الوحدة الثالثة: كثيرات الحدود Polynomials

قسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

1 – 3: دوال القوى ومعكوساتها

جزء 1: استكشاف دوال القوى ومعكوساتها.

جزء 2: الدوال الزوجية والدوال الفردية.

جزء 3: معكوس العلاقة (r^{-1}).

2 – 3: الدوال الحدودية

جزء 1: الدالة الحدودية.

جزء 2: سلوك النهاية.

3 – 3: العوامل الخطية لكثيرات الحدود

جزء 1: عوامل وأصفار دالة كثيرة الحدود.

4 – 3: قسمة كثيرات الحدود

جزء 1: القسمة المطولة.

جزء 2: استخدام القسمة التركيبية.

5 – 3: حل معادلات كثيرات الحدود

جزء 1: حل المعادلات بالتحليل.

جزء 2: الأصفار النسبية الممكنة.

مقدمة الوحدة

الوحدة الثالثة

كثيرات الحدود

Polynomials

مشروع الوحدة: المنحنيات بالتصميم

1 مقدمة المشروع: يمكن اعتبار المنحنى المرسوم في الشكل أدناه لدالة كثيرة الحدود. تعد هذه الحقيقة محور تصميم السيارة الحديثة. حيث يقوم المصمم أولًا بتصميم أشكال النماذج وفق مقياس معين، يوضح التصميم الأشياء الصغيرة مثل مقابض الأبواب. وعندما تكتمل عملية النمذجة، يتحول كل منحنى في التصميم إلى معادلة تضبط على الحاسوب بواسطة المصمم ويمكن إجراء بعض التعديلات الطفيفة على المعادلة. عندما ينتهي التصميم تستخدم هذه المعلومات لصنع القوالب اللازمة لإنتاج السيارة.

2 الهدف: البحث عن تصميم سيارة أو أي شيء آخر له أجزاء منحنية، والرسم على ورقة رسم بياني منحنى الشيء الذي اخترت البحث عنه.

3 اللوازم: أوراق رسم، شبكة مربعات، آلة حاسبة بيانية، حاسوب.

4 أسئلة حول التطبيق:

نمذج غطاء محرك سيارة جديدة بالمعادلة:

$$y = 0.00143x^4 + 0.00166x^3 - 0.236x^2 + 1.53x + 0.739 \quad , \quad x > 0$$

بيان هذه المعادلة مبين إلى اليسار.

a لنفرض أنك مصمم السيارة، ارسم منحنى تراه مناسبًا أكثر لغطاء المحرك.

b ميّز 4 نقاط على المنحنى واكتب إحداثياتها.

c أوجد المعادلة التكعيبية المتوافقة مع هذه النقاط.

استخدم المعادلة: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

d اختر قسمًا آخر منحنيًا من السيارة ثم اكتب معادلة تنمذج هذا القسم.

5 التقرير: ضعْ تقريرًا مفصلًا حول تنفيذ المشروع مستفيدًا من دروس الوحدة.

نفذ ملصقًا لعرض تصميمك ورسومك البيانية التي استخدمتها.

دروس الوحدة

دوال القوى ومعكوساتها	الدوال الحدودية	العوامل الخطية لكثيرات الحدود	قسمة كثيرات الحدود	حل معادلات كثيرات الحدود
3–1	3–2	3–3	3–4	3–5

88

الجبر هو أحد المجالات المهمة في الرياضيات، وقد جاء اسمه في كتاب عالم الرياضيات والفلك «محمد بن موسى الخوارزمي» تحت عنوان «الكتاب المختصر في حساب الجبر والمقارنة»، وقد شرح «الخوارزمي» في هذا الكتاب كيفية استخدام العمليات الجبرية التي تنظم إيجاد الحلول للمعادلات الخطيّة والتربيعيّة والتي تعتبر جزءًا من معادلات كثيرات الحدود.

والمتعارف عليه أن الجبر ينقسم إلى عدة فروع:

(أ) **الجبر الابتدائي:** يتم فيه دراسة خصائص الأعداد الحقيقية، وتستخدم الرموز للتعبير عن المتغيرات والثوابت. كما يتم دراسة العمليات على الأعداد وكثيرات الحدود وطرائق إيجاد جذورها.

(ب) **الجبر التجريدي:** يتم فيه دراسة البنى الجبرية، مثل المجموعات والزمر والحلقات والحقول وفضاء المتجهات...

(جـ) **الجبر الخطي:** يتم فيه دراسة المتجهات، التحويلات الخطية، نظم المعادلات الخطية.

والمهم لدينا الآن هو أن الجبر الابتدائي يتم تدريسه للطلاب في المرحلة الثانوية، حيث يتوجه إلى معرفة الرياضيات ما بعد الأعداد فيتعامل مع كثيرات الحدود والمعادلات وطرائق إيجاد الجذور لها.

ويعتمد على العمليات الأساسية: الجمع ومعكوسه الطرح، وعلى الضرب ومعكوسه القسمة، كما يعتمد على رقمين لهما أهمية كبرى هما: الصفر ويسمى المحايد الجمعي، والواحد ويسمى المحايد الضربي.

وفي الختام لا بد من الإشارة إلى النظرية الأساسية في علم الجبر لعالم الرياضيات «فريديريك غاوس» «Frederic Gauss» والتي تنص على ما يلي: «كل معادلة كثيرة الحدود، غير الحد الثابت، لها على الأقل جذر واحد».

مشروع الوحدة

يوفر هذا المشروع فرصة للطلاب لتعرف ناحية مهمة من فنون التصميم، وذلك باستخدام الرياضيات وخاصة الدوال الحدودية.

اطلب إليهم إجراء بحث مستفيض عن كيفية تصميم كل قطعة في السيارة، وكيفية استخدام منحنيات للدوال الحدودية. شجعهم على زيارة مؤسسات أو أصحاب اختصاص في عالم السيارات ليأخذوا أفكارًا تساعدهم على إتمام هذا المشروع.

اشرح لهم أن المعادلة الموجودة في هذا المشروع والتي تنمذج غطاء محرك سيارة جديدة لم تأت من المجهول بل هي نتيجة لدراسة تصاميم متعددة، ومن ثمّ تمّ استخدام إحداثيات بعض النقاط لإيجاد معادلة دالة كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة. أخبرهم أن تصميم السيارة يرتكز على الهيكل من الخارج لمعالجة الاحتكاك على الطريق، ومع الهواء، وتخفيض كمية الوقود المستهلكة.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

تحقق من عمل الطلاب في الخطوات من (a) إلى (d).

التقرير

من المهم جدًّا أن يعكس التقرير الجهد والأبحاث والدراسات لكل من شارك في تنفيذ المشروع.

اعرض تقريرك أمام زملائك في غرفة الصف، وناقش معهم النتائج والحسابات التي توصلت إليها، ثم أعد النظر ببعضها إذا كان ذلك ضروريًّا.

الوحدة الثالثة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت كتابة دوال خطية ورسمها بيانيًّا.
- تعلمت حل أنظمة معادلات أو متباينات خطية وحلها جبريًّا وبيانيًّا.
- تعلمت حل معادلات تربيعية.
- تعلمت رسم معادلات تربيعية بيانيًّا.
- تعلمت حل متباينات تربيعية في متغير واحد.

ماذا سوف تتعلم؟

- استكشاف الرسوم البيانية لدوال القوى.
- استخدام القوى والجذور لحل المعادلات.
- وصف منحنيات كثيرات الحدود.
- تحليل كثيرات الحدود إلى عوامل.
- كتابة دالة كثيرة الحدود باستخدام أصفارها.
- حل معادلات كثيرات الحدود بطرق مختلفة.
- قسمة كثيرات الحدود.
- إيجاد أصفار دالة كثيرة الحدود.

عمر الخيام

المصطلحات الأساسية

دالة القوى – معكوس دالة القوى – دالة زوجية – دالة فردية – درجة دالة كثيرة الحدود– الصورة العامة – سلوك النهاية – صورة عوامل – القيمة العظمى النسبية – القيمة الصغرى النسبية – نظرية العامل – القسمة المطولة – القسمة التركيبية – نظرية الباقي – جذور – أصفار كثيرة الحدود – تحليل إلى عوامل – الأصفار النسبية الممكنة.

أضف إلى معلوماتك

عمر الخيام

هو شاعر وفيلسوف تخصص في الرياضيات.

اقترح طريقة لحل معادلات جبرية من الدرجة الثالثة تقوم على إيجاد التقاطع بين قطع مكافئ وقطع زائد.

وفي عصرنا الحالي، حيث يمكن استخدام الحاسوب في وضع رسوم دقيقة لدوال القوى. أصبحت طريقة عمر الخيام من أفضل الطرق المتبعة لحل معادلات الدرجة الثالثة.

مثال على ذلك:

$$2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$$
$$2x^3 + 3x^2 - 3x = 2$$
$$2x^2 + 3x - 3 = \frac{2}{x} \quad (x \neq 0)$$

89

سلّم التقييم

4	التصميم والرسوم صحيحة بالكامل – المعادلات دقيقة ومفصلة – الحسابات صحيحة – التقرير واضح ومعبر.
3	معظم التصاميم والرسوم صحيحة – معظم المعادلات دقيقة ومفصلة – أخطاء طفيفة في الحسابات – التقرير بمعظمه واضح.
2	بعض التصاميم والرسوم صحيحة – بعض المعادلات مفصلة – أخطاء كثيرة في الحسابات – التقرير بحاجة إلى تفصيل وإيضاح.
1	معظم عناصر المشروع غير كاملة.

3–1: دوال القوى ومعكوساتها

1 الأهداف

- يستكشف الرسوم البيانية لدوال القوى.
- يستخدم القوى والجذور لحل المعادلات.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

دالة القوى – دالة زوجية – دالة فردية – المجال.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة بيانية – ورق رسم بياني – جهاز إسقاط (Data show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) اكتب الدالة التربيعية: $y = x^2 - 4x + 3$ بدلالة إحداثيات الرأس، ثم مثّلها بيانيًّا.
ما هي معادلة خط التماثل؟

(b) أوجد معكوس الدالة: $y = x^2 - 4$ هل المعكوس هو دالة؟ اشرح إجابتك مستعينًا باختبار المستقيم الرأسي.

(c) حلل: $y = x^2 - 4$ إلى عوامل خطية، ثم أوجد مجموعة الحل عندما $y = 0$

5 التدريس

تساعد الآلة الحاسبة العلمية على وضع جداول لقيم x , y لدوال القوى مما يسمح بالمقارنة بينها.

ساعد الطلاب على استكشاف هذه العلاقات في الجداول الواردة في فقرة «عمل تعاوني».


3–1

دوال القوى ومعكوساتها

Power Functions and their Inverses

سوف تتعلم
- استكشاف الرسوم البيانية لدوال القوى.
- استخدام القوى والجذور لحل المعادلات.

المفردات والمصطلحات:
- دوال القوى Power Functions
- دالة فردية Odd Function
- دالة زوجية Even Function
- المجال Domain

عمل تعاوني

1 استخدم آلة حاسبة لحل النظام: $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x^4 \end{cases}$ تحقق من كل حل.

2 يبيّن الجدول المقابل $y_1 = x^2$, $y_2 = x^4$
ما قيم x في الجدول التي تحقق $x^2 < x^4$؟
ما قيم x في الجدول التي تحقق $x^2 > x^4$؟

3 استخدم رسمًا بيانيًّا لإيجاد مجموعة حل كل من المتباينتين:
a $x^2 < x^4$ b $x^2 > x^4$

4 أوجد مجموعة حل المتباينة: $x^6 < x^4$
ارسم بيانيًّا دالة القوى: $y = x^6$ باستخدام آلة حاسبة بيانية وتحقق من إجابتك.

x	$y_1 = x^2$	$y_2 = x^4$
−1.6	2.56	6.5536
−1.2	1.44	2.0736
−0.8	0.64	0.4096
−0.4	0.16	0.0256
0	0	0
0.4	0.16	0.0256
0.8	0.64	0.4096
1.2	1.44	2.0736
1.6	2.56	6.5536

استكشاف دوال القوى ومعكوساتها

Exploring Power Functions and their Inverses

الدوال مثل: $y = x^4$، $w = 0.014c^3$ هي دوال قوى.

تكون دوال القوى على الشكل:
$y = ax^n, \ a \neq 0, \ n \in \mathbb{Z}^+$

معلومة: مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة رمزها: $\mathbb{Z}^+$

ملاحظة: $y = ax^n$ يمكن كتابتها أيضًا على الصورة: $f(x) = ax^n$

مثال (1) تطبيقات حياتية

تستخدم الصيغة: $w = 0.014c^3$ لتقدير وزن w برتقالة بالجرام (g)، بدلالة c محيط أكبر مقطع دائري فيها بالسنتيمتر (cm). قدّر وزن برتقالة محيط أكبر مقطع دائري فيها 20 cm

الحل:

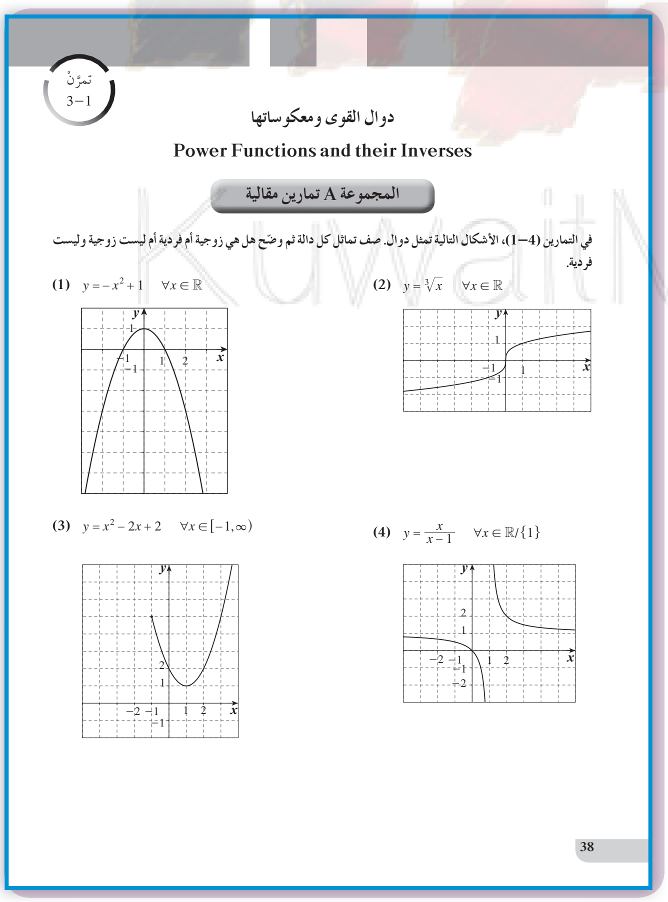
$w = 0.014c^3$
$= 0.014(20)^3$ عوّض عن c بـ 20
$= 112$ g

يكون وزن البرتقالة التي يبلغ محيطها 20 cm حوالى 112 g

حاول أن تحل

1 قدّر وزن برتقالة محيط أكبرمقطع دائري فيها 22 cm باستخدام الصيغة في مثال (1).

90


تمرَّنْ 3–1

دوال القوى ومعكوساتها

Power Functions and their Inverses

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–4)، الأشكال التالية تمثل دوال. صف تماثل كل دالة ثم وضّح هل هي زوجية أم فردية أم ليست زوجية وليست فردية.

(1) $y = -x^2 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(2) $y = \sqrt[3]{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(3) $y = x^2 - 2x + 2 \quad \forall x \in [-1, \infty)$

(4) $y = \frac{x}{x-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}/\{1\}$

38

ثمّ اطلب إليهم الربط بين النتائج التي توصلوا إليها بيانيًّا وتلك الموجودة على جدول القيم للدالتين:

$y = x^2 \;,\; y = x^4$

في المثال (1)

تستخدم دالة القوى في حالات متعددة من جوانب الحياة والبيئة، إذ نلاحظ أنّ: $w = 0.014c^3$ هي دالة قوى من الدرجة الثالثة تربط وزن برتقالة بالجرام (g) بمحيط أكبر مقطع دائري فيها بالسنتيمتر (cm). اطلب إلى الطلاب إيجاد قيمة c بدلالة w.

في المثالين (3), (4)

وضّح للطلاب أن معرفة الدوال الزوجية والدوال الفردية تساعدهم كثيرًا على رسم بيان الدالة، إذ يمكن رسم جزء من بيان الدالة واستنتاج الجزء الآخر بالانعكاس في محور الصادات أو في نقطة الأصل.

في المثالين (5), (6)

ذكّر الطلّاب بمعكوس الدالة (الدرس 5 – 2)، وأشر إلى أن معكوس الدالة ليس بالضرورة دالة، ثم لاحظ العلاقة بين مدى الدالة ومجال معكوسها.

6 الربط

يوفر المثالان (2) ,(1) فرصة جيدة أمام الطلاب لاستخدام دوال القوى ومعكوساتها في مواقف حياتية متعددة.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يجد الطلاب صعوبة في التحويل بين دالة القوى ومعكوسها، ساعدهم على ربط $x^{\frac{m}{n}}$ بـ $\sqrt[n]{x^m}$ حيث إنّ:

$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

8 التقييم

توفر فقرات «حاول أن تحل» فرصة مهمة للمعلم كي يتابع طلابه، ويتأكد من مدى استيعابهم مفاهيم هذا الدرس ومهاراته.

مثال (2) علم الحيوان

الدالة $w(x) = 15.625x^3$ هي تقريب للوزن w بالكجم (kg) لأنثى الزرافة بدلالة طولها x بالمتر (m). أوجد وزن كل من إناث الزرافة التي طولها 3.268m , 3.175m

الحل:

احسب $w(x)$ للطولين.

$w(x) = 15.625x^3$

$w(3.175) = 15.625 \times (3.175)^3 \approx 500$ kg

$w(3.268) = 15.625 \times (3.268)^3 \approx 545.34$ kg

حاول أن تحل

2 في المثال (2)، أوجد وزن زرافة طولها 3.3m

نشاط 1

يوضح الجدول المقابل بعض القيم للدالة $y = x^3$

x	y
−3	−27
−2	−8
−1	−1
0	0
1	1
2	8
3	27

أكمل ما يلي:

a في أي ربعين من المستوى الإحداثي تتوقع ظهور الرسم البياني لهذه الدالة؟

b أكمل كل زوج من النقاط التي تنتمي إلى بيان الدالة: (4, 64)، (□, 0.125)، (−0.5, −0.125)، (−4, □)

c لنفرض أن النقطة (a, b) تنتمي إلى بيان الدالة: $y = x^3$، فأي من النقاط التالية سوف تنتمي أيضًا إلى بيان هذه الدالة؟

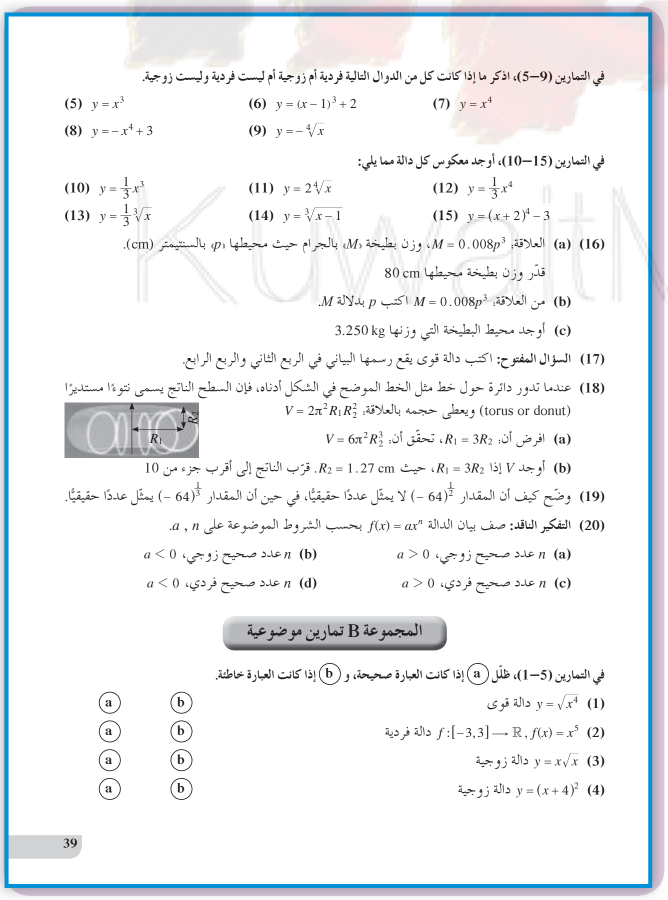
1 $(a, -b)$ 2 $(-a, b)$ 3 $(-a, -b)$ 4 $(2a, 3b)$

مما سبق ومن فقرة «عمل تعاوني» لاحظنا أن بيان الدوال ذات الأسس الزوجية مثل $y = x^2$ ، $y = x^4$ كما في الشكلين أدناه.

وهذا يمثل الشكل العام للدوال التي على الصورة $y = ax^n$ حيث n عدداً زوجياً موجباً $a \neq 0$

الربط بالتكنولوجيا: استخدام الآلة الحاسبة البيانية

91



في التمارين (5–9)، اذكر ما إذا كانت كل من الدوال التالية فردية أم زوجية أم ليست فردية وليست زوجية.

(5) $y = x^3$ (6) $y = (x-1)^3 + 2$ (7) $y = x^4$

(8) $y = -x^4 + 3$ (9) $y = -\sqrt[4]{x}$

في التمارين (10–15)، أوجد معكوس كل دالة مما يلي:

(10) $y = \frac{1}{3}x^3$ (11) $y = 2\sqrt[4]{x}$ (12) $y = \frac{1}{3}x^4$

(13) $y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x}$ (14) $y = \sqrt[3]{x-1}$ (15) $y = (x+2)^4 - 3$

(16) (a) العلاقة: $M = 0.008p^3$، وزن بطيخة M بالجرام حيث محيطها p بالسنتيمتر (cm).

قدّر وزن بطيخة محيطها 80 cm

(b) من العلاقة: $M = 0.008p^3$ اكتب p بدلالة M.

(c) أوجد محيط البطيخة التي وزنها 3.250 kg

(17) السؤال المفتوح: اكتب دالة قوى يقع رسمها البياني في الربع الثاني والربع الرابع.

(18) عندما تدور دائرة حول خط مثل الخط الموضح في الشكل أدناه، فإن السطح الناتج يسمى نتوءًا مستديرًا (torus or donut) ويعطى حجمه بالعلاقة: $V = 2\pi^2 R_1 R_2^2$

(a) افرض أن: $R_1 = 3R_2$، تحقّق أن: $V = 6\pi^2 R_2^3$

(b) أوجد V إذا $R_1 = 3R_2$، حيث $R_2 = 1.27$ cm. قرّب الناتج إلى أقرب جزء من 10

(19) وضّح كيف أن المقدار $(-64)^{\frac{1}{2}}$ لا يمثل عددًا حقيقيًا، في حين أن المقدار $(-64)^{\frac{1}{3}}$ يمثل عددًا حقيقيًا.

(20) التفكير الناقد: صف بيان الدالة $f(x) = ax^n$ بحسب الشروط الموضوعة على a , n.

