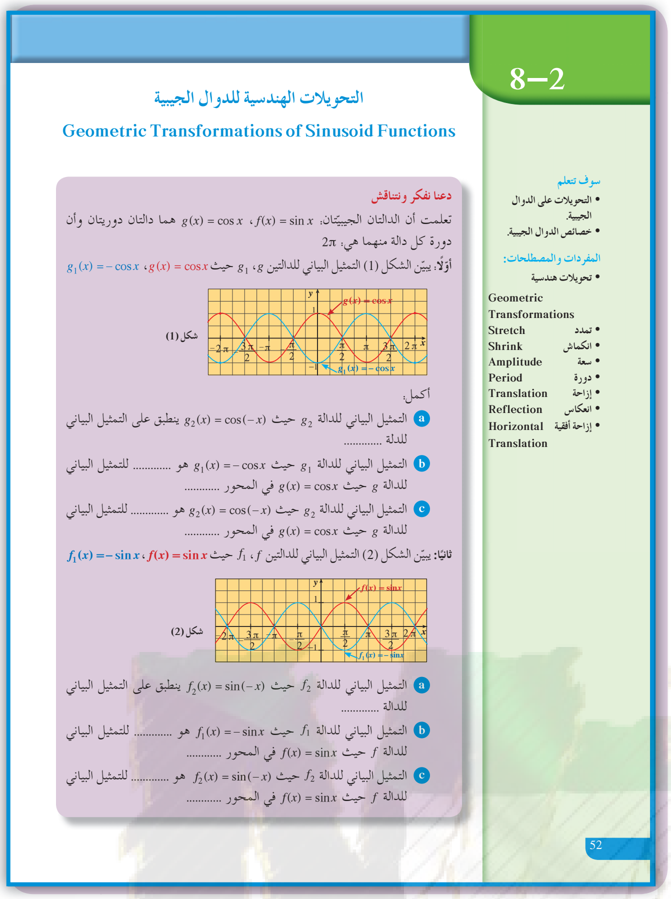
(3) هل يوجد انعكاس بين التمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x-1}$ والتمثيل البياني للدالة $g(x) = -\sqrt{x-1}$؟ إذا كانت الإجابة نعم، فما هو محور الانعكاس؟

5 التدريس

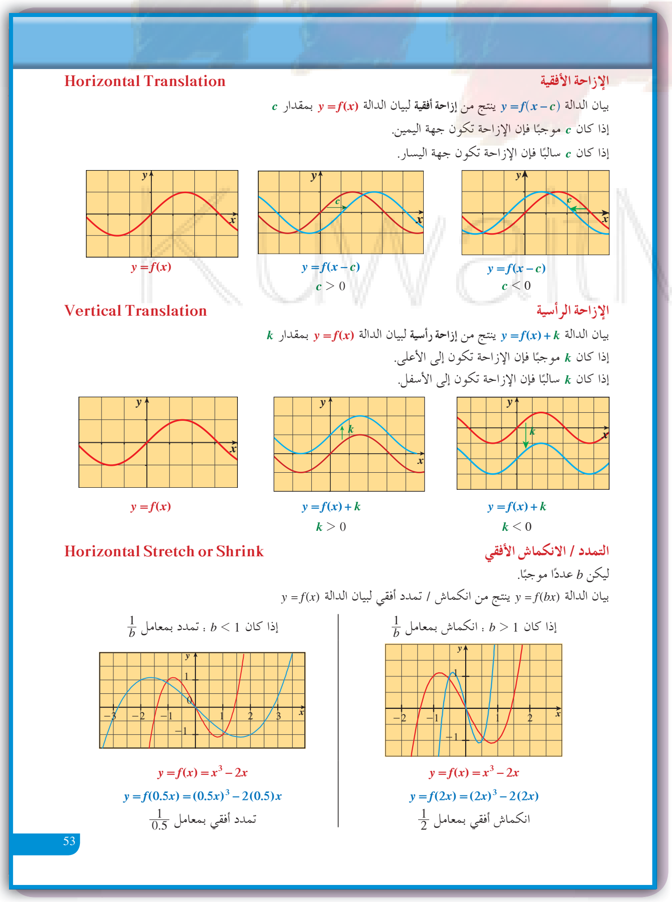
يعتبر هذا الدرس استكمالًا للدرس الأول بحيث يتوجب على الطالب تحديد السعة والدورة، ليتمكن من إيجاد العلاقة بين الدالتين الجيبيتين Sinus و Cosinus والتحويلات التي سوف تحدث عليهما.

في الأمثلة (1), (2), (3)

من المهم جدًّا التعامل بدقة مع هذه الأمثلة نظرًا لأهميتها، إذ تبين دور سعة الدالة في المقارنة بين الدوال. عند الضرورة، اكتب على السبّورة سعة كل دالة ودورتها. دع الطلاب يقارنون بين بياني الدالتين في كل مثال لتبيان تأثير السعة والدورة في رسم بيان كل دالة.


8–2
التحويلات الهندسية للدوال الجيبية
Geometric Transformations of Sinusoid Functions
سوف تتعلم
- التحويلات على الدوال الجيبية.
- خصائص الدوال الجيبية.
المفردات والمصطلحات:
- تحويلات هندسية Geometric Transformations
- تمدد Stretch
- انكماش Shrink
- سعة Amplitude
- دورة Period
- إزاحة Translation
- انعكاس Reflection
- إزاحة أفقية Horizontal Translation

دعنا نفكر ونتناقش
تعلمت أن الدالتين الجيبيتين: $f(x) = \sin x$ ، $g(x) = \cos x$ هما دالتان دوريتان وأن دورة كل دالة منهما هي: 2π
أولًا: يبين الشكل (1) التمثيل البياني للدالتين g، g_1 حيث $g(x) = \cos x$، $g_1(x) = -\cos x$
شكل (1)
أكمل:
a التمثيل البياني للدالة g_2 حيث $g_2(x) = \cos(-x)$ ينطبق على التمثيل البياني للدالة ....
b التمثيل البياني للدالة g_1 حيث $g_1(x) = -\cos x$ هو .... للتمثيل البياني للدالة g حيث $g(x) = \cos x$ في المحور ....
c التمثيل البياني للدالة g_2 حيث $g_2(x) = \cos(-x)$ هو .... للتمثيل البياني للدالة g حيث $g(x) = \cos x$ في المحور ....
ثانيًا: يبين الشكل (2) التمثيل البياني للدالتين f، f_1 حيث $f(x) = \sin x$، $f_1(x) = -\sin x$
شكل (2)
a التمثيل البياني للدالة f_2 حيث $f_2(x) = \sin(-x)$ ينطبق على التمثيل البياني للدالة ....
b التمثيل البياني للدالة f_1 حيث $f_1(x) = -\sin x$ هو .... للتمثيل البياني للدالة f حيث $f(x) = \sin x$ في المحور ....
c التمثيل البياني للدالة f_2 حيث $f_2(x) = \sin(-x)$ هو .... للتمثيل البياني للدالة f حيث $f(x) = \sin x$ في المحور ....
52


الإزاحة الأفقية Horizontal Translation
بيان الدالة $y = f(x-c)$ ينتج من إزاحة أفقية لبيان الدالة $y = f(x)$ بمقدار c
إذا كان c موجبًا فإن الإزاحة تكون جهة اليمين.
إذا كان c سالبًا فإن الإزاحة تكون جهة اليسار.
$y = f(x)$ $y = f(x-c)$, $c > 0$ $y = f(x-c)$, $c < 0$
الإزاحة الرأسية Vertical Translation
بيان الدالة $y = f(x) + k$ ينتج من إزاحة رأسية لبيان الدالة $y = f(x)$ بمقدار k
إذا كان k موجبًا فإن الإزاحة تكون إلى الأعلى.
إذا كان k سالبًا فإن الإزاحة تكون إلى الأسفل.
$y = f(x)$ $y = f(x) + k$, $k > 0$ $y = f(x) + k$, $k < 0$
التمدد / الانكماش الأفقي Horizontal Stretch or Shrink
ليكن b عددًا موجبًا.
بيان الدالة $y = f(bx)$ ينتج من انكماش / تمدد أفقي لبيان الدالة $y = f(x)$
إذا كان $b > 1$: انكماش بمعامل $\frac{1}{b}$
إذا كان $b < 1$: تمدد بمعامل $\frac{1}{b}$
$y = f(x) = x^3 - 2x$
$y = f(2x) = (2x)^3 - 2(2x)$
انكماش أفقي بمعامل $\frac{1}{2}$
$y = f(x) = x^3 - 2x$
$y = f(0.5x) = (0.5x)^3 - 2(0.5x)$
تمدد أفقي بمعامل $\frac{1}{0.5}$
53

في المثال (4)

يبيّن هذا المثال كيفية الاستفادة من خاصية الإزاحة الأفقية لإيجاد بيان دالة من خلال بيان دالة سابقة. أعد التشديد على مفهوم الإزاحة الأفقية عند الضرورة.

في المثال (5)

يساعد هذا المثال الطالب على فهم الإزاحة الرأسية. يمكن للمعلم الربط مع المثال (4) لإيضاح الفرق بين الإزاحة الأفقية (ناحية اليمين أو ناحية اليسار) والإزاحة الرأسية (إلى الأعلى أو إلى الأسفل).

في المثال (6)

يقدم هذا المثال صورة موسعة عن كيفية استخدام معظم التحويلات الهندسية على الدوال الجيبية، لذا من المهم التعامل مع الخطوات المتبعة بروية والإجابة عن التساؤلات من قبل الطلاب. أعطِ أمثلة بديلة إذا سمح الوقت بذلك.

في المثال (7)

تطبيق حياتي مهم يبيّن أن بعض الدوال ليست كثيرات حدود ولا دوال نسبية، وتستخدم في دراسة بعض العوامل الحياتية مثل عدد الأيام المشمسة في بعض الدول. يمكن للطلاب إجراء بحث سريع عن الانقلاب الصيفي والانقلاب الشتوي.

(2) يمثّل منحنى الدالة $f(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+4$ إزاحة إلى اليسار $\frac{\pi}{3}$ وحدة وإزاحة إلى الأعلى 4 وحدات لمنحنى الدالة: $g(x)=\cos x$ — a — b

(3) يمثّل منحنى الدالة $y=2\cos x$ تمددًا رأسيًّا بمعامل 2 لمنحنى الدالة $y=\cos x$ — a — b

(4) يمثّل منحنى الدالة $f(x)=4\cos(x-3)$ انكماشًا رأسيًّا معامله 4 وإزاحة أفقية مقدارها 3 وحدات إلى اليمين لمنحنى الدالة $g(x)=\cos x$ — a — b

(5) يمثّل منحنى الدالة $f(x)=3\sin(x+4)$ تمددًا رأسيًّا معامله 3 وإزاحة أفقية مقدارها 4 وحدات إلى اليسار لمنحنى الدالة $y=\sin x$ — a — b

في التمارين (10–6)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(6) يمثّل منحنى الدالة $f(x)=-\sin(x-5)$ لمنحنى الدالة $g(x)=\sin x$:

a) انعكاسًا في محور السينات وإزاحة أفقية مقدارها 5 وحدات إلى اليمين.
b) انعكاسًا في محور السينات وإزاحة أفقية مقدارها 5 وحدات إلى اليسار.
c) انعكاسًا في محور الصادات وإزاحة أفقية مقدارها 5 وحدات إلى اليمين.
d) انعكاسًا في محور الصادات وإزاحة أفقية مقدارها 5 وحدات إلى اليسار.

(7) يمثّل منحنى الدالة $f(x)=\sin(2x-6)-5$ لمنحنى الدالة $g(x)=\sin x$:

a) انكماشًا أفقيًّا بمعامل $\frac{1}{2}$، إزاحة أفقية 3 وحدات لجهة اليمين، إزاحة رأسية مقدارها 5 إلى الأسفل.
b) تمددًا أفقيًّا بمعامل 2، إزاحة أفقية 6 وحدات لجهة اليمين، إزاحة رأسية مقدارها 5 وحدات إلى الأعلى.
c) انكماشًا أفقيًّا بمعامل $\frac{1}{2}$، إزاحة أفقية 3 وحدات لجهة اليسار، إزاحة رأسية مقدارها 5 وحدات إلى الأسفل.
d) تمددًا أفقيًّا بمعامل 2، إزاحة أفقية 6 وحدات لجهة اليسار، إزاحة رأسية مقدارها 5 وحدات إلى الأسفل.

(8) يمثّل منحنى الدالة $f(x)=-4\cos\left(\frac{x}{3}\right)$ لمنحنى الدالة $g(x)=-\cos x$:

a) انكماشًا رأسيًّا معامله $\frac{1}{4}$ وتمددًا أفقيًّا معامله 3.
b) تمددًا رأسيًّا معامله 4 وتمددًا أفقيًّا معامله 3.
c) انكماشًا رأسيًّا معامله 4 وانكماشًا أفقيًّا معامله 3.
d) تمددًا رأسيًّا معامله 3 وانكماشًا أفقيًّا معامله 4.

23

تمرَّنْ 8–2

التحويلات الهندسية للدوال الجيبية

Geometric Transformations of Sinusoid Functions

المجموعة A تمارين مقالية

(1) صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين f, h لكل مما يلي:

(a) $f(x)=\cos 2x\ ,\ h(x)=\frac{5}{3}\cos 2x$
(b) $f(x)=\sin\frac{x}{3}\ ,\ h(x)=\frac{-2}{3}\sin\frac{x}{3}$
(c) $f(x)=\sin x\ ,\ h(x)=\sin 3x$
(d) $f(x)=\cos x\ ,\ h(x)=\cos\frac{x}{5}$
(e) $f(x)=\sin x\ ,\ h(x)=-\frac{1}{3}\sin(-2x)$
(f) $f(x)=\cos x\ ,\ h(x)=1.5\cos 4x$
(g) $f(x)=\cos 2x\ ,\ h(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$
(h) $f(x)=\sin 3x\ ,\ h(x)=\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$
(i) $f(x)=0.3\cos 2x\ ,\ h(x)=0.3\cos 2x+4$
(j) $f(x)=3\sin\frac{x}{2}\ ,\ h(x)=3\sin\frac{x}{2}-1$

(2) صف العلاقة بين التمثيلين البيانيين لكل من: $y_1=\cos x\ ,\ y_2=\cos 3x$
ثم ارسم دورتين من الدالة y_2

(3) وضّح كيف يمكن الحصول على التمثيل البياني لكل من الدالتين التاليتين باستخدام تحويلات الدوال المثلثية $y=\sin\theta$ أو $y=\cos\theta$، ثم أوجد سعة كل دالة ودورتها:

(a) $y=-2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+1$
(b) $y=3.5\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)-1$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (5–1)، ظلّل a إذا كانت العبارة صحيحة و b إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) يمثّل منحنى الدالة $f(x)=4\sin(3x)$ تمددًا رأسيًّا بمعامل 4 وانكماشًا أفقيًّا بمعامل 3 لمنحنى الدالة: $g(x)=\sin x$ — a — b

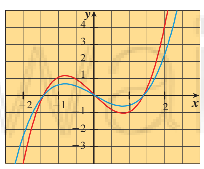
22

Vertical Stretch or Shrink — التمدد/الانكماش الرأسي

ليكن a عددًا موجبًا $a\neq 0$

بيان الدالة $y=af(x)$ ينتج من انكماش/تمدد رأسي لبيان الدالة $y=f(x)$

إذا كان $|a|<1$: انكماش بمعامل $|a|$

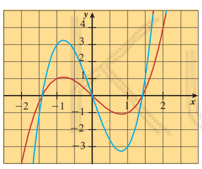


$y=f(x)=x^3-2x$

$y=0.6f(x)=0.6x^3-1.2x$

انكماش رأسي بمعامل 0.6

إذا كان $|a|>1$: تمدد بمعامل $|a|$



$y=f(x)=x^3-2x$

$y=3f(x)=3x^3-6x$

تمدد رأسي بمعامل 3

Applying Transformations to Sinusoids — تطبيق التحويلات على الدوال الجيبية

يمكن أن تطبق التحويلات السابقة على أي دالة بما في ذلك الدوال المثلثية.

والتمثيلات البيانية التي نحصل عليها من تطبيق هذه التحويلات على دالتي الجيب وجيب التمام هي دوال جيبية.

تكون الدالة جيبية إذا أمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$f(x)=a\sin(bx-h)+k$$

أو $$f(x)=a\cos(bx-h)+k$$

حيث a, b, h, k ثوابت $a\neq 0\ ,\ b\neq 0$

سوف نرى في مثال لاحق أن $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ ،

لذلك فإن رسم دالة جيب التمام هو نفسه رسم دالة الجيب بعد إزاحتها إلى اليسار بمقدار $\frac{\pi}{2}$ وحدة.

بسبب هذه العلاقة يمكن أن نعيد كتابة كل الدوال الجيبية على الصورة:

$$f(x)=a\sin(bx-h)+k$$

54

6 الربط

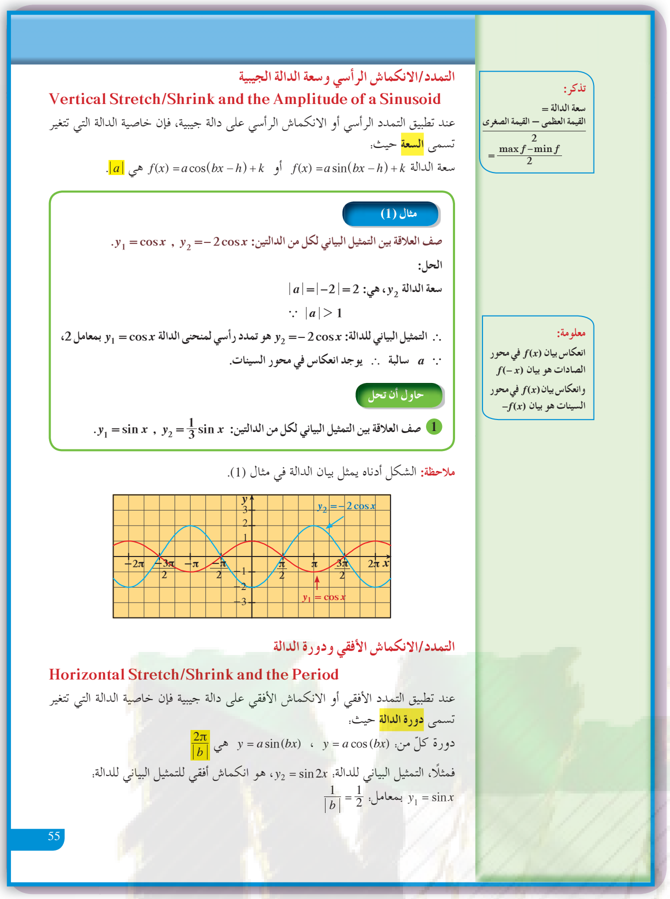
يوفر المثال (7) الربط بين الدالة الجيبية وعدد الأيام المشمسة في إحدى المدن، وكيفية الاستفادة من الدالة لتقدير عدد الأيام المشمسة.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام التحويلات على الدوال المثلثية. ساعدهم على كتابة كل دالة بالصورة القياسية لكي يجدوا كل التحويلات من دون ارتكاب الأخطاء.

