الوحدة التاسعة: تطبيقات على حساب المثلثات

Applications of Trigonometry

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

9 – 1: المتطابقات المثلثية

جزء 1: المتطابقات المثلثية الأساسية.

جزء 2: متطابقات الدوال المثلثية الزوجية أو الفردية.

جزء 3: تحليل المقادير المثلثية.

9 – 2: إثبات صحة متطابقات مثلثية

جزء 1: إثبات صحة المتطابقات.

9 – 3: حل معادلات مثلثية

جزء 1: حل معادلات مثلثية.

جزء 2: معادلات تحتوي على مضاعفات الزوايا.

9 – 4: متطابقات المجموع والفرق

جزء 1: متطابقات الدوال المتكافئة.

جزء 2: متطابقات المجموع والفرق.

9 – 5: متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

جزء 1: متطابقات ضعف الزاوية.

جزء 2: متطابقات نصف الزاوية.

مقدمة الوحدة

من المتعارف عليه أن الصوت ينتج من اهتزاز الأجسام وهو يتكوّن من موجات متلاحقة، فالنغمات الموسيقية التي تتمتع الآذان بسماعها هي موجات تنشأ من اهتزاز الأوتار المشدودة لهذه الآلات، فتصل إلينا عبر الهواء. وعندما يتكلم الإنسان فإن الصوت ينتج من اهتزاز الأوتار الصوتية للحنجرة.

تنتقل موجات الصوت عبر الغازات والسوائل والأجسام الصلبة، ولكن لا تنتقل عبر الفراغ.

إذا ألقيت حجرًا صغيرًا في بركة ماء ساكنة فسوف تشاهد سلسلة من الدوائر تتسع شيئًا فشيئًا، مبتعدة عن النقطة التي لامس فيها الحجر سطح الماء. وهكذا تتحرك أمواج الصوت.

تعتبر موجة الصوت في السوائل والغازات موجة طولية وهي أيضًا في الهواء، أما موجة الصوت في المواد الصلبة فهي موجة عرضية.

تعتمد سرعة الصوت على الوسط الذي ينقلها حيث تبلغ في الهواء 343 m في الثانية عند درجة حرارة °20، وتبلغ هذه السرعة 1407 m في الثانية في الماء عند درجة الصفر.

إذا اعتبرنا أن سرعة الصوت c وتردد موجة الصوت f وطول الموجة الصوتية (المسافة بين موجتين متتاليتين) λ فتكون $\lambda = \frac{c}{f}$، ويحتسب عادة تردد موجة الصوت بالهرتز (Hertz).

يعتبر الصوت أحد المظاهر الأساسية التي يستخدمها الإنسان والحيوان في حياتهما اليومية، وذلك عن طريق حاسة السمع (الأذن) والتي بواسطتها يتم تحويل الصوت من موجات صوتية إلى إشارات كهربائية.

يواجه الإنسان مشكلة مع الموجات الصوتية التي يقل ترددها عن 20 Hertz حيث لا تستطيع الأذن البشرية التقاطها أو الإحساس بها، وهي ناتجة عن الاهتزازات والانزلاقات لطبقات القشرة الأرضية والتي ينتج عنها زلازل وبراكين.

الوحدة التاسعة

تطبيقات على حساب المثلثات

Applications of Trigonometry

مشروع الوحدة: الموجات الصوتية

1 مقدمة المشروع: أنت تسمع في الإذاعات عن تردد الموجات الصوتية وقياساتها وكيف تصل إلى مسامعك من خلال موجات متتالية لها قوانين ووحدات قياس معروفة.

2 الهدف: قياس بعض الموجات البسيطة.

3 اللوازم: ورق رسم بياني — آلة حاسبة علمية.

4 أسئلة حول التطبيق: نربط خيطًا مطاطيًا من طرفيه بوتدين ثابتين. إذا ضغطنا على الخيط عموديًا في نقطة، ثم تركناه نلاحظ أنه يهتز محدثًا موجات صوتية متتالية وخفيفة. لنفرض أنه لا يوجد أي احتكاك أو صدى، يمكن نمذجة هذه الموجات بالمعادلة:

$y = y_m \sin(kx - wt)$، حيث: y_m هي السعة بالأمتار (m)؛ k و w هما كميتان ثابتتان؛ t هو الزمن؛ x هي المسافة من أحد طرفي الخيط إلى نقطة الضغط.