(a) n عدد صحيح زوجي، $a > 0$ (b) n عدد صحيح زوجي، $a < 0$

(c) n عدد صحيح فردي، $a > 0$ (d) n عدد صحيح فردي، $a < 0$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $y = \sqrt{x^4}$ دالة قوى (a) (b)

(2) $f: [-3,3] \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^5$ دالة فردية (a) (b)

(3) $y = x\sqrt{x}$ دالة زوجية (a) (b)

(4) $y = (x+4)^2$ دالة زوجية (a) (b)

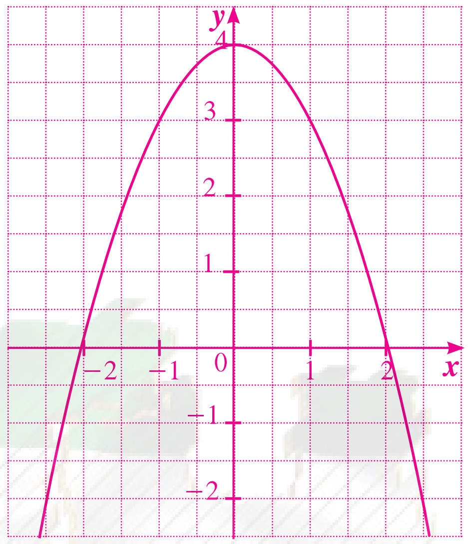
39

اختبار سريع

❶ أثبت أن: $f(x)=-x^2+4$ هي دالة زوجية. ثم مثّلها بيانيًّا.

$$f(-x)=-(-x)^2+4=-x^2+4=f(x),\forall x,-x\in\mathbb{R}$$

لذا $f(x)$ هي دالة زوجية.

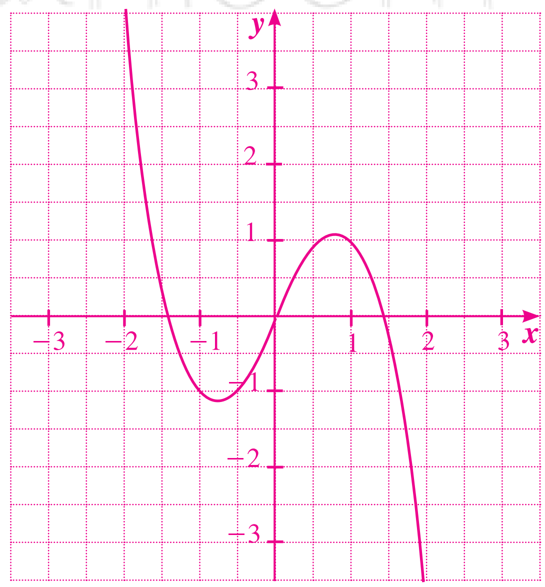


$f(x)=-x^2+4$

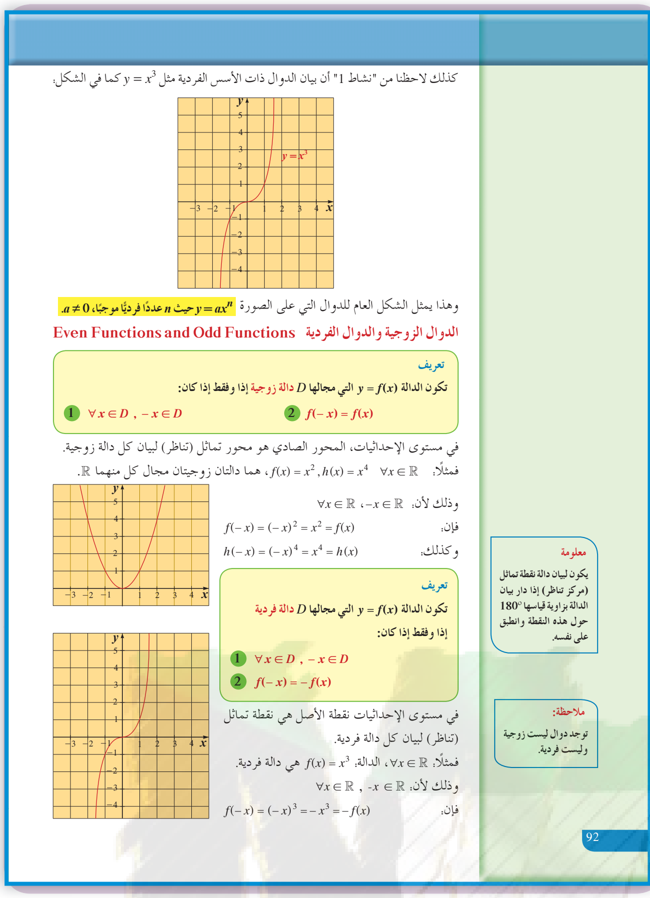
❷ أثبت أن: $f(x)=-x^3+2x$ هي دالة فردية. ثم مثّلها بيانيًّا.

$$f(-x)=-(-x)^3+2(-x)=x^3-2x=$$
$$-(-x^3+2x)=-f(x),\forall x,-x\in\mathbb{R}$$

لذا $f(x)$ هي دالة فردية.



$f(x)=-x^3+2x$



كذلك لاحظنا من "نشاط 1" أن بيان الدوال ذات الأسس الفردية مثل $y=x^3$ كما في الشكل:

$y=x^3$

وهذا يمثل الشكل العام للدوال التي على الصورة $y=ax^n$ حيث n عددًا فرديًّا موجبًا، $a\neq 0$.

الدوال الزوجية والدوال الفردية Even Functions and Odd Functions

تعريف

تكون الدالة $y=f(x)$ التي مجالها D دالة زوجية إذا وفقط إذا كان:

1. $\forall x\in D\ ,\ -x\in D$
2. $f(-x)=f(x)$

في مستوى الإحداثيات، المحور الصادي هو محور تماثل (تناظر) لبيان كل دالة زوجية.

فمثلًا: $\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x)=x^2, h(x)=x^4$، هما دالتان زوجيتان مجال كل منهما $\mathbb{R}$.

وذلك لأن: $-x\in\mathbb{R}$ ، $\forall x\in\mathbb{R}$

فإن: $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$

وكذلك: $h(-x)=(-x)^4=x^4=h(x)$

تعريف

تكون الدالة $y=f(x)$ التي مجالها D دالة فردية إذا وفقط إذا كان:

1. $\forall x\in D\ ,\ -x\in D$
2. $f(-x)=-f(x)$

في مستوى الإحداثيات نقطة الأصل هي نقطة تماثل (تناظر) لبيان كل دالة فردية.

فمثلًا: $\forall x\in\mathbb{R}$، الدالة: $f(x)=x^3$ هي دالة فردية.

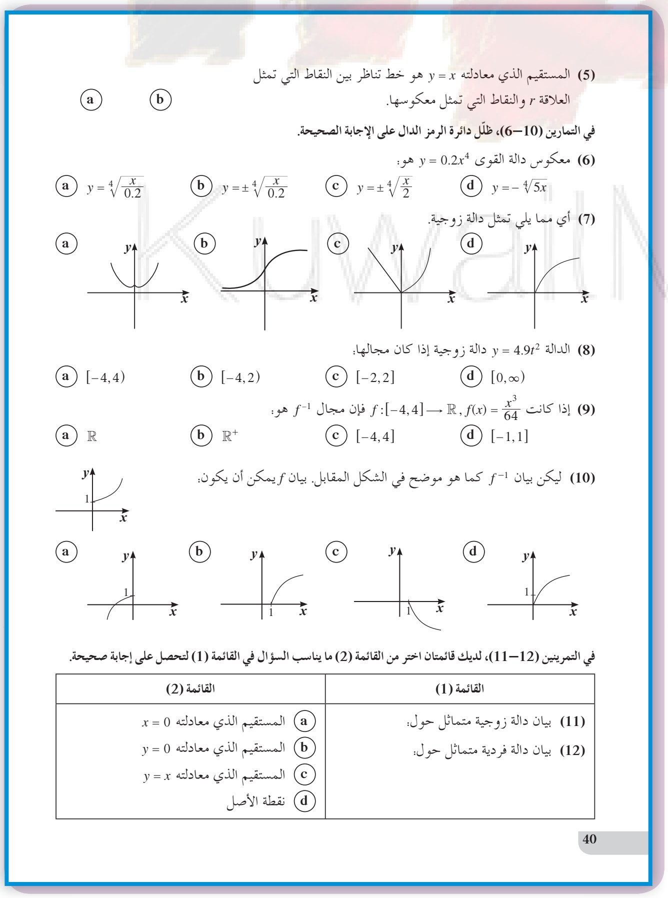
وذلك لأن: $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ -x\in\mathbb{R}$

فإن: $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$

معلومة
يكون لبيان دالة نقطة تماثل (مركز تناظر) إذا دار بيان الدالة بزاوية قياسها 180° حول هذه النقطة وانطبق على نفسه.

ملاحظة:
توجد دوال ليست زوجية وليست فردية.

92



(5) المستقيم الذي معادلته $y=x$ هو خط تناظر بين النقاط التي تمثل العلاقة r والنقاط التي تمثل معكوسها.
ⓐ ⓑ

في التمارين (6–10)، ظلّل دائرة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) معكوس دالة القوى $y=0.2x^4$ هو:

ⓐ $y=\sqrt[4]{\frac{x}{0.2}}$ ⓑ $y=\pm\sqrt[4]{\frac{x}{0.2}}$ ⓒ $y=\pm\sqrt[4]{\frac{x}{2}}$ ⓓ $y=-\sqrt[4]{5x}$

(7) أي مما يلي تمثل دالة زوجية.

ⓐ ⓑ ⓒ ⓓ

(8) الدالة $y=4.9t^2$ دالة زوجية إذا كان مجالها:

ⓐ $[-4,4)$ ⓑ $[-4,2)$ ⓒ $[-2,2]$ ⓓ $[0,\infty)$

(9) إذا كانت $f:[-4,4]\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^3}{64}$ فإن مجال f^{-1} هو:

ⓐ $\mathbb{R}$ ⓑ $\mathbb{R}^+$ ⓒ $[-4,4]$ ⓓ $[-1,1]$

(10) ليكن بيان f^{-1} كما هو موضح في الشكل المقابل. بيان f يمكن أن يكون:

ⓐ ⓑ ⓒ ⓓ

في التمرينين (11–12)، لديك قائمتان اختر من القائمة (2) ما يناسب السؤال في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

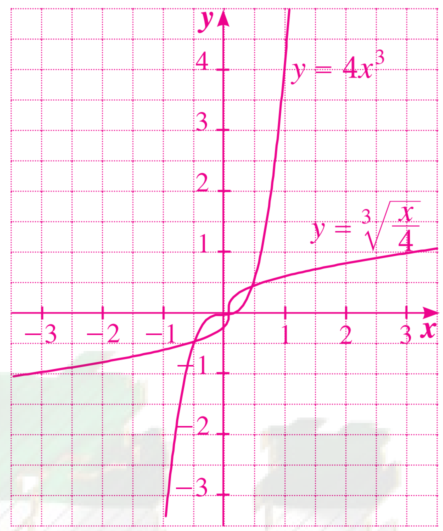
القائمة (1)	القائمة (2)
(11) بيان دالة زوجية متماثل حول:	ⓐ المستقيم الذي معادلته $x=0$
(12) بيان دالة فردية متماثل حول:	ⓑ المستقيم الذي معادلته $y=0$
	ⓒ المستقيم الذي معادلته $y=x$
	ⓓ نقطة الأصل

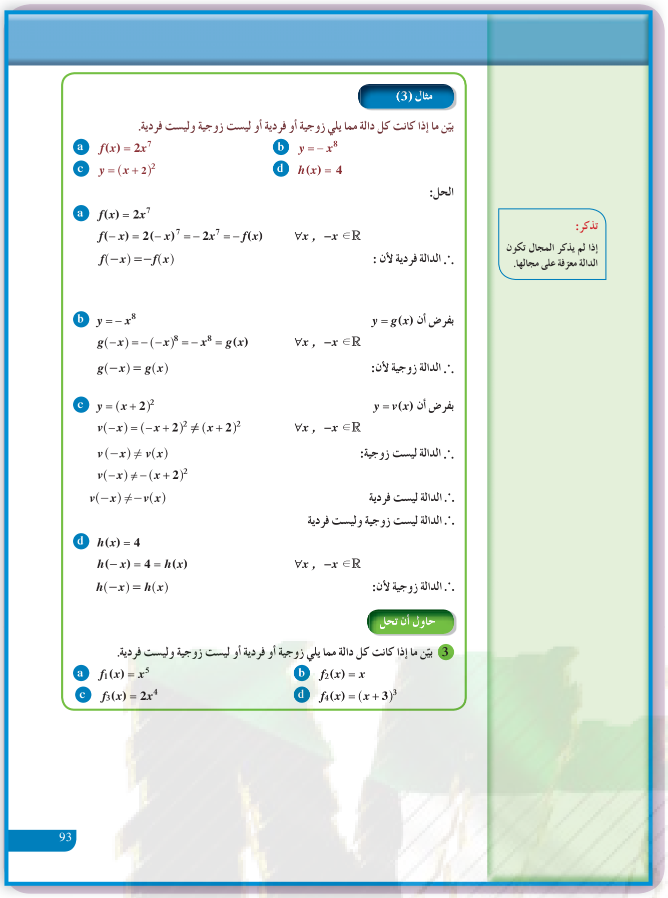
40

3 أوجد معكوس دالة القوى: $y = 4x^3$،
ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا.

$$y = 4x^3 \Longrightarrow x = 4y^3$$

$$y^3 = \frac{x}{4} \Longrightarrow y = \sqrt[3]{\frac{x}{4}}$$





مثال (3)

بيّن ما إذا كانت كل دالة مما يلي زوجية أو فردية أو ليست زوجية وليست فردية.

a $f(x) = 2x^7$ b $y = -x^8$

c $y = (x+2)^2$ d $h(x) = 4$

الحل:

a $f(x) = 2x^7$

$f(-x) = 2(-x)^7 = -2x^7 = -f(x)$ $\forall x ,\ -x \in \mathbb{R}$

∴ الدالة فردية لأن : $f(-x) = -f(x)$

b $y = -x^8$ بفرض أن $y = g(x)$

$g(-x) = -(-x)^8 = -x^8 = g(x)$ $\forall x ,\ -x \in \mathbb{R}$

∴ الدالة زوجية لأن: $g(-x) = g(x)$

c $y = (x+2)^2$ بفرض أن $y = v(x)$

$v(-x) = (-x+2)^2 \neq (x+2)^2$ $\forall x ,\ -x \in \mathbb{R}$

∴ الدالة ليست زوجية: $v(-x) \neq v(x)$

$v(-x) \neq -(x+2)^2$

∴ الدالة ليست فردية $v(-x) \neq -v(x)$

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية

d $h(x) = 4$

$h(-x) = 4 = h(x)$ $\forall x ,\ -x \in \mathbb{R}$

∴ الدالة زوجية لأن: $h(-x) = h(x)$

تذكر: إذا لم يذكر المجال تكون الدالة معرفة على مجالها.

حاول أن تحل

3 بيّن ما إذا كانت كل دالة مما يلي زوجية أو فردية أو ليست زوجية وليست فردية.

a $f_1(x) = x^5$ b $f_2(x) = x$

c $f_3(x) = 2x^4$ d $f_4(x) = (x+3)^3$

93

9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

1 $x = 0, 1, -1$

2 $(-1.6, -1.2, 1.2, 1.6)$; $(-0.8, -0.4, 0.4, 0.8)$

3 **(a)** $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

(b) $(-1, 0) \cup (0, 1)$

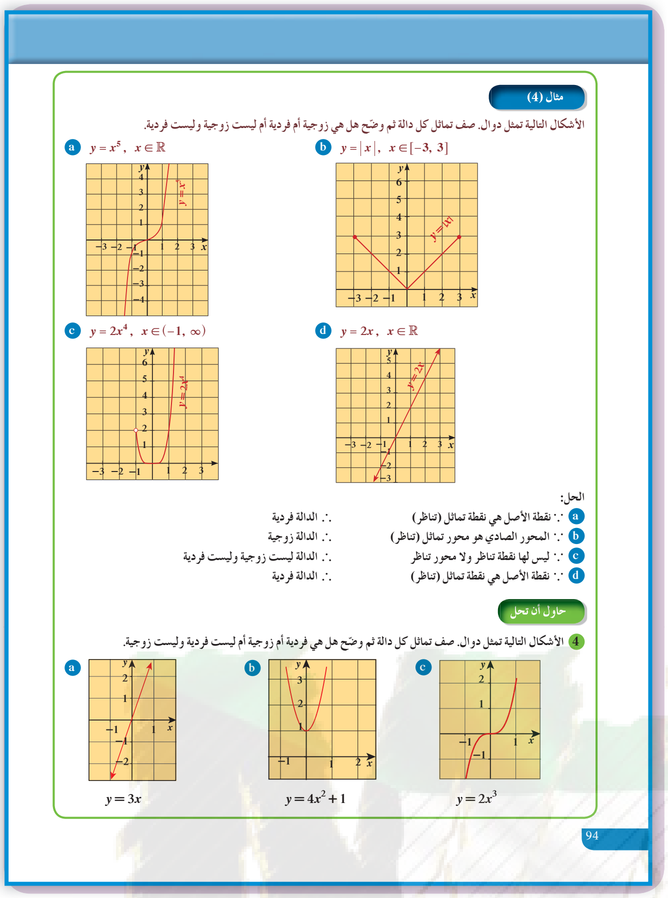
4 $(-1, 0) \cup (0, 1)$

تحقق من عمل الطلاّب

«حاول أن تحل»

1 $c = 22\text{ cm}$, $w \approx 149\text{ g}$

2 $w(3.3) \approx 561.5\text{Kg}$



مثال (4)

الأشكال التالية تمثل دوال. صف تماثل كل دالة ثم وضّح هل هي زوجية أم فردية أم ليست زوجية وليست فردية.

a $y = x^5 , \ x \in \mathbb{R}$

b $y = |x| , \ x \in [-3, 3]$

c $y = 2x^4 , \ x \in (-1, \infty)$

d $y = 2x , \ x \in \mathbb{R}$

الحل:

a ∵ نقطة الأصل هي نقطة تماثل (تناظر) ∴ الدالة فردية

b ∵ المحور الصادي هو محور تماثل (تناظر) ∴ الدالة زوجية

c ∵ ليس لها نقطة تناظر ولا محور تناظر ∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية

d ∵ نقطة الأصل هي نقطة تماثل (تناظر) ∴ الدالة فردية

حاول أن تحل

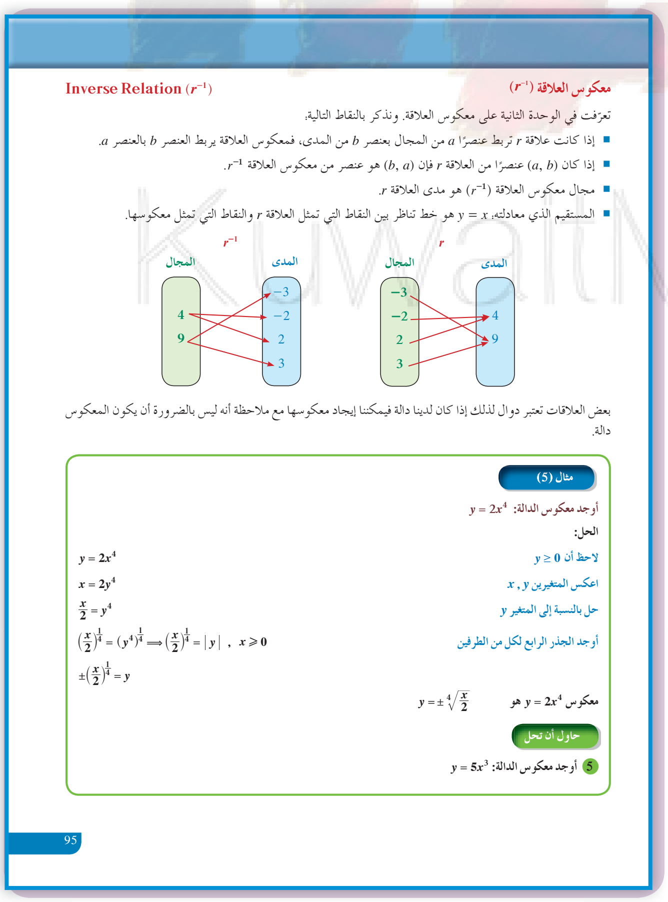
4 الأشكال التالية تمثل دوال. صف تماثل كل دالة ثم وضّح هل هي فردية أم زوجية أم ليست فردية وليست زوجية.

a $y = 3x$

b $y = 4x^2 + 1$

c $y = 2x^3$

94



معكوس العلاقة (r^{-1}) **Inverse Relation (r^{-1})**

تعرّفت في الوحدة الثانية على معكوس العلاقة. ونذكر بالنقاط التالية:

- إذا كانت علاقة r تربط عنصرًا a من المجال بعنصر b من المدى، فمعكوس العلاقة يربط العنصر b بالعنصر a.
- إذا كان (a, b) عنصرًا من العلاقة r فإن (b, a) هو عنصر من معكوس العلاقة r^{-1}.
- مجال معكوس العلاقة (r^{-1}) هو مدى العلاقة r.
- المستقيم الذي معادلته: $y = x$ هو خط تناظر بين النقاط التي تمثل العلاقة r والنقاط التي تمثل معكوسها.

بعض العلاقات تعتبر دوال لذلك إذا كان لدينا دالة فيمكننا إيجاد معكوسها مع ملاحظة أنه ليس بالضرورة أن يكون المعكوس دالة.

مثال (5)

أوجد معكوس الدالة: $y = 2x^4$

الحل:

لاحظ أن $y \geq 0$ — $y = 2x^4$

اعكس المتغيرين x , y — $x = 2y^4$

حل بالنسبة إلى المتغير y — $\frac{x}{2} = y^4$

أوجد الجذر الرابع لكل من الطرفين — $\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = (y^4)^{\frac{1}{4}} \Longrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = |y| \ , \ x \geqslant 0$

$\pm\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = y$

معكوس $y = 2x^4$ هو $y = \pm\sqrt[4]{\frac{x}{2}}$

حاول أن تحل

5 أوجد معكوس الدالة: $y = 5x^3$

95

3 **(a)** $f_1(x) = x^5$

$f_1(-x) = (-x)^5 = -x^5$

$= -f_1(x)$

∴ الدالة فردية.

(b) $f_2(x) = x$

$f_2(-x) = -x = -f_2(x)$

∴ الدالة فردية.

(c) $f_3(x) = 2x^4$

$f_3(-x) = 2(-x)^4 = 2x^4$

$= f_3(x)$

∴ الدالة زوجية.

(d) $f_4(x) = (x+3)^3$

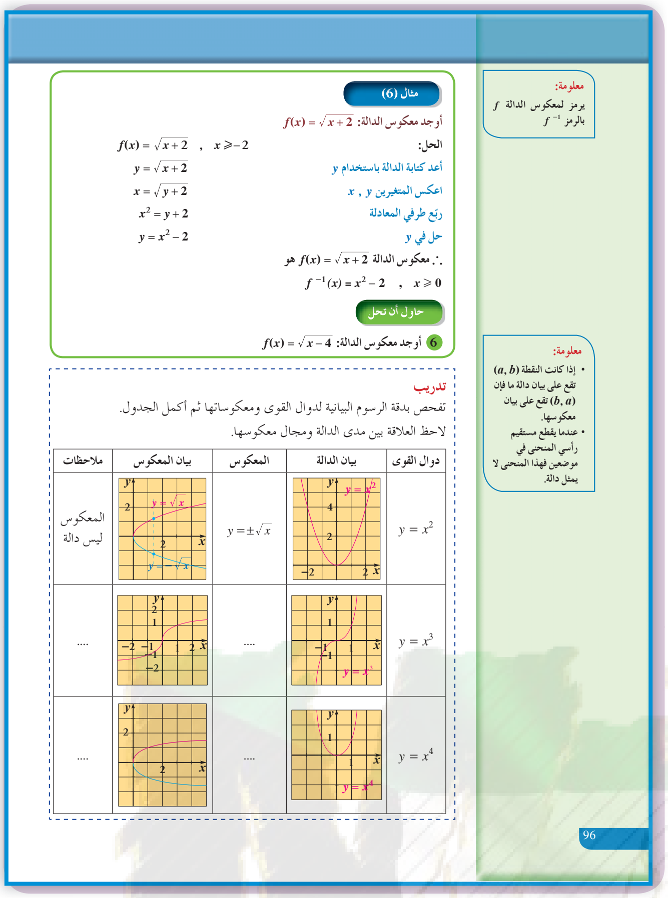
$f_4(-x) = (-x+3)^3 = -(x-3)^3$

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

4 **(a)** نقطة الأصل هي نقطة تماثل ∴ فردية.