8 التقييم

توفر فقرات «حاول أن تحل» فرصة أمام المعلم لمتابعة أداء طلابه ومعرفة مدى استيعابهم لمفاهيم هذا الدرس ومهاراته.



التمدد/الانكماش الرأسي وسعة الدالة الجيبية

Vertical Stretch/Shrink and the Amplitude of a Sinusoid

عند تطبيق التمدد الرأسي أو الانكماش الرأسي على دالة جيبية، فإن خاصية الدالة التي تتغير تسمى **السعة** حيث:

سعة الدالة $f(x)=a\sin(bx-h)+k$ أو $f(x)=a\cos(bx-h)+k$ هي $|a|$.

تذكر: سعة الدالة $= \dfrac{\text{القيمة العظمى} - \text{القيمة الصغرى}}{2} = \dfrac{\max f - \min f}{2}$

مثال (1)

صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين: $y_2=-2\cos x$, $y_1=\cos x$.

الحل:

سعة الدالة y_2، هي: $|a|=|-2|=2$

$\because\ |a|>1$

$\therefore$ التمثيل البياني للدالة: $y_2=-2\cos x$ هو تمدد رأسي لمنحنى الدالة $y_1=\cos x$ بمعامل 2،

$\because$ a سالبة $\therefore$ يوجد انعكاس في محور السينات.

معلومة: انعكاس بيان $f(x)$ في محور الصادات هو بيان $f(-x)$ وانعكاس بيان $f(x)$ في محور السينات هو بيان $-f(x)$

حاول أن تحل

1 صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين: $y_2=\frac{1}{3}\sin x$, $y_1=\sin x$.

ملاحظة: الشكل أدناه يمثل بيان الدالة في مثال (1).

التمدد/الانكماش الأفقي ودورة الدالة

Horizontal Stretch/Shrink and the Period

عند تطبيق التمدد الأفقي أو الانكماش الأفقي على دالة جيبية فإن خاصية الدالة التي تتغير تسمى **دورة الدالة** حيث:

دورة كلّ من: $y=a\cos(bx)$ ، $y=a\sin(bx)$ هي $\dfrac{2\pi}{|b|}$

فمثلًا، التمثيل البياني للدالة: $y_2=\sin 2x$، هو انكماش أفقي للتمثيل البياني للدالة: $y_1=\sin x$ بمعامل: $\dfrac{1}{|b|}=\dfrac{1}{2}$

55

(9) يمثّل منحنى الدالة $f(x)=-2\cos\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{8}\right)+3$ لمنحنى الدالة $g(x)=-2\cos\left(\frac{x}{4}\right)$:

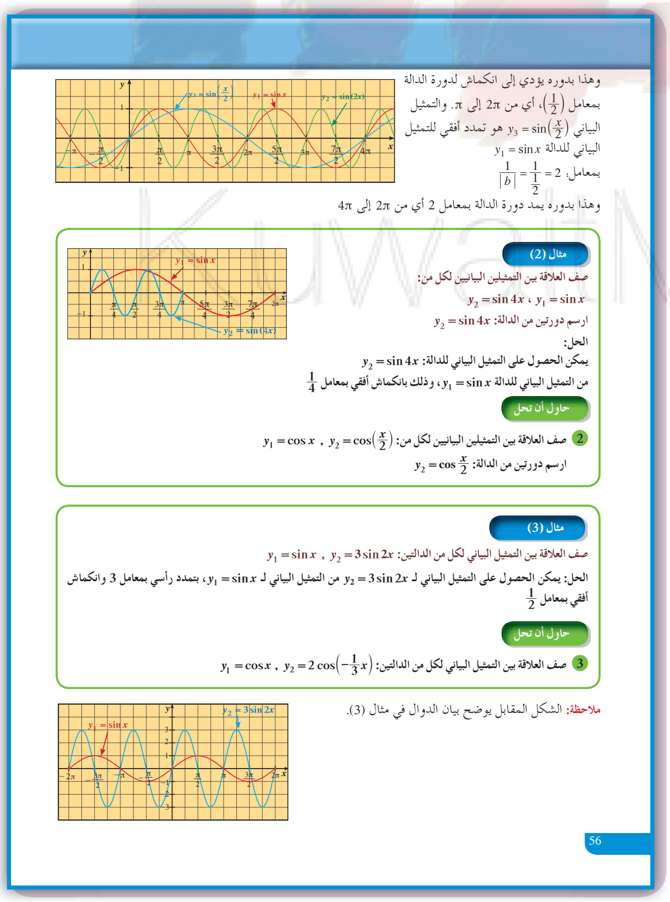
(a) إزاحة رأسية بمقدار 3 وحدات إلى الأسفل وأفقية بمقدار $\frac{\pi}{2}$ لجهة اليسار.

(b) إزاحة رأسية بمقدار $\frac{\pi}{8}$ وحدات إلى الأعلى وأفقية بمقدار 3 وحدات لجهة اليمين.

(c) إزاحة رأسية بمقدار 3 وحدات إلى الأعلى وأفقية بمقدار $\frac{\pi}{2}$ لجهة اليمين.

(d) إزاحة رأسية بمقدار 3 وحدات إلى الأسفل وأفقية بمقدار $\frac{\pi}{2}$ لجهة اليمين.

24



وهذا بدوره يؤدي إلى انكماش لدورة الدالة بمعامل $\left(\frac{1}{2}\right)$، أي من 2π إلى π. والتمثيل البياني $y_3=\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ هو تمدد أفقي للتمثيل البياني للدالة $y_1=\sin x$

بمعامل: $\dfrac{1}{|b|}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$

وهذا بدوره يمد دورة الدالة بمعامل 2 أي من 2π إلى 4π

مثال (2)

صف العلاقة بين التمثيلين البيانيين لكل من:

$y_1=\sin x$ ، $y_2=\sin 4x$

ارسم دورتين من الدالة: $y_2=\sin 4x$

الحل:

يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة: $y_2=\sin 4x$

من التمثيل البياني للدالة $y_1=\sin x$، وذلك بانكماش أفقي بمعامل $\frac{1}{4}$

حاول أن تحل

2 صف العلاقة بين التمثيلين البيانيين لكل من: $y_2=\cos\left(\frac{x}{2}\right)$, $y_1=\cos x$

ارسم دورتين من الدالة: $y_2=\cos\frac{x}{2}$

مثال (3)

صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين: $y_2=3\sin 2x$, $y_1=\sin x$

الحل: يمكن الحصول على التمثيل البياني لـ $y_2=3\sin 2x$ من التمثيل البياني لـ $y_1=\sin x$، بتمدد رأسي بمعامل 3 وانكماش أفقي بمعامل $\frac{1}{2}$

حاول أن تحل

3 صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين: $y_2=2\cos\left(-\frac{1}{3}x\right)$, $y_1=\cos x$

ملاحظة: الشكل المقابل يوضح بيان الدوال في مثال (3).

56

اختبار سريع

1. أثبت أن: $-\sin x$ هي إزاحة أفقية للدالة $\sin x$ بمقدار $-\pi$ أي أن $\sin(x+\pi) = -\sin x$

التمثيل البياني للدالة: $y = \sin(x+\pi)$ ينتج من إزاحة أفقية لمنحنى الدالة: $y = \sin x$ قيمتها $-\pi$ وحدة أفقية (يمكن ملاحظة أن $\sin x$، $\sin(x+\pi)$ لهما الشكل نفسه).

2. صف العلاقة لكل من الدالتين:

$y_1 = \cos x$، $y_2 = 3\cos\frac{1}{2}x$

سعة الدالة y_2 هي: 3

التمثيل البياني للدالة: $y_2 = 3\cos\frac{1}{2}x$ هو تمدد أفقي معامله $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ وتمدد رأسي إلى أعلى معامله 3 مقارنة بالتمثيل البياني للدالة:

$y_1 = \cos x$

3. أوجد الدورة لكل دالة مما يلي:

$y = \sin 3x$ $\quad \frac{2\pi}{3}$

$y = \cos 5x$ $\quad \frac{2\pi}{5}$

$y = \tan 2x$ $\quad \frac{\pi}{2}$

4. اشرح كيفية الحصول على التمثيل البياني للدالة: $y_2 = -4\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{2}\right)-2$ من التمثيل البياني للدالة: $y_1 = \cos x$، ثم أوجد دورة الدالة y_2

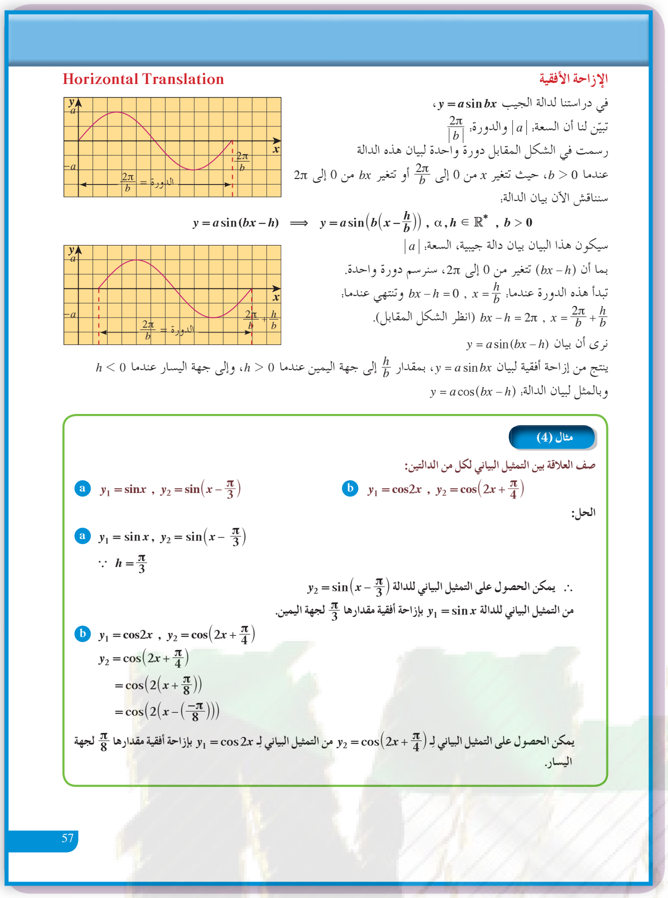
نكتب أولًا: $y_2 = -4\cos\left[\frac{1}{3}\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)\right]-2$

وبالمقارنة بالصورة القياسية:

$$y = a\cos(bx-h)+k$$

يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة y_2 من التمثيل البياني للدالة y_1 كما يلي:

- تمدد أفقي معامله $\frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$ للحصول على $\cos\left(\frac{1}{3}x\right)$
- إزاحة أفقية إلى اليسار مقدارها $\frac{3\pi}{2}$ للحصول على $\cos\left[\frac{1}{3}\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)\right]$



الإزاحة الأفقية Horizontal Translation

في دراستنا لدالة الجيب $y = a\sin bx$،

تبيّن لنا أن السعة: $|a|$ والدورة: $\frac{2\pi}{|b|}$

رسمت في الشكل المقابل دورة واحدة لبيان هذه الدالة عندما $b > 0$، حيث تتغير x من 0 إلى $\frac{2\pi}{b}$ أو تتغير bx من 0 إلى 2π

سنناقش الآن بيان الدالة:

$$y = a\sin(bx-h) \implies y = a\sin\left(b\left(x-\frac{h}{b}\right)\right), \ \alpha, h \in \mathbb{R}^*, \ b>0$$

سيكون هذا البيان بيان دالة جيبية، السعة: $|a|$

بما أن $(bx-h)$ تتغير من 0 إلى 2π، سنرسم دورة واحدة.

تبدأ هذه الدورة عندما: $x = \frac{h}{b}$، $bx-h=0$ وتنتهي عندما: $x = \frac{2\pi}{b}+\frac{h}{b}$، $bx-h=2\pi$ (انظر الشكل المقابل).

نرى أن بيان $y = a\sin(bx-h)$

ينتج من إزاحة أفقية لبيان $y = a\sin bx$، بمقدار $\frac{h}{b}$ إلى جهة اليمين عندما $h>0$، وإلى جهة اليسار عندما $h<0$

وبالمثل لبيان الدالة: $y = a\cos(bx-h)$

مثال (4)

صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين:

a) $y_1 = \sin x$, $y_2 = \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

b) $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

الحل:

a) $y_1 = \sin x$, $y_2 = \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

$\because \ h = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة $y_2 = \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ من التمثيل البياني للدالة $y_1 = \sin x$ بإزاحة أفقية مقدارها $\frac{\pi}{3}$ لجهة اليمين.

b) $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

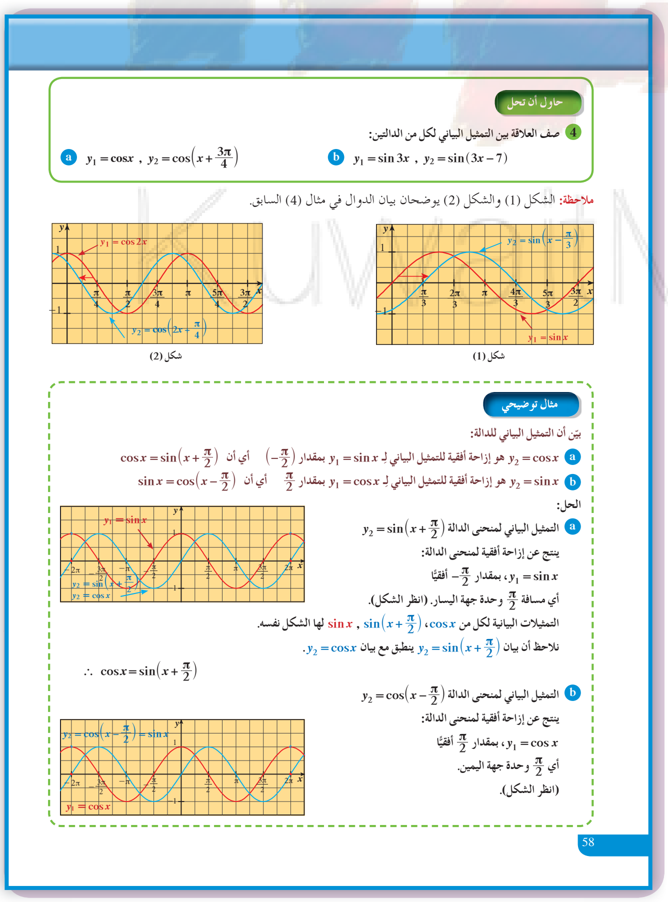
$y_2 = \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

$= \cos\left(2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\right)$

$= \cos\left(2\left(x-\left(\frac{-\pi}{8}\right)\right)\right)$

يمكن الحصول على التمثيل البياني لِـ $y_2 = \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ من التمثيل البياني لِـ $y_1 = \cos 2x$ بإزاحة أفقية مقدارها $\frac{\pi}{8}$ لجهة اليسار.

57



حاول أن تحل

4. صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين:

a) $y_1 = \cos x$, $y_2 = \cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$

b) $y_1 = \sin 3x$, $y_2 = \sin(3x-7)$

ملاحظة: الشكل (1) والشكل (2) يوضحان بيان الدوال في مثال (4) السابق.

شكل (1) — شكل (2)

مثال توضيحي

بيّن أن التمثيل البياني للدالة:

a) $y_2 = \cos x$ هو إزاحة أفقية للتمثيل البياني لِـ $y_1 = \sin x$ بمقدار $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ أي أن $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

b) $y_2 = \sin x$ هو إزاحة أفقية للتمثيل البياني لِـ $y_1 = \cos x$ بمقدار $\frac{\pi}{2}$ أي أن $\sin x = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

الحل:

a) التمثيل البياني لمنحنى الدالة $y_2 = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

ينتج عن إزاحة أفقية لمنحنى الدالة:

$y_1 = \sin x$، بمقدار $-\frac{\pi}{2}$ أفقيًا

أي مسافة $\frac{\pi}{2}$ وحدة جهة اليسار. (انظر الشكل).

التمثيلات البيانية لكل من $\cos x$، $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin x$ لها الشكل نفسه.

نلاحظ أن بيان $y_2 = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ ينطبق مع بيان $y_2 = \cos x$.

$\therefore \ \cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

b) التمثيل البياني لمنحنى الدالة $y_2 = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

ينتج عن إزاحة أفقية لمنحنى الدالة:

$y_1 = \cos x$، بمقدار $\frac{\pi}{2}$ أفقيًا

أي $\frac{\pi}{2}$ وحدة جهة اليمين.

(انظر الشكل).

58

- تمدد رأسي معامله $|-4| = 4$ للحصول على $-4\cos\left[\frac{1}{3}\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)\right]$ وانعكاس في محور السينات.
- إزاحة رأسية إلى الأسفل قيمتها 2 وحدة. للحصول على $y_2 = -4\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{2}\right) - 2$

دورة الدالة: $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

أولًا:

(a) $g(x)$

(b) انعكاس، السيني. (c) انعكاس، الصادي.

ثانيًا:

(a) $f_1(x)$

(b) انعكاس، السيني. (c) انعكاس، السيني.