يتأثّر تردد الموجة الصوتية بالمسافة x وبالزمن t، لذلك للموجة حركتان أفقية وعمودية عبر الزمن. لنأخذ المعادلة:

$$y = 0.00421 \sin(68.3x - 2.68t)$$

a ما سعة الموجة y_m؟ وما الثابت w بالراديان في الثانية؟

b إنّ تردد الموجات الصوتية هو عدد الاهتزازات في الثانية ويعطى بالقانون: $f = \frac{w}{2\pi}$ ووحدته هرتز Hertz.
أوجد تردد الموجة أعلاه.

c طول الموجة الصوتية λ هو أقصر مسافة تتكرر فيها الموجة في فترة زمنية محددة t. يعطى طول الموجة بالقانون: $\lambda = \frac{2\pi}{k}$.
فما طول الموجة أعلاه؟

d مثّل بيان الدالة إذا كانت $x = 1\text{ m}$

e تتردد موجتان معًا على الخيط نفسه. وينمذج تردد الموجتين معًا بالمعادلة:
$y = y_1 + y_2$، حيث: $y_1 = y_m \sin(kx - wt)$، $y_2 = y_m \sin(kx - wt + \varphi)$، حيث φ تمثّل الفرق بين الموجتين بإزاحة أفقية ثابتة.
مستخدمًا المتطابقات المثلثية اكتب: $y = y_1 + y_2$ كناتج ضرب. [إرشاد: $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$]

f أوجد y_1 , y_2 ثم y في حالة: $f = 2.3$ hertz , $\lambda = 0.09$ m , $\varphi = 2.5$ radians , $y_m = 0.0045$ m.
مثّل بيان كل من y_1، y_2، y في نظام إحداثي واحد، علمًا أن $x = 1\text{ m}$.

5 التقرير: اكتب تقريرًا مفصلًا يبيّن خطوات العمل التي قمت بها وأشر إلى المتطابقات المثلثية التي استعنت بها.
أرفق تقريرك بالتمثيلات البيانية الملونة.

دروس الوحدة

المتطابقات المثلثية	إثبات صحة متطابقات مثلثية	حل معادلات مثلثية	متطابقات المجموع والفرق	متطابقات ضعف الزاوية ونصفها
9 – 1	9 – 2	9 – 3	9 – 4	9 – 5

80

تستطيع بعض الحيوانات الإحساس بالزلازل قبل حدوثها مثل القطط والكلاب.

يستطيع الإنسان التقاط موجات صوتية يقع ترددها بين 20 Hertz و 20 000 Hertz وينخفض هذا المدى عند كبار السن إلى 12 000 Hertz،

أما الموجات الصوتية التي يزيد ترددها عن 20 000 Hertz فهي تقع خارج نطاق التقاطها من الأذن البشرية حيث إن طول موجاتها يعتبر صغيرًا جدًّا.

لموجة صوت مقام مرتفع أو مقام منخفض بحسب ترددها، ويمكن تمييز صوت الأطفال أثناء اللعب بالمقارنة مع الأكبر منهم سنًّا.

تحيط الموجات الصوتية بنا طوال الوقت، فلا تمر ثانية إلا ونسمع أصواتًا منذ اللحظة التي نستيقظ فيها صباحًا حتى اللحظة التي ننام فيها ليلًا.

مشروع الوحدة

يزود مشروع الوحدة الطلاب بمعلومات أولية عن انتشار الموجات الصوتية وكيفية قياس ترددها وطولها. ويساعد على الربط بين هذه الموجات والدوال الجيبية.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

4 **(a)** $y = y_m \sin(kx - wt)$

$y = 0.00421 \sin(68.3x - 2.68t)$

فتكون: $y_m = 0.00421$ (السعة)

$w = 2.68 \text{ rad/s}$

(b) $f = \dfrac{w}{2\pi} = \dfrac{2.68}{2\pi} \approx 0.43 \text{ Hz}$

(c) $\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2\pi}{68.3} \approx 0.092 \text{ m/s}$

(طول موجة الصوت)

(d) $y = 0.00421 \sin(68.3 - 2.68t)$

تحقق من الرسوم البيانية.