(b) المحور الصادي هو محور تماثل ∴ زوجية.

(c) نقطة الأصل هي نقطة تماثل ∴ فردية.



مثال (6)

أوجد معكوس الدالة: $f(x)=\sqrt{x+2}$

الحل: $f(x)=\sqrt{x+2} \quad , \quad x \geqslant -2$

أعد كتابة الدالة باستخدام y — $y=\sqrt{x+2}$

اعكس المتغيرين x , y — $x=\sqrt{y+2}$

ربّع طرفي المعادلة — $x^2=y+2$

حل في y — $y=x^2-2$

$\therefore$ معكوس الدالة $f(x)=\sqrt{x+2}$ هو

$f^{-1}(x)=x^2-2 \quad , \quad x \geqslant 0$

حاول أن تحل

6 أوجد معكوس الدالة: $f(x)=\sqrt{x-4}$

معلومة:

يرمز لمعكوس الدالة f بالرمز f^{-1}

معلومة:

- إذا كانت النقطة (a, b) تقع على بيان دالة ما فإن (b, a) تقع على بيان معكوسها.
- عندما يقطع مستقيم رأسي المنحنى في موضعين فهذا المنحنى لا يمثل دالة.

تدريب

تفحص بدقة الرسوم البيانية لدوال القوى ومعكوساتها ثم أكمل الجدول.

لاحظ العلاقة بين مدى الدالة ومجال معكوسها.

دوال القوى	بيان الدالة	المعكوس	بيان المعكوس	ملاحظات
$y=x^2$	$y=x^2$	$y=\pm\sqrt{x}$	$y=\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{x}$	المعكوس ليس دالة
$y=x^3$	$y=x^3$	....		....
$y=x^4$	$y=x^4$	....		....

96

5 $y=5x^3$

$\frac{y}{5}=x^3$

$\frac{x}{5}=y^3$

$y=\sqrt[3]{\frac{x}{5}}$

6 $y=x^2+4 \ , \ x \geq 0$

«تدريب»

المعكوس دالة , $y=x^3 \Rightarrow y=\sqrt[3]{x}$

المعكوس ليس دالة , $y=x^4 \Rightarrow y=\pm\sqrt[4]{x}$

«نشاط 1»

(a) في الربع الأول والربع الثالث من المستوى الإحداثي

(b) $(0.5, 0.125)$, $(-4, -64)$

(c) $(-a, -b)$

3–2: الدوال الحدودية

1 الأهداف

- يصف منحنيات كثيرات الحدود.
- ينمذج بيانات باستخدام دوال كثيرات الحدود.
- يصف سلوك النهاية لدوال كثيرات الحدود.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

المعامل الرئيسي – حد تكعيبي – حد تربيعي – حد خطي – حد ثابت – سلوك النهاية – درجة – الصورة العامة – حدودية أو كثيرة حدود.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة بيانية – ورق رسم بياني – جهاز إسقاط (Data show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) ارسم بيان الدالة: $y = x^2 + 2$، ثم اذكر ما إذا كانت زوجية أو فردية وحدد نوع التماثل.

(b) ارسم بيان الدالة: $y = x^3 + x$، ثم اذكر ما إذا كانت زوجية أو فردية وحدد نوع التماثل.

(c) أوجد معكوس العلاقة r الممثلة على الجدول، ثم مثّل على مستوى إحداثي واحد العلاقة r ومعكوسها r^{-1}.

x	-1	0	1	2
y	3	1	-1	-3

5 التدريس

تابع عمل الطلاب بعناية في فقرة «عمل تعاوني» وبخاصة عند رسم بيان الدوال على الآلة الحاسبة البيانية، وعند محاولتهم رسم كل دالة على بطاقة. ناقش معهم الإجابات التي توصلوا إليها في الأسئلة (2)، (3)، (4)، (5)، لأن ذلك سوف يساعدهم كثيرًا على فهم طبيعة منحنيات دوال كثيرة الحدود، وسلوك النهاية لمنحنى كل دالة بحسب درجتها. توسع في هذه الفقرة في الشرح والنقاش والحوار.


3–2

الدوال الحدودية

Polynomial Functions

سوف تتعلم
- وصف منحنيات كثيرات الحدود
- نمذجة بيانات باستخدام دوال كثيرات الحدود
- وصف سلوك النهاية لدوال كثيرات الحدود

المفردات والمصطلحات:
- المعامل الرئيسي Leading Coefficient
- حد تكعيبي Cubic Term
- حد تربيعي Quadratic Term
- حد خطي Linear Term
- حد ثابت Constant Term
- درجة Degree
- الصورة العامة General Form
- سلوك النهاية End Behavior
- حدودية أو كثيرة حدود Polynomial

عمل تعاوني

1 اعمل في مجموعات. كل مجموعة تحتاج إلى آلة حاسبة بيانية وعشر بطاقات ورقية. ارسم بيانيًا كل دالة مكتوبة جهة اليسار وخطط كل رسم على بطاقة منفصلة. عنون كل رسم بمعادلته.

2 صنّف الرسوم البيانية في مجموعات تبعًا لأشكالها.

3 فيم تتشابه الرسوم البيانية للمعادلات الخطية؟

4 فيم تتشابه الرسوم البيانية للمعادلات التربيعية؟

5 فيم تتشابه الرسوم البيانية للمعادلات المتبقية؟ وفيم تختلف؟

6 a قدر الجزء (الأجزاء) المقطوع من محور السينات لكل رسم بياني واكتبه على البطاقة الخاصة به.

b ماذا تلاحظ بالنسبة إلى عدد الأجزاء المقطوعة من محور السينات في كل رسم بياني وأكبر أس يوجد في معادلته؟

عندما تجمع دوال قوى وثوابت أو تطرحها فإنك تحصل على دالة حدودية (دالة كثيرة الحدود).

تعريف الدالة الحدودية (كثيرة الحدود)

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

حيث n عدد صحيح غير سالب.

a_n، a_{n-1}، a_{n-2} ...، a_0 أعدادًا حقيقية

الدوال في «عمل تعاوني» كلها دوال كثيرات الحدود مثل الدالة $P(x)$ التالية.

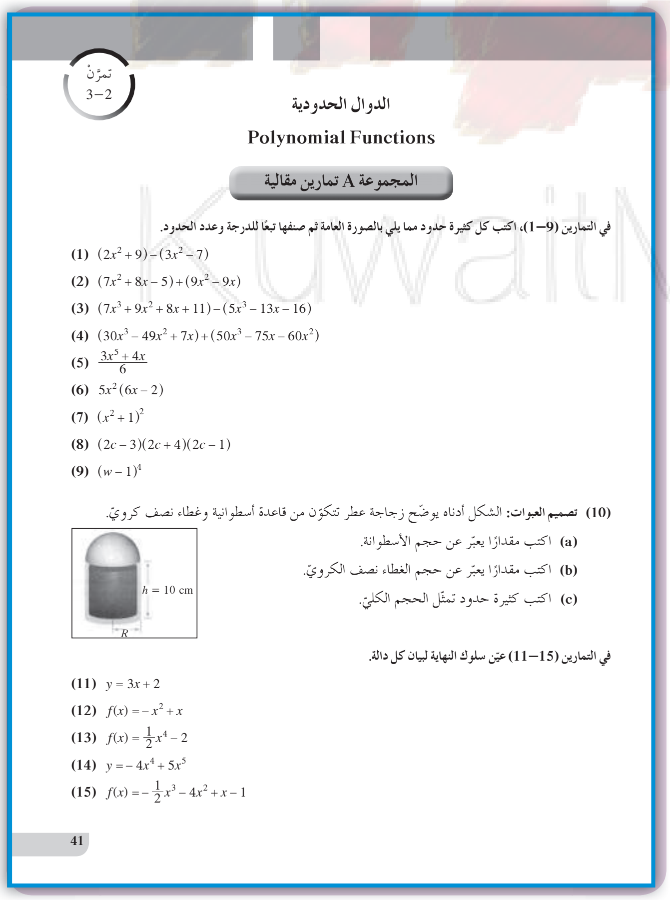
دالة كثيرة حدود

$P(x) = \boxed{2}x^3 - 5x^2 - 2x - 5$

المعامل الرئيسي – حد تكعيبي – حد تربيعي – حد خطي – حد ثابت

يحدد الأس في كل حد درجة الحد. الحدود في كثيرة الحدود الموضحة أعلاه مرتبة تنازليًا بحسب درجاتها. هذا الترتيب يسمى بالصورة العامة. في الصورة العامة تجمع كل الحدود المتشابهة. يمكنك أن تصف أو تصنف كثيرة الحدود في الصورة العامة بعدد الحدود التي تحتويها أو بأعلى درجة لها.

97


تمرّن 3–2

الدوال الحدودية

Polynomial Functions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–9)، اكتب كل كثيرة حدود مما يلي بالصورة العامة ثم صنفها تبعًا للدرجة وعدد الحدود.

(1) $(2x^2+9)-(3x^2-7)$

(2) $(7x^2+8x-5)+(9x^2-9x)$

(3) $(7x^3+9x^2+8x+11)-(5x^3-13x-16)$

(4) $(30x^3-49x^2+7x)+(50x^3-75x-60x^2)$

(5) $\frac{3x^5+4x}{6}$

(6) $5x^2(6x-2)$

(7) $(x^2+1)^2$

(8) $(2c-3)(2c+4)(2c-1)$

(9) $(w-1)^4$

(10) تصميم العبوات: الشكل أدناه يوضح زجاجة عطر تتكوّن من قاعدة أسطوانية وغطاء نصف كروي.

(a) اكتب مقدارًا يعبّر عن حجم الأسطوانة.

(b) اكتب مقدارًا يعبّر عن حجم الغطاء نصف الكروي.

(c) اكتب كثيرة حدود تمثّل الحجم الكلي.

$h = 10$ cm

R

في التمارين (11–15) عيّن سلوك النهاية لبيان كل دالة.

(11) $y = 3x + 2$

(12) $f(x) = -x^2 + x$

(13) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2$

(14) $y = -4x^4 + 5x^5$

(15) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + x - 1$

41

في المثال (1)

يساعد هذا المثال الطلاب على كتابة كل كثيرة حدود بالصورة العامة لإيجاد درجتها، وكتابة اسمها باستخدام عدد حدودها. ركز انتباه الطلاب على اسم كثيرة الحدود باستخدام درجتها. أخبرهم أنه يوجد كثيرة حدود ثابتة حيث درجتها الصفر وكثيرة حدود خطية درجتها واحد وكثيرة حدود تربيعية درجتها اثنان وكثيرة حدود تكعيبية ودرجتها ثلاثة. وضح لهم أنه من الدرجة الرابعة وما فوق نقول حدودية من الدرجة الرابعة أو حدودية من الدرجة الخامسة....

ألفت انتباه الطلاب إلى الفرق بين عدد الحدود ودرجة كثيرة الحدود لتفادي الالتباس.

الحدودية	الدرجة	الاسم باستخدام الدرجة	عدد الحدود	الاسم باستخدام عدد الحدود
6	الصفرية	ثابتة	1	أحادية
$x + 3$	الأولى	خطية	2	ثنائية
$3x^2 + 5x - 2$	الثانية	تربيعية	3	ثلاثية
$2x^3 - 5x^2$	الثالثة	تكعيبية	2	ثنائية
$-x^4 + x^3 - 1$	الرابعة	ذات القوة الرابعة	3	ثلاثية

مثال (1)

اكتب كل كثيرة حدود بالصورة العامة ثم صنفها تبعًا للدرجة وعدد الحدود.

a $-7x + 5x^4$ b $5x^3 - (4x^2 + 5x^3) + 2x^2$ c $(2l - 5)(l^2 - 1)$

الحل:

a $-7x + 5x^4 = 5x^4 - 7x$

الحد الذي له أكبر درجة هو $5x^4$

$\therefore$ حدودية من الدرجة الرابعة.

لها حدان $\therefore$ ثنائية.

b $5x^3 - (4x^2 + 5x^3) + 2x^2$

$= 5x^3 - 4x^2 - 5x^3 + 2x^2$

$= -2x^2$

الحد الذي له أكبر درجة هو $-2x^2$

$\therefore$ حدودية من الدرجة الثانية.

لها حد واحد $\therefore$ أحادية.

c $(2l - 5)(l^2 - 1)$

$= 2l^3 - 2l - 5l^2 + 5$

$= 2l^3 - 5l^2 - 2l + 5$

الحد الذي له أكبر درجة هو $2l^3$

$\therefore$ حدودية من الدرجة الثالثة.

لها أربعة حدود $\therefore$ رباعية.

ملاحظة:
إذا كانت الدالة الحدودية من الدرجة n فإن لها على الأكثر $(n + 1)$ حدًّا.

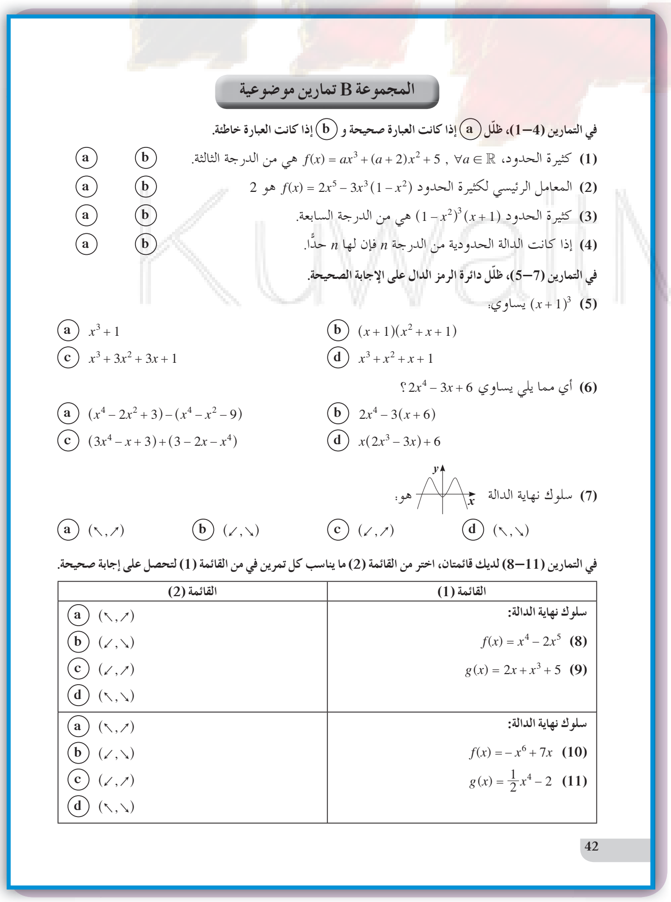
98

في «نشاط إثرائي»

يوفر هذا النشاط فرصة أمام الطلاب لنمذجة بيانات واقعية بدالة كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة حيث إن هذه البيانات تتضمن خمس قيم. وبالتالي يمكن توقع نتائج معقولة تعبر عن تطور إنتاج الذهب في العالم خلال أي سنة.

في المثال (2)

ركز مع الطلاب على مفهوم سلوك النهاية انطلاقًا من درجة كل دالة كثيرة الحدود واستنادًا إلى إشارة المعامل الرئيسي في كل دالة. هذا المفهوم سيساعد الطلاب لاحقًا على تصحيح أخطاء الرسم البياني.



المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) كثيرة الحدود، $f(x) = ax^3 + (a+2)x^2 + 5 \ , \ \forall a \in \mathbb{R}$ هي من الدرجة الثالثة. (a) (b)

(2) المعامل الرئيسي لكثيرة الحدود $f(x) = 2x^5 - 3x^3(1 - x^2)$ هو 2 (a) (b)

(3) كثيرة الحدود $(1 - x^2)^3(x + 1)$ هي من الدرجة السابعة. (a) (b)

(4) إذا كانت الدالة الحدودية من الدرجة n فإن لها n حدًّا. (a) (b)

في التمارين (5—7)، ظلّل دائرة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) $(x + 1)^3$ يساوي:

(a) $x^3 + 1$ (b) $(x+1)(x^2+x+1)$
(c) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ (d) $x^3 + x^2 + x + 1$

(6) أي مما يلي يساوي $2x^4 - 3x + 6$ ؟

(a) $(x^4 - 2x^2 + 3) - (x^4 - x^2 - 9)$ (b) $2x^4 - 3(x + 6)$
(c) $(3x^4 - x + 3) + (3 - 2x - x^4)$ (d) $x(2x^3 - 3x) + 6$

(7) سلوك نهاية الدالة هو:

(a) $(\nwarrow, \nearrow)$ (b) $(\swarrow, \searrow)$ (c) $(\swarrow, \nearrow)$ (d) $(\nwarrow, \searrow)$

في التمارين (8—11) لديك قائمتان، اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في من القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

القائمة (1)	القائمة (2)
سلوك نهاية الدالة: (8) $f(x) = x^4 - 2x^5$ (9) $g(x) = 2x + x^3 + 5$	(a) $(\nwarrow, \nearrow)$ (b) $(\swarrow, \searrow)$ (c) $(\swarrow, \nearrow)$ (d) $(\nwarrow, \searrow)$
سلوك نهاية الدالة: (10) $f(x) = -x^6 + 7x$ (11) $g(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2$	(a) $(\nwarrow, \nearrow)$ (b) $(\swarrow, \searrow)$ (c) $(\swarrow, \nearrow)$ (d) $(\nwarrow, \searrow)$

42

6 الربط

يربط النشاط الإثرائي بيانات من الحياة الواقعية بنموذج من الدوال الحدودية.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تحديد سلوك النهاية لبيان دالة كثيرة الحدود. ساعدهم على فهم سلوك النهاية بالترابط مع درجة الدالة وإشارة المعامل الرئيسي لهذه الدالة، من حيث كونها موجبة أو سالبة.

8 التقييم

لاحظ الطلاب أثناء إجابتهم عن فقرات «حاول أن تحل» لتكوّن فكرة واضحة عن مدى فهمهم لما ورد في هذا الدرس.

حاول أن تحل

1 اكتب كل كثيرة حدود بالصورة العامة ثم صنفها تبعاً للدرجة وعدد الحدود.

(a) $4x - 6x + 5$ (b) $3x^3 + x^2 - (4x + 2x^3)$ (c) $6 - 2x^5$

لقد استخدمت سابقًا الخطوط المستقيمة والمنحنيات لتمثيل البيانات.

يمكنك أحيانًا إحكام تمثيل البيانات باستخدام كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة أو أكثر.

نشاط إثرائي (الربط بالحياة)

يبيّن الجدول أدناه إنتاج العالم من الذهب لعدة سنوات. أوجد كثيرة حدود من الدرجة الرابعة لنمذجة البيانات، ثم استخدمها لتقدير الإنتاج العالمي من الذهب سنة 1988.

السنة	1975	1980	1985	1990	1995	2000
الإنتاج مليون أونصة	38.5	39.2	49.3	70.2	71.6	82.6

الحل:

استخدم آلة حاسبة بيانية.

أدخل البيانات. ليكن 0 يمثل 1975.

استخدم نموذجًا من الدرجة الرابعة.

ارسم بيانيًّا نموذج كثيرة الحدود:

$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + ... + a_0$

$a_4 = 9.0333333 \times 10^{-4}$

$a_3 = -0.0519296296$

$a_2 = 0.9590277778$

$a_1 = -3.898753421$

$a_0 = 38.85753968$

يظهر على شاشة الآلة الحاسبة

المعادلة: $f(x) = 0.0009033x^4 - 0.05193x^3 + 0.959x^2 - 3.899x + 38.86$

هي نموذج تقديري من الدرجة الرابعة.

لتقدير قيمة إنتاج الذهب سنة 1988 نستخدم جدول القيم.

$f(13) \approx 61.96$

استنادًا لهذا النموذج، يقدر إنتاج الذهب سنة 1988 بحوالى 62 مليون أونصة.

• استخدم كثيرة الحدود في هذا النشاط لتقدير إنتاج الذهب سنة 1997.

جدول القيم

x	y
8	46.157
9	49.519
10	52.875
11	56.12
12	59.168
13	61.959

معلومة: يبلغ وزن أونصة الذهب once (oz) 28.349 g أي حوالى 28.35 g.

ملاحظة: يجب اختيار آلة حاسبة لها هذه الخاصية وتتغير طريقة البرمجة من آلة إلى أخرى.

ملاحظة: يمثل العدد 13 سنة 1988.

99

اختبار سريع

1 اكتب كثيرة الحدود بالصورة العامة، وصنفها من حيث الدرجة وعدد الحدود

$2x(3x-5) + x^3 - 4x^2 + 2$

$6x^2 - 10x + x^3 - 4x^2 + 2 = x^3 + 2x^2 - 10x + 2$

من الدرجة الثالثة، رباعية الحدود.

2 عيّن سلوك النهاية:

(a) $f(x) = -x^4 + 4x^2 + 5$

المعامل الرئيسي $= -1$ سالب. سلوك النهاية لجهة اليمين هو إلى أسفل. درجة كثيرة الحدود $= 4$ زوجية. سلوك النهاية لجهة اليسار مشابه لليمين، لذا سلوك النهاية: $(\swarrow, \searrow)$.

(b) $f(x) = x^5 + 3x^2 - 2$

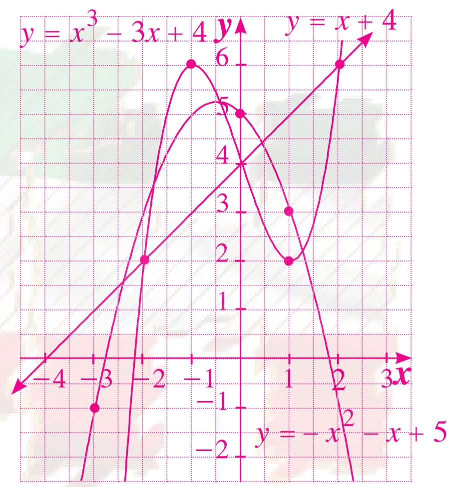
المعامل الرئيسي $= 1$ موجب. سلوك النهاية لجهة اليمين هو إلى أعلى. درجة كثيرة الحدود $= 5$ فردية. سلوك النهاية لجهة اليسار معاكس لليمين، لذا سلوك النهاية: $(\swarrow, \nearrow)$.