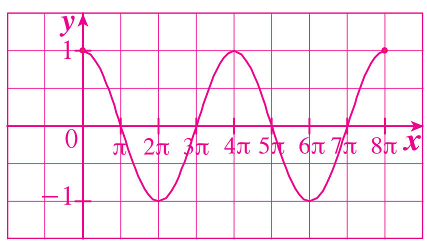
«حاول أن تحل»

1 سعة الدالة y_2 هي $|a| = \frac{1}{3}$

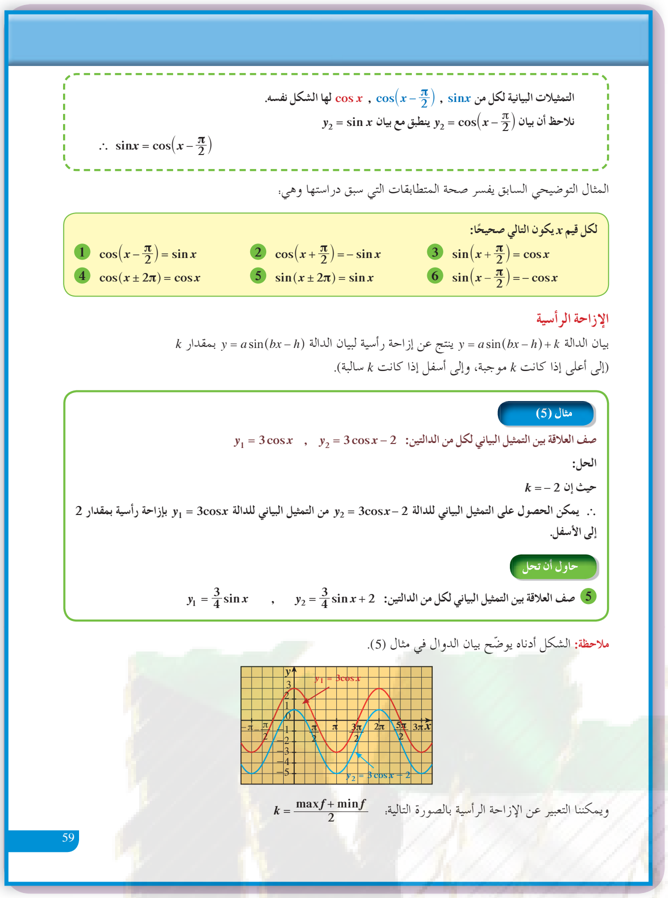
$\because |a| < 1 \therefore$ التمثيل البياني للدالة: $y_2 = \frac{1}{3}\sin x$ هو انكماش رأسي لمنحنى الدالة $y_1 = \sin x$ بمعامل $\frac{1}{3}$

$\because a$ موجبة $\therefore$ لا يوجد انعكاس في محور السينات.

2 يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة $y_2 = \cos\frac{x}{2}$ من تمثيل $y_1 = \cos x$ بتمدد أفقي بمعامل 2.



3 تمدد رأسي بمعامل 2، تمدد أفقي بمعامل 3.



التمثيلات البيانية لكل من $\sin x$, $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos x$ لها الشكل نفسه.

نلاحظ أن بيان $y_2 = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ ينطبق مع بيان $y_2 = \sin x$

$\therefore \sin x = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

المثال التوضيحي السابق يفسر صحة المتطابقات التي سبق دراستها وهي:

لكل قيم x يكون التالي صحيحًا:

1 $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin x$ 2 $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ 3 $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

4 $\cos(x \pm 2\pi) = \cos x$ 5 $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$ 6 $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$

الإزاحة الرأسية

بيان الدالة $y = a\sin(bx-h)+k$ ينتج عن إزاحة رأسية لبيان الدالة $y = a\sin(bx-h)$ بمقدار k (إلى أعلى إذا كانت k موجبة، وإلى أسفل إذا كانت k سالبة).

مثال (5)

صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين: $y_2 = 3\cos x - 2$, $y_1 = 3\cos x$

الحل:

حيث إن $k = -2$

$\therefore$ يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة $y_2 = 3\cos x - 2$ من التمثيل البياني للدالة $y_1 = 3\cos x$ بإزاحة رأسية بمقدار 2 إلى الأسفل.

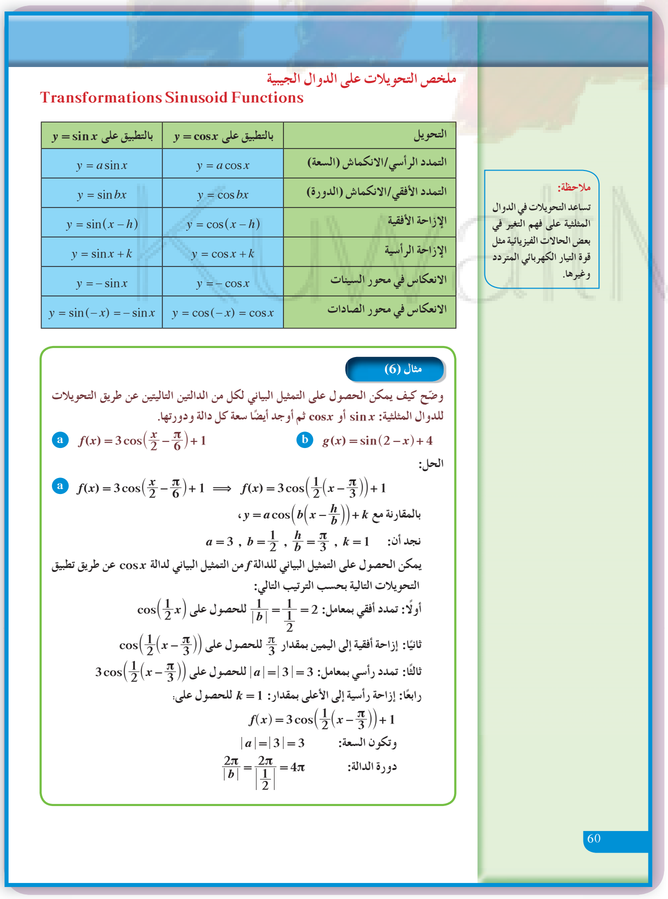
حاول أن تحل

5 صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين: $y_2 = \frac{3}{4}\sin x + 2$, $y_1 = \frac{3}{4}\sin x$

ملاحظة: الشكل أدناه يوضّح بيان الدوال في مثال (5).

ويمكننا التعبير عن الإزاحة الرأسية بالصورة التالية: $k = \frac{\max f + \min f}{2}$

59



ملخص التحويلات على الدوال الجيبية

Transformations Sinusoid Functions

التحويل	بالتطبيق على $y = \cos x$	بالتطبيق على $y = \sin x$
التمدد الرأسي/الانكماش (السعة)	$y = a\cos x$	$y = a\sin x$
التمدد الأفقي/الانكماش (الدورة)	$y = \cos bx$	$y = \sin bx$
الإزاحة الأفقية	$y = \cos(x-h)$	$y = \sin(x-h)$
الإزاحة الرأسية	$y = \cos x + k$	$y = \sin x + k$
الانعكاس في محور السينات	$y = -\cos x$	$y = -\sin x$
الانعكاس في محور الصادات	$y = \cos(-x) = \cos x$	$y = \sin(-x) = -\sin x$

ملاحظة: تساعد التحويلات في الدوال المثلثية على فهم التغير في بعض الحالات الفيزيائية مثل قوة التيار الكهربائي المتردد وغيرها.

مثال (6)

وضّح كيف يمكن الحصول على التمثيل البياني لكل من الدالتين التاليتين عن طريق التحويلات للدوال المثلثية: $\sin x$ أو $\cos x$ ثم أوجد أيضًا سعة كل دالة ودورتها.

a $f(x) = 3\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+1$ b $g(x) = \sin(2-x)+4$

الحل:

a $f(x) = 3\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+1 \Longrightarrow f(x) = 3\cos\left(\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)+1$

بالمقارنة مع $y = a\cos\left(b\left(x-\frac{h}{b}\right)\right)+k$،

نجد أن: $a = 3$, $b = \frac{1}{2}$, $\frac{h}{b} = \frac{\pi}{3}$, $k = 1$

يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة f من التمثيل البياني لدالة $\cos x$ عن طريق تطبيق التحويلات التالية بحسب الترتيب التالي:

أولًا: تمدد أفقي بمعامل: $\frac{1}{|b|} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ للحصول على $\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

ثانيًا: إزاحة أفقية إلى اليمين بمقدار $\frac{\pi}{3}$ للحصول على $\cos\left(\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

ثالثًا: تمدد رأسي بمعامل: $|a| = |3| = 3$ للحصول على $3\cos\left(\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

رابعًا: إزاحة رأسية إلى الأعلى بمقدار: $k = 1$ للحصول على:

$f(x) = 3\cos\left(\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)+1$

وتكون السعة: $|a| = |3| = 3$

دورة الدالة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$

60


b $g(x)=\sin(2-x)+4 \implies g(x)=\sin(-(x-2))+4$

$\implies g(x)=-\sin(x-2)+4$

بالمقارنة مع: $y=a\sin\left(b\left(x-\frac{h}{b}\right)\right)+k$،

نجد أن: $a=-1\ ,\ b=1\ ,\ \frac{h}{b}=2\ ,\ k=4$

يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة g من التمثيل البياني للدالة $\sin x$ عن طريق تطبيق التحويلات التالية بحسب الترتيب الآتي:

أولًا: إزاحة أفقية إلى اليمين بمقدار $\frac{h}{b}=2$ للحصول على $\sin(x-2)$

ثانيًا: انعكاس في محور السينات للحصول على $-\sin(x-2)$

ثالثًا: إزاحة رأسية إلى الأعلى بمقدار $k=4$ للحصول على:

$g(x)=-\sin(x-2)+4$

وتكون السعة: $|a|=|-1|=1$ ، دورة الدالة: $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{1}=2\pi$

حاول أن تحل

6 وضّح كيف يمكن الحصول على التمثيل البياني لكل من الدالتين التاليتين عن طريق التمثيلات البيانية للدوال المثلثية: $\sin x$ أو $\cos x$. أوجد أيضًا سعة كل دالة ودورتها.

a $y=\cos(1-x)+2$

b $y=2\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)-1$

والشكلان فيما يلي يوضحان الدوال من مثال (6).

مثال (7) تطبيق حياتي إثرائي

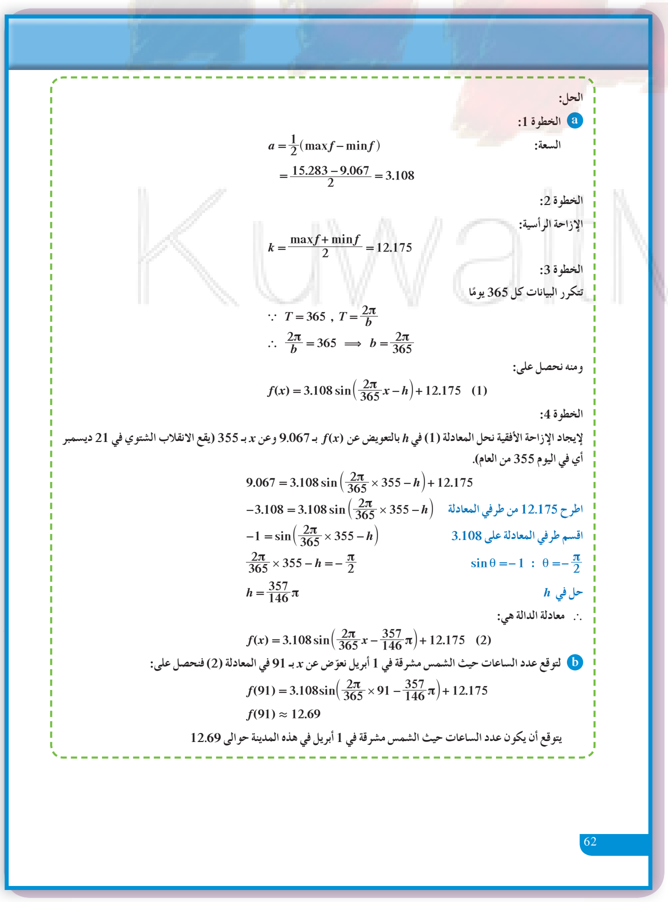
تبيّن الدراسات أن في إحدى المدن، يبلغ معدل الساعات حيث الشمس مشرقة خلال الانقلاب الصيفي 15.283 وخلال الانقلاب الشتوي 9.067

a أوجد دالة جيبية على الصورة $f(x)=a\sin(bx-h)+k$ تنمذج هذه البيانات.

b استخدم هذه الدالة لتوقع عدد الساعات حيث الشمس مشرقة في هذه المدينة في أول أبريل أي في اليوم 91 من العام.

معلومة: يحدث الانقلاب الصيفي في نصف الكرة الشمالي في 21 يونيو وفي هذا اليوم يكون أطول نهار وأقصر ليل. ويحدث الانقلاب الشتوي في نصف الكرة الشمالي في 21 ديسمبر حيث يكون أقصر نهار وأطول ليل.

61


الحل:

a الخطوة 1:

السعة: $a=\frac{1}{2}(\max f-\min f)$

$=\frac{15.283-9.067}{2}=3.108$

الخطوة 2:

الإزاحة الرأسية:

$k=\frac{\max f+\min f}{2}=12.175$

الخطوة 3:

تتكرر البيانات كل 365 يومًا

$\because\ T=365\ ,\ T=\frac{2\pi}{b}$

$\therefore\ \frac{2\pi}{b}=365 \implies b=\frac{2\pi}{365}$

ومنه نحصل على:

$f(x)=3.108\sin\left(\frac{2\pi}{365}x-h\right)+12.175 \quad (1)$

الخطوة 4:

لإيجاد الإزاحة الأفقية نحل المعادلة (1) في h بالتعويض عن $f(x)$ بـ 9.067 وعن x بـ 355 (يقع الانقلاب الشتوي في 21 ديسمبر أي في اليوم 355 من العام).

$9.067=3.108\sin\left(\frac{2\pi}{365}\times 355-h\right)+12.175$

$-3.108=3.108\sin\left(\frac{2\pi}{365}\times 355-h\right)$ اطرح 12.175 من طرفي المعادلة

$-1=\sin\left(\frac{2\pi}{365}\times 355-h\right)$ اقسم طرفي المعادلة على 3.108

$\frac{2\pi}{365}\times 355-h=-\frac{\pi}{2}$ $\sin\theta=-1\ :\ \theta=-\frac{\pi}{2}$

$h=\frac{357}{146}\pi$ حل في h

$\therefore$ معادلة الدالة هي:

$f(x)=3.108\sin\left(\frac{2\pi}{365}x-\frac{357}{146}\pi\right)+12.175 \quad (2)$

b لتوقع عدد الساعات حيث الشمس مشرقة في 1 أبريل نعوّض عن x بـ 91 في المعادلة (2) فنحصل على:

$f(91)=3.108\sin\left(\frac{2\pi}{365}\times 91-\frac{357}{146}\pi\right)+12.175$

$f(91)\approx 12.69$

يتوقع أن يكون عدد الساعات حيث الشمس مشرقة في 1 أبريل في هذه المدينة حوالى 12.69

62

4 (a) يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة $y_2=\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$ من التمثيل البياني للدالة $y_1=\cos x$ باستخدام إزاحة أفقية قيمتها $\frac{3\pi}{4}$ لجهة اليسار.

(b) يمكن الحصول على $y_2=\sin\left[3\left(x-\frac{7}{3}\right)\right]$ التمثيل البياني للدالة $y_2=\sin(3x-7)$ من التمثيل البياني للدالة $y_1=\sin 3x$ باستخدام إزاحة أفقية قيمتها $\frac{7}{3}$ لجهة اليمين وانكماش أفقي معامله $\frac{1}{3}$.

5 يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة $y_2=\frac{3}{4}\sin x+2$ من التمثيل البياني للدالة $y_1=\frac{3}{4}\sin x$ باستخدام إزاحة رأسية قيمتها 2 وحدة إلى الأعلى.

6 (a) $f(x)=\cos(1-x)+2=\cos(x-1)+2$

يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة f من التمثيل البياني للدالة $\cos x$ عن طريق تطبيق التحويلات التالية بحسب الترتيب الآتي:

(1) إزاحة جهة اليمين مقدارها 1 وحدة.

(2) إزاحة رأسية إلى الأعلى مقدارها 2 وحدة.

بالمقارنة بـ $y=a\cos(bx-h)+k$ نجد أن:

$a=1\ ,\ b=1$

$\therefore$ السعة: $|a|=1$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|}=2\pi$

(b) $f(x)=2\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+1=2\sin\left[\frac{1}{3}\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)\right]-1$

يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة f من التمثيل البياني للدالة $\sin x$ عن طريق تطبيق التحويلات التالية بحسب الترتيب الآتي:

(1) تمدد أفقي معامله $\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$

(2) إزاحة أفقية إلى اليسار مقدارها $\frac{3\pi}{4}$ وحدة.

(3) تمدد رأسي بمعامل 2.

(4) إزاحة رأسية إلى الأسفل مقدارها وحدة واحدة.

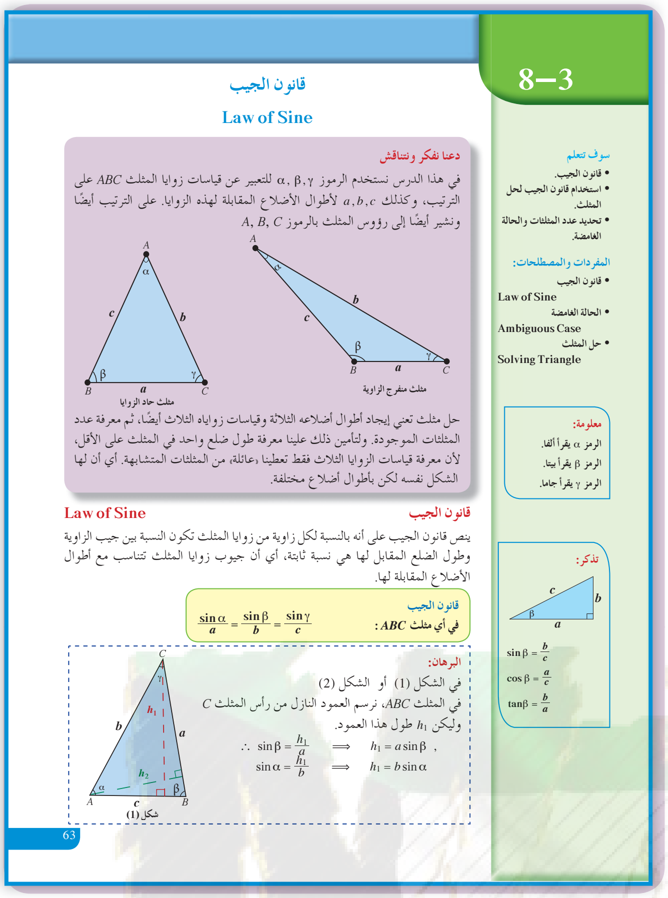
السعة: $|a|=2$

دورة الدالة: 6π

3–8: قانون الجيب

1 الأهداف

- يتعرف قانون الجيب.
- يستخدم قانون الجيب لحل المثلث.
- يحدد عدد المثلثات والحالة الغامضة.