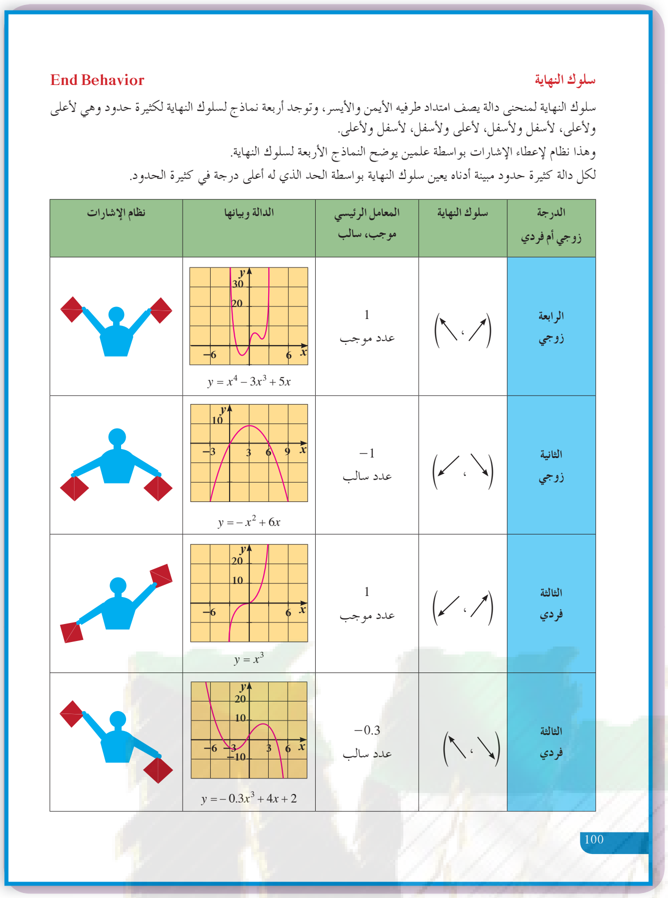
خلفية علمية

استخدم آلة حاسبة بيانية لتحدد أفضلية التمثيل بين النموذج الخطي والنموذج التربيعي والنموذج التكعيبي للبيانات في الجدول التالي:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	-1	2	6	5	2	6

أدخل البيانات إلى الآلة الحاسبة البيانية، ثم قارن بين البيانات التي تحصل عليها، تجد النموذج التكعيبي هو الأفضل، لأنك تلاحظ أن النموذج الخطي يمر بنقطتين فقط، وأن النموذج التربيعي يمر بثلاث نقاط، ولكن النموذج التكعيبي يمر بأربع نقاط.





سلوك النهاية **End Behavior**

سلوك النهاية لمنحنى دالة يصف امتداد طرفيه الأيمن والأيسر، وتوجد أربعة نماذج لسلوك النهاية لكثيرة حدود وهي لأعلى ولأعلى، لأسفل ولأسفل، لأعلى ولأسفل، لأسفل ولأعلى.

وهذا نظام لإعطاء الإشارات بواسطة علمين يوضح النماذج الأربعة لسلوك النهاية.

لكل دالة كثيرة حدود مبينة أدناه يعين سلوك النهاية بواسطة الحد الذي له أعلى درجة في كثيرة الحدود.

الدرجة زوجي أم فردي	سلوك النهاية	المعامل الرئيسي موجب، سالب	الدالة وبيانها	نظام الإشارات
الرابعة زوجي	$(\nwarrow , \nearrow)$	1 عدد موجب	$y = x^4 - 3x^3 + 5x$	
الثانية زوجي	$(\swarrow , \searrow)$	-1 عدد سالب	$y = -x^2 + 6x$	
الثالثة فردي	$(\swarrow , \nearrow)$	1 عدد موجب	$y = x^3$	
الثالثة فردي	$(\nwarrow , \searrow)$	-0.3 عدد سالب	$y = -0.3x^3 + 4x + 2$	

100

9 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

تحقق من إجابات الطلاب، وناقشهم في كل ما يتوصلون إليه من إجابات، ثم شجعهم على التعاون مع بعضهم بعضًا.

«حاول أن تحل»

1 **(a)** $-2x + 5$

من الدرجة الأولى، ثنائية الحدود.

(b) $x^3 + x^2 - 4x$

من الدرجة الثالثة، ثلاثية الحدود.

(c) $-2x^5 + 6$

من الدرجة الخامسة، ثنائية الحدود.


مثال (2)

وضّح سلوك النهاية لبيان كل دالة كثيرة الحدود.

(a) $y = 4x^3 - 3x$

(b) $f(x) = -2x^4 + 8x^3 - 8x^2$

(c) $g(x) = x^2 - 4x + 3$

(d) $h(x) = -x^3 + 2x + 2$

الحل:

(a) المعامل الرئيسي 4 (عدد موجب)

∴ سلوك النهاية جهة اليمين هو لأعلى.

∵ كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة (فردي).

∴ سلوك النهاية جهة اليسار معاكس لسلوك النهاية جهة اليمين أي لأسفل.

∴ سلوك النهاية هو (↗، ↙).

(b) المعامل الرئيسي 2− (عدد سالب)

∴ سلوك النهاية جهة اليمين هو لأسفل.

∵ كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة (زوجي).

∴ سلوك النهاية جهة اليسار هو نفسه سلوك النهاية جهة اليمين أي لأسفل.

∴ سلوك النهاية هو (↘، ↙).

(c) المعامل الرئيسي 1 (عدد موجب)

∴ سلوك النهاية جهة اليمين هو لأعلى.

∵ كثيرة الحدود من الدرجة الثانية (زوجي).

∴ سلوك النهاية جهة اليسار هو نفسه سلوك النهاية جهة اليمين أي لأعلى.

∴ سلوك النهاية هو (↗، ↖).

(d) المعامل الرئيسي 1− (عدد سالب)

∴ سلوك النهاية جهة اليمين هو لأسفل.

∵ كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة (فردي).

∴ سلوك النهاية جهة اليسار معاكس لسلوك النهاية جهة اليمين أي لأعلى.

∴ سلوك النهاية هو (↘، ↖).

حاول أن تحل

2 وضّح سلوك النهاية لبيان كل دالة كثيرة الحدود.

(a) $y = -x^3 + 2x^2 + 6$

(b) $y = 4x^4 - 3x$

(c) $f(x) = 2x^3 - x$

(d) $h(x) = x - x^4$

101

2 (a) كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة (فردي)

المعامل الرئيسي = -1 (سالب)

سلوك النهاية جهة اليمين لأسفل، سلوك النهاية جهة اليسار معاكس لجهة اليمين.

∴ سلوك النهاية هو: (↖, ↘)

(b) المعامل الرئيسي = $+4$ (موجب)

درجة كثيرة الحدود = 4 (زوجي)

سلوك النهاية جهة اليمين لأعلى سلوك النهاية جهة اليسار مشابه لجهة اليمين.

∴ سلوك النهاية هو: (↖, ↗)

(c) كثيرة حدود من الثالثة (فردي)

المعامل الرئيسي = 2 (موجب)

سلوك النهاية جهة اليمين لأعلى، وسلوك النهاية جهة اليسار معاكس لجهة اليمين.

∴ سلوك النهاية هو: (↙, ↗)

(d) كثيرة حدود من الدرجة الرابعة (زوجي)

المعامل الرئيسي = -1 (سالب)

سلوك النهاية جهة اليمين لأسفل، سلوك النهاية جهة اليسار مشابه لجهة اليمين.

∴ سلوك النهاية هو: (↙, ↘)

«نشاط إثرائي» (الربط بالحياة)

نوجد: $f(22) = 0.0009033(22)^4 - 0.0519(22)^3$

$+0.959(22)^2 - 3.899(22) + 38.86$

ومنه (مليون أونصة) $f(22) \approx 76$

3–3: العوامل الخطية لكثيرات الحدود

1 الأهداف

- يحلل كثيرة الحدود إلى عوامل.
- يكتب دالة كثيرة الحدود باستخدام أصفارها.
- يربط بين الأصفار والعوامل.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

عوامل دالة حدودية – أصفار دالة حدودية – القيمة العظمى – نظرية العامل.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة بيانية – ورق رسم بياني – جهاز إسقاط (Data show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) ارسم بيان الدالة التالية:

$$y = x^2 + 4x + 3$$

(b) حدّد سلوك النهاية لكل دالة مما يلي:

(1) $y = -x^2 + 3x - 5$

(2) $y = -x^3 + 4x^2 + 2$

(3) $y = x^3 + 4x - 1$

(4) $y = x^4 - 4x^2 + 3$

3–3

العوامل الخطية لكثيرات الحدود

Linear Factors of Polynomials

سوف تتعلم
- تحليل كثيرة الحدود إلى عوامل.
- كتابة دالة كثيرة الحدود باستخدام أصفارها.
- الربط بين الأصفار والعوامل.

المفردات والمصطلحات:
- القيمة العظمى Maximum Value
- عوامل دالة حدودية Factors of a Polynomial Function
- أصفار دالة حدودية Zeros of a Polynomial Function
- نظرية العامل Factor Theorem

دعا نفكر ونتناقش

كثيرة الحدود في صورة عوامل

من المفيد أحيانًا التعامل مع كثيرات الحدود في صورة عوامل.

فمثلًا عوامل كثيرة الحدود: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ هي:

$(x-1)$, $(x+2)$,$(x-3)$

1 كيف يمكنك التحقق من أن: $(x-3)$, $(x+2)$, $(x-1)$، هي عوامل لكثيرة الحدود: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$؟

2 ما العلاقة بين كل حد ثابت لعوامل كثيرة الحدود وعوامل الحد الثابت 6؟

عندما نحلل كثيرة الحدود إلى عوامل خطية فلا يمكن القيام بتحليلات أخرى لإيجاد عوامل إضافية.

مثال (1)

اكتب التعبير: $(x+1)(x+2)(x+5)$ في شكل كثيرة حدود في الصورة العامة.

الحل:

اضرب $(x+2)$، $(x+5)$ $\quad (x+1)(x+2)(x+5) = (x+1)(x^2+5x+2x+10)$

بسّط $\quad = (x+1)(x^2+7x+10)$

اضرب $\quad = x^3+7x^2+10x+x^2+7x+10$

بسّط $\quad = x^3+8x^2+17x+10$

الصورة العامة للتعبير $(x+1)(x+2)(x+5)$ هي $x^3+8x^2+17x+10$

حاول أن تحل

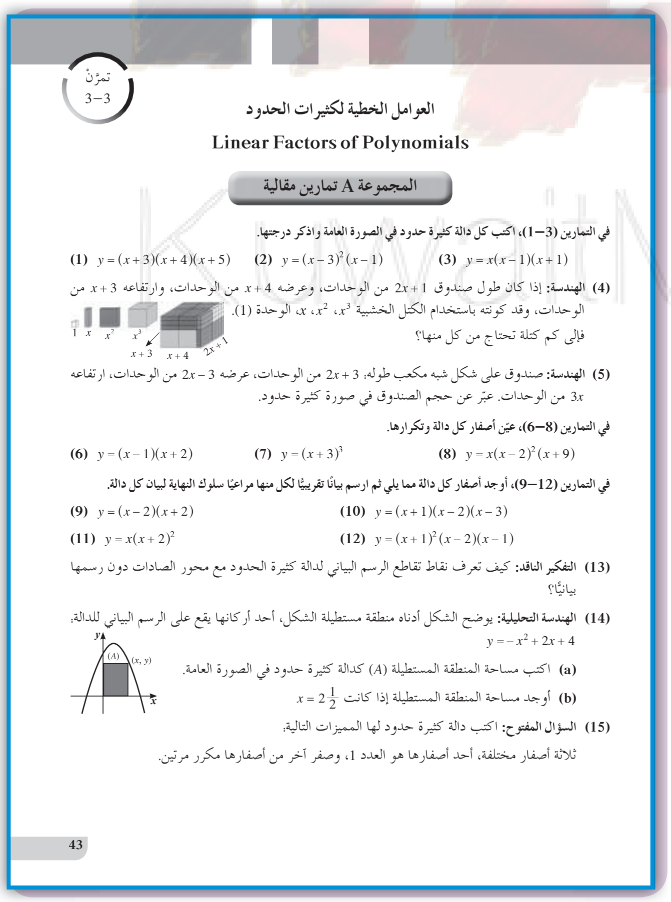
1 اكتب التعبير: $(x+1)(x+1)(x-2)$ في شكل كثيرة حدود في الصورة العامة.

معلومة:

عندما نقول عوامل العدد فإننا نعني بها العوامل الموجبة والعوامل السالبة لهذا العدد.

فمثلًا: عوامل العدد 6 هي: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

102



تمرَّنْ 3–3

العوامل الخطية لكثيرات الحدود

Linear Factors of Polynomials

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (3–1)، اكتب كل دالة كثيرة حدود في الصورة العامة واذكر درجتها.

(1) $y = (x+3)(x+4)(x+5)$ (2) $y = (x-3)^2(x-1)$ (3) $y = x(x-1)(x+1)$

(4) الهندسة: إذا كان طول صندوق $2x+1$ من الوحدات، وعرضه $x+4$ من الوحدات، وارتفاعه $x+3$ من الوحدات، وقد كونته باستخدام الكتل الخشبية x^3، x^2، x، الوحدة (1). فإلى كم كتلة تحتاج من كل منها؟

(5) الهندسة: صندوق على شكل شبه مكعب طوله: $2x+3$ من الوحدات، عرضه $2x-3$ من الوحدات، ارتفاعه $3x$ من الوحدات. عبّر عن حجم الصندوق في صورة كثيرة حدود.

في التمارين (8–6)، عيّن أصفار كل دالة وتكرارها.

(6) $y = (x-1)(x+2)$ (7) $y = (x+3)^3$ (8) $y = x(x-2)^2(x+9)$

في التمارين (12–9)، أوجد أصفار كل دالة مما يلي ثم ارسم بيانًا تقريبيًّا لكل منها مراعيًا سلوك النهاية لبيان كل دالة.

(9) $y = (x-2)(x+2)$ (10) $y = (x+1)(x-2)(x-3)$

(11) $y = x(x+2)^2$ (12) $y = (x+1)^2(x-2)(x-1)$

(13) التفكير الناقد: كيف تعرف نقاط تقاطع الرسم البياني لدالة كثيرة الحدود مع محور الصادات دون رسمها بيانيًّا؟

(14) الهندسة التحليلية: يوضح الشكل أدناه منطقة مستطيلة الشكل، أحد أركانها يقع على الرسم البياني للدالة: $y = -x^2 + 2x + 4$

(a) اكتب مساحة المنطقة المستطيلة (A) كدالة كثيرة حدود في الصورة العامة.

(b) أوجد مساحة المنطقة المستطيلة إذا كانت $x = 2\frac{1}{2}$

(15) السؤال المفتوح: اكتب دالة كثيرة حدود لها المميزات التالية:

ثلاثة أصفار مختلفة، أحد أصفارها هو العدد 1، وصفر آخر من أصفارها مكرر مرتين.

43

5 التدريس

يوفر هذا الدرس فرصة أمام الطلاب لتبيان العلاقة بين الصورة العامة لدالة كثيرة الحدود وتحليلها إلى عوامل خطية، مما يساعد كثيرًا على إيجاد الحلول الجبرية لمعادلات كثيرات الحدود، كما أنه يركز على العلاقة بين الحلول الجبرية والحلول البيانية لكثيرات الحدود من درجات مختلفة.

في المثالين (1), (2)

ينمذجان العلاقة بين الصورة التحليلية إلى عوامل والصورة العامة وبالعكس. فنرى أنه بتفكيك الصورة التحليلية نحصل على الصورة العامة، كما أن تحليل الصورة العامة يعطينا الصورة التحليلية إلى عوامل خطية.

في المثال (3)

ينمذج حالة واقعية إلى دالة كثيرة الحدود يستخدم فيها الصورة التحليلية والرسم البياني لإيجاد قيمة عظمى لحجم علبة ضمن شروط محددة.

في المثال (4)

يساعد الطالب على إيجاد أصفار الدالة وتكوين جدول قيم لرسم منحنى تقريبي لدالة كثيرة الحدود مراعيًا سلوك النهاية، وذلك من دون استخدام الآلة الحاسبة.

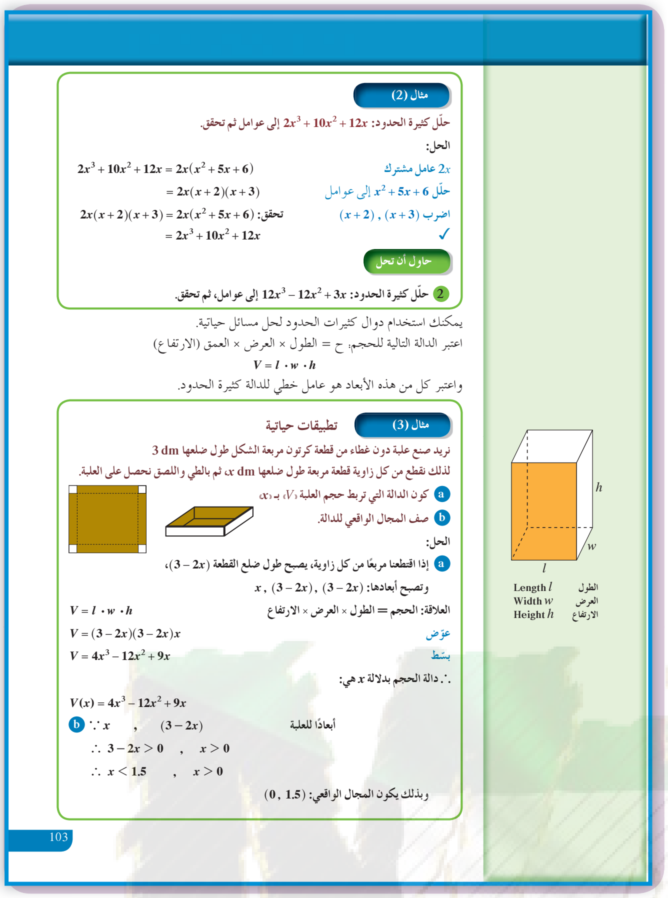
في المثال (5)

وضح للطلاب كيفية كتابة العوامل الخطية لدالة كثيرة الحدود إذا عرفت أصفارها.

أخبرهم أن $x = a$ هي أحد أصفار الدالة، فإن $(x - a)$ هو عامل خطي لهذه الدالة.

6 الربط

يوفر المثال (3) فرصة أمام الطلاب لربط حالة حياتية بدالة كثيرة الحدود، لإيجاد نتائج محددة لا يمكن الحصول عليها إلا برسم منحنى الدالة.



مثال (2)

حلّل كثيرة الحدود: $2x^3 + 10x^2 + 12x$ إلى عوامل ثم تحقق.

الحل:

$2x$ عامل مشترك: $2x^3 + 10x^2 + 12x = 2x(x^2 + 5x + 6)$

حلّل $x^2 + 5x + 6$ إلى عوامل: $= 2x(x + 2)(x + 3)$

اضرب $(x + 3)$, $(x + 2)$ تحقق: $2x(x + 2)(x + 3) = 2x(x^2 + 5x + 6)$

✓ $= 2x^3 + 10x^2 + 12x$

حاول أن تحل

2 حلّل كثيرة الحدود: $12x^3 - 12x^2 + 3x$ إلى عوامل، ثم تحقق.

يمكنك استخدام دوال كثيرات الحدود لحل مسائل حياتية.

اعتبر الدالة التالية للحجم: ح = الطول × العرض × العمق (الارتفاع)

$$V = l \cdot w \cdot h$$

واعتبر كل من هذه الأبعاد هو عامل خطي للدالة كثيرة الحدود.

مثال (3) تطبيقات حياتية

نريد صنع علبة دون غطاء من قطعة كرتون مربعة الشكل طول ضلعها 3 dm لذلك نقطع من كل زاوية قطعة مربعة طول ضلعها x dm، ثم بالطي واللصق نحصل على العلبة.

a كون الدالة التي تربط حجم العلبة «V» بـ «x».

b صف المجال الواقعي للدالة.

الحل:

a إذا اقتطعنا مربعًا من كل زاوية، يصبح طول ضلع القطعة $(3 - 2x)$،

وتصبح أبعادها: x , $(3 - 2x)$, $(3 - 2x)$

العلاقة: الحجم = الطول × العرض × الارتفاع: $V = l \cdot w \cdot h$

عوّض: $V = (3 - 2x)(3 - 2x)x$

بسّط: $V = 4x^3 - 12x^2 + 9x$

∴ دالة الحجم بدلالة x هي:

$V(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$

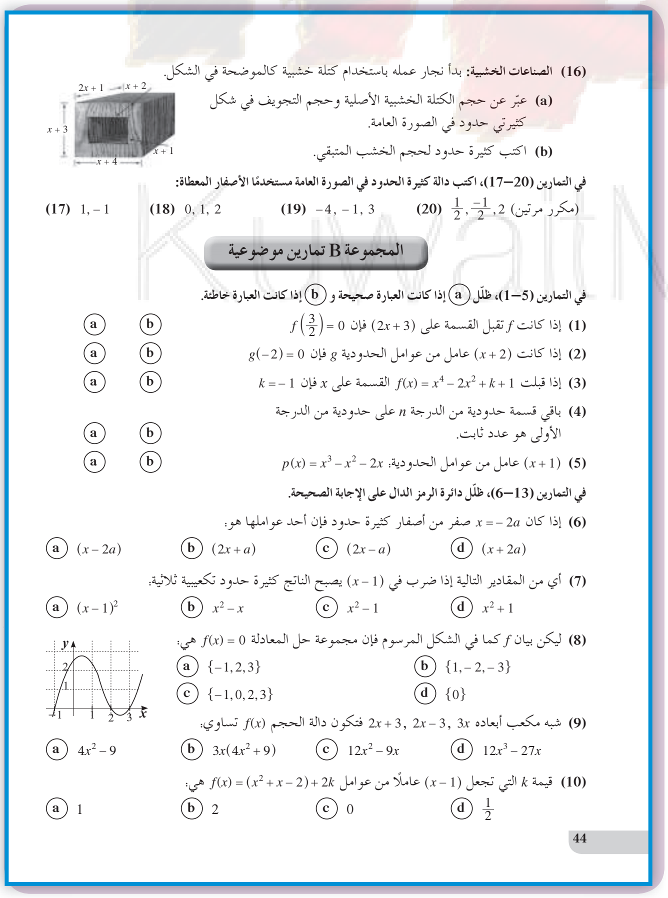
b ∵ x , $(3 - 2x)$ أبعادًا للعلبة

∴ $3 - 2x > 0$, $x > 0$

∴ $x < 1.5$, $x > 0$

وبذلك يكون المجال الواقعي: $(0 , 1.5)$

103



(16) الصناعات الخشبية: بدأ نجار عمله باستخدام كتلة خشبية كالموضحة في الشكل.

(a) عبّر عن حجم الكتلة الخشبية الأصلية وحجم التجويف في شكل كثيرتي حدود في الصورة العامة.

(b) اكتب كثيرة حدود لحجم الخشب المتبقي.

في التمارين (20—17)، اكتب دالة كثيرة الحدود في الصورة العامة مستخدمًا الأصفار المعطاة:

(17) $1, -1$ (18) $0, 1, 2$ (19) $-4, -1, 3$ (20) $\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 2$ (مكرر مرتين)

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت f تقبل القسمة على $(2x + 3)$ فإن $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ (a) (b)

(2) إذا كانت $(x + 2)$ عامل من عوامل الحدودية g فإن $g(-2) = 0$ (a) (b)

(3) إذا قبلت $f(x) = x^4 - 2x^2 + k + 1$ القسمة على x فإن $k = -1$ (a) (b)

(4) باقي قسمة حدودية من الدرجة n على حدودية من الدرجة الأولى هو عدد ثابت. (a) (b)

(5) $(x + 1)$ عامل من عوامل الحدودية: $p(x) = x^3 - x^2 - 2x$ (a) (b)

في التمارين (13—6)، ظلّل دائرة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان $x = -2a$ صفر من أصفار كثيرة حدود فإن أحد عواملها هو:

(a) $(x - 2a)$ (b) $(2x + a)$ (c) $(2x - a)$ (d) $(x + 2a)$

(7) أي من المقادير التالية إذا ضرب في $(x - 1)$ يصبح الناتج كثيرة حدود تكعيبية ثلاثية:

(a) $(x - 1)^2$ (b) $x^2 - x$ (c) $x^2 - 1$ (d) $x^2 + 1$

(8) ليكن بيان f كما في الشكل المرسوم فإن مجموعة حل المعادلة $f(x) = 0$ هي:

(a) $\{-1, 2, 3\}$ (b) $\{1, -2, -3\}$ (c) $\{-1, 0, 2, 3\}$ (d) $\{0\}$

(9) شبه مكعب أبعاده $2x + 3$, $2x - 3$, $3x$ فتكون دالة الحجم $f(x)$ تساوي:

(a) $4x^2 - 9$ (b) $3x(4x^2 + 9)$ (c) $12x^2 - 9x$ (d) $12x^3 - 27x$

(10) قيمة k التي تجعل $(x - 1)$ عاملًا من عوامل $f(x) = (x^2 + x - 2) + 2k$ هي:

(a) 1 (b) 2 (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

44

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطىء الطلاب في كتابة دالة كثيرة الحدود إذا عرفت أصفارها. اعرض أمامهم حالتين مثل: $x = 2$ أو $x = -3$ لتحديد العامل الخطي المقابل فيكون $(x - 2)$ هو عامل خطي، ثم $(x + 3)$ هو عامل خطي آخر. ركّز معهم على أن x أيضًا عامل خطي صفره الصفر.

8 التقييم

تساعد فقرات «حاول أن تحل» المعلم على تكوين فكرة واضحة عن إمكانيات طلابه في التعامل مع دالة كثيرة الحدود، عند تحليلها إلى عوامل خطية أو كتابتها بالصورة العامة.

اختبار سريع

1. اكتب: $(2x - 1)(-3x + 4)(x - 2)$ بالصورة العامة.

$-6x^3 + 23x^2 - 26x + 8$

2. حلل كثيرة الحدود: $-3x^3 + 27x$ إلى عوامل خطية.

$-3x(x - 3)(x + 3)$

3. اكتب دالة كثيرة الحدود حيث أصفارها: $4, -2, 3$ بالصورة العامة.

$f(x) = (x - 4)(x + 2)(x - 3) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

حاول أن تحل

3 قطعة خشب على شكل شبه مكعب طولها 12 cm وعرضها 8 cm وسماكتها x cm. اقتطع من إحدى زواياها مكعب طول حرفه x cm

a كوّن الدالة التي تربط حجم قطعة الخشب المتبقي بـ x

b صف المجال الواقعي للدالة.

الشكل المقابل يمثل بيان الدالة: $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$ من مثال (3)

ونلاحظ أن:

$x = 1.5$ هو صفر مكرر و $x = 0$ هو صفر بسيط

الأجزاء المقطوعة من محور السينات تسمى **أصفار الدالة**، لأن قيمة الدالة تساوي صفرًا عند هذه الأجزاء.

نستنتج أن القيمة العظمى للدالة على المجال $(0, 1.5)$ هي 2 عندما تكون $x = 0.5$.

أي أن القيمة العظمى لحجم العلبة هي $2\ dm^3$ عندما يكون ارتفاع العلبة 0.5 dm وطول ضلع القاعدة المربعة:

$3 - 2 \times (0.5) = 2\ dm$

عوامل وأصفار دالة كثيرة الحدود

Factors and Zeros of a Polynomial Function

إذا كانت دالة كثيرة الحدود في صورة العوامل، فإنه بإمكانك استخدام خاصية الضرب في الصفر لإيجاد القيم التي تجعل الدالة تساوي صفرًا.

مثال (4)

أوجد أصفار $y = (x - 2)(x + 1)(x + 3)$، ثم ارسم بيانًا تقريبيًا للدالة مراعيًا سلوك نهاية الدالة.

الحل:

باستخدام خاصية الضرب في الصفر، أوجد صفرًا لكل عامل خطي.

$x - 2 = 0$ أو $x + 1 = 0$ أو $x + 3 = 0$

$x = 2$ $x = -1$ $x = -3$

$\therefore$ أصفار الدالة هي: $2, -1, -3$

مراجعة سريعة:

تنص خاصية الضرب في الصفر على أنه عندما يساوي ناتج الضرب صفرًا، فإن أحد العوامل على الأقل يجب أن يساوي صفرًا.

104

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1 – 2 تحقق من إجابات الطلاب.

«حاول أن تحل»

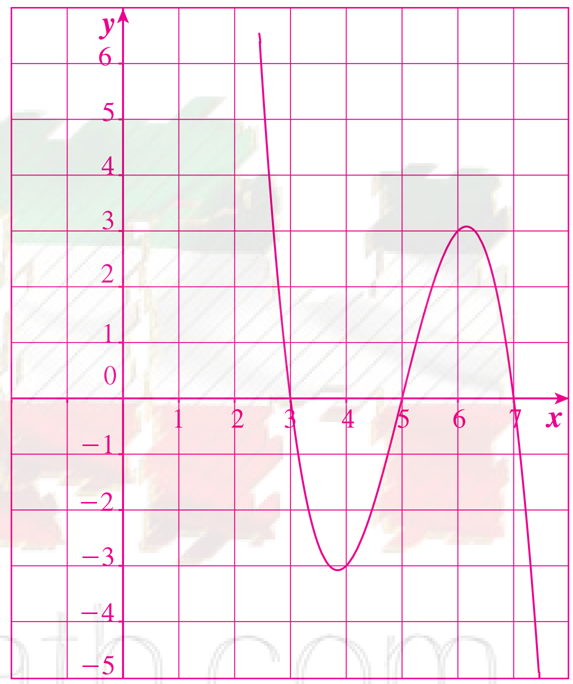
1 $x^3 - 3x - 2$

2 $3x(2x-1)^2$

3 **(a)** $V(x) = 96x - x^3$

(b) $0 < x < 8$

4 $x = 3$ أو $x = 5$ أو $x = 7$



لرسم بيان تقريبي للدالة:

أصفار الدالة هي: $-3, -1, 2$

سلوك النهاية:

∵ المعامل الرئيسي موجب (لماذا؟)

∴ سلوك النهاية جهة اليمين لأعلى

∵ الحدودية من الدرجة الثالثة (لماذا؟)

∴ سلوك النهاية جهة اليسار معاكس لسلوك النهاية جهة اليمين (لأسفل).

∴ سلوك النهاية (↗، ↙).

نكوّن الجدول:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-18	0	4	0	-6	-8	0	24

$y = (x-2)(x+1)(x+3)$

حاول أن تحل

4 أوجد أصفار الدالة $y = (x-7)(x-5)(3-x)$، ثم ارسم بيانًا تقريبيًّا للدالة مراعيًا سلوك نهاية الدالة.

معلومة: كلما أوجدنا نقاطًا أكثر تنتمي إلى بيان الدالة يكون الرسم أكثر دقة.

يمكنك عكس هذه العمليات وكتابة العوامل الخطية عندما تعلم أصفار الدالة.

تسمى هذه العلاقة **بنظرية العامل**.

نظرية العامل

المقدار $(x-a)$ هو عامل خطي لكثيرة الحدود $\Longleftrightarrow$ a صفر من أصفار كثيرة الحدود.

معلومة: الرمز $\Longleftrightarrow$ يقرأ إذا وفقط إذا

ويعني أنه إذا كان $(x-a)$ عاملًا خطيًّا لكثيرة الحدود فإن a صفر من أصفار دالة كثيرة الحدود والعكس صحيح.

فمثلًا $(x-5)$ عامل خطي لكثيرة الحدود $\Longleftrightarrow$ 5 صفر لها.

أي أنه إذا كان $(x-5)$ عاملًا خطيًّا لكثيرة الحدود فإن 5 صفر لها والعكس صحيح.

وكذلك $(x+3)$ عاملًا خطيًّا لكثيرة الحدود $\Longleftrightarrow$ -3 صفر لها.

105

5 **(a)** $f(x) = (x+4)(x+2)(x-1)$

$f(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8$

(b) $f(x) = x(x+4)(x+2)$

$f(x) = x^3 + 6x^2 + 8x$

(c) $f(x) = (x-3)^2(x+1)$

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$

(d) يمكن ضرب العامل x في الدالة الحدودية بعدد ثابت لا يساوي الصفر: $f(x) = x(x+4)(x+2)$ ، علمًا أن الصفر مضروبًا بأي عدد حقيقي يكون الناتج صفرًا.

(e) لا، إذا ضربت $f(x)$ بـ k حيث $k \neq 0$ نحصل على دالة جديدة لها أصفار $f(x)$ نفسها.

مثال (5)

اكتب دالة كثيرة حدود حيث أصفارها: 3 , 3 , 2− في الصورة العامة.

الحل:

∵ أصفار الدالة هي:

$-2 \quad , \quad 3 \quad , \quad 3$

∴ عوامل كثيرة الحدود هي: $(x-3)$, $(x-3)$, $(x-(-2))$

$f(x) = (x+2)(x-3)(x-3)$

$= (x+2)(x^2-6x+9)$ اضرب $(x-3)(x-3)$

$= x(x^2-6x+9)+2(x^2-6x+9)$ خاصية التوزيع

$= x^3-6x^2+9x+2x^2-12x+18$

$= x^3-4x^2-3x+18$ بسّط

∴ الدالة هي:

$f(x) = x^3-4x^2-3x+18$

معلومة:

عندما يكرر عامل خطي في كثيرة الحدود، فإن صفر الدالة يكرر أيضًا ويسمى في هذه الحالة «صفر مكرر».

حاول أن تحل

5 (a) اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة حيث أصفارها: 1 , 2− , 4−

(b) اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة حيث أصفارها: 0 , 2− , 4−

(c) اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة حيث 3 صفر مكرر مرتين و 1− صفر بسيط.

(d) التفكير الناقد: اشرح لماذا الصفر عند 0 في (b) يعطي أكثر من إمكانية واحدة للإجابة.

(e) هل كل دالة من الدوال التي حصلت عليها من (b) , (a) وحيدة؟ فسر إجابتك.

نلاحظ مما سبق أن لنظرية العامل أربعة مفاهيم مرتبطة بكثيرة الحدود.

وهذه الأفكار متكافئة، بمعنى أنك إذا علمت إحداها، فسوف تعلم الكل.

1 $(x=+1)$ حل للمعادلة: $x^2+3x-4=0$

2 $(+1)$ جزء مقطوع من محور السينات لمنحنى الدالة: $y=x^2+3x-4$

3 $(+1)$ صفر من أصفار الدالة: $y=x^2+3x-4$

4 $(x-1)$ عامل من عوامل كثيرة حدود: x^2+3x-4

(11) $f(x)=x^3-x$ تقبل القسمة على $x-k$ إذا كان k ينتمي إلى المجموعة:

(a) $\{0\}$ (b) $\{-1\}$ (c) $\{1\}$ (d) $\{0,-1,1\}$

(12) إذا كانت $f(x)$ تقبل القسمة على $(x-2)^2$ فإن:

(a) $x=2$ صفر من أصفار الدالة f

(b) $x=2$ صفر مكرر من أصفار الدالة f

(c) $x=-2$ صفر من أصفار الدالة f

(d) $x=-2$ صفر مكرر من أصفار الدالة f

(13) $x+m$ عامل من عوامل:

(a) $f(x)=x^2+m$

(b) $f(x)=x^3+mx$

(c) $f(x)=x^3+mx^2$

(d) $f(x)=x^2+m^2$

3–4: قسمة كثيرات الحدود

1 الأهداف

- يوجد ناتج قسمة كثيرات الحدود باستخدام القسمة المطولة.
- يوجد ناتج قسمة كثيرات الحدود باستخدام القسمة التركيبية.
- يوجد الباقي باستخدام نظرية الباقي.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

القسمة المطولة – القسمة التركيبية – ناتج القسمة – المقسوم – المقسوم عليه – نظرية الباقي – باقي القسمة.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – جهاز إسقاط (Data show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) اكتب $f(x)=(2x-3)(x+1)(x-4)$ بالصورة العامة، ثم أوجد $f(1), f(-1)$.

(b) اكتب أصفار المعادلة التالية:

$$(x+1)(2x+3)(3x-4)=0$$

(c) اكتب دالة كثيرة حدود أصفارها: $-1, 2, 3, -2$

3–4

سوف تتعلم
- قسمة كثيرات الحدود باستخدام القسمة المطولة.
- قسمة كثيرات الحدود باستخدام القسمة التركيبية.
- ايجاد الباقي باستخدام نظرية الباقي.

المفردات والمصطلحات:
- القسمة المطولة Long Division
- القسمة التركيبية Synthetic Division
- نظرية الباقي Remainder Theorem
- المقسوم Dividend
- المقسوم عليه Divisor
- ناتج القسمة Quotient
- باقي القسمة Remainder

قسمة كثيرات الحدود

Dividing Polynomials

دعنا نفكر ونتناقش

يمكن استخدام قسمة كثيرات الحدود للمساعدة على إيجاد أصفار دالة كثيرة الحدود. واعلم أن قسمة كثيرات الحدود مشابهة لقسمة الأعداد.

تذكر أنه عندما يكون الباقي صفرًا، فإن المقسوم عليه وناتج القسمة هما من عوامل المقسوم.

فمثلًا: $56 \div 8 = 7$ ونلاحظ أن 8 , 7 من عوامل 56

أما إذا كان الباقي لا يساوي صفرًا، فإن المقسوم عليه وناتج القسمة لا يكونا من عوامل المقسوم.

ناتج القسمة، المقسوم عليه، المقسوم، باقي القسمة

فمثلًا: $42 \div 5 = 8$ والباقي 2

ونلاحظ أن 5، 8 ليسا من عوامل 42

بالتالي، تسمح القسمة بمعرفة ما إذا كان عدد من عوامل عدد آخر.

وهذا أيضًا صحيح بالنسبة إلى قسمة كثيرات الحدود.

إذا قسمت كثيرة حدود على أحد عواملها تحصل على عامل آخر.

وعندما يكون باقي القسمة صفرًا تكون قد حوّلت كثيرة الحدود إلى عوامل.

فمثلًا: $2x^2 \div x = 2x$

ونلاحظ أن $2x$, x من عوامل $2x^2$

القسمة المطولة Long Division

عند قسمة كثيرة حدود على أخرى اتبع الخطوات المستخدمة في قسمة الأعداد الكلية.

مثال (1)

اقسم:

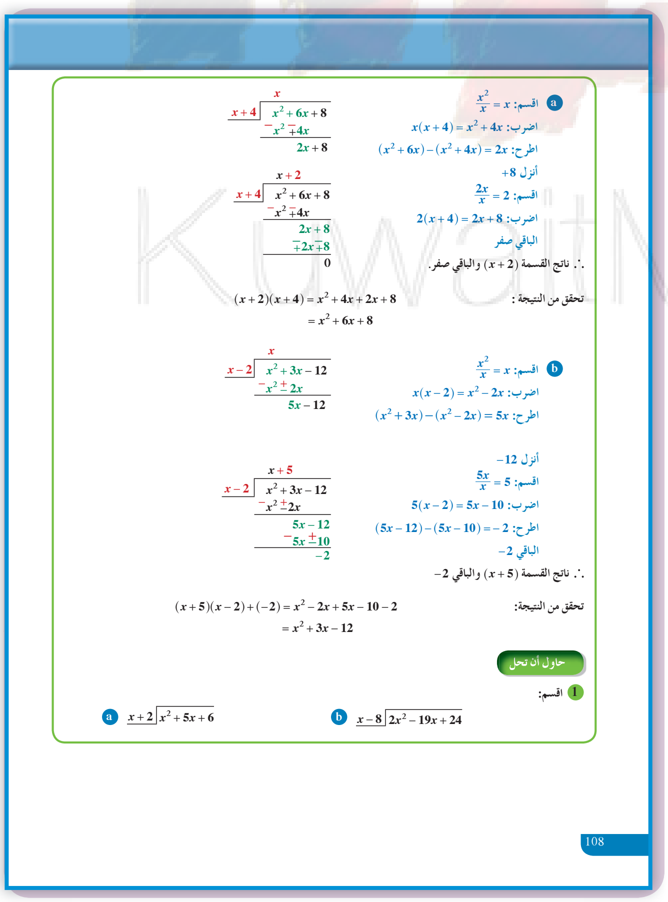
(a) x^2+6x+8 على $(x+4)$

(b) $x^2+3x-12$ على $(x-2)$

الحل:

نوجد الناتج باستخدام القسمة المطولة.

107



(a) اقسم: $\frac{x^2}{x}=x$

اضرب: $x(x+4)=x^2+4x$

اطرح: $(x^2+6x)-(x^2+4x)=2x$

أنزل 8+

اقسم: $\frac{2x}{x}=2$

اضرب: $2(x+4)=2x+8$

الباقي صفر

∴ ناتج القسمة $(x+2)$ والباقي صفر.

تحقق من النتيجة: $(x+2)(x+4)=x^2+4x+2x+8 = x^2+6x+8$

(b) اقسم: $\frac{x^2}{x}=x$

اضرب: $x(x-2)=x^2-2x$

اطرح: $(x^2+3x)-(x^2-2x)=5x$

أنزل 12−

اقسم: $\frac{5x}{x}=5$

اضرب: $5(x-2)=5x-10$

اطرح: $(5x-12)-(5x-10)=-2$

الباقي 2−

∴ ناتج القسمة $(x+5)$ والباقي 2−

تحقق من النتيجة: $(x+5)(x-2)+(-2)=x^2-2x+5x-10-2 = x^2+3x-12$

حاول أن تحل

1 اقسم:

(a) x^2+5x+6 على $x+2$

(b) $2x^2-19x+24$ على $x-8$

108

5 التدريس

بعد أن تعرف الطالب العمليات الثلاث على الدوال كثيرات الحدود (الجمع والطرح والضرب)، سوف يتعرف الآن قسمة كثيرات الحدود وذلك باستخدام طريقتين مختلفتين.

أخبر الطلاب أن الطريقة المطولة يمكن استخدامها عند قسمة كثيرات الحدود مهما كانت درجة المقسوم ودرجة المقسوم عليه، أما طريقة القسمة التركيبية فتستخدم عندما يكون المقسوم عليه كثيرة حدود من الدرجة الأولى على الصورة: $(x+a)$.

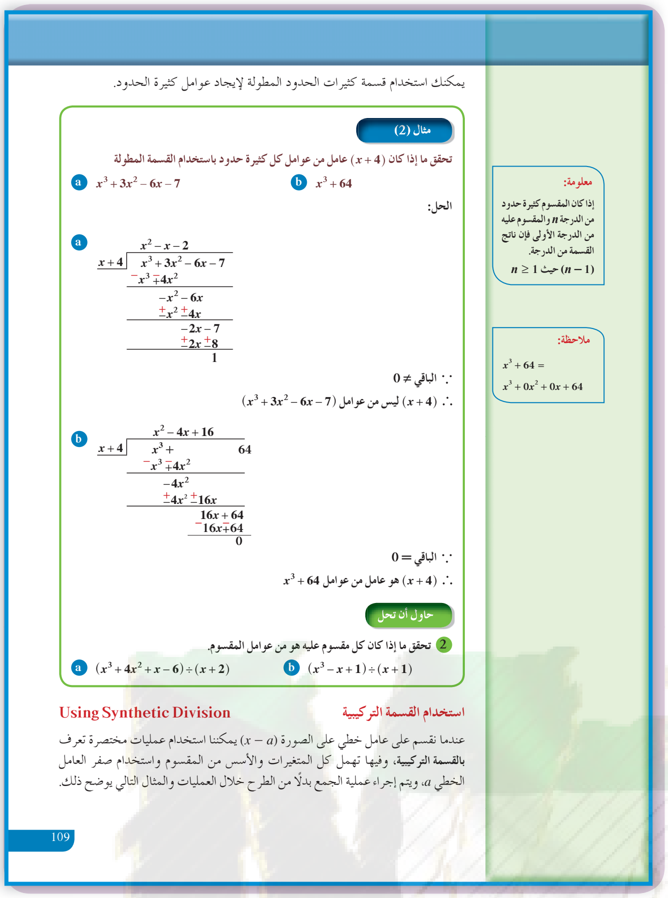
شدّد على الطلاب البدء أولًا بترتيب كثيرات الحدود تنازليًّا بحسب الحدود المكونة.

وعند القسمة يجب دائمًا في كل مرحلة قسمة الحد الأكبر من المقسوم على الحد الأكبر من المقسوم عليه، ولكن عند ضرب الناتج يجب إجراء الضرب مع كل حدود المقسوم عليه، وهذا يحدث مع كل خطوة في عملية القسمة المطولة.

لذا، فمن المستحسن متابعة عمل الطلاب بدقة.

في المثالين (1), (2)

ركّز على فكرة أنه عندما نحصل على باقٍ غير الصفر فإن المقسوم عليه لا يمثل أحد عوامل المقسوم، أما إذا كان الباقي يساوي صفرًا، فإن المقسوم عليه هو حتمًا أحد عوامل المقسوم.



يمكنك استخدام قسمة كثيرات الحدود المطولة لإيجاد عوامل كثيرة الحدود.

مثال (2)

تحقق ما إذا كان $(x+4)$ عامل من عوامل كل كثيرة حدود باستخدام القسمة المطولة

a x^3+3x^2-6x-7 b x^3+64

الحل:

a $x+4 \,)\, x^3+3x^2-6x-7$ ، الناتج x^2-x-2

$-x^3 \mp 4x^2$

$-x^2-6x$

$\pm x^2 \pm 4x$

$-2x-7$

$\pm 2x \pm 8$

1

$\because$ الباقي $\neq 0$

$\therefore$ $(x+4)$ ليس من عوامل (x^3+3x^2-6x-7)

b $x+4 \,)\, x^3+\quad 64$ ، الناتج $x^2-4x+16$

$-x^3 \mp 4x^2$

$-4x^2$

$\pm 4x^2 \pm 16x$

$16x+64$

$-16x \mp 64$

0

$\because$ الباقي $= 0$

$\therefore$ $(x+4)$ هو عامل من عوامل x^3+64

حاول أن تحل

2 تحقق ما إذا كان كل مقسوم عليه هو من عوامل المقسوم.

a $(x^3+4x^2+x-6)\div(x+2)$ b $(x^3-x+1)\div(x+1)$

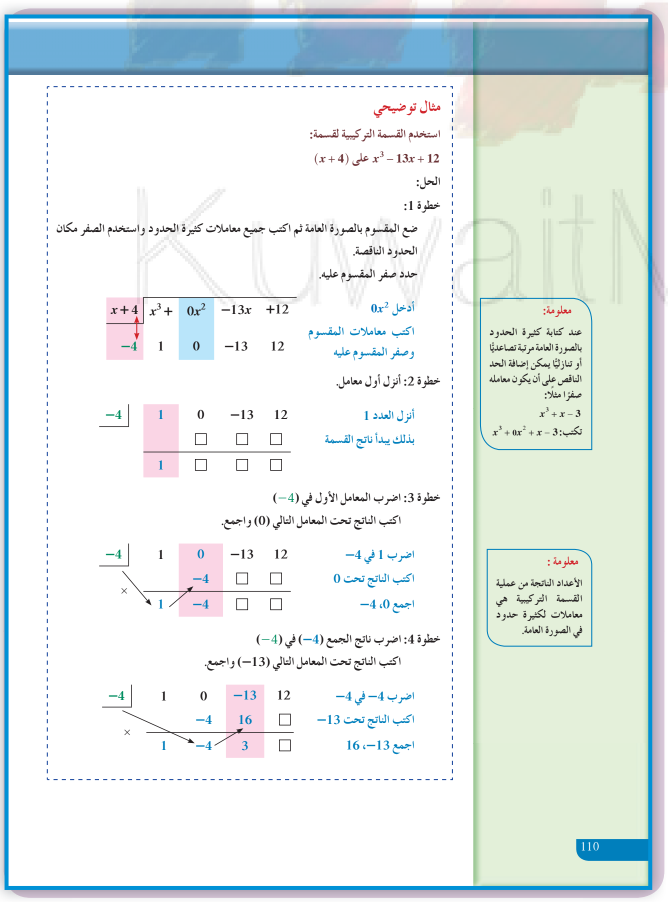
استخدام القسمة التركيبية **Using Synthetic Division**

عندما نقسم على عامل خطي على الصورة $(x-a)$ يمكننا استخدام عمليات مختصرة تعرف **بالقسمة التركيبية**، وفيها تهمل كل المتغيرات والأسس من المقسوم واستخدام صفر العامل الخطي a، ويتم إجراء عملية الجمع بدلًا من الطرح خلال العمليات والمثال التالي يوضح ذلك.