8–3

سوف تتعلم

- قانون الجيب.
- استخدام قانون الجيب لحل المثلث.
- تحديد عدد المثلثات والحالة الغامضة.

المفردات والمصطلحات:

- قانون الجيب Law of Sine
- الحالة الغامضة Ambiguous Case
- حل المثلث Solving Triangle

معلومة:
الرمز α يقرأ ألفا.
الرمز β يقرأ بيتا.
الرمز γ يقرأ جاما.

تذكر:
$\sin\beta = \frac{b}{c}$
$\cos\beta = \frac{a}{c}$
$\tan\beta = \frac{b}{a}$

قانون الجيب
Law of Sine

دعنا نفكر ونتناقش
في هذا الدرس نستخدم الرموز α, β, γ للتعبير عن قياسات زوايا المثلث ABC على الترتيب، وكذلك a, b, c لأطوال الأضلاع المقابلة لهذه الزوايا. على الترتيب أيضًا ونشير أيضًا إلى رؤوس المثلث بالرموز A, B, C

مثلث حاد الزوايا — مثلث منفرج الزاوية

حل مثلث تعني إيجاد أطوال أضلاعه الثلاثة وقياسات زواياه الثلاث أيضًا، ثم معرفة عدد المثلثات الموجودة. ولتأمين ذلك علينا معرفة طول ضلع واحد في المثلث على الأقل، لأن معرفة قياسات الزوايا الثلاث فقط تعطينا «عائلة» من المثلثات المتشابهة. أي أن لها الشكل نفسه لكن بأطوال أضلاع مختلفة.

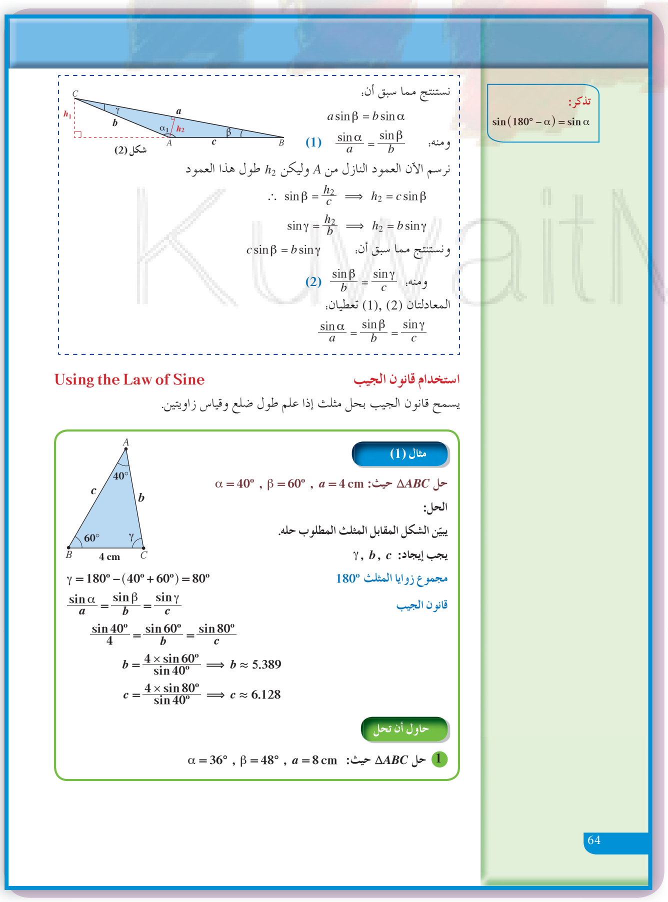
قانون الجيب — Law of Sine
ينص قانون الجيب على أنه بالنسبة لكل زاوية من زوايا المثلث تكون النسبة بين جيب الزاوية وطول الضلع المقابل لها هي نسبة ثابتة، أي أن جيوب زوايا المثلث تتناسب مع أطوال الأضلاع المقابلة لها.

قانون الجيب
في أي مثلث ABC: $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$

البرهان:
في الشكل (1) أو الشكل (2)
في المثلث ABC، نرسم العمود النازل من رأس المثلث C وليكن h_1 طول هذا العمود.

$\therefore \sin\beta = \frac{h_1}{a} \implies h_1 = a\sin\beta$,
$\sin\alpha = \frac{h_1}{b} \implies h_1 = b\sin\alpha$

شكل (1)



تذكر:
$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$

نستنتج مما سبق أن:
$a\sin\beta = b\sin\alpha$
ومنه: $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$ (1)

شكل (2)

نرسم الآن العمود النازل من A وليكن h_2 طول هذا العمود

$\therefore \sin\beta = \frac{h_2}{c} \implies h_2 = c\sin\beta$
$\sin\gamma = \frac{h_2}{b} \implies h_2 = b\sin\gamma$

ونستنتج مما سبق أن: $c\sin\beta = b\sin\gamma$
ومنه: $\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$ (2)
المعادلتان (1), (2) تعطيان:
$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$

استخدام قانون الجيب — Using the Law of Sine
يسمح قانون الجيب بحل مثلث إذا علم طول ضلع وقياس زاويتين.

مثال (1)
حل ΔABC حيث: $\alpha = 40°$, $\beta = 60°$, $a = 4$ cm
الحل:
يبيّن الشكل المقابل المثلث المطلوب حله.
يجب إيجاد: γ, b, c
مجموع زوايا المثلث $180°$: $\gamma = 180° - (40° + 60°) = 80°$
قانون الجيب: $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$
$\frac{\sin 40°}{4} = \frac{\sin 60°}{b} = \frac{\sin 80°}{c}$
$b = \frac{4 \times \sin 60°}{\sin 40°} \implies b \approx 5.389$
$c = \frac{4 \times \sin 80°}{\sin 40°} \implies c \approx 6.128$

حاول أن تحل
1 حل ΔABC حيث: $\alpha = 36°$, $\beta = 48°$, $a = 8$ cm

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

قانون الجيب – الحالة الغامضة – حل المثلث.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) أوجد دون استخدام الآلة الحاسبة:

$\sin 30°, \sin 45°, \sin 60°, \sin 90°, \sin 120°, \sin 150°$

(b) استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد:

$\sin 25°, \sin 40°, \sin 15°, \sin 75°, \sin 125°$

(c) أوجد قيمة x في كل حالة:

$\sin x = 0.467$, $\sin x = 0.895$

$\sin x = 0.637$, $\sin x = 0.984$

(d) هل الأطوال: 10 , 6 , 4 تشكل مثلثًا؟ اشرح.

5 التدريس

يساعد قانون الجيب على إيجاد عناصر مثلث (زوايا وأضلاع) بمعلومية بعض منها وذلك بحسب المعطيات المتوفرة في هذا المثلث.

فالقانون: $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$ يوفر فرصة مهمة لإيجاد ثلاثة عناصر إذا أعطيت ثلاثة عناصر منها.

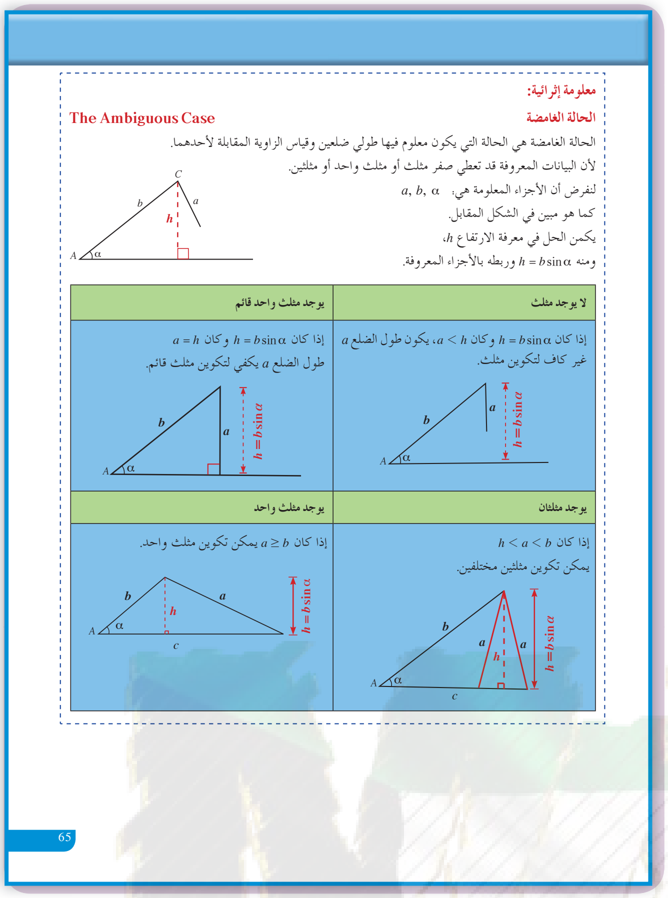
اطلب إلى الطلاب كتابة هذا القانون، ثم ناقش الطلاب حول العناصر الثلاثة المطلوبة والتي تؤمن إيجاد العناصر الأخرى.

فمثلًا، إذا عرفت: $a,\ \sin\beta,\ \sin\alpha$ فهل يمكن إيجاد: $c,\ b,\ \sin\gamma$؟

إذا عرفت $c,\ a,\ \sin\gamma$ فهل يمكن إيجاد: $\sin\gamma,\ b,\ \sin\beta$؟

في الحالة الغامضة، اشرح للطلاب أنه في بعض الأحيان يمكن إيجاد مثلث واحد، وفي أحيان أخرى يوجد مثلثان، وفي حالات أخرى لا يوجد أي مثلث.

ناقش مع الطلاب هذه الحالات ومتى نحصل على كل حالة. اشرح بتوسع شروط الحصول على مثلثين، وعلى مثلث واحد، ومتى لا نحصل على أي مثلث.



معلومة إثرائية:

الحالة الغامضة The Ambiguous Case

الحالة الغامضة هي الحالة التي يكون معلوم فيها طولي ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما.
لأن البيانات المعروفة قد تعطي صفر مثلث أو مثلث واحد أو مثلثين.
لنفرض أن الأجزاء المعلومة هي: a, b, α
كما هو مبين في الشكل المقابل.
يكمن الحل في معرفة الارتفاع h،
ومنه $h = b\sin\alpha$ وربطه بالأجزاء المعروفة.

لا يوجد مثلث	يوجد مثلث واحد قائم
إذا كان $h = b\sin\alpha$ وكان $a < h$، يكون طول الضلع a غير كاف لتكوين مثلث.	إذا كان $h = b\sin\alpha$ وكان $a = h$ طول الضلع a يكفي لتكوين مثلث قائم.
يوجد مثلثان	**يوجد مثلث واحد**
إذا كان $h < a < b$ يمكن تكوين مثلثين مختلفين.	إذا كان $a \geq b$ يمكن تكوين مثلث واحد.

في المثال (1)

يمكن استخدام قانون الجيب إذا علم طول ضلع وقياس زاويتين وليس بالضرورة الزاويتان المجاورتان للضلع.

ذكر الطلاب بإمكانية إيجاد قياس زاوية في مثلث إذا علم قياس الزاويتين الباقيتين لأن مجموع قياسات الزوايا الثلاث يساوي $180°$.

في المثال (2)

تمّ استخدام قانون الجيب مرتين لحل المثلث. أشر إلى أن هذه المعطيات تسمح بإيجاد مثلث واحد فقط.

في المثال (3)

يوفر هذا المثال شروط إيجاد مثلثين، لأن:

$$\sin 49.46° = \sin(130.54°) = 0.76$$

وبالتالي: $35° + 130.54° = 165.54° < 180°$

في المثال (4)

يبيّن هذا المثال كيف نستخدم قانون الجيب لمعرفة ارتفاع جبل.

في المثال (5)

استخدم قياسات الزوايا لمعرفة بُعد كل حارس عن موقع الحريق، أي معرفة طولي ضلعي مثلث إذا علم طول الضلع الثالث وقياسي زاويتين.

6 الربط

يوفر المثالان (5) ,(4) فرصة أمام الطلاب للتعرف على كيفية الربط بين قانون الجيب ومواقف حياتية.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في الترتيب عند كتابة أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا المناظرة.

شدّد على ضرورة الترتيب في كتابة قانون الجيب والتحقق من صحة كتابة القانون قبل البدء في الحل.

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتقف على حسن أدائهم.

كما ذكرنا يسمح قانون الجيب بحل مثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما.

معلومة: إذا كانت $\sin\alpha > 0$ فإن α تقع في الربع الأول وتكون حادة أو تقع في الربع الثاني وتكون منفرجة.

مثال (2)

حل ΔABC حيث: $a = 3\text{ cm}\ ,\ b = 2\text{ cm}\ ,\ \alpha = 40^\circ$

الحل:

نستخدم قانون الجيب لإيجاد β

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$$

عوّض

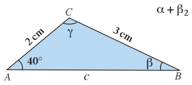
$$\frac{\sin 40^\circ}{3} = \frac{\sin\beta}{2}$$

$$\sin\beta = \frac{2\times\sin 40^\circ}{3} \implies \sin\beta \approx 0.43$$

توجد زاويتان β، $0^\circ < \beta < 180^\circ$ تحققان $\sin\beta = 0.43$

$\beta_1 \approx 25.4^\circ$ أو $\beta_2 \approx 154.6^\circ$

الحالة $\beta_2 \approx 154.6^\circ$ مرفوضة، لأن $\alpha + \beta_2 \approx 194.6^\circ$ وهو أكبر من 180°



باستخدام $\beta_1 \approx 25.4^\circ$ نحصل على:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta_1$$
$$\approx 180^\circ - 40^\circ - 25.4^\circ$$
$$\gamma \approx 114.6^\circ$$

يمكن الآن معرفة طول الضلع الثالث c

قانون الجيب

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}$$
$$\frac{\sin 40^\circ}{3} = \frac{\sin 114.6^\circ}{c}$$
$$c = \frac{3\sin 114.6^\circ}{\sin 40^\circ}$$
$$c \approx 4.24\text{ cm}$$

حاول أن تحل

2 حل ΔABC حيث: $a = 7\text{ cm}\ ,\ b = 6\text{ cm}\ ,\ \alpha = 26.3^\circ$

66

مثال (3)

حل ΔABC حيث: $a = 5\text{ cm}\ ,\ b = 8\text{ cm}\ ,\ \alpha = 30^\circ$

الحل:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$$

قانون الجيب

$$\frac{\sin 30^\circ}{5} = \frac{\sin\beta}{8}$$

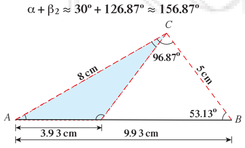
$$\sin\beta = \frac{8\times\sin 30^\circ}{5} \Rightarrow \sin\beta = 0.8\ ,\ \sin\beta > 0$$

عوّض

$$\therefore\ \beta_1 \approx 53.13^\circ\ ;\ \beta_2 \approx 180^\circ - 53.13^\circ \approx 126.87^\circ$$

$$\alpha + \beta_1 \approx 30^\circ + 53.13^\circ \approx 83.13^\circ$$

$$\alpha + \beta_2 \approx 30^\circ + 126.87^\circ \approx 156.87^\circ$$



$\therefore$ لكل من قيمتي β نحصل على: $\alpha + \beta < 180^\circ$

$\therefore$ يوجد مثلثان يحققان المعطى.

كذلك يوجد قياسان للزاوية γ

$$\gamma_1 = 180 - (\alpha + \beta)$$
$$\gamma_1 \approx 180^\circ - 83.13^\circ$$
$$\approx 96.87^\circ$$
$$\gamma_2 = 180 - 156\cdot 87^\circ \approx 23.13^\circ$$

يبقى إيجاد c

في المثلث الثاني

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma_2}{c_2}$$
$$\frac{\sin 30^\circ}{5} = \frac{\sin 23.13^\circ}{c_2}$$
$$c_2 = \frac{5\times\sin 23.13^\circ}{\sin 30^\circ}$$
$$c_2 \approx 3.93\text{ cm}$$

في المثلث الأوّل

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma_1}{c_1}$$
$$\frac{\sin 30^\circ}{5} = \frac{\sin 96.87^\circ}{c_1}$$
$$c_1 = \frac{5\times\sin 96.87^\circ}{\sin 30^\circ}$$
$$c_1 \approx 9.93\text{ cm}$$

حاول أن تحل

3 حل ΔABC حيث: $a = 6\text{ cm}\ ,\ b = 7\text{ cm}\ ,\ \alpha = 45^\circ$

67

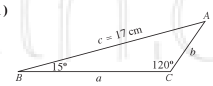
تمرَّنْ 8-3

قانون الجيب
Law of Sine

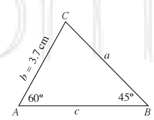
المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (2–1)، حلّ كلًّا من المثلثين التاليين:

(1)



(2)



في التمرينين (4–3)، حلّ المثلث ABC:

(3) $m(\widehat{A}) = 32^\circ, a = 17\text{ cm}, b = 11\text{ cm}$

(4) $m(\widehat{A}) = 43^\circ, a = 32\text{ cm}, b = 28\text{ cm}$

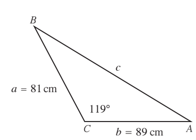
في التمرينين (6–5)، يمكن تكوين مثلثين باستخدام القياسات المعطاة، حلّ كلًّا منهما:

(5) $m(\widehat{C}) = 68^\circ, a = 19\text{ cm}, c = 18\text{ cm}$

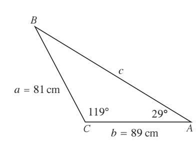
(6) $m(\widehat{B}) = 57^\circ, a = 11\text{ cm}, b = 10\text{ cm}$

في التمرينين (8–7)، قرر ما إذا كان يمكن حلّ المثلث باستخدام قانون الجيب، ثم حلّه إذا كان ذلك ممكنًا. وإذا لم يكن ممكنًا فاشرح السبب.