معلومة:
إذا كان المقسوم كثيرة حدود من الدرجة n والمقسوم عليه من الدرجة الأولى فإن ناتج القسمة من الدرجة $(n-1)$ حيث $n \geq 1$

ملاحظة:
$x^3+64=$
$x^3+0x^2+0x+64$

109



مثال توضيحي

استخدم القسمة التركيبية لقسمة:

$x^3-13x+12$ على $(x+4)$

الحل:

خطوة 1:

ضع المقسوم بالصورة العامة ثم اكتب جميع معاملات كثيرة الحدود واستخدم الصفر مكان الحدود الناقصة.

حدد صفر المقسوم عليه.

أدخل $0x^2$

اكتب معاملات المقسوم وصفر المقسوم عليه

$x+4$	x^3+	$0x^2$	$-13x$	$+12$
-4	1	0	-13	12

خطوة 2: أنزل أول معامل.

أنزل العدد 1 بذلك يبدأ ناتج القسمة

-4	1	0	-13	12
		□	□	□
	1	□	□	□

خطوة 3: اضرب المعامل الأول في (-4)

اكتب الناتج تحت المعامل التالي (0) واجمع.

اضرب 1 في -4 اكتب الناتج تحت 0 اجمع 0، -4

-4	1	0	-13	12
		-4	□	□
	1	-4	□	□

خطوة 4: اضرب ناتج الجمع (-4) في (-4)

اكتب الناتج تحت المعامل التالي (-13) واجمع.

اضرب -4 في -4 اكتب الناتج تحت -13 اجمع -13، 16

-4	1	0	-13	12
		-4	16	□
	1	-4	3	□

معلومة:
عند كتابة كثيرة الحدود بالصورة العامة مرتبة تصاعديًّا أو تنازليًّا يمكن إضافة الحد الناقص على أن يكون معامله صفرًا مثلًا:
x^3+x-3
تكتب: x^3+0x^2+x-3

معلومة:
الأعداد الناتجة من عملية القسمة التركيبية هي معاملات لكثيرة حدود في الصورة العامة.

110

في المثال (3)

القسمة التركيبية هي طريقة سريعة، ولكنها تستخدم في حالات خاصة، أي عندما يكون المقسوم عليه على الصورة $(x+a)$.

دع الطلاب يحلون تمارين متعددة لكي يتمكنوا من استيعاب الخطوات المتبعة في هذه العملية، ثم أخبرهم أنه يمكن اختصار هذه الخطوات كما هو موضح في المثال (4).

في المثال (7)

أخبرهم أن نظرية الباقي لا يمكن استخدامها إلا إذا كان المقسوم عليه كثيرة حدود من الدرجة الأولى، أي على الصورة $(ax+b)$.

6 الربط

يوفر المثالان (6) ,(5) الربط بين حالة حياتية واقعية تستخدم فيها القسمة بين كثيرات الحدود لإيجاد عوامل المقسوم.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطىء الطلاب في استخدام القسمة التركيبية، وذلك في العمليات على الأعداد.

ساعدهم على تخطي هذه الأخطاء بعدة أمثلة تحت إشرافك.

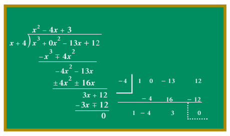
8 التقييم

تابع عمل الطلاب بدقة في فقرات «حاول أن تحل»، لتتأكد من حسن أدائهم في قسمة كثيرات الحدود.

خطوة 5: اضرب ناتج الجمع (3) في (-4)

اكتب الناتج تحت المعامل التالي (الحد الثابت 12) واجمع.

اضرب 3 في -4	-4	1	0	-13	12
اكتب الناتج تحت 12			-4	16	-12
اجمع $12, -12$		1	-4	3	0
		x^2	$-4x$	$+3$	الباقي



ناتج القسمة: x^2-4x+3

ناتج القسمة من الدرجة الثانية. (لماذا؟)

مثال (3)

استخدم القسمة التركيبية لقسمة x^3-3x^2-6x+8 على $(x+2)$ ثم أوجد باقي العوامل.

الحل:

لتحديد صفر المقسوم عليه اعكس إشارة الحد الثابت في $(x+2)$ فيصبح -2

اكتب جميع معاملات كثيرة الحدود.

-2	1	-3	-6	8
		-2	10	-8
	1	-5	4	0
	x^2	$-5x$	$+4$	الباقي

ناتج القسمة: x^2-5x+4 والباقي صفر:

نحلل: $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$

$\therefore$ باقي العوامل هي: $(x-4)$, $(x-1)$

حاول أن تحل

3 (a) استخدم القسمة التركيبية لقسمة x^3-2x^2-5x+6 على $(x+2)$

(b) استخدم الإجابة في (a) لتحليل x^3-2x^2-5x+6 إلى عوامل.

111

تمرَّنْ 3–4

قسمة كثيرات الحدود

Dividing Polynomials

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–4)، اقسم مستخدمًا قسمة كثيرة الحدود المطولة.

(1) $(x^2-3x-40)\div(x+5)$ (2) $(x^3+3x^2-x+2)\div(x-1)$

(3) $(x^3-13x-12)\div(x-4)$ (4) $(9x^3-18x^2-x+2)\div(3x+1)$

في التمرينين (5–6)، بيّن ما إذا كانت كل ثنائية حد عاملاً من عوامل x^3+4x^2+x-6

(5) $x-3$ (6) $x+2$

في التمارين (7–11)، اقسم مستخدمًا القسمة التركيبية.

(7) $(x^3+3x^2-x-3)\div(x-1)$ (8) $(-2x^3+5x^2-x+2)\div(x+2)$

(9) $(2x^4+6x^3+5x^2-45)\div(x+3)$ (10) $(x^3-3x^2-5x-25)\div(x-5)$

(11) $(2x^3+4x^2-10x-9)\div(x-3)$

في التمرينين (12–13)، استخدم القسمة التركيبية والعامل المعطى لتحليل كل دالة كثيرة حدود بالكامل.

(12) $y=x^3+2x^2-5x-6\ ;\ x+1$ (13) $y=x^3-4x^2-9x+36\ ;\ x+3$

(14) **الهندسة:** يعطى حجم صندوق بالمعادلة: $V(x)=x^3+x^2-6x$ بالأمتار المكعبة (m^3) : $x>2$

ما الأبعاد الممكنة لهذا الصندوق؟

في التمارين (15–18)، استخدم القسمة التركيبية ونظرية الباقي لإيجاد $f(a)$

(15) $f(x)=x^3+4x^2-8x-6\ ;\ a=-2$ (16) $f(x)=x^3-7x^2+15x-9\ ;\ a=3$

(17) $f(x)=2x^3-x^2+10x+5\ ;\ a=\frac{1}{2}$ (18) $f(x)=2x^4+6x^3+5x^2-45\ ;\ a=-3$

(19) (a) **التفكير المنطقي:** كثيرة حدود $f(x)$ قسمت على ثنائية الحدّ $(x-a)$ والباقي صفر. ماذا يمكنك أن تستنتج؟ فسّر.

(b) **تفكير ناقد:** وضّح لماذا x^2+1 لا يمكن تحليلها باستخدام أعداد حقيقية؟

(c) **اكتشاف الخطأ:** حلّل طالب كثيرة الحدود: x^3-x^2-2x إلى ثلاثة عوامل، وكان $(x-1)$ أحد هذه العوامل. استخدم القسمة لتثبت أن الطالب ارتكب خطأ.

46

اختبار سريع

1 اقسم: $2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ باستخدام القسمة المطولة.

$$
\begin{array}{r}
2x^2 - 7x + 5 \\
x+2\overline{)\,2x^3 - 3x^2 - 9x + 10} \\
\underline{-2x^3 - 4x^2 \qquad\qquad} \\
0 - 7x^2 - 9x + 10 \\
\underline{+7x^2 + 14x \quad\;\;} \\
0 + \qquad 5x + 10 \\
\underline{-5x - 10} \\
0
\end{array}
$$

2 استخدم القسمة التركيبية لتوجد ناتج قسمة.
$2x^4 - 5x^3 - 11x^2 + 20x + 15$ على $(x - 2)$.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
2 & 2 & -5 & -11 & 20 & 15 \\
 & & 4 & -2 & -26 & -12 \\
\hline
 & 2 & -1 & -13 & -6 & 3
\end{array}
$$

ناتج القسمة = $2x^3 - x^2 - 13x - 6$ والباقي = 3

3 من دون استخدام أي طريقة في القسمة، أوجد الباقي عند قسمة $f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 6x + 2$ على $(x + 2)$. ماذا تستنتج؟ اشرح.

باستخدام نظرية الباقي نوجد $f(-2)$

$f(-2) = -2(-2)^4 + 3(-2)^2 - 6(-2) + 2 = -6$

فيكون الباقي $= -6$، لذا $(x + 2)$ ليس من عوامل كثيرة الحدود $f(x)$

9 إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

1 (a)

$$
\begin{array}{r}
x + 3 \\
x+2\overline{)\,x^2 + 5x + 6} \\
\underline{-x^2 - 2x \quad\;} \\
3x + 6 \\
\underline{-3x - 6} \\
0
\end{array}
$$

(b)

$$
\begin{array}{r}
2x - 3 \\
x-8\overline{)\,2x^2 - 19x + 24} \\
\underline{-2x^2 + 16x \qquad} \\
-3x + 24 \\
\underline{+3x - 24} \\
0
\end{array}
$$

مثال (4)

استخدم القسمة التركيبية لقسمة $x^3 + 2x^2 + x - 5$ على $(x + 3)$

الحل:

اعكس إشارة الحد الثابت في المقسوم عليه فتصبح -3

اكتب جميع معاملات كثيرة الحدود.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-3 & 1 & 2 & 1 & -5 \\
 & & -3 & 3 & -12 \\
\hline
 & 1 & -1 & 4 & \boxed{-17} \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & x^2 & -x & +4 & \text{الباقي}
\end{array}
$$

ناتج القسمة: $x^2 - x + 4$، الباقي -17

حاول أن تحل

4 استخدم القسمة التركيبية لقسمة $x^3 + 4x^2 + x - 6$ على $(x + 1)$

مثال (5)

تعتبر قلعة بعلبك في لبنان من أهم الآثار في العالم العربي

يعطى حجم أحد الحجارة الضخمة قرب قلعة بعلبك بالعلاقة:

$V = x^3 + 21x^2 + 56x + 36$

a إذا كان $(x + 2)$m أحد أبعاد هذا الحجر.
فأوجد البعدين الآخرين.

b إذا كان أكبر أبعاد هذا الحجر يساوي 21 m
فأوجد البعدين الآخرين.

الحل:

a نستخدم القسمة التركيبية لقسمة $x^3 + 21x^2 + 56x + 36$ على $(x + 2)$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & 1 & 21 & 56 & 36 \\
 & & -2 & -38 & -36 \\
\hline
 & 1 & 19 & 18 & \boxed{0}
\end{array}
$$

ناتج القسمة: $x^2 + 19x + 18$ والباقي صفر

بالتحليل: $x^2 + 19x + 18 = (x + 1)(x + 18)$

$\therefore$ البعدان الآخران هما $(x + 1)$، $(x + 18)$ بالأمتار (m)

b $\because$ أكبر الأبعاد يساوي 21 m

$\therefore \; x + 18 = 21$

$x = 3$

وبالتعويض في البعدين الآخرين:

$x + 1 = 3 + 1 = 4$

$x + 2 = 3 + 2 = 5$

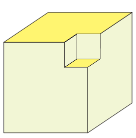
بعدا الحجر الآخران هما: 4 m، 5 m

حاول أن تحل

5 في مثال (5) هل يمكن أن يكون $(x + 3)$ أحد أبعاد هذا الحجر؟ فسّر.

مثال (6)

يبيّن الشكل المقابل منحوتة على شكل شبه مكعب وقد اقتطع مكعب من إحدى زواياه.



أبعاد شبه المكعب قبل اقتطاع المكعب هي:

$h = 2x + 7 \;,\; w = x + 5 \;,\; l = x + 8$

وطول ضلع المكعب المقتطع x (الأبعاد بالـ cm)

وأصبح حجم المنحوتة يساوي $762\ cm^3$

a أثبت أن $x = 2$ هي القيمة الوحيدة المقبولة.

b أوجد أبعاد شبه المكعب.

الحل:

a حجم شبه المكعب $V_1 = (x + 8)(x + 5)(2x + 7)$

حجم المكعب المقتطع $V_2 = x^3$

حجم المنحوتة $V = V_1 - V_2 = (x + 8)(x + 5)(2x + 7) - x^3$

نكتب المعادلة $(x + 8)(x + 5)(2x + 7) - x^3 = 762$

بالتبسيط $x^3 + 33x^2 + 171x = 482$

بالتعويض عن x بـ 2: $(2^3) + 33(2)^2 + 171(2) \stackrel{?}{=} 482$

$482 = 482$

$\therefore$ $x = 2$ قيمة مقبولة.

للتحقق من أن $x = 2$ هي القيمة الوحيدة المقبولة:

نقسم $x^3 + 33x^2 + 171x - 482$ على $(x - 2)$

للحصول على قيم x المتبقية نستخدم القسمة التركيبية.

2 **(a)**

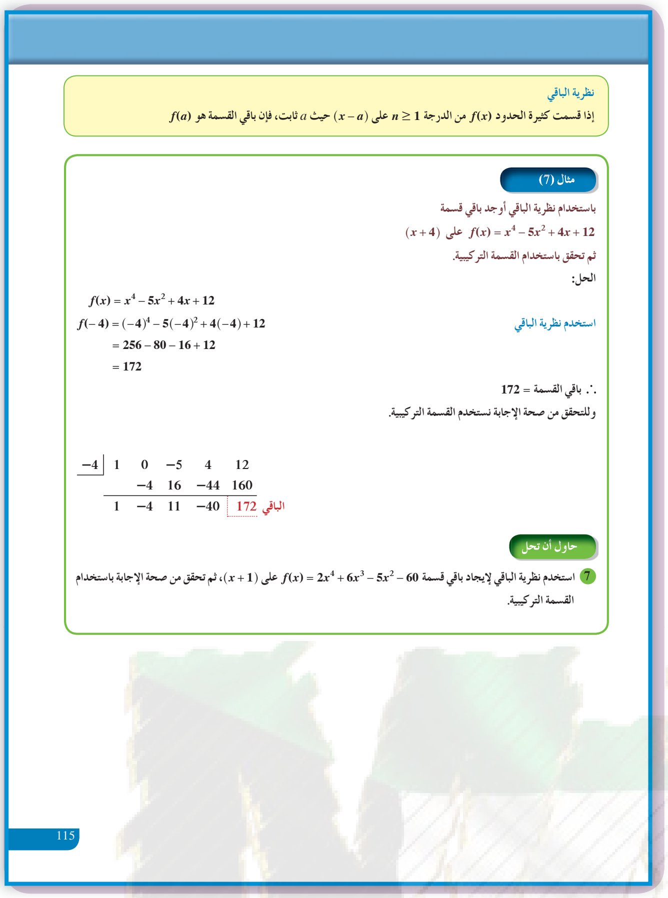
$$\begin{array}{r}
x^2+2x-3 \\
x+2\overline{)\,x^3+4x^2+x-6} \\
\underline{-x^3-2x^2} \\
0+2x^2+x-6 \\
\underline{-2x^2-4x} \\
0-3x-6 \\
\underline{+3x+6} \\
0
\end{array}$$

فيكون $(x+2)$ هو أحد عوامل: x^3+4x^2+x-6

(b)

$$\begin{array}{r}
x^2-x \\
x+1\overline{)\,x^3-x+1} \\
\underline{-x^3-x^2} \\
0-\quad x^2-x+1 \\
\underline{+x^2+x} \\
1
\end{array}$$

بما أن الباقي 1، لذا $(x+1)$ ليس من عوامل (x^3-x+1)



نظرية الباقي

إذا قسمت كثيرة الحدود $f(x)$ من الدرجة $n \geq 1$ على $(x-a)$ حيث a ثابت، فإن باقي القسمة هو $f(a)$

مثال (7)

باستخدام نظرية الباقي أوجد باقي قسمة

$f(x)=x^4-5x^2+4x+12$ على $(x+4)$

ثم تحقق باستخدام القسمة التركيبية.

الحل:

$f(x)=x^4-5x^2+4x+12$

استخدم نظرية الباقي

$f(-4)=(-4)^4-5(-4)^2+4(-4)+12$

$=256-80-16+12$

$=172$

∴ باقي القسمة = 172

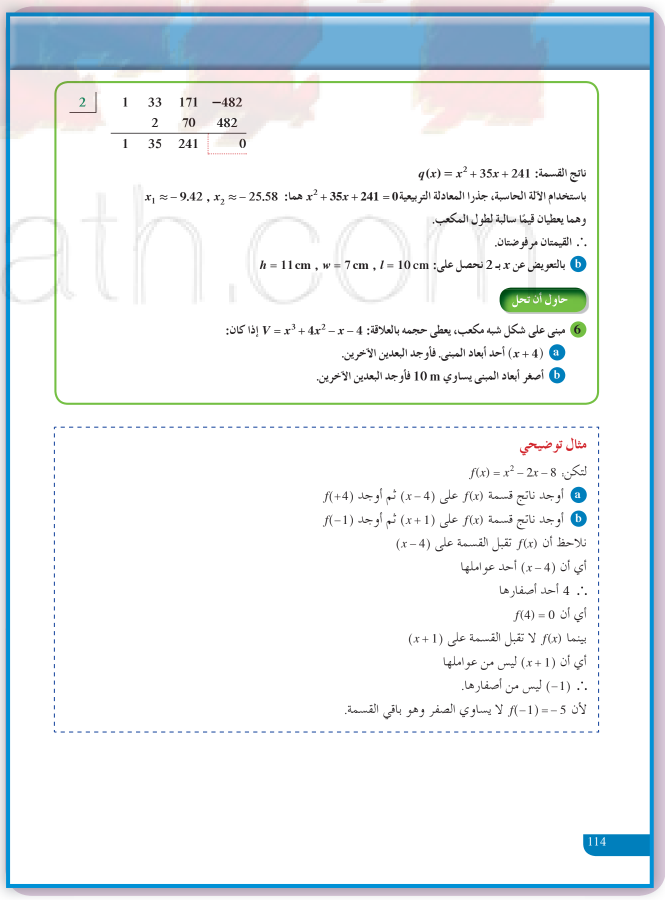
وللتحقق من صحة الإجابة نستخدم القسمة التركيبية.

−4	1	0	−5	4	12
		−4	16	−44	160
	1	−4	11	−40	172 الباقي

حاول أن تحل

7 استخدم نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $f(x)=2x^4+6x^3-5x^2-60$ على $(x+1)$، ثم تحقق من صحة الإجابة باستخدام القسمة التركيبية.

115



2	1	33	171	−482
		2	70	482
	1	35	241	0

ناتج القسمة: $q(x)=x^2+35x+241$

باستخدام الآلة الحاسبة، جذرا المعادلة التربيعية $x^2+35x+241=0$ هما: $x_1 \approx -9.42$, $x_2 \approx -25.58$

وهما يعطيان قيمًا سالبة لطول المكعب.

∴ القيمتان مرفوضتان.

b بالتعويض عن x بـ 2 نحصل على: $h=11\,cm$, $w=7\,cm$, $l=10\,cm$

حاول أن تحل

6 مبنى على شكل شبه مكعب، يعطى حجمه بالعلاقة: $V=x^3+4x^2-x-4$ إذا كان:

a $(x+4)$ أحد أبعاد المبنى. فأوجد البعدين الآخرين.

b أصغر أبعاد المبنى يساوي 10 m فأوجد البعدين الآخرين.

مثال توضيحي

لتكن: $f(x)=x^2-2x-8$

a أوجد ناتج قسمة $f(x)$ على $(x-4)$ ثم أوجد $f(+4)$

b أوجد ناتج قسمة $f(x)$ على $(x+1)$ ثم أوجد $f(-1)$

نلاحظ أن $f(x)$ تقبل القسمة على $(x-4)$

أي أن $(x-4)$ أحد عواملها

∴ 4 أحد أصفارها

أي أن $f(4)=0$

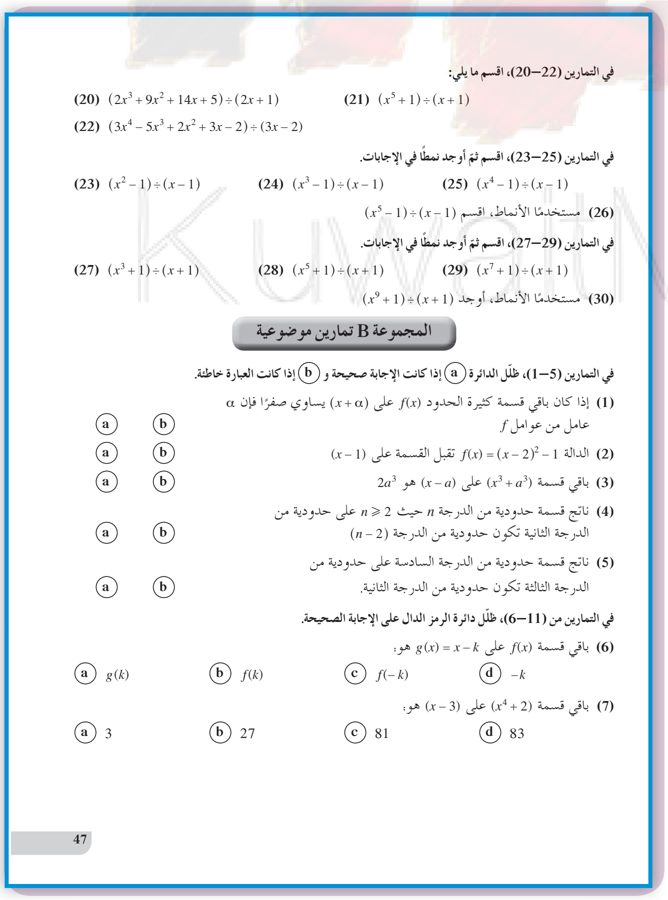
بينما $f(x)$ لا تقبل القسمة على $(x+1)$

أي أن $(x+1)$ ليس من عواملها

∴ (-1) ليس من أصفارها.