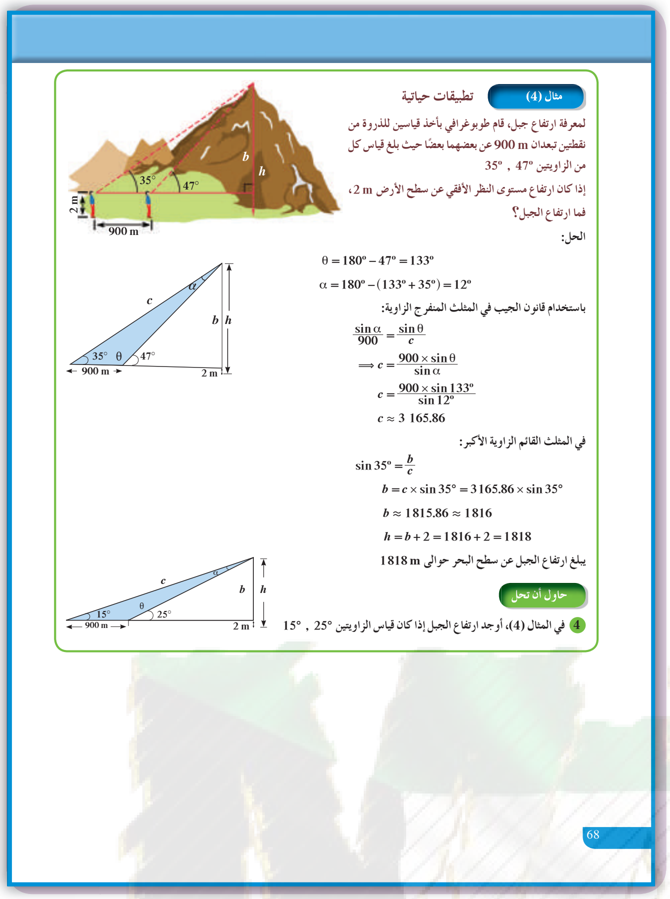
(7)



(8)



25



مثال (4) تطبيقات حياتية

لمعرفة ارتفاع جبل، قام طوبوغرافي بأخذ قياسين للذروة من نقطتين تبعدان 900 m عن بعضهما بعضًا حيث بلغ قياس كل من الزاويتين 47° , 35°

إذا كان ارتفاع مستوى النظر الأفقي عن سطح الأرض 2 m، فما ارتفاع الجبل؟

الحل:

$\theta = 180^\circ - 47^\circ = 133^\circ$

$\alpha = 180^\circ - (133^\circ + 35^\circ) = 12^\circ$

باستخدام قانون الجيب في المثلث المنفرج الزاوية:

$\frac{\sin\alpha}{900} = \frac{\sin\theta}{c}$

$\Longrightarrow c = \frac{900 \times \sin\theta}{\sin\alpha}$

$c = \frac{900 \times \sin 133^\circ}{\sin 12^\circ}$

$c \approx 3\ 165.86$

في المثلث القائم الزاوية الأكبر:

$\sin 35^\circ = \frac{b}{c}$

$b = c \times \sin 35^\circ = 3165.86 \times \sin 35^\circ$

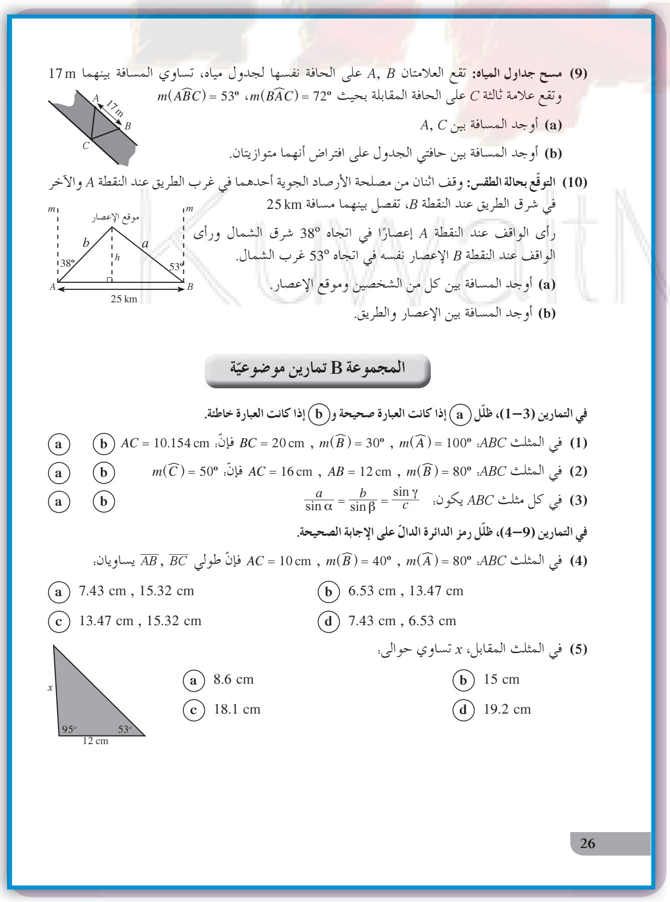
$b \approx 1815.86 \approx 1816$

$h = b + 2 = 1816 + 2 = 1818$

يبلغ ارتفاع الجبل عن سطح البحر حوالى 1818 m

حاول أن تحل

4 في المثال (4)، أوجد ارتفاع الجبل إذا كان قياس الزاويتين 25° , 15°



(9) **مسح جداول المياه:** تقع العلامتان A, B على الحافة نفسها لجدول مياه، تساوي المسافة بينهما 17 m وتقع علامة ثالثة C على الحافة المقابلة بحيث $m(B\hat{A}C) = 72^\circ$ ،$m(A\hat{B}C) = 53^\circ$

(a) أوجد المسافة بين A, C

(b) أوجد المسافة بين حافتي الجدول على افتراض أنهما متوازيتان.

(10) **التوقّع بحالة الطقس:** وقف اثنان من مصلحة الأرصاد الجوية أحدهما في غرب الطريق عند النقطة A والآخر في شرق الطريق عند النقطة B، تفصل بينهما مسافة 25 km

رأى الواقف عند النقطة A إعصارًا في اتجاه 38° شرق الشمال ورأى الواقف عند النقطة B الإعصار نفسه في اتجاه 53° غرب الشمال.

(a) أوجد المسافة بين كل من الشخصين وموقع الإعصار.

(b) أوجد المسافة بين الإعصار والطريق.

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–3)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) في المثلث ABC: $m(\hat{A}) = 100^\circ$, $m(\hat{B}) = 30^\circ$, $BC = 20$ cm فإنّ: $AC = 10.154$ cm (a) (b)

(2) في المثلث ABC: $m(\hat{B}) = 80^\circ$, $AB = 12$ cm , $AC = 16$ cm فإنّ: $m(\hat{C}) = 50^\circ$ (a) (b)

(3) في كل مثلث ABC يكون: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{\sin\gamma}{c}$ (a) (b)

في التمارين (4–9)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(4) في المثلث ABC: $m(\hat{A}) = 80^\circ$, $m(\hat{B}) = 40^\circ$, $AC = 10$ cm فإنّ طولي $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ يساويان:

(a) 7.43 cm , 15.32 cm (b) 6.53 cm , 13.47 cm

(c) 13.47 cm , 15.32 cm (d) 7.43 cm , 6.53 cm

(5) في المثلث المقابل، x تساوي حوالى:

(a) 8.6 cm (b) 15 cm

(c) 18.1 cm (d) 19.2 cm

اختبار سريع

❶ حل المثلث ABC، حيث:

$\alpha = 53^\circ$, $\beta = 64^\circ$, $a = 7$ cm

قانون الجيب: $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$

$\frac{\sin 53^\circ}{7} = \frac{\sin 64^\circ}{b} = \frac{\sin 63^\circ}{c}$

$b \approx 7.9$ cm , $c \approx 7.8$ cm

❷ حل المثلث ABC، حيث:

$a = 6$ cm , $b = 5$ cm , $\alpha = 50^\circ$

قانون الجيب: $\frac{\sin 50^\circ}{6} = \frac{\sin\beta}{5} = \frac{\sin\gamma}{c}$

$\beta_1 = 39.7^\circ$, $\beta_2 = 140.3^\circ$

الحالة β_2 مرفوضة، لأن $140.3^\circ + 50^\circ = 190.3^\circ$

نستخدم $\beta = 39.7^\circ$ فيبقى $\gamma = 90.3^\circ$

نوجد: $\frac{\sin 50^\circ}{6} = \frac{\sin 90.3^\circ}{c}$

$c \approx 7.8$ cm

❸ حل المثلث ABC، حيث:

$a = 8$ cm , $b = 10$ cm , $\alpha = 28^\circ$

قانون الجيب: $\frac{\sin 28^\circ}{8} = \frac{\sin\beta}{10} = \frac{\sin\gamma}{c}$

$\beta_1 = 36^\circ$, $\beta_2 = 144^\circ$

$28^\circ + 144^\circ = 172^\circ$ وبالتالي يوجد مثلثان.

إذا $\beta = 36^\circ$، نجد $\gamma = 116^\circ$

$\frac{\sin 28^\circ}{8} = \frac{\sin 36^\circ}{10} = \frac{\sin 116^\circ}{c}$

ومنه: $c \approx 15.3$ cm

إذا $\beta = 144^\circ$، نجد $\gamma = 8^\circ$

$\frac{\sin 28^\circ}{8} = \frac{\sin 144^\circ}{10} = \frac{\sin 8^\circ}{c}$

ومنه: $c \approx 2.4$ cm

❹ حل المثلث ABC، حيث:

$a = 4$, $c = 2$, $\gamma = 54^\circ$

قانون الجيب: $\frac{\sin\alpha}{4} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin 54^\circ}{2}$

$\sin\alpha = 1.6 > 1$ وهذا غير ممكن لذا لا يوجد أي مثلث لهذه المعطيات.

مثال (5) تطبيقات حياتية

رأى حارس الغابة عند موقع الحراسة A حريقًا في اتجاه $32°$ شرق الشمال.

في حين رأى حارس آخر في موقع الحراسة B على بعد 10 km شرق الموقع A الحريق نفسه في اتجاه $48°$ غرب الشمال.

أوجد المسافة بين كل حارس وموقع الحريق.

الحل:

نمذج

لتكن C هي موقع الحريق.

$\alpha = 58°\ ,\ \beta = 42°$،

وتحتاج إلى حساب b, a في المثلث ABC

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$

$= 180 - (58° + 42°) = 80°$

قانون الجيب

$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$

$\frac{\sin 58°}{a} = \frac{\sin 80°}{10} \quad , \quad \frac{\sin 42°}{b} = \frac{\sin 80°}{10}$

$a = \frac{10\sin 58°}{\sin 80°} \Longrightarrow a \approx 8.611\text{ km} \quad , \quad b \approx \frac{10\sin 42°}{\sin 80°} \Rightarrow b \approx 6.794\text{ km}$

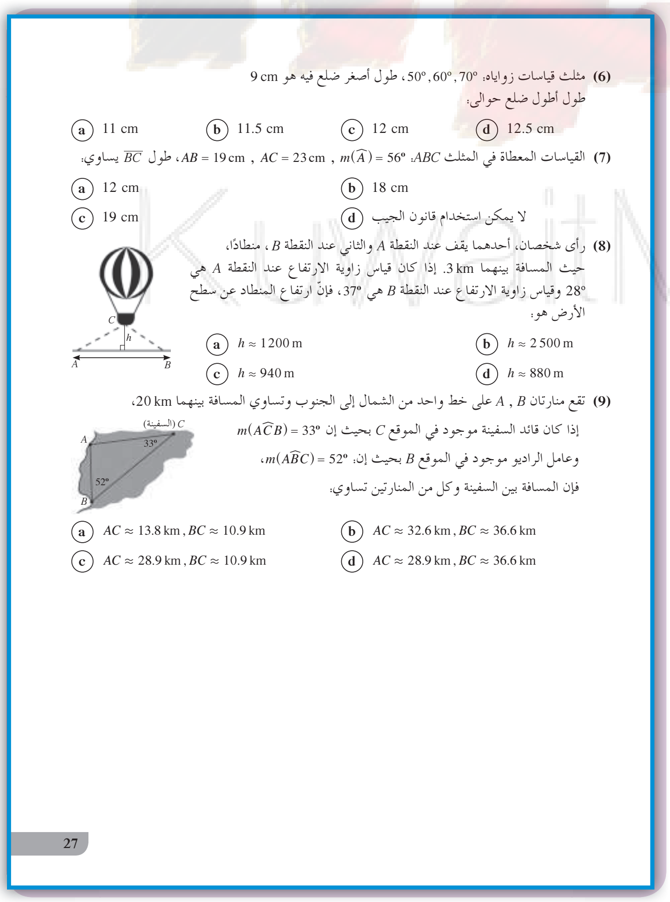
يبعد موقع الحريق حوالى 6.79 km عن موقع الحراسة A وحوالى 8.61 km عن موقع الحراسة B

حاول أن تحل

5 يمثل الشكل المقابل مسار اليخوت في أحد السباقات انطلاقًا من النقطة A إلى النقطة B ثم النقطة C ثم إلى النقطة A

أوجد مسافة السباق.

69



(6) مثلث قياسات زواياه: $50°, 60°, 70°$، طول أصغر ضلع فيه هو 9 cm
طول أطول ضلع حوالى:

(a) 11 cm (b) 11.5 cm (c) 12 cm (d) 12.5 cm

(7) القياسات المعطاة في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 56°\ ,\ AC = 23\text{ cm}\ ,\ AB = 19\text{ cm}$، طول $\overline{BC}$ يساوي:

(a) 12 cm (b) 18 cm
(c) 19 cm (d) لا يمكن استخدام قانون الجيب

(8) رأى شخصان، أحدهما يقف عند النقطة A والثاني عند النقطة B، منطادًا، حيث المسافة بينهما 3 km. إذا كان قياس زاوية الارتفاع عند النقطة A هي $28°$ وقياس زاوية الارتفاع عند النقطة B هي $37°$، فإنّ ارتفاع المنطاد عن سطح الأرض هو:

(a) $h \approx 1200$ m (b) $h \approx 2500$ m
(c) $h \approx 940$ m (d) $h \approx 880$ m

(9) تقع منارتان A, B على خط واحد من الشمال إلى الجنوب وتساوي المسافة بينهما 20 km،
إذا كان قائد السفينة موجود في الموقع C بحيث إن $m(A\widehat{C}B) = 33°$
وعامل الراديو موجود في الموقع B بحيث إن: $m(A\widehat{B}C) = 52°$،
فإن المسافة بين السفينة وكل من المنارتين تساوي:

(a) $AC \approx 13.8$ km , $BC \approx 10.9$ km (b) $AC \approx 32.6$ km , $BC \approx 36.6$ km
(c) $AC \approx 28.9$ km , $BC \approx 10.9$ km (d) $AC \approx 28.9$ km , $BC \approx 36.6$ km

27

9 إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

1 $\frac{\sin 36°}{8} = \frac{\sin 48°}{b} = \frac{\sin 96°}{c}$

$b \approx 10.11\text{ cm}\ ,\ c \approx 13.54\text{ cm}$

2 $\frac{\sin 26.3°}{7} = \frac{\sin\beta}{6} = \frac{\sin\gamma}{c}$

$\beta = 22.32°\ ,\ \gamma = 131.38°$

$c \approx 11.85\text{ cm}$

3 $\frac{\sin 45°}{6} = \frac{\sin\beta}{7} = \frac{\sin\gamma}{c}$

$\beta_1 \approx 55.58°\ ,\ \beta_2 = 124.42°$

$124.42° + 45° = 169.42° < 180°$

لذا يوجد مثلثان.

إذا $\beta = 55.58°$ نحصل على $\gamma = 79.42°$

ومنه $c \approx 9.73\text{ cm}$

إذا $\beta = 124.42°$ نحصل على $\gamma = 10.58°$

ومنه $c \approx 1.82\text{ cm}$

4 $\theta = 180° - 25° = 155°$

$\alpha = 180° - (155° + 15°) = 10°$

$\frac{\sin 10°}{900} = \frac{\sin 155°}{c}$

ومنه $c \approx 2190\text{ m}$

في المثلث قائم الزاوية $\sin 15° = \frac{h}{c}$

$h \approx 567\text{ m}$

ارتفاع الجبل: $567 + 2 = 569\text{ m}$

5 $m(A\widehat{B}C) = m(\widehat{B}) = 180° - 70° = 110°$

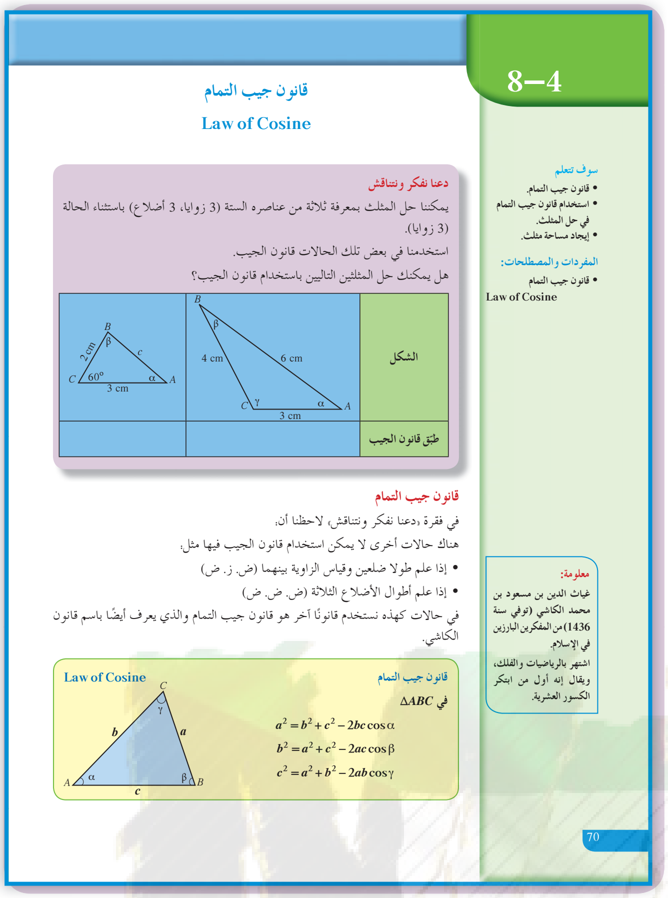
$\frac{\sin 110°}{7} = \frac{\sin\gamma}{5} = \frac{\sin\alpha}{BC}$

$\gamma = 42.16°\ ,\ \alpha = 27.84°$

$BC \approx 3.48\text{ km}$

مسافة السباق حوالى: $5 + 7 + 3.48 = 15.48\text{ km}$

8–4: قانون جيب التمام



8–4

قانون جيب التمام
Law of Cosine

دعنا نفكر ونتناقش

يمكننا حل المثلث بمعرفة ثلاثة من عناصره الستة (3 زوايا، 3 أضلاع) باستثناء الحالة (3 زوايا).

استخدمنا في بعض تلك الحالات قانون الجيب.

هل يمكنك حل المثلثين التاليين باستخدام قانون الجيب؟

الشكل		
طبّق قانون الجيب		

قانون جيب التمام

في فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» لاحظنا أن:

هناك حالات أخرى لا يمكن استخدام قانون الجيب فيها مثل:

- إذا علم طولا ضلعين وقياس الزاوية بينهما (ض. ز. ض)
- إذا علم أطوال الأضلاع الثلاثة (ض. ض. ض)

في حالات كهذه نستخدم قانونًا آخر هو قانون جيب التمام والذي يعرف أيضًا باسم قانون الكاشي.

قانون جيب التمام Law of Cosine

في ΔABC

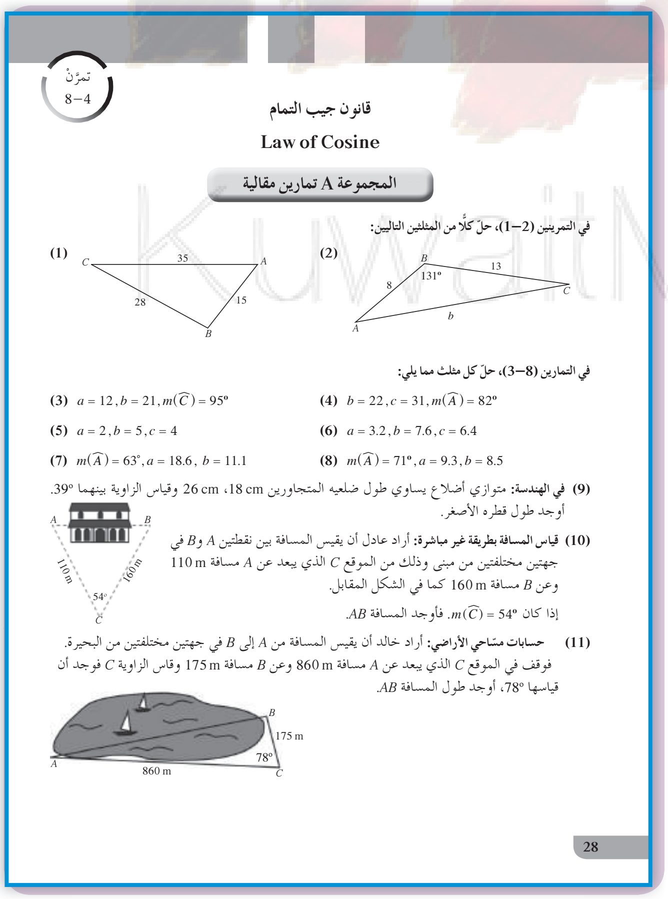
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

سوف تتعلم
- قانون جيب التمام.
- استخدام قانون جيب التمام في حل المثلث.
- إيجاد مساحة مثلث.

المفردات والمصطلحات:
- قانون جيب التمام Law of Cosine

معلومة:
غياث الدين بن مسعود بن محمد الكاشي (توفي سنة 1436) من المفكرين البارزين في الإسلام.
اشتهر بالرياضيات والفلك، ويقال إنه أول من ابتكر الكسور العشرية.

70



تمرَّنْ 8–4

قانون جيب التمام
Law of Cosine

المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (2–1)، حلّ كلًّا من المثلثين التاليين:

(1) (2)

في التمارين (8–3)، حلّ كل مثلث مما يلي:

(3) $a = 12, b = 21, m(\widehat{C}) = 95^\circ$
(4) $b = 22, c = 31, m(\widehat{A}) = 82^\circ$
(5) $a = 2, b = 5, c = 4$
(6) $a = 3.2, b = 7.6, c = 6.4$
(7) $m(\widehat{A}) = 63^\circ, a = 18.6, b = 11.1$
(8) $m(\widehat{A}) = 71^\circ, a = 9.3, b = 8.5$

(9) **في الهندسة:** متوازي أضلاع يساوي طول ضلعيه المتجاورين 18 cm، 26 cm وقياس الزاوية بينهما 39°. أوجد طول قطره الأصغر.

(10) **قياس المسافة بطريقة غير مباشرة:** أراد عادل أن يقيس المسافة بين نقطتين A وB في جهتين مختلفتين من مبنى وذلك من الموقع C الذي يبعد عن A مسافة 110 m وعن B مسافة 160 m كما في الشكل المقابل.
إذا كان $m(\widehat{C}) = 54^\circ$. فأوجد المسافة AB.

(11) **حسابات مسّاحي الأراضي:** أراد خالد أن يقيس المسافة من A إلى B في جهتين مختلفتين من البحيرة. فوقف في الموقع C الذي يبعد عن A مسافة 860 m وعن B مسافة 175 m وقاس الزاوية C فوجد أن قياسها 78°، أوجد طول المسافة AB.

28

1 الأهداف

- يتعرف قانون جيب التمام.
- يستخدم قانون جيب التمام لإيجاد حلول لمثلث.
- يجد مساحة مثلث.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

قانون جيب التمام.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) أوجد دون استخدام الآلة الحاسبة:

$\cos 30^\circ,\ \cos 45^\circ,\ \cos 60^\circ,\ \cos 90^\circ,\ \cos 120^\circ,$

$\cos 150^\circ,\ \cos 210^\circ$

(b) استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد:

$\cos 35^\circ, \cos 70^\circ, \cos 100^\circ, \cos 145^\circ, \cos 217^\circ$

(c) أوجد مجموعة حل المعادلة:

$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$

5 التدريس

يعتبر قانون جيب التمام خطوة مرافقة لقانون الجيب، وهو يعتمد أيضًا على معرفة 3 عناصر من المثلث لأنه يمكن من خلالها معرفة 3 عناصر متبقية.

أخبر الطلاب أنه يمكن استخدام قانون الجيب حيث تدعو الحاجة، وكذلك الأمر بالنسبة إلى قانون جيب التمام، وأن لكل قانون ميزاته وخصائصه.

المهم أن في قانون الجيب نستخدم جيب الزاوية، أما في قانون جيب التمام فنستخدم جيب تمام الزاوية مع العلم بأن دائمًا لدينا متطابقة فيثاغورث: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$، لذا يمكن الانتقال من قانون الجيب إلى قانون جيب التمام وبالعكس أيضًا وذلك بحسب المسألة المطروحة.

ذكّر الطلاب أن زاوية المثلث المنفرجة (أكبر من 90° وأصغر من 180°) لها جيب تمام قيمته سالبة.

في المثالين (2) ,(1)

نبّه الطلاب إلى الملاحظة الموجودة وهي أنه بالإمكان استخدام قانون الجيب ضمن شروط معينة، ولكن قانون جيب التمام يسمح بالتمييز بين الزاوية الحادة والزاوية المنفرجة وذلك من خلال إشارة جيب تمام الزاوية.

إذا كانت موجبة فسيكون قياس الزاوية أصغر من 90° (حادة) وإذا كانت سالبة فسيكون قياس الزاوية بين 90° و 180° (منفرجة).

في المثال (3)

هذا المثال هو عودة إلى المعادلة التربيعية. ذكّر الطلاب بقيمة المميز Δ، حيث $\Delta = b^2 - 4ac$

إذا $\Delta > 0$ فيكون لدينا حلان حقيقيان وإذا $\Delta = 0$ فيكون لدينا حلّ واحد.

وهنا نبّه الطلاب إلى إشارة كل حل، لأنه يتعامل مع أضلاع مثلث لذا لا يمكن استخدام قيم سالبة.

6 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام قانون جيب التمام عندما يكون قياس زاوية بين 90° و 180°.

ساعدهم على كتابة بعض الحالات لإيضاح هذه المسألة، مثال: في المثلث ABC،

$$AC = 9\text{ cm}\,,\ AB = 8\text{ cm}\,,\ \alpha = 120^\circ$$

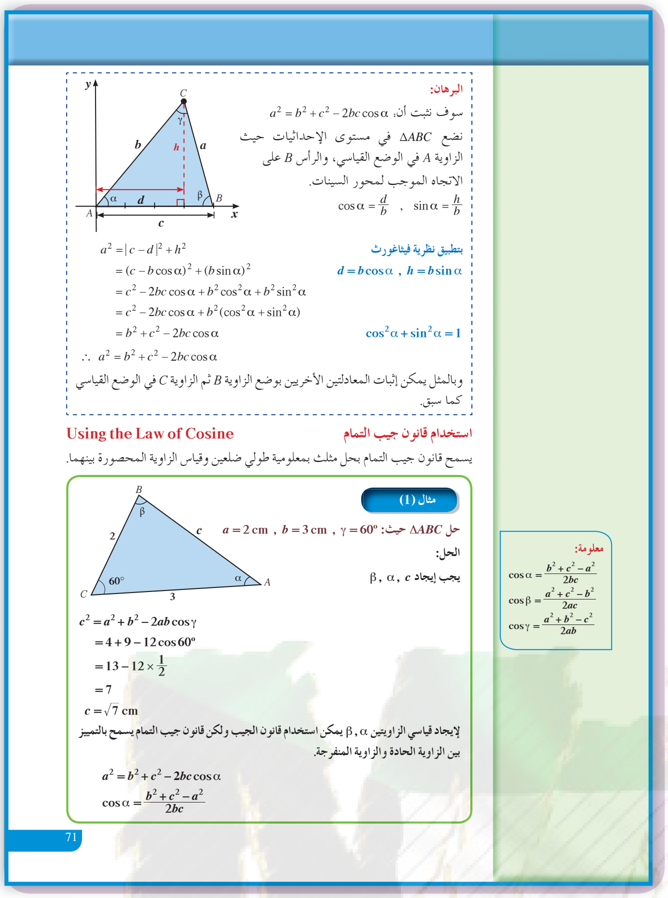
أوجد BC.

نكتب:

$$BC^2 = 8^2 + 9^2 - 2 \times 8 \times 9\cos 120^\circ$$

$$BC^2 = 64 + 81 + 2 \times 72 \times \frac{1}{2}$$

$$BC \approx 14.73\text{ cm}$$



البرهان:

سوف نثبت أن: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

نضع ΔABC في مستوى الإحداثيات حيث الزاوية A في الوضع القياسي، والرأس B على الاتجاه الموجب لمحور السينات.

$\cos\alpha = \frac{d}{b}$, $\sin\alpha = \frac{h}{b}$

بتطبيق نظرية فيثاغورث: $a^2 = |c-d|^2 + h^2$

$d = b\cos\alpha$, $h = b\sin\alpha$: $= (c - b\cos\alpha)^2 + (b\sin\alpha)^2$

$= c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha$

$= c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$: $= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$\therefore\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

وبالمثل يمكن إثبات المعادلتين الأخريين بوضع الزاوية B ثم الزاوية C في الوضع القياسي كما سبق.

استخدام قانون جيب التمام Using the Law of Cosine

يسمح قانون جيب التمام بحل مثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

مثال (1)

حل ΔABC حيث: $a = 2\text{ cm}$, $b = 3\text{ cm}$, $\gamma = 60^\circ$

الحل:

يجب إيجاد β, α, c

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

$= 4 + 9 - 12\cos 60^\circ$

$= 13 - 12 \times \frac{1}{2}$

$= 7$

$c = \sqrt{7}$ cm

لإيجاد قياسي الزاويتين β, α يمكن استخدام قانون الجيب ولكن قانون جيب التمام يسمح بالتمييز بين الزاوية الحادة والزاوية المنفرجة.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

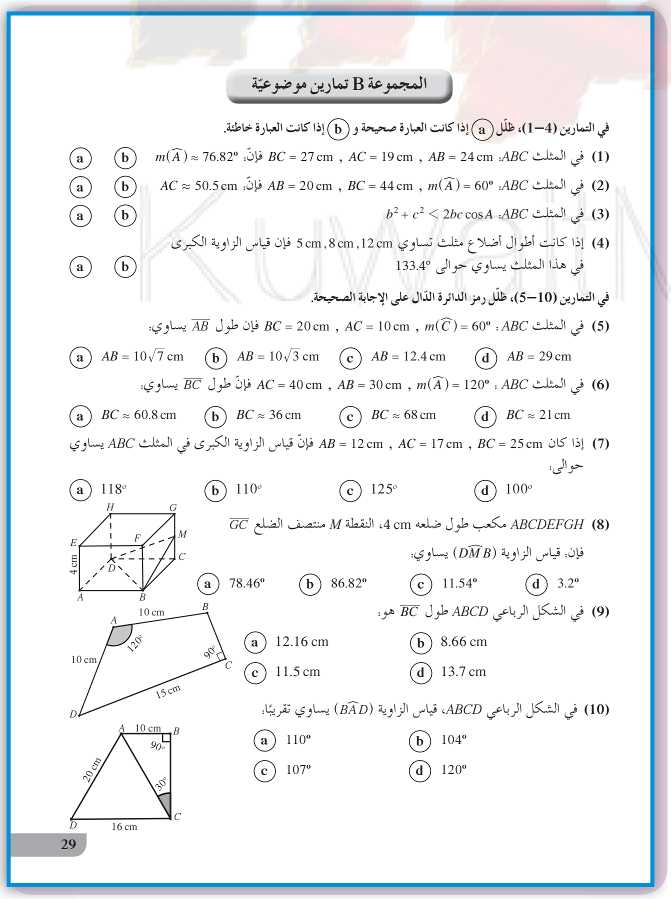
معلومة:

$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

71



المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) في المثلث ABC: $AB = 24\text{ cm}$, $AC = 19\text{ cm}$, $BC = 27\text{ cm}$ فإنّ: $m(\widehat{A}) \approx 76.82^\circ$ (a) (b)

(2) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 60^\circ$, $BC = 44\text{ cm}$, $AB = 20\text{ cm}$ فإنّ: $AC \approx 50.5\text{ cm}$ (a) (b)

(3) في المثلث ABC: $b^2 + c^2 < 2bc\cos A$ (a) (b)

(4) إذا كانت أطوال أضلاع مثلث تساوي $12\text{ cm}, 8\text{ cm}, 5\text{ cm}$ فإن قياس الزاوية الكبرى في هذا المثلث يساوي حوالى 133.4° (a) (b)

في التمارين (10–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) في المثلث ABC : $m(\widehat{C}) = 60^\circ$, $AC = 10\text{ cm}$, $BC = 20\text{ cm}$ فإن طول $\overline{AB}$ يساوي:

(a) $AB = 10\sqrt{7}$ cm (b) $AB = 10\sqrt{3}$ cm (c) $AB = 12.4$ cm (d) $AB = 29$ cm

(6) في المثلث ABC : $m(\widehat{A}) = 120^\circ$, $AB = 30\text{ cm}$, $AC = 40\text{ cm}$ فإنّ طول $\overline{BC}$ يساوي:

(a) $BC \approx 60.8$ cm (b) $BC \approx 36$ cm (c) $BC \approx 68$ cm (d) $BC \approx 21$ cm

(7) إذا كان $BC = 25\text{ cm}$, $AC = 17\text{ cm}$, $AB = 12\text{ cm}$ فإنّ قياس الزاوية الكبرى في المثلث ABC يساوي حوالى:

(a) 118° (b) 110° (c) 125° (d) 100°

(8) $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 4 cm، النقطة M منتصف الضلع $\overline{GC}$ فإن: قياس الزاوية $(D\widehat{M}B)$ يساوي:

(a) 78.46° (b) 86.82° (c) 11.54° (d) 3.2°

(9) في الشكل الرباعي $ABCD$ طول $\overline{BC}$ هو:

(a) 12.16 cm (b) 8.66 cm (c) 11.5 cm (d) 13.7 cm

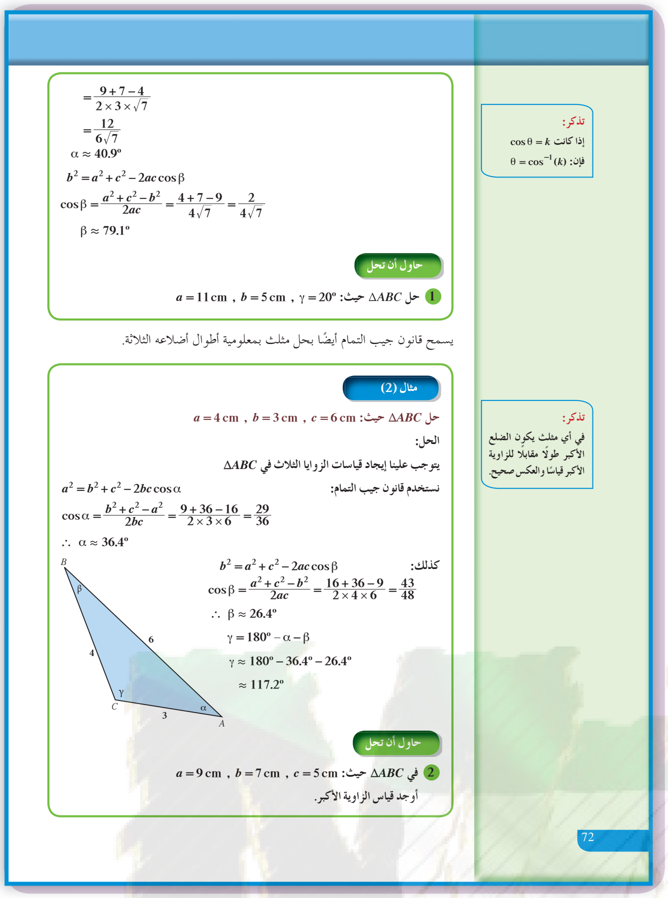
(10) في الشكل الرباعي $ABCD$، قياس الزاوية $(B\widehat{A}D)$ يساوي تقريبًا:

(a) 110° (b) 104° (c) 107° (d) 120°

29

7 التقييم

تابع الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من أنهم قد فهموا جيّدًا كيفية استخدام القوانين والقواعد في هذا الدرس.


$= \frac{9+7-4}{2\times3\times\sqrt{7}}$

$= \frac{12}{6\sqrt{7}}$

$\alpha \approx 40.9^\circ$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{4+7-9}{4\sqrt{7}} = \frac{2}{4\sqrt{7}}$

$\beta \approx 79.1^\circ$

حاول أن تحل

1 حل ΔABC حيث: $a = 11\text{ cm}\ ,\ b = 5\text{ cm}\ ,\ \gamma = 20^\circ$

يسمح قانون جيب التمام أيضًا بحل مثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة.