لأن $f(-1)=-5$ لا يساوي الصفر وهو باقي القسمة.

114



في التمارين (20—22)، اقسم ما يلي:

(20) $(2x^3+9x^2+14x+5)\div(2x+1)$

(21) $(x^5+1)\div(x+1)$

(22) $(3x^4-5x^3+2x^2+3x-2)\div(3x-2)$

في التمارين (23—25)، اقسم ثمّ أوجد نمطًا في الإجابات.

(23) $(x^2-1)\div(x-1)$

(24) $(x^3-1)\div(x-1)$

(25) $(x^4-1)\div(x-1)$

(26) مستخدمًا الأنماط، اقسم $(x^5-1)\div(x-1)$

في التمارين (27—29)، اقسم ثمّ أوجد نمطًا في الإجابات.

(27) $(x^3+1)\div(x+1)$

(28) $(x^5+1)\div(x+1)$

(29) $(x^7+1)\div(x+1)$

(30) مستخدمًا الأنماط، أوجد $(x^9+1)\div(x+1)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—5)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كان باقي قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ على $(x+\alpha)$ يساوي صفرًا فإن α عامل من عوامل f (a) (b)

(2) الدالة $f(x)=(x-2)^2-1$ تقبل القسمة على $(x-1)$ (a) (b)

(3) باقي قسمة (x^3+a^3) على $(x-a)$ هو $2a^3$ (a) (b)

(4) ناتج قسمة حدودية من الدرجة n حيث $n \geqslant 2$ على حدودية من الدرجة الثانية تكون حدودية من الدرجة $(n-2)$ (a) (b)

(5) ناتج قسمة حدودية من الدرجة السادسة على حدودية من الدرجة الثالثة تكون حدودية من الدرجة الثانية. (a) (b)

في التمارين من (6—11)، ظلّل دائرة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) باقي قسمة $f(x)$ على $g(x)=x-k$ هو:

(a) $g(k)$ (b) $f(k)$ (c) $f(-k)$ (d) $-k$

(7) باقي قسمة (x^4+2) على $(x-3)$ هو:

(a) 3 (b) 27 (c) 81 (d) 83

47

3 (a)
$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & -2 & 8 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 \end{array}$$

فيكون ناتج القسمة $x^2 - 4x + 3$ والباقي $= 0$

(b) $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$

$\therefore\ x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x+2)(x-3)$

4
$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 4 & 1 & -6 \\ & & -1 & -3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & -2 & -4 \end{array}$$

ناتج القسمة $= x^2 + 3x - 2$ والباقي $= -4$

5 نستخدم القسمة التركيبية:
$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 21 & 56 & 36 \\ & & -3 & -54 & -6 \\ \hline & 1 & 18 & 2 & 30 \end{array}$$

ناتج القسمة $= x^2 + 18x + 2$ والباقي $= 30$، لذا $(x+3)$ ليست من أبعاد هذا الحجر.

6 (a) $V = (x+4)(x-1)(x+1)$

(b) $x - 1 = 10 \Rightarrow x = 11$

$x + 1 = 12\ ,\ x + 4 = 15$

7 نوجد $f(-1)$ حيث إن:

$f(-1) = 2(-1)^4 + 6(-1)^3 - 5(-1)^2 - 60$

$f(-1) = -69$ أي أن الباقي $= -69$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 2 & 6 & -5 & 0 & -60 \\ & & -2 & -4 & +9 & -9 \\ \hline & 2 & 4 & -9 & +9 & -69 \end{array}$$

(8) ناتج قسمة $(2x^4 - 8x^2)$ على $(x+2)$ يساوي:

(a) $2x^3 - 4x^2$ (b) $2x^3 - 8x^2$ (c) $x^3 - 4x^2$ (d) $2x^3 - 4x^2 + 2x$

(9) إذا كان 0 هو باقي قسمة $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + kx - 1$ على $(x+1)$ فإن k تساوي:

(a) 7 (b) -7 (c) -3 (d) 3

(10) إذا كان باقي قسمة $f(x) = x^4 - kx^2 + x - k$ على $(x-1)$ هو 3 فإن k تساوي:

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 3 (c) $-\frac{1}{2}$ (d) $\frac{5}{2}$

(11) إذا كان $f(-1) = f(0) = f(3) = -2$ فإن $f(x)$ يمكن أن تكون:

(a) $x^3 - x^2 + 3x - 2$ (b) $x^3 - 2x^2 - 3x$
(c) $2x^3 - 2x^2 - 3x - 2$ (d) $2x^3 - 4x^2 - 6x - 2$

48

3–5: حل معادلات كثيرات الحدود

1 الأهداف

- يحل معادلات كثيرات الحدود بالتحليل.
- يحل معادلات كثيرات الحدود بالأصفار الممكنة.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

أصفار نسبية ممكنة – المُعامل الرئيسي – عامل مشترك – تحليل بالتقسيم.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة بيانية – ورق رسم بياني – جهاز إسقاط (Data show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) اقسم: $2x^2 - 5x + 3$ على $(x - 1)$

(b) استخدم المميز لإيجاد جذور المعادلة:

$$x^2 - 25x + 150 = 0$$

(c) أثبت أن $(x + 2)$ هو عامل خطي للدالة:

$2x^3 + 9x^2 + 13x + 6$ باستخدام القسمة التركيبية، ثم استخدم المميز لإيجاد عوامل الدالة التربيعية.

5 التدريس

سوف تساعد، دروس هذه الوحدة، الطالب على حل المعادلات المكونة من كثيرات الحدود بدرجات مختلفة وذلك باستخدام التحليل إلى عوامل أو باستخدام الرسم البياني. وهنا لا بد من الإشارة إلى أنه يمكن استخدام المميز: $\Delta = b^2 - 4ac$ عندما نجد أحد العوامل من الدرجة الثانية، وهذا يسهل كثيرًا في حل المعادلة كثيرة الحدود. فالمعادلة: $(2x - 5)(5x^2 + 9x - 2) = 0$ تعطي: $2x - 5 = 0$ أو $5x^2 + 9x - 2 = 0$

حل المعادلة الأولى $x = \frac{5}{2}$، أما المعادلة الثانية فيكون من الأفضل استخدام المميز، لأن تحليلها إلى عوامل صعب.

3–5

حل معادلات كثيرات الحدود

Solving Polynomial Equations

سوف تتعلم

- حل معادلات كثيرات الحدود بالتحليل.
- حل معادلات كثيرات الحدود بيانيًا.

المفردات والمصطلحات:

- أصفار نسبية ممكنة Possible Rational Zeros
- المعامل الرئيسي Leading Coefficient
- عامل مشترك Common Factor
- تحليل بالتقسيم Factorising by Division

الربط بالتكنولوجيا: يمكنك حل معادلات كثيرة الحدود بواسطة آلة حاسبة بيانية وباستخدام TABLE أو TRACE ثم CALC و ZOOM. وسوف تساعدك الاختيارات المتاحة بالآلة على إيجاد الحلول.

دعنا نفكر ونتناقش

a يبيّن الشكل المقابل بيان الدالة: $f(x) = x^3 + 3x^2$

مثّل بيانيًّا $g(x) = x + 3$ على الشبكة البيانية نفسها. ثم استخدم الرسم لإيجاد مجموعة حل المعادلة: $x^3 + 3x^2 = x + 3$

بيانيًّا هناك 3 نقاط تقاطع.

الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع: $-3\ ,\ -1\ ,\ 1$

$\therefore$ للمعادلة $x^3 + 3x^2 = x + 3$ ثلاثة حلول: $x = -3, x = -1, x = 1$

$\therefore$ مجموعة الحل: $\{-3, -1, 1\}$

b يمثّل الشكل المقابل بيان الدالة: $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

استخدم الشكل لإيجاد مجموعة حل المعادلة: $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$

c قارن بين مجموعتي الحل في b , a . فسّر.

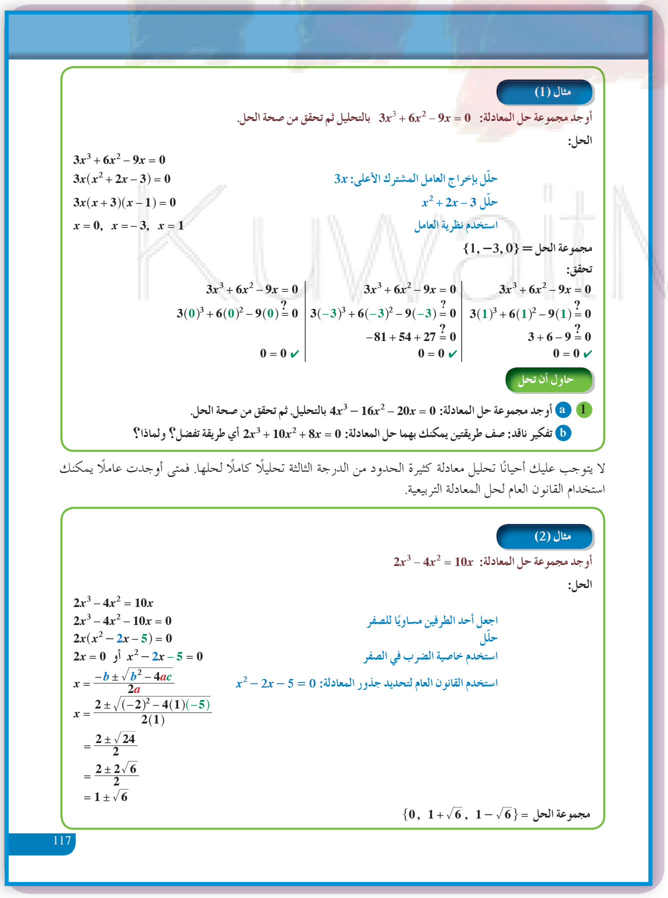
حل المعادلات بالتحليل Solving Equations by Factorising

عندما تحلل كثيرة الحدود، فإنك تحول شكلها من مجموع (أو فرق) حدود إلى ناتج ضرب عوامل كما هو موضح بالجدول.

الصورة العامة	الصورة بالتحليل (العوامل)
$x^2 - 4x - 12$	$(x + 2)(x - 6)$
$3x^3 - 12x$	$3x\,(x - 2)\,(x + 2)$
$3x^2 + 5x + 2$	$(3x + 2)(x + 1)$
$x^3 + 6x^2 + 11x + 6$	$(x + 1)(x + 2)(x + 3)$

يمكنك حل بعض معادلات كثيرات الحدود بالتحليل واستخدام خاصية الضرب في الصفر أو نظرية العامل.

116



مثال (1)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $3x^3 + 6x^2 - 9x = 0$ بالتحليل ثم تحقق من صحة الحل.

الحل:

$3x^3 + 6x^2 - 9x = 0$

$3x(x^2 + 2x - 3) = 0$ حلّل بإخراج العامل المشترك الأعلى: $3x$

$3x(x + 3)(x - 1) = 0$ حلّل $x^2 + 2x - 3$

$x = 0,\ x = -3,\ x = 1$ استخدم نظرية العامل

مجموعة الحل = $\{1, -3, 0\}$

تحقق:

$3x^3 + 6x^2 - 9x = 0$	$3x^3 + 6x^2 - 9x = 0$	$3x^3 + 6x^2 - 9x = 0$
$3(1)^3 + 6(1)^2 - 9(1) \stackrel{?}{=} 0$	$3(-3)^3 + 6(-3)^2 - 9(-3) \stackrel{?}{=} 0$	$3(0)^3 + 6(0)^2 - 9(0) \stackrel{?}{=} 0$
$3 + 6 - 9 \stackrel{?}{=} 0$	$-81 + 54 + 27 \stackrel{?}{=} 0$	
$0 = 0$ ✔	$0 = 0$ ✔	$0 = 0$ ✔

حاول أن تحل

1 a أوجد مجموعة حل المعادلة: $4x^3 - 16x^2 - 20x = 0$ بالتحليل. ثم تحقق من صحة الحل.

b تفكير ناقد: صف طريقتين يمكنك بهما حل المعادلة: $2x^3 + 10x^2 + 8x = 0$ أي طريقة تفضل؟ ولماذا؟

لا يتوجب عليك أحيانًا تحليل معادلة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة تحليلًا كاملًا لحلها. فمتى أوجدت عاملًا يمكنك استخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية.

مثال (2)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $2x^3 - 4x^2 = 10x$

الحل:

$2x^3 - 4x^2 = 10x$

$2x^3 - 4x^2 - 10x = 0$ اجعل أحد الطرفين مساويًا للصفر

$2x(x^2 - 2x - 5) = 0$ حلّل

$2x = 0$ أو $x^2 - 2x - 5 = 0$ استخدم خاصية الضرب في الصفر

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ استخدم القانون العام لتحديد جذور المعادلة: $x^2 - 2x - 5 = 0$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$

$= \frac{2 \pm \sqrt{24}}{2}$

$= \frac{2 \pm 2\sqrt{6}}{2}$

$= 1 \pm \sqrt{6}$

مجموعة الحل = $\{0,\ 1 + \sqrt{6},\ 1 - \sqrt{6}\}$

117

فنجد: $x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{121}}{10}$ أي: $x = -2$ أو $x = \dfrac{1}{5}$

في الأمثلة (3) ,(2) ,(1)

شجّع الطلاب على محاولة استخراج عوامل لمعادلة كثيرات الحدود، وعندما يصبح الباقي كثيرة حدود من الدرجة الثانية، اطلب إليهم استخدام التحليل أو المميز: $\Delta = b^2 - 4ac$ لإيجاد بقية العوامل حيث: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

ركّز لديهم فكرة أن $x = a$ أحد الأصفار يعني أن $(x - a)$ هو أحد العوامل.

حفّزهم على التأكّد من صحة الحلول التي توصلوا إليها وذلك بالتعويض.

في المثال (4)

تعتبر محاولة البحث عن مجموعة الحل لأي معادلة حدودية مهمة جدًّا، وتأتي طريقة عوامل الحد الثابت وعوامل الحد الرئيسي كأصفار للمعادلة في مقدمة هذه المحاولات.

أخبر الطلاب أن في المعادلة من الدرجة الثالثة نكتفي بإيجاد واحد من أصفار المعادلة، ثم نستخدم طريقة القسمة على العامل المقابل لهذا الصفر، وبعد ذلك نستخدم التحليل أو المميز.

أمّا في المعادلة من الدرجة الرابعة فنحاول إيجاد اثنين من الأصفار، ثم نستخدم طريقة القسمة على ناتج ضرب العاملين المقابلين للصفرين، وبعد ذلك نستخدم التحليل أو المميز.

6 الربط

في تطبيقات حياتية «إثرائية»، حيث نوجد أبعاد قفص باستخدام دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة له حجم ثابت، وذلك عن طريق الرسم البياني.

حاول أن تحل

2 أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي:

a $2x^3 = 3x - 5x^2$

b $x^3 - x^2 - 3x = 0$

يمكن حل بعض معادلات كثيرات الحدود باستخدام التحليل بطريقة التقسيم حيث يمكن تقسيم الحدود بطريقة تساعدنا على تحويل كثيرة الحدود إلى حاصل ضرب عوامل.

مثال (3)

أوجد مجموعة حل المعادلة:

a $x^3 + 3x^2 = x + 3$

b $x^3 - 3x = 6 - 2x^2$

الحل:

a $x^3 + 3x^2 = x + 3$

$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$ اجعل أحد الطرفين يساوي الصفر

$(x^3 + 3x^2) + (-x - 3) = 0$

$x^2(x + 3) - (x + 3) = 0$ حلّل بالتقسيم

$(x + 3)(x^2 - 1) = 0$ خذ العامل المشترك $(x + 3)$

$(x + 3)(x + 1)(x - 1) = 0$ حلّل

استخدم خاصية الصفر $x + 3 = 0$ أو $x + 1 = 0$ أو $x - 1 = 0$

$x = -3$ ، $x = -1$ ، $x = 1$

مجموعة الحل $= \{-3, 1, -1\}$

b $x^3 - 3x = 6 - 2x^2$

$x^3 - 3x - 6 + 2x^2 = 0$ اجعل أحد الطرفين يساوي الصفر

$(x^3 - 3x) + (-6 + 2x^2) = 0$ خاصية التجميع

$x(x^2 - 3) + 2(x^2 - 3) = 0$ حلّل

$(x^2 - 3)(x + 2) = 0$ خذ العامل المشترك $(x^2 - 3)$

$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x + 2) = 0$ حلّل

$x = \sqrt{3}$ أو $x = -\sqrt{3}$ أو $x = -2$

$\therefore$ مجموعة حل المعادلة $= \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -2\}$

حاول أن تحل

3 أوجد مجموعة حل المعادلة: $x^3 + 2x^2 - 4x = 8$

118

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطىء الطلاب في استخدام التحليل إلى عوامل.
ساعدهم على استخدام عوامل الحد الثابت في كثيرة الحدود كأعداد صحيحة ثم تطبيق نظرية الباقي، إذا كان يساوي صفرًا يكون لديك عامل من العوامل.

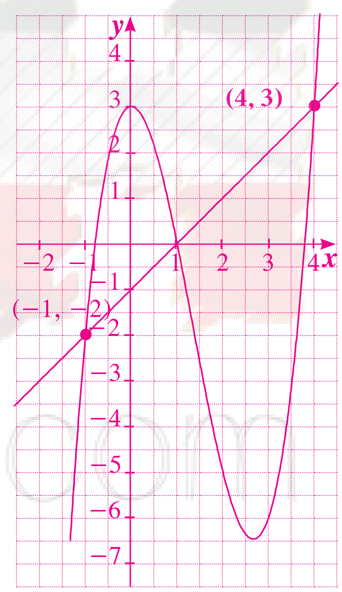
8 التقييم

تابع الطلاب وهم يجيبون عن فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من فهمهم لما ورد من مفاهيم ومهارات في هذا الدرس.

اختبار سريع

1 حلّ بيانيًّا المعادلة: $x^3 - 4x + 3 = x - 1$

نأخذ $y_1 = x^3 - 4x^2 + 3 \;,\; y_2 = x - 1$



يوضح الرسم البياني أن مجموعة الحل $= \{4, -1\}$

2 أوجد حل المعادلة: $3x^3 - 2x^2 - 17x - 12 = 0$ بالتحليل.

نجد أن $x = -1$ هي حل للمعادلة، وبالقسمة على $(x+1)$ نجد الناتج $3x^2 - 5x - 12$.

وباستخدام المميز $\Delta = 169$: $x = -\frac{4}{3}$ أو $x = 3$

وبالتالي، مجموعة الحل $= \left\{3, -\frac{4}{3}, -1\right\}$

تطبيقات حياتية «إثرائي»

يمكن كتابة أبعاد قفص على شكل شبه مكعب لنقل قطة سيامية كما يلي:

الطول $(l = x + 7)$ العمق $(h = x)$

العرض $(w = x + 1)$ بالسنتيمتر (cm).

أوجد أبعاد القفص إذا كان حجمه $11340\ cm^3$

الحل:

اكتب المعادلة $V = l \cdot w \cdot h$

عوّض $11\,340 = (x+7)(x+1)(x)$

ارسم بيانيًّا:

$y_1 = 11\,340 \,,\; y_2 = (x+7)(x+1)(x)$

استخدم اختيار التقاطع من الخاصية CALC.

عندما $x = 20 \,,\; y = 11\,340$

$\therefore\; x + 1 = 21 \,,\; x + 7 = 27$

أبعاد القفص هي: 27 cm , 21 cm , 20 cm

الأصفار النسبية الممكنة Possible Rational Zeros

نظرية

بفرض أن: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \,;\, a_n \neq 0$

حيث $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ أعداد صحيحة فتكون مجموعة الأصفار النسبية الممكنة لِـ $f(x)$ هي:

$\left\{\frac{a}{b}\right.$: a عامل من عوامل الحد الثابت a_0، b عامل من عوامل المعامل الرئيسي $\left.a_n\right\}$

تظهر أهمية هذه النظرية إذا أردنا معرفة أصفار حدودية ولا يمكننا استخدام طريقة التحليل أو التقسيم.

يمكننا تخمين الأصفار النسبية الممكنة باستخدام النظرية ثم نتحقق من هذه الأصفار باستخدام نظرية الباقي.

الربط بالتكنولوجيا:

استخدام الآلة الحاسبة البيانية

- في أعلى الشاشة اضغط على

يظهر على الشاشة:

$y_1 = \square$
$y_2 = \square$
$y_3 = \square$
⋮

لتنشيط y_1 اضغط على المربع إلى يسارها فتظهر في داخله علامة ✓ ثم اكتب في المربع إلى يمين y_1:

$(x+7)(x)(x+1)$

نشط y_2 بالطريقة نفسها ثم اكتب قرب y_2:

11 340

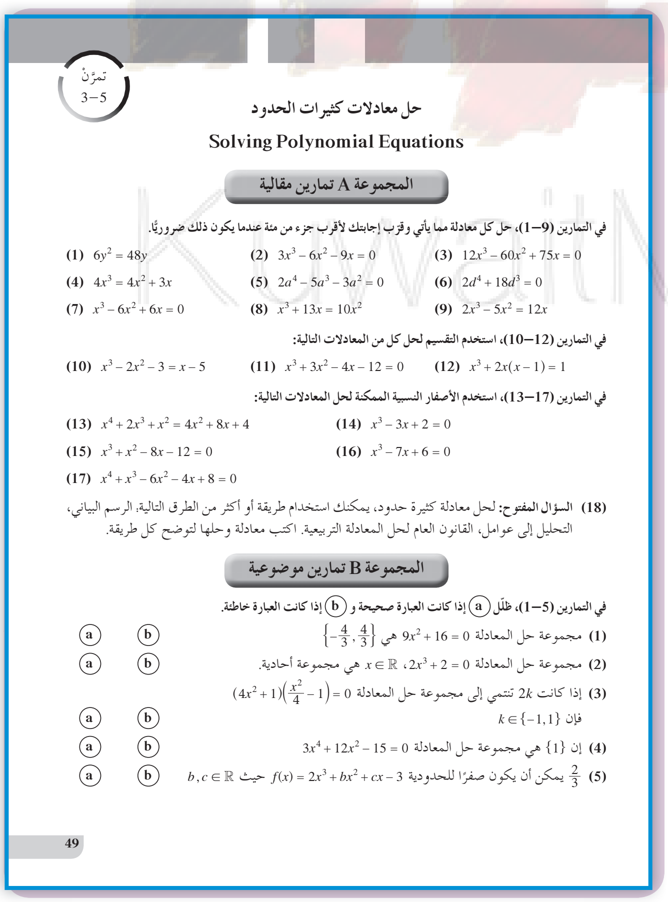
ثم اضغط على EXE يظهر على الشاشة بيان كل من الدالتين.

اختر من

«Analysis» ثم «G−Solve» ثم «Intercept» فيظهر على الشاشة

$x = 20 \,,\; y = 11\,340$

119



تمرَّنْ 3−5

حل معادلات كثيرات الحدود
Solving Polynomial Equations

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (9−1)، حل كل معادلة مما يأتي وقرّب إجابتك لأقرب جزء من مئة عندما يكون ذلك ضروريًّا.