مثال (2)

حل ΔABC حيث: $a = 4\text{ cm}\ ,\ b = 3\text{ cm}\ ,\ c = 6\text{ cm}$

الحل:

يتوجب علينا إيجاد قياسات الزوايا الثلاث في ΔABC

نستخدم قانون جيب التمام: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{9+36-16}{2\times3\times6} = \frac{29}{36}$

$\therefore\ \alpha \approx 36.4^\circ$

كذلك: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{16+36-9}{2\times4\times6} = \frac{43}{48}$

$\therefore\ \beta \approx 26.4^\circ$

$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$

$\gamma \approx 180^\circ - 36.4^\circ - 26.4^\circ$

$\approx 117.2^\circ$

حاول أن تحل

2 في ΔABC حيث: $a = 9\text{ cm}\ ,\ b = 7\text{ cm}\ ,\ c = 5\text{ cm}$

أوجد قياس الزاوية الأكبر.

تذكر: إذا كانت $\cos\theta = k$ فإن: $\theta = \cos^{-1}(k)$

تذكر: في أي مثلث يكون الضلع الأكبر طولًا مقابلًا للزاوية الأكبر قياسًا والعكس صحيح.

72

اختبار سريع

1 حل المثلث ABC، حيث:

$AC = 7\text{ cm}\ ,\ AB = 4\text{ cm}\ ,\ \alpha = 70^\circ$

$BC^2 = 16 + 49 - 56\cos 70^\circ$

$BC \approx 6.77\text{ cm}$

$\frac{\sin 70^\circ}{6.77} = \frac{\sin\beta}{7} = \frac{\sin\gamma}{4}$

$\beta = 76.3^\circ\ ,\ \gamma = 33.7^\circ$

2 حل المثلث ABC، إذا كان:

$c = 10\text{ cm}\ ,\ b = 8\text{ cm}\ ,\ a = 6\text{ cm}$

$a = 6\text{ cm}\ ,\ b = 8\text{ cm}\ ,\ c = 10\text{ cm}$

$\cos\alpha = \frac{64+100-36}{10\times8\times2} = 0.8$

$\alpha = 36.87^\circ$

$\cos\beta = \frac{36+100-64}{2\times6\times10} = 0.6$

$\beta = 53.13^\circ$

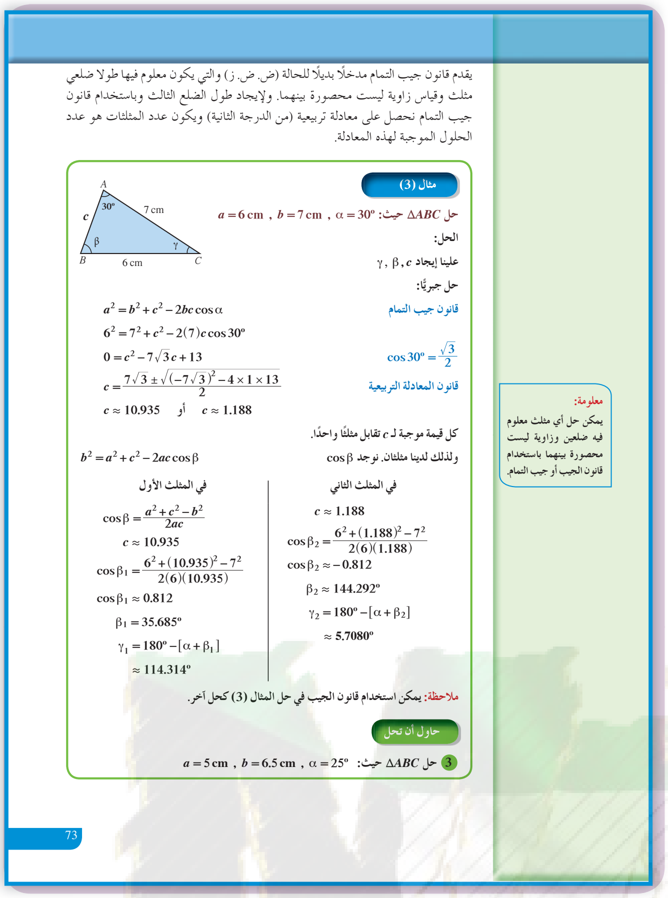
$\gamma = 180^\circ - (36.87^\circ + 53.13^\circ) = 90^\circ$

يمكن التأكد باستخدام معكوس نظرية فيثاغورث

$a^2 + b^2 = 36 + 64 = 100$

وبالتالي $c^2 = 100$ $a^2 + b^2 = c^2$

والمثلث قائم الزاوية في C


يقدم قانون جيب التمام مدخلًا بديلًا للحالة (ض. ض. ز) والتي يكون معلوم فيها طولا ضلعي مثلث وقياس زاوية ليست محصورة بينهما. ولإيجاد طول الضلع الثالث وباستخدام قانون جيب التمام نحصل على معادلة تربيعية (من الدرجة الثانية) ويكون عدد المثلثات هو عدد الحلول الموجبة لهذه المعادلة.

مثال (3)

حل ΔABC حيث: $a = 6\text{ cm}\ ,\ b = 7\text{ cm}\ ,\ \alpha = 30^\circ$

الحل:

علينا إيجاد $\gamma\ ,\ \beta\ ,\ c$

حل جبريًّا:

قانون جيب التمام: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$6^2 = 7^2 + c^2 - 2(7)c\cos 30^\circ$

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$: $0 = c^2 - 7\sqrt{3}c + 13$

قانون المعادلة التربيعية: $c = \frac{7\sqrt{3} \pm \sqrt{(-7\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 13}}{2}$

$c \approx 10.935$ أو $c \approx 1.188$

كل قيمة موجبة لـ c تقابل مثلثًا واحدًا.

ولذلك لدينا مثلثان. نوجد $\cos\beta$ $\qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

في المثلث الأول:

$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$c \approx 10.935$

$\cos\beta_1 = \frac{6^2 + (10.935)^2 - 7^2}{2(6)(10.935)}$

$\cos\beta_1 \approx 0.812$

$\beta_1 = 35.685^\circ$

$\gamma_1 = 180^\circ - [\alpha + \beta_1]$

$\approx 114.314^\circ$

في المثلث الثاني:

$c \approx 1.188$

$\cos\beta_2 = \frac{6^2 + (1.188)^2 - 7^2}{2(6)(1.188)}$

$\cos\beta_2 \approx -0.812$

$\beta_2 \approx 144.292^\circ$

$\gamma_2 = 180^\circ - [\alpha + \beta_2]$

$\approx 5.7080^\circ$

ملاحظة: يمكن استخدام قانون الجيب في حل المثال (3) كحل آخر.

حاول أن تحل

3 حل ΔABC حيث: $a = 5\text{ cm}\ ,\ b = 6.5\text{ cm}\ ,\ \alpha = 25^\circ$

معلومة:
يمكن حل أي مثلث معلوم فيه ضلعين وزاوية ليست محصورة بينهما باستخدام قانون الجيب أو جيب التمام.

73

8 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

تحقق من إجابات الطلاب.

لا يمكن تطبيق قانون الجيب مباشرة.

«حاول أن تحل»

1 $c^2 = 121 + 25 - 2 \times 5 \times 11 \times \cos 20^\circ$

$c \approx 6.53\text{ cm}$

$\alpha = 144.8^\circ\ ,\ \beta = 15.2^\circ$

2 $\cos\alpha = \frac{49 + 25 - 81}{2 \times 7 \times 5} = -0.1$

ومنه: $\alpha = 95.74^\circ$ (الزاوية الأكبر)

3 $25 = 42.25 + c^2 - 2 \times 6.5 \times c \times \cos 25^\circ$

$c^2 - 11.78c + 17.25 = 0$

$c_1 = \frac{11.78 - 8.35}{2} \approx 1.71\text{ cm}$

$c_2 = \frac{11.78 + 8.35}{2} \approx 10\text{ cm}$

يوجد قيمتان لِـ c لذا يوجد مثلثان.

إذا $c = 1.71$ يكون:

$\cos\beta = \frac{25 + 2.92 - 42.25}{2 \times 5 \times 1.72} = -0.83$

ومنه: $\beta = 146^\circ$

$\gamma = 180^\circ - (25^\circ + 146^\circ) = 9^\circ$

إذا $c = 10$ يكون:

$\cos\beta = \frac{25 + 100 - 42.25}{2 \times 5 \times 10} = 0.83$

ومنه: $\beta = 34^\circ$

$\gamma = 180^\circ - (25^\circ + 34^\circ) = 121^\circ$

8–5: مساحة المثلث

1 الأهداف

- يوجد مساحة مثلث باستخدام جيب الزاوية المحصورة بين ضلعين معروف طولاهما.
- يستخدم قاعدة هيرون لإيجاد مساحة مثلث.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

مساحة المثلث – قاعدة هيرون.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن السؤال التالي:

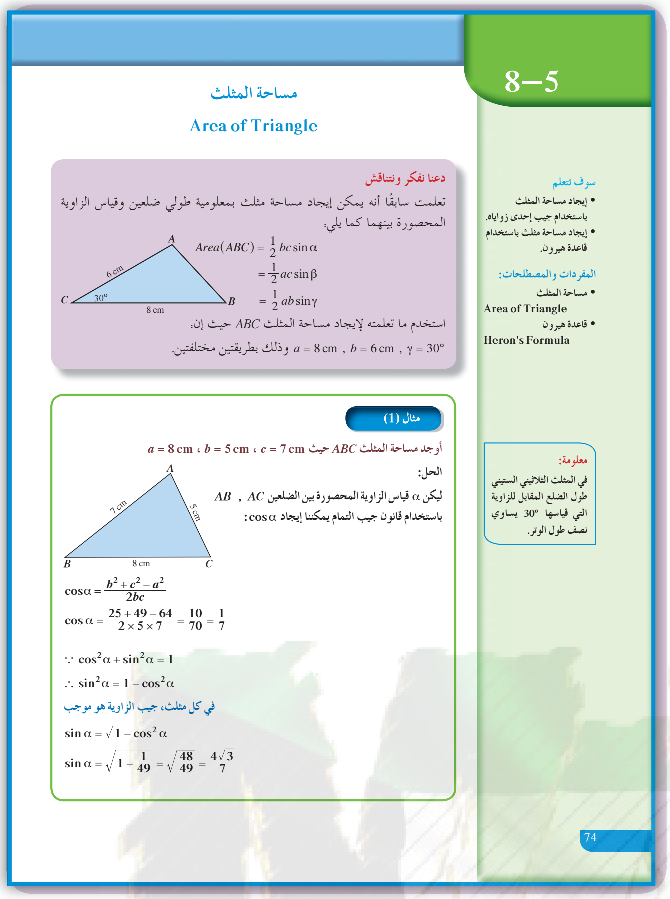
أوجد مساحة مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه 4 cm

5 التدريس

إن معرفة طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما تسمح بإيجاد مساحة مثلث. ذكّر الطلاب بقاعدة إيجاد مساحة مثلث: $\frac{1}{2}\times b\times h$

أشر إلى أن مساحة المثلث تساوي نصف مساحة متوازي الأضلاع، وبالتالي تسمح هذه الطريقة بإيجاد مساحة متوازي أضلاع إذا عُلم طولا ضلعين وقياس الزاوية بينهما. كذلك تسمح قاعدة هيرون بإيجاد مساحة مثلث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة.

أشر إلى أنه إذا عرفت أطوال أضلاع مثلث فيسمكن تطبيق قانون جيب التمام لإيجاد جيب تمام الزاوية ومنه جيب الزاوية، مما يسمح بإيجاد مساحة المثلث.



8–5

مساحة المثلث

Area of Triangle

سوف تتعلم
- إيجاد مساحة المثلث باستخدام جيب إحدى زواياه.
- إيجاد مساحة مثلث باستخدام قاعدة هيرون.

المفردات والمصطلحات:
- مساحة المثلث Area of Triangle
- قاعدة هيرون Heron's Formula

دعنا نفكر ونتناقش

تعلمت سابقًا أنه يمكن إيجاد مساحة مثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما كما يلي:

$$Area(ABC)=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

استخدم ما تعلمته لإيجاد مساحة المثلث ABC حيث إن: $a=8\text{ cm}\ ,\ b=6\text{ cm}\ ,\ \gamma=30°$ وذلك بطريقتين مختلفتين.

مثال (1)

أوجد مساحة المثلث ABC حيث $a=8\text{ cm}$ ، $b=5\text{ cm}$ ، $c=7\text{ cm}$

الحل:

ليكن α قياس الزاوية المحصورة بين الضلعين $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ باستخدام قانون جيب التمام يمكننا إيجاد $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos\alpha=\frac{25+49-64}{2\times5\times7}=\frac{10}{70}=\frac{1}{7}$$

$$\because\ \cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$

$$\therefore\ \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$$

في كل مثلث، جيب الزاوية هو موجب

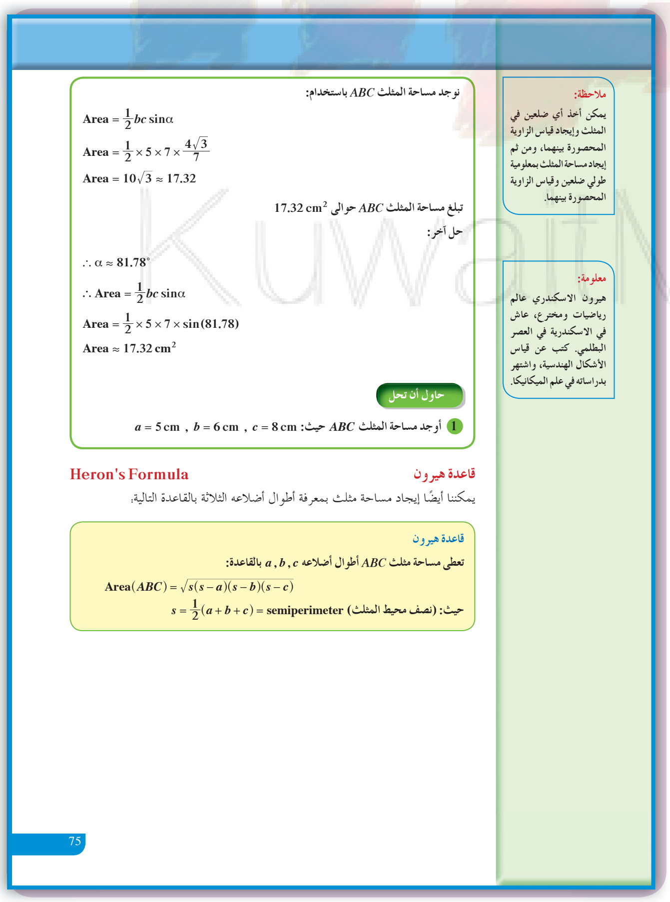
$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{1}{49}}=\sqrt{\frac{48}{49}}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$$

معلومة:

في المثلث الثلاثيني الستيني طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها 30° يساوي نصف طول الوتر.

74



نوجد مساحة المثلث ABC باستخدام:

$$\text{Area}=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

$$\text{Area}=\frac{1}{2}\times5\times7\times\frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$\text{Area}=10\sqrt{3}\approx17.32$$

تبلغ مساحة المثلث ABC حوالى 17.32 cm^2

حل آخر:

$$\therefore\ \alpha\approx81.78°$$

$$\therefore\ \text{Area}=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

$$\text{Area}=\frac{1}{2}\times5\times7\times\sin(81.78)$$

$$\text{Area}\approx17.32\text{ cm}^2$$

حاول أن تحل

1 أوجد مساحة المثلث ABC حيث: $a=5\text{ cm}\ ,\ b=6\text{ cm}\ ,\ c=8\text{ cm}$

قاعدة هيرون Heron's Formula

يمكننا أيضًا إيجاد مساحة مثلث بمعرفة أطوال أضلاعه الثلاثة بالقاعدة التالية:

قاعدة هيرون

تعطى مساحة مثلث ABC أطوال أضلاعه $a\ ,b\ ,c$ بالقاعدة:

$$\text{Area}(ABC)=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

حيث: $s=\frac{1}{2}(a+b+c)=\text{semiperimeter}$ (نصف محيط المثلث)

ملاحظة:

يمكن أخذ أي ضلعين في المثلث وإيجاد قياس الزاوية المحصورة بينهما، ومن ثم إيجاد مساحة المثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

معلومة:

هيرون الاسكندري عالم رياضيات ومخترع، عاش في الاسكندرية في العصر البطلمي. كتب عن قياس الأشكال الهندسية، واشتهر بدراساته في علم الميكانيكا.

75

لكن قاعدة هيرون تسمح لنا بإيجاد المساحة مباشرة دون الحاجة إلى كل هذه الحسابات.

في المثال (1)

يتمّ استخدام قانون جيب التمام لمعرفة قياس إحدى زوايا المثلث مما يسمح بإيجاد مساحته. ويعتبر هذا المثال تحضيرًا لقاعدة هيرون.

في المثال (2)

هذا المثال هو تطبيق مباشر لقاعدة هيرون. عادة ما نحتاج إلى الآلة الحاسبة العلمية لاحتساب مساحة المثلث بواسطة قاعدة هيرون نظرًا إلى وجود الجذر التربيعي.

في المثال (3)

هذا المثال هو أيضًا تطبيق حياتي لاستخدام قاعدة هيرون، وهو يؤمن الربط بين الهندسة وحساب المثلثات.

6 الربط

يشكل المثال (3) ترابطًا بين الرياضيات والحياة اليومية.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في اختيار الزاوية المناسبة. شدّد على وجوب اختيار الزاوية المحصورة بين الضلعين المعلوم طوليهما.

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من فهمهم لكيفية استخدام القانون والقاعدة في هذا الدرس.

مثال (2)

أوجد مساحة سطح مثلث أطوال أضلاعه: 7 cm , 5 cm , 8 cm

الحل:

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(8+5+7) = 10$$

باستخدام قاعدة هيرون

$$\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$= \sqrt{10(10-8)(10-5)(10-7)} = \sqrt{10(2)(5)(3)}$$
$$= 10\sqrt{3}$$
$$\text{Area} \approx 17.32$$

مساحة سطح المثلث تساوي $10\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ أي حوالى $17.32\ \text{cm}^2$

حاول أن تحل

2 أوجد مساحة المثلث ABC حيث: $a = 4\text{ cm}\ ,\ b = 4\text{ cm}\ ,\ c = 3\text{ cm}$

مثال (3)

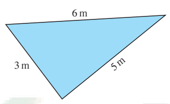
في أحد سباقات المراكب الشراعية وضعت اللجنة المنظمة شرطًا ألا تتعدى مساحة شراع المركب $7.5\ \text{m}^2$.

إذا كان شراع أحد المراكب على شكل مثلث أبعاده: 6 m , 5 m , 3 m

فهل يسمح له بالمشاركة في السباق؟

الحل:

محيط المثلث يساوي:



$$3+5+6 = 14\text{ m}$$
$$\therefore\ s = \frac{14}{2} = 7\text{ m}$$

باستخدام قاعدة هيرون:

$$\text{Area} = \sqrt{7(7-3)(7-5)(7-6)}$$
$$= \sqrt{7\times4\times2\times1}$$
$$= \sqrt{56}$$
$$\approx 7.48\ \text{m}^2$$

تبلغ مساحة الشراع حوالى $7.48\ \text{m}^2$ وبالتالي يسمح له بالمشاركة.

حاول أن تحل

3 في مثال (3)، هل يسمح لمركب شراعه على شكل مثلث أبعاده 4 m , 4 m , 6 m بالاشتراك في السباق؟

76

تمرَّنْ 8-5

مساحة المثلث

Area of Triangle

المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (1–2)، أوجد مساحة المثلث ABC بطريقتين مختلفتين.

(1) $m(\hat{A}) = 47^\circ\ ,\ b = 32\text{ cm}\ ,\ c = 19\text{ cm}$

(2) $a = 4\text{ cm}\ ,\ b = 5\text{ cm}\ ,\ c = 8\text{ cm}$

في التمارين (3–6)، استخدم قاعدة هيرون لإيجاد مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه كالتالي. (الأطوال بالسنتيمتر).

(3) $a = 5\ ,\ b = 9\ ,\ c = 7$

(4) $a = 23\ ,\ b = 19\ ,\ c = 12$

(5) $a = 19.3\ ,\ b = 22.5\ ,\ c = 31$

(6) $a = 18.2\ ,\ b = 17.1\ ,\ c = 12.3$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا عرفت أطوال أضلاع مثلث فيمكن استخدام قاعدة هيرون لإيجاد مساحته. (a) (b)

(2) لا يمكن إيجاد مساحة مثلث بمعلومية قياسات زواياه الثلاثة. (a) (b)

(3) لا يمكن استخدام قاعدة هيرون إذا كان المثلث قائم الزاوية. (a) (b)

(4) إن معرفة قياس إحدى زوايا مثلث هو شرط ضروري لإيجاد مساحته. (a) (b)

(5) إذا كان a, b طولا ضلعين متتاليين في متوازي أضلاع وθ قياس الزاوية بينهما فإن مساحة متوازي الأضلاع تساوي $ab\sin\theta$ (a) (b)

(6) في المثلث ABC: $AC = 9\text{ cm}\ ,\ AB = 7\text{ cm}\ ,\ BC = 5\text{ cm}$ فإن مساحة المثلث ABC تساوي حوالى 15 cm^2 (a) (b)

30

اختبار سريع

1. أوجد مساحة المثلث ABC، إذا كان:

$AC = 16\text{ cm}\ ,\ AB = 12\text{ cm}\ ,\ \alpha = 150^\circ$

$$\text{Area}(ABC) = \frac{1}{2} \times 12 \times 16 \sin 150^\circ$$
$$= \frac{1}{2} \times 12 \times 16 \times \frac{1}{2}$$
$$= 48$$

مساحة المثلث $= 48\text{ cm}^2$

2. أوجد مساحة المثلث ABC، إذا كان:

$AB = 10\text{ cm}\ ,\ BC = 18\text{ cm}\ ,\ AC = 14\text{ cm}$

باستخدام قاعدة هيرون:

$$\text{Area}(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

حيث $s = \dfrac{10+14+18}{2} = 21$

$$\text{Area}(ABC) = \sqrt{21 \times 11 \times 7 \times 3} = 69.65$$

أي مساحة المثلث $= 69.65\text{ cm}^2$

في التمارين (7–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) إذا كان: $m(\widehat{C}) = 40^\circ\ ,\ b = 3\text{ cm}\ ,\ a = 2\text{ cm}$ فإن مساحة المثلث ABC تساوي حوالى:

ⓐ 4.6 cm^2 ⓑ 3.86 cm^2

ⓒ 1.93 cm^2 ⓓ 2.3 cm^2

(8) مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه $9\text{ cm}\ ,\ 8\text{ cm}\ ,\ 7\text{ cm}$ هي:

ⓐ $6\sqrt{15}\text{ cm}^2$ ⓑ $12\sqrt{5}\text{ cm}^2$

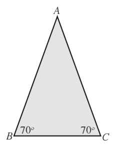
ⓒ $16\sqrt{3}\text{ cm}^2$ ⓓ $18\sqrt{3}\text{ cm}^2$

(9) مساحة مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه a هي:

ⓐ $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\text{ units}^2$ ⓑ $a^2\text{ units}^2$

ⓒ $\frac{1}{2}a^2\text{ units}^2$ ⓓ $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\text{ units}^2$

(10) إذا كانت مساحة المثلث ABC تساوي حوالى 8 cm^2 فإن طول $\overline{AB}$ هو حوالى:



ⓐ 5 cm ⓑ 8 cm

ⓒ 4 cm ⓓ 6 cm

31

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

مساحة المثلث ABC:

طريقة أولى:

$$A = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \sin 30^\circ = 12\text{ cm}^2$$

طريقة ثانية:

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{AC}\ ;\ h = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$
$$A = \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12\text{ cm}^2$$

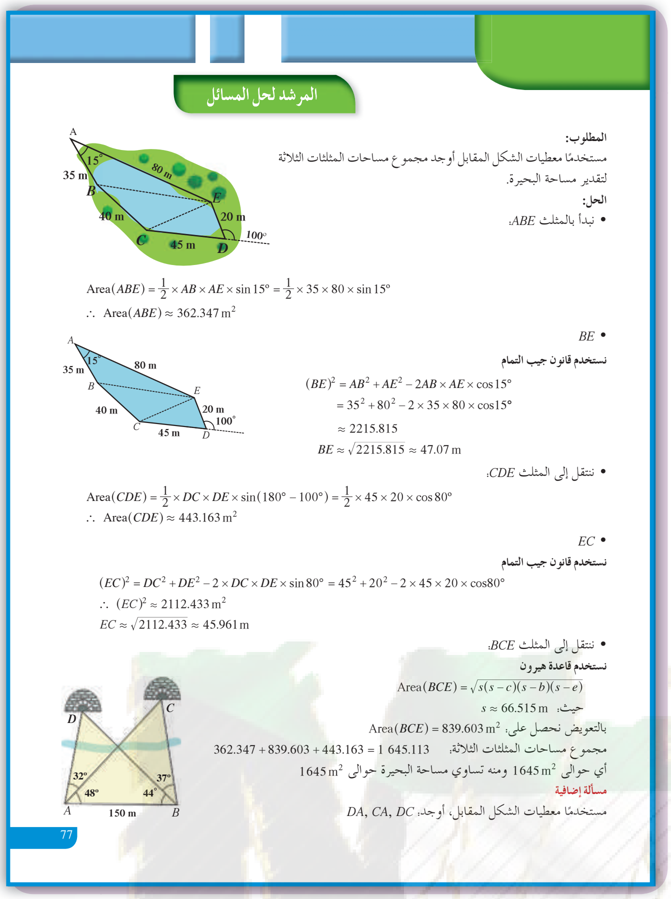
«حاول أن تحل»

1. $$\cos\alpha = \frac{64+36-25}{2 \times 6 \times 8} = \frac{25}{32}$$
$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{339}}{32}$$
$$\text{Area} = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \frac{\sqrt{339}}{32} \approx 13.8\text{ cm}^2$$

2. $$\text{Area} = \sqrt{\frac{11}{2}\left(\frac{11}{2}-4\right)\left(\frac{11}{2}-4\right)\left(\frac{11}{2}-3\right)}$$
$$= \frac{3\sqrt{55}}{4} \approx 5.56\text{ cm}^2$$

3. $$\text{Area} = \sqrt{7(7-4)(7-4)(7-6)}$$
$$= 3\sqrt{7} \approx 7.9\text{ cm}^2 > 7.5\text{ m}^2$$

لا يسمح له بالمشاركة.


المرشد لحل المسائل

المطلوب:
مستخدمًا معطيات الشكل المقابل أوجد مجموع مساحات المثلثات الثلاثة لتقدير مساحة البحيرة.

الحل:
• نبدأ بالمثلث ABE:

$Area(ABE) = \frac{1}{2} \times AB \times AE \times \sin 15^\circ = \frac{1}{2} \times 35 \times 80 \times \sin 15^\circ$

$\therefore\ Area(ABE) \approx 362.347\ m^2$

• BE
نستخدم قانون جيب التمام

$(BE)^2 = AB^2 + AE^2 - 2AB \times AE \times \cos 15^\circ = 35^2 + 80^2 - 2 \times 35 \times 80 \times \cos 15^\circ \approx 2215.815$

$BE \approx \sqrt{2215.815} \approx 47.07\ m$

• ننتقل إلى المثلث CDE:

$Area(CDE) = \frac{1}{2} \times DC \times DE \times \sin(180^\circ - 100^\circ) = \frac{1}{2} \times 45 \times 20 \times \cos 80^\circ$

$\therefore\ Area(CDE) \approx 443.163\ m^2$

• EC
نستخدم قانون جيب التمام

$(EC)^2 = DC^2 + DE^2 - 2 \times DC \times DE \times \sin 80^\circ = 45^2 + 20^2 - 2 \times 45 \times 20 \times \cos 80^\circ$

$\therefore\ (EC)^2 \approx 2112.433\ m^2$

$EC \approx \sqrt{2112.433} \approx 45.961\ m$

• ننتقل إلى المثلث BCE:
نستخدم قاعدة هيرون

$Area(BCE) = \sqrt{s(s-c)(s-b)(s-e)}$

حيث $s \approx 66.515\ m$

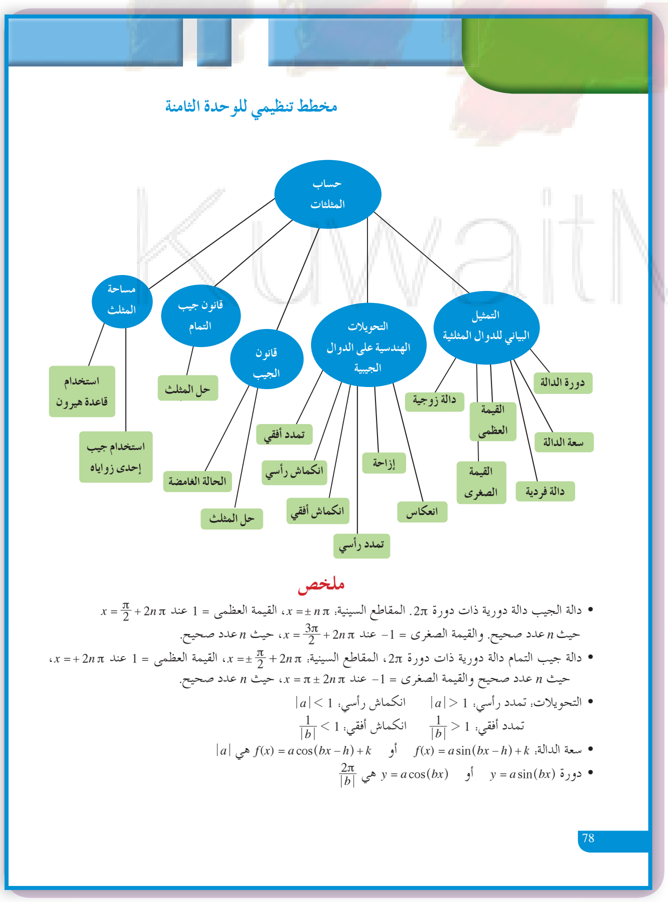
بالتعويض نحصل على $Area(BCE) = 839.603\ m^2$

مجموع مساحات المثلثات الثلاثة $362.347 + 839.603 + 443.163 = 1\ 645.113$

أي حوالي $1645\ m^2$ ومنه تساوي مساحة البحيرة حوالي $1645\ m^2$

مسألة إضافية
مستخدمًا معطيات الشكل المقابل أوجد: DA, CA, DC

77


مخطط تنظيمي للوحدة الثامنة

ملخص

• دالة الجيب دالة دورية ذات دورة 2π. المقاطع السينية: $x = \pm n\pi$، القيمة العظمى $= 1$ عند $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ حيث n عدد صحيح. والقيمة الصغرى $= -1$ عند $x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$، حيث n عدد صحيح.

• دالة جيب التمام دالة دورية ذات دورة 2π، المقاطع السينية: $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi$، القيمة العظمى $= 1$ عند $x = +2n\pi$ حيث n عدد صحيح والقيمة الصغرى $= -1$ عند $x = \pi \pm 2n\pi$، حيث n عدد صحيح.

• التحويلات: تمدد رأسي $|a| > 1$ انكماش رأسي $|a| < 1$
تمدد أفقي $\frac{1}{|b|} > 1$ انكماش أفقي $\frac{1}{|b|} < 1$

• سعة الدالة $f(x) = a\sin(bx-h)+k$ أو $f(x) = a\cos(bx-h)+k$ هي $|a|$

• دورة $y = a\sin(bx)$ أو $y = a\cos(bx)$ هي $\frac{2\pi}{|b|}$

78

المرشد لحل المسائل

إجابة «مسألة إضافية»

باستخدام قانون الجيب نكتب:

$$\frac{\sin 44^\circ}{AD} = \frac{\sin 56^\circ}{150}$$

ومنه: $AD \approx 125.7\ m$

$$\frac{\sin 81^\circ}{AC} = \frac{\sin 51^\circ}{150}$$

ومنه: $AC \approx 190.6\ m$

باستخدام قانون جيب التمام في المثلث ACD نجد:

$$DC^2 = 15\ 800.49 + 36\,328.36 - 40\,636.8$$

$$DC \approx 107.2\ m$$

- دالة الظل دالة دورية ذات دورة π، الأصفار: $x = \pm n\pi$
- دالة الجيب، دالة الظل هما دالتان فرديتان. نقطة الأصل مركز تناظر.
- دالة جيب التمام دالة زوجية. محور الصادات محور تناظر.
- قانون الجيب: $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$
- قانون جيب التمام: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
- مساحة المثلث $= \frac{1}{2}ab\sin\gamma$
- قاعدة هيرون: $\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

حيث s = semiperimeter (نصف محيط المثلث).

تمارين إثرائية

في التمرينين (2—1)، حدّد السعة، الدورة، الإزاحة الأفقية، الإزاحة الرأسية لكل من الدوال التالية:

(1) $y = 3\cos(x+3) - 2$ **(2)** $y = \frac{2}{3}\sin\left(\frac{x-3}{3}\right) + 1$

في التمرينين (4—3)، صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين f, g

(3) $f(x) = 2\cos\pi x\ ,\ g(x) = 2\cos 2\pi x$ **(4)** $f(x) = 3\sin\frac{2\pi x}{3}\ ,\ g(x) = 2\sin\frac{\pi x}{3}$

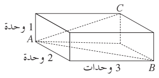
(5) إيجاد الارتفاع: وقف شخصان في جهتين مختلفتين من شجرة كبيرة بينهما مسافة 122 m، إذا كانت زاوية ارتفاع قمة الشجرة بالنسبة إلى كل منهما °15، °20، فأوجد ارتفاع الشجرة.

(6) تصميم العجلة الدوّارة: تتكوّن العجلة الدوارة من 16 عربة متساوية البعد، تبلغ المسافة بين كرسيين متجاورين 4.72 m، أوجد نصف قطر العجلة.

(7) اكتب لتتعلم: حدّد أي من الحالات التالية يمكن حلها باستخدام قانون الجيب أو قانون جيب التمام إذا علمت: $A.S.A$، $S.A.A$، $S.S.A$، $S.A.S$، $S.S.S$.

(8) الربط بين حساب المثلثات والهندسة: CAB زاوية داخلية لصندوق مستطيل الشكل، أطوال أضلاعه بالوحدات هي: 3 , 2 , 1

أوجد $m(\widehat{CAB})$



(9) في المثلث ABC أثبت أنّ: $\frac{\cos A}{a} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2abc}$

اختبار الوحدة الثامنة

في التمارين (3—1)، ارسم بيان كل دالة.

(1) $y = -2\cos x$ **(2)** $y = 2\sin 2x$ **(3)** $y = \tan\frac{3}{2}x$

في التمارين (8—4)، حدّد دورة كل دالة وسعتها إذا كان ممكنًا.

(4) $y = 1.5\sin x$ **(5)** $y = 5\cos\frac{x}{2}$ **(6)** $y = -4\sin\frac{\pi}{3}x$

(7) $y = \tan 2.5x$ **(8)** $y = -\tan\frac{\pi}{6}x$

(9) اكتب معادلة دالة على صورة $y = a\sin(bx)$ إذا كانت السعة 3، الدورة 4π

في التمرينين (11—10)، استخدم التحويلات لكي تصف كيف أن التمثيل البياني لمنحنيات الدوال التالية مرتبطًا بالتمثيل البياني للدوال المثلثية الأساسية $\sin x$ أو $\cos x$

(10) $y = -2\sin\frac{\pi x}{4}$ **(11)** $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

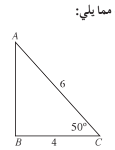
في التمارين (15—12)، أوجد مساحة كل مثلث.

(12) $m(\widehat{A}) = 20^{\circ}, b = 5\text{ cm}, c = 5\text{ cm}$ **(13)** $a = 4\text{ cm}, b = 3\text{ cm}, c = 5\text{ cm}$

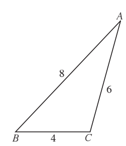
(14) $m(\widehat{A}) = 10^{\circ}, m(\widehat{C}) = 40^{\circ}, c = 3\text{ cm}$ **(15)** $a = 4\text{ cm}, b = 2\text{ cm}, c = 3\text{ cm}$

في التمارين (18—16)، أوجد العناصر المجهولة (قياس زاوية أو طول ضلع) في كل مثلث مما يلي:

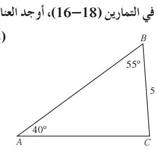
(16)



(17)



(18)



(19) الملاحة الجوية: أقلعت طائرتان في الوقت نفسه، إحداهما في اتجاه الشرق بسرعة 560 km/h والأخرى في اتجاه الشمال الشرقي بسرعة 600 km/h، أوجد البعد بينهما بعد ساعتين من افتراقهما علمًا أنهما تحلقان على الارتفاع نفسه.

(20) التصميم الزراعي: صمم مهندس زراعي حديقة على شكل مثمن منتظم، طول كل ضلع من أضلاعه 20 m

أوجد أطوال الأقطار MD , MC , MB