(1) $6y^2 = 48y$ (2) $3x^3 - 6x^2 - 9x = 0$ (3) $12x^3 - 60x^2 + 75x = 0$

(4) $4x^3 = 4x^2 + 3x$ (5) $2a^4 - 5a^3 - 3a^2 = 0$ (6) $2d^4 + 18d^3 = 0$

(7) $x^3 - 6x^2 + 6x = 0$ (8) $x^3 + 13x = 10x^2$ (9) $2x^3 - 5x^2 = 12x$

في التمارين (12−10)، استخدم التقسيم لحل كل من المعادلات التالية:

(10) $x^3 - 2x^2 - 3 = x - 5$ (11) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$ (12) $x^3 + 2x(x-1) = 1$

في التمارين (17−13)، استخدم الأصفار النسبية الممكنة لحل المعادلات التالية:

(13) $x^4 + 2x^3 + x^2 = 4x^2 + 8x + 4$ (14) $x^3 - 3x + 2 = 0$

(15) $x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$ (16) $x^3 - 7x + 6 = 0$

(17) $x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8 = 0$

(18) **السؤال المفتوح:** لحل معادلة كثيرة حدود، يمكنك استخدام طريقة أو أكثر من الطرق التالية: الرسم البياني، التحليل إلى عوامل، القانون العام لحل المعادلة التربيعية. اكتب معادلة وحلها لتوضح كل طريقة.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5−1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) مجموعة حل المعادلة $9x^2 + 16 = 0$ هي $\left\{-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right\}$ (a) (b)

(2) مجموعة حل المعادلة $2x^3 + 2 = 0$، $x \in \mathbb{R}$ هي مجموعة أحادية. (a) (b)

(3) إذا كانت $2k$ تنتمي إلى مجموعة حل المعادلة $(4x^2+1)\left(\frac{x^2}{4} - 1\right) = 0$ فإن $k \in \{-1, 1\}$ (a) (b)

(4) إن $\{1\}$ هي مجموعة حل المعادلة $3x^4 + 12x^2 - 15 = 0$ (a) (b)

(5) $\frac{2}{3}$ يمكن أن يكون صفرًا للحدودية $f(x) = 2x^3 + bx^2 + cx - 3$ حيث $b, c \in \mathbb{R}$ (a) (b)

49

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

تحقق من إجابات الطلاب.

«حاول أن تحل»

1 **(a)** $4x(x+1)(x-5)=0$

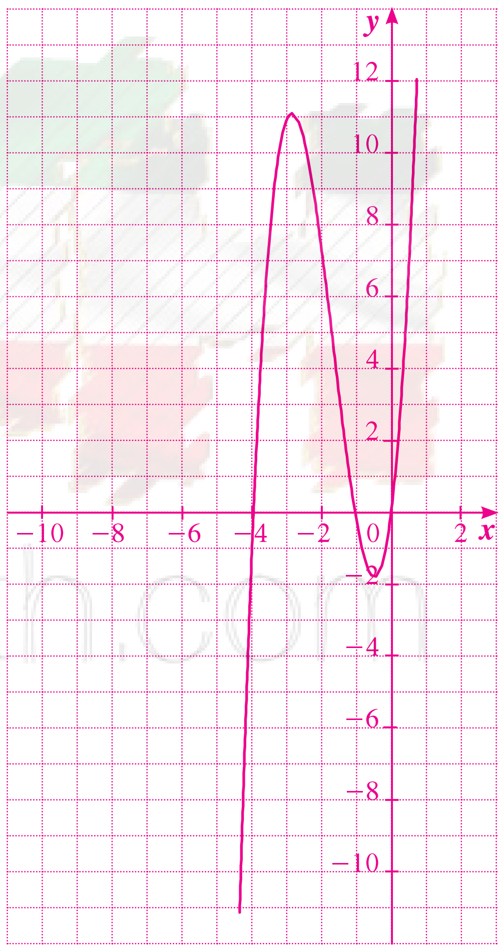
مجموعة الحل = $\{0, -1, 5\}$

طريقة أولى: **(b)** $2x(x+1)(x+4)=0$

مجموعة الحل = $\{-4, -1, 0\}$

طريقة ثانية: الرسم البياني للدالة: (باستخدام الآلة الحاسبة)

$f(x) = 2x^3 + 10x^2 + 8x$



نأخذ تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات فنجد مجموعة الحل = $\{-4, -1, 0\}$

الرسم البياني أسرع وأفضل. يمكن أن تتنوع الإجابات.

فمثلًا: لتحديد الأصفار النسبية الممكنة لِـ: $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 6$.

نتبع الخطوات التالية:

أولًا: نحدد عوامل الحد الثابت (6) وهي: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$

ثانيًا: نحدد عوامل المعامل الرئيسي (2) وهي: $\pm1, \pm2$

ثالثًا: بتطبيق النظرية تكون الأصفار النسبية الممكنة: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$

تدريب

الأصفار النسبية الممكنة لِـ:

(b) $g(x) = x^3 - 27$ هي: ....

(a) $f(x) = x^3 + 5x - 3$ هي: ....

مثال (4)

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:

(b) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x = 2$

(a) $x^3 - 4x^2 + 3 = 0$

الحل:

(a) خطوة 1: $x^3 - 4x^2 + 3 = 0$

عوامل الحد الثابت (3): $\pm1, \pm3$

عوامل المعامل الرئيسي (1): ±1

∴ الأصفار النسبية الممكنة: $\pm1, \pm3$

خطوة 2: لتكن $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3$

$P(1) = (1)^3 - 4(1)^2 + 3 = 0$

∴ 1 صفر من أصفار الحدودية،

$(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$

نقسم: $P(x)$ على $(x-1)$:

$P(x) = x^3 - 4x^2 + 0x + 3$

1	1	−4	0	3
		1	−3	−3
	1	−3	−3	0

ناتج القسمة: $q(x) = x^2 - 3x - 3$

نحل المعادلة $x^2 - 3x - 3 = 0$ باستخدام القانون

$x_1 = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$ ، $x_2 = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$

∴ مجموعة حل المعادلة = $\left\{1, \frac{3-\sqrt{21}}{2}, \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right\}$

معلومة:

إذا كان مجموع معاملات حدودية يساوي الصفر فإن 1 هو أحد أصفار الحدودية، $(x-1)$ أحد عواملها.

120


b خطوة 1: $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$

عوامل الحد الثابت (-2) هي: $\pm 1, \pm 2$

عوامل المعامل الرئيسي (1) هي: ± 1

∴ الأصفار النسبية الممكنة هي: $\pm 1, \pm 2$

خطوة 2: لتكن $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$

$P(1) = (1)^4 - 3(1)^3 + (1)^2 + 3(1) - 2 = 0$

∴ 1 صفر من أصفار $P(x)$ ، $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$

$P(-1) = (-1)^4 - 3(-1)^3 + (-1)^2 + 3(-1) - 2 = 0$

∴ -1 صفر من أصفار $P(x)$ ، $(x+1)$ عامل من عوامل $P(x)$

نقسم: $P(x)$ على $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

نستخدم القسمة المطولة

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 3x + 2 \\ \hline x^2 - 1 & x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 \\ & \mp x^4 \quad \pm x^2 \\ \hline & -3x^3 + 2x^2 + 3x \\ & \pm 3x^3 \quad \mp 3x \\ \hline & 2x^2 \quad -2 \\ & \mp 2x^2 \quad \pm 2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

ناتج القسمة: $q(x) = x^2 - 3x + 2$

نحل المعادلة: $x^2 - 3x + 2 = 0$

$x_1 = 1; \quad x_2 = 2$

مجموعة حل المعادلة = $\{-1, 1, 2\}$

ملاحظة:

لاحظ أن 1 هو صفر مكرر.

حاول أن تحل

4 a تفكير ناقد: هل يمكن حل المعادلة في المثال (4) b بطرق اخرى؟ وضح ذلك.

b أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:

1 $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ 2 $x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x = 18$

121

2 (a) $2x^3 + 5x^2 - 3x = 0$

$x(2x^2 + 5x - 3) = 0$

مجموعة الحل = $\left\{0, -3, \frac{1}{2}\right\}$

(b) $x(x^2 - x - 3) = 0$

مجموعة الحل = $\{0, -1.3, 2.3\}$

3 تعطي: $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$

$x^2(x+2) - 4(x+2) = 0$

أي: $(x+2)(x^2 - 4) = 0$

ومنه $(x+2)(x+2)(x-2) = 0$

مجموعة الحل = $\{2, -2\}$

4 (a) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x^2 + 3x - 2 = 0$

$x^2(x^2 - 3x + 2) - (x^2 - 3x + 2) = 0$

$(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 1) = 0$

$(x-1)(x-2)(x-1)(x+1) = 0$

وبالتالي، مجموعة الحل = $\{-1, 1, 2\}$

(b) 1 $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$

عوامل الحد الثابت: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

عوامل العامل الرئيسي: ± 1

فتكون الأصفار النسبية: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

$x = -1$ هي صفر للمعادلة لذا نقسم على $(x+1)$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ & & -1 & 0 & 4 \\ \hline & -1 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

الناتج = $x^2 - 4$ والباقي = 0

التحليل = $(x+1)(x-2)(x+2)$

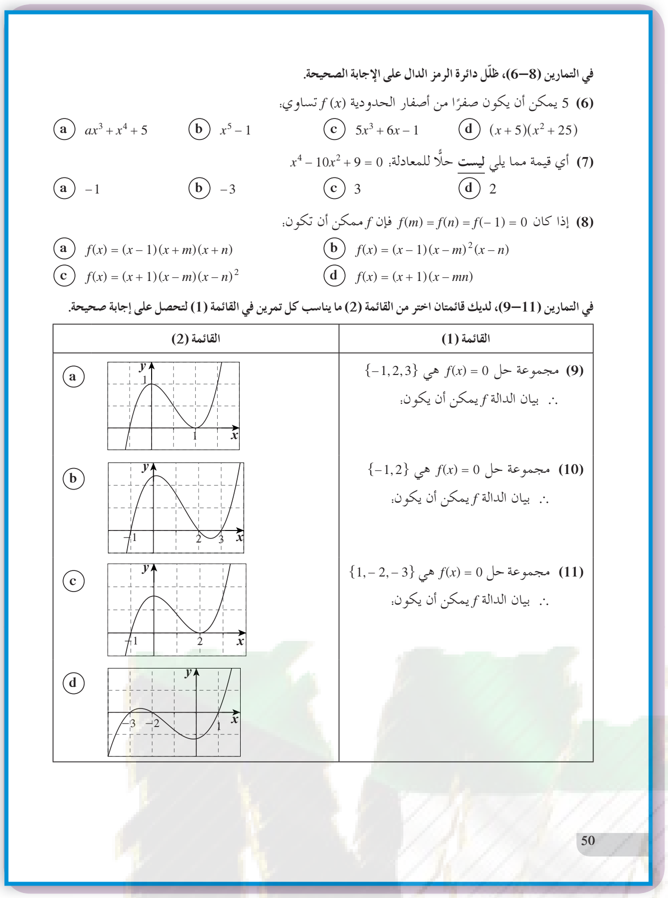
مجموعة الحل = $\{-2, -1, 2\}$

أو: $x^2(x+1) - 4(x+1) = 0$

$\Longrightarrow (x+1)(x^2 - 4) = 0$

$\Longrightarrow (x+1)(x-2)(x+2) = 0$

مجموعة الحل = $\{-2, -1, 2\}$



في التمارين (8–6)، ظلّل دائرة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) 5 يمكن أن يكون صفرًا من أصفار الحدودية $f(x)$ تساوي:

(a) ax^3+x^4+5 (b) x^5-1 (c) $5x^3+6x-1$ (d) $(x+5)(x^2+25)$

(7) أي قيمة مما يلي ليست حلًا للمعادلة: $x^4-10x^2+9=0$

(a) -1 (b) -3 (c) 3 (d) 2

(8) إذا كان $f(m)=f(n)=f(-1)=0$ فإن f ممكن أن تكون:

(a) $f(x)=(x-1)(x+m)(x+n)$ (b) $f(x)=(x-1)(x-m)^2(x-n)$

(c) $f(x)=(x+1)(x-m)(x-n)^2$ (d) $f(x)=(x+1)(x-mn)$

في التمارين (11–9)، لديك قائمتان اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

القائمة (1)	القائمة (2)
(9) مجموعة حل $f(x)=0$ هي $\{-1,2,3\}$ ∴ بيان الدالة f يمكن أن يكون:	(a)
(10) مجموعة حل $f(x)=0$ هي $\{-1,2\}$ ∴ بيان الدالة f يمكن أن يكون:	(b)
(11) مجموعة حل $f(x)=0$ هي $\{1,-2,-3\}$ ∴ بيان الدالة f يمكن أن يكون:	(c)
	(d)

50

2 $x^4-3x^3-7x^2+27x-18=0$

عوامل الحد الثابت: $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6,\pm9,\pm18$

عوامل العامل الرئيسي ±1، فتكون الأصفار النسبية هي:

$\pm1,\pm2,\pm3,\pm6,\pm9,\pm18$

1 هو صفر للمعادلة:

$(1)^4-3(1)^3-7(1)^2+27(1)-18=0$

2 هو صفر للمعادلة:

$(2)^4-3(2)^3-7(2)^2+27(2)-18=0$

وبالتالي، $(x-1),(x-2)$ عاملان للمعادلة

تقسم على $(x-1)(x-2)$

$$\begin{array}{r l}
 & x^2-9 \\
x^2-3x+2 \big) & x^4-3x^3-7x^2+27x-18 \\
 & -x^4+3x^3-2x^2 \\
\hline
 & -9x^2+27x-18 \\
 & +9x^2-27x+18 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

ويصبح تحليل المعادلة:

$(x-2)(x-1)(x-3)(x+3)=0$

مجموعة الحل $0=\{-3,1,2,3\}$

«تدريب»

(a) $\pm1,\pm3$

(b) $\pm1,\pm3,\pm9,\pm27$

المرشد لحل المسائل

إجابة «مسألة إضافية»

ليكن x طول ضلع القطعة الخشبية التي قصت من الشكل فيكون حجمها $\frac{1}{2}x^2$

نكتب المعادلة:

$$V = 4\left(\frac{1}{2}x^2\right) + 7\,200$$
$$= 2x^2 + 7\,200$$

أقرب عدد صحيح مكعب إلى 7 200 هو 8 000

وبالتالي، طول ضلع الخشبة 20 cm

لاحظ أن: $19^3 = 6\,859 < 7\,200$

المرشد لحل المسائل

اكتب دالة كثيرة الحدود تعبّر عن الحجم. ثم مثّل الدالة بيانيًّا لحل المسألة.

الهندسة: أخذت قطعة من الجبنة بسماكة 2 cm من أحد قوالب الجبنة كما هو مبين في الشكل.

يبلغ حجم القسم الباقي $224\ cm^3$ أوجد أبعاد قالب الجبنة الأساسي.

نستخدم الآلة الحاسبة البيانية في حل المسألة

كيف تفكّر؟

من الشكل، يبدو أن العمق والارتفاع متساويان في كلتا القطعتين.

أستطيع طرح طول القطعة الصغيرة من طول القالب الأساسي لإيجاد الطول المتبقي.

ماذا تكتب؟

الطول المتبقي = $4x$ − طول القطعة

= $4x - 2$

من المعطى، حجم القالب المتبقي $224\ cm^3$

أستطيع كتابة علاقة، أعوّض ثم أبسّط.

حجم القالب المتبقي = الطول × العرض × الارتفاع

$$V = l \cdot w \cdot h$$
$$224 = (4x-2)(x)(x)$$
$$224 = 4x^3 - 2x^2$$

المعادلة تكعيبية ويطلب إليّ حلّها بيانيًّا.

سأمثل المعادلتين وأجد التقاطع. $y_1 = 4x^3 - 2x^2$, $y_2 = 224$

سأعدل الشاشة لتتناسب مع القيمة $y = 224$

استخدم خاصية التقاطع.

$x = 4$, $y = 224$

استخدم قيمة x لإيجاد أبعاد القالب الأساسي.

العرض = الارتفاع = $x = 4$

الطول = $4x = 4(4) = 16$

أبعاد قالب الجبنة: 4cm , 4cm , 16cm

مسألة إضافية

قطعة خشبية مكعبة الشكل (طول ضلعها عدد صحيح)، قصت منها 4 قطع على شكل مكعب بسماكة $\frac{1}{2}$ cm

حجم القطعة المتبقية يساوي $7\,200\ cm^3$

أوجد طول ضلع قطعة الخشب الأساسية.

122

مخطط تنظيمي للوحدة الثالثة

ملخص

- تكون دالة القوى على الشكل: $y = ax^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$, $a \neq 0$
- الدالة الزوجية هي دالة مجال تعريفها D، تحقق: $\forall x, -x \in D$, $f(-x) = f(x)$ والعكس صحيح.
- في مستوى إحداثي، المحور الصادي هو محور تماثل لبيان الدوال الزوجية.
- الدالة الفردية هي دالة مجال تعريفها D، تحقق: $\forall x, -x \in D$, $f(-x) = -f(x)$ والعكس صحيح.
- نقطة الأصل هي نقطة تماثل لبيان الدوال الفردية.
- إذا كانت النقطة (a, b) تقع على بيان دالة ما فإن (b, a) تقع على بيان معكوسها.
- الدالة الحدودية $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ حيث n عدد صحيح غير سالب، $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ أعداد حقيقية.
- في الصورة العامة لدالة حدودية ترتب الحدود تنازليًّا وتجمع الحدود المتشابهة.
- يصف سلوك النهاية لرسم بياني امتداد طرفيه الأيمن والأيسر.
- القيمة العظمى هي أكبر قيمة لِـ y في فترة محددة.
- القيمة الصغرى هي أصغر قيمة لِـ y في فترة محددة.
- المقدار $(x - a)$ هو عامل خطي لكثيرة الحدود إذا وفقط إذا a صفر من أصفار كثيرة حدود.
- إذا قسمت كثيرة الحدود $f(x)$ من الدرجة $n \geq 1$ على $(x - a)$ حيث a ثابت فإن الباقي هو $f(a)$
- بفرض أن $a_n \neq 0$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ حيث $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ أعداد صحيحة فتكون مجموعة الأصفار النسبية الممكنة لِـ $f(x)$ هي:

  $\{\frac{a}{b} : a$ عامل من عوامل الحد الثابت a_0، b عامل من عوامل المعامل الرئيسي $a_n\}$

123

اختبار الوحدة الثالثة

في التمارين (4—1)، أوجد معكوس كل دالة مما يلي:

(1) $y = \frac{1}{2}x^4$ **(2)** $y = (x+1)^3$ **(3)** $y = (x+1)^2 - 3$ **(4)** $y = \sqrt{x+5}$

في التمارين (7—5)، اكتب كل دالة كثيرة حدود في الصورة العامة، ثم صنّفها بحسب عدد الحدود وبحسب الدرجة.

(5) $f(x) = 3x^2 - 7x^4 + 9 - x^4$ **(6)** $f(x) = 11x^2 + 8x - 3x^2$ **(7)** $f(x) = 2x(x-3)(x+2)$

في التمرينين (9—8)، أوجد أصفار الدالة ثم ارسم بيانًا تقريبيًّا لها مراعيًا سلوك النهاية. (قرّب إلى أقرب جزء من عشرة عند الضرورة).

(8) $f(x) = x(x-3)(x+2)$ **(9)** $f(x) = (x-2)^2(x-1)$

في التمارين (13—10)، حلّ كل معادلة. أعط الإجابة الدقيقة أو قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

(10) $(x-3)(x^2+3x-4) = 0$ **(11)** $(x+2)(x^2+5x+1) = 0$

(12) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ **(13)** $x^4 - 2x^2 - x + 2 = 0$

في التمرينين (15—14)، اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة إذا علمت أصفارها:

(14) $0, 4, -2$ **(15)** $2, -1$ (مكرر مرتين)

في التمرينين (17—16)، اقسم مستخدمًا قسمة كثيرة الحدود المطولة.

(16) $(x^3 + 7x^2 - 36) \div (x+3)$ **(17)** $(x^3 + 7x^2 - 5x - 6) \div (x+2)$

في التمرينين (19—18)، اقسم مستخدمًا القسمة التركيبية.

(18) $(x^3 + x^2 + x - 14) \div (x-3)$ **(19)** $(x^4 - 5x^2 + 4x + 12) \div (x+1)$

في التمرينين (21—20)، استخدم القسمة التركيبية ونظرية الباقي لإيجاد $f(a)$

(20) $f(x) = 2x^4 + 19x^3 - 2x^2 - 44x - 24 \;,\; a = \frac{-2}{3}$

(21) $f(x) = -x^3 - x^2 + x \;,\; a = 0$

تمارين إثرائية

(1) لتكن: $g(x) = (m+1)x^3 + 11x^2 + 4x - 4$

أوجد قيمة m بحيث يكون $\frac{1}{2}$ أحد أصفار كثيرة الحدود.

(2) أوجد مجموعة حل:

(a) $2x^4 + x^3 - 11x^2 + 11x - 3 = 0$ **(b)** $4x^4 - x^2 + 6x - 9 = 0$

(3) أوجد قيمة a بحيث تكون: $f(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - (a+5)x - (a-3)$ قابلة للقسمة على $(x+1)^2$

(4) بسّط ما يلي: $\frac{x^3 - 7x + 6}{x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6}$

(5) $g(x) = 4x^4 - 11x^3 - 2x^2 + 23x - 14$

(a) حلّل $g(x)$ إلى عوامل.

(b) أوجد مجموعة حل المعادلة: $g(x) = 0$. قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

(6) لتكن: $f(x) = x^3 - (3a+2b)x^2 + (a+b)x$

(a) أوجد قيم a, b بحيث تكون $(x-1), (x-2)$ من عوامل $f(x)$

(b) حلّل في هذه الحالة $f(x)$ إلى عوامل.

(7) أوجد دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية تقبل القسمة على $(2x-1), (x+5)$ وباقي قسمتها على $(x-3)$ يساوي 40

(8) لتكن: $g(x) = x^3 + 8$

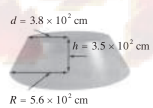
(a) أوجد صفرًا لكثيرة الحدود.

(b) حلّل $g(x)$ إلى عوامل.

(9) **(a)** اكتب $V(x) = (x^2 + ax + b)^2$ في الصورة العامة.

(b) أثبت أن: $f(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$ هي مربع لكثيرة حدود من الدرجة الثانية.

(10) أوجد نموذجًا تكعيبيًّا للدالة التي تمر في: $(2,0), (1,-1), (0,0), (-1,-3)$، ثم استخدم هذا النموذج لتقدير قيمة y عندما $x = 17$



(11) **الهندسة:** استخدم العلاقة: $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rd + d^2)$، لإيجاد حجم المخروط الناقص الموضح في الشكل.

اكتب إجابتك في الصورة العلمية.

(12) **الهندسة:** صندوق يقل عرضه 2 m عن طوله، و يقل ارتفاعه 1 m عن طوله.

أوجد طول الصندوق عندما يكون حجمه $60\ m^3$

(13) تريد شركة للتخزين صنع صندوق للتخزين حجمه مثلي حجم أكبر صندوق تخزين لديها، إذا كانت أبعاد أكبر صندوق تخزين لديها هي 120 cm طولًا، 100 cm عرضًا، 90 cm ارتفاعًا، ويراد صنع الصندوق الجديد بزيادة كل بعد المقدار نفسه، فأوجد الزيادة في كل بعد.

(14) **الحساب الذهني:** إذا كان ناتج ضرب ثلاثة أعداد صحيحة متتالية: $(n-1), n, (n+1)$ هو 210، فاكتب معادلة وأوجد حلها لإيجاد الأعداد.

(15) **الهندسة:** حجم خزّان (V) يمثّل بالدالة: $V(x) = x^3 + 8x^2 + 15x$. لنفرض أن x تمثل العرض، $x+3$ تمثّل الطول، $x+5$ تمثل الارتفاع، حجم الخزّان $70\ m^3$، فما أبعاده؟