(e) $y = y_1 + y_2$

$= y_m \sin(kx - wt) + y_m \sin(kx - wt + \varphi)$

$= 2y_m \sin\left(kx - wt + \dfrac{\varphi}{2}\right) \times \cos\dfrac{\varphi}{2}$

(f) $f = \dfrac{w}{2\pi} = 2.3$

$\Longrightarrow w = 4.6\pi$

$\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = 0.09$

$\Longrightarrow k = \dfrac{2\pi}{0.09} \approx 69.8$

$y_1 = 0.0045 \sin\left(\dfrac{2\pi}{0.09} - 4.6\pi t\right)$

$= 0.0045 \sin(69.8 - 4.6\pi t)$

$y_2 = 0.0045 \sin\left(\dfrac{2\pi}{0.09} - 4.6\pi t + 2.5\right)$

$= 0.0045 \sin(72.3 - 4.6\pi t)$

$y = 2(0.0045) \sin\left(\dfrac{2\pi}{0.09} - 4.6\pi t + 1.25\right) \cos(1.25)$

$= 0.009 \sin\left(\dfrac{2\pi}{0.09} - 4.6\pi t + 1.25\right) \cos(1.25)$

$= 0.00283 \sin(71.05 - 4.6\pi t)$

تحقّق من الرسوم البيانية.

الوحدة التاسعة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت تحديد الدوال المثلثية.
- تعلمت التمثيلات البيانية لدوال: الجيب، جيب التمام، الظل.
- تعلمت القيم المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.
- تعلمت مجال ودورة وسعة الدوال المثلثية: الجيب، جيب التمام، الظل.

ماذا سوف تتعلم؟

- استخدام المتطابقات الأساسية في تبسيط المقادير المثلثية وتحليلها.
- إثبات صحة المتطابقات جبريًّا وبيانيًّا.
- حل المعادلات المثلثية جبريًّا وبيانيًّا.
- متطابقات مجموع زاويتين.
- متطابقات الفرق بين زاويتين.
- متطابقات ضعف الزاوية.
- متطابقات نصف الزاوية.

المصطلحات الأساسية

المتطابقات المثلثية الأساسية – متطابقات المقلوب – متطابقات الظل وظل التمام – متطابقات فيثاغورث – متطابقات الدوال المثلثية الزوجية أو الفردية – متطابقة الدوال المتكافئة – متطابقات المجموع والفرق – متطابقات الضعف والنصف.

أضف إلى معلوماتك

احتل علم المثلثات مكانة مرموقة في الرياضيات عند العلماء العرب والمسلمين. وقد شكل نقطة وصل بين الرياضيات وعلم الفلك. فأطلق أولئك العلماء عليه اسم «علم النسب».

وساعد كثيرًا من خلال المسائل المتعلقة به على تطوير «الحساب التقريبي».

من الأسباب الرئيسة التي دفعت العلماء المسلمين إلى حساب المثلثات، وبصورة خاصة المثلثات الكروية، هي ضرورة إكمال حسابات النجوم والفلك والشمس وتحديد جهة القبلة لتأدية الصلاة، أي تحديد اتجاه مدينة مكة المكرمة بالنسبة إلى كل مدينة أو قرية.

81

التقرير

يجب أن يكون التقرير مفصّلًا يتضمن خطوات الحلول والتمثيلات البيانية المطلوبة.

اعرض أمام زملائك في غرفة الصف كل النتائج التي توصلت إليها. أعد النظر في بعض الحسابات إذا كان ذلك ضروريًّا. ناقش معهم التمثيلات البيانية التي وضعتها وتأكد من صحتها وسلامتها من الأخطاء.

سلّم التقييم

4	الحسابات صحيحة بالكامل – التمثيلات البيانية واضحة ودقيقة – التقرير مفصل وواضح ويتضمن كل النتائج المطلوبة.
3	معظم الحسابات صحيحة – التمثيلات البيانية واضحة مع بعض الأخطاء – التقرير مفصل وواضح ويتضمن النتائج المطلوبة.
2	بعض الحسابات صحيحة – معظم التمثيلات البيانية تشوبها الأخطاء – التقرير غير منظم وبحاجة إلى إعادة.
1	معظم عناصر المشروع ناقصة وبحاجة إلى إعادة.

1–9: المتطابقات المثلثية

1 الأهداف

- يتعرف المتطابقات المثلثية الأساسية.
- يبسّط المقادير المثلثية.
- يحلّل المقادير المثلثية.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

متطابقة – متطابقة فيثاغورث – متطابقات مثلثية – تبسيط – تحليل.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة بيانية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

بسّط ما يلي:

(a) $(2x+3)^2-4x^2$

(b) $x^2-x(1+3x)$

(c) $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{4x}{x+1}$

حلّل المقادير التالية إلى عوامل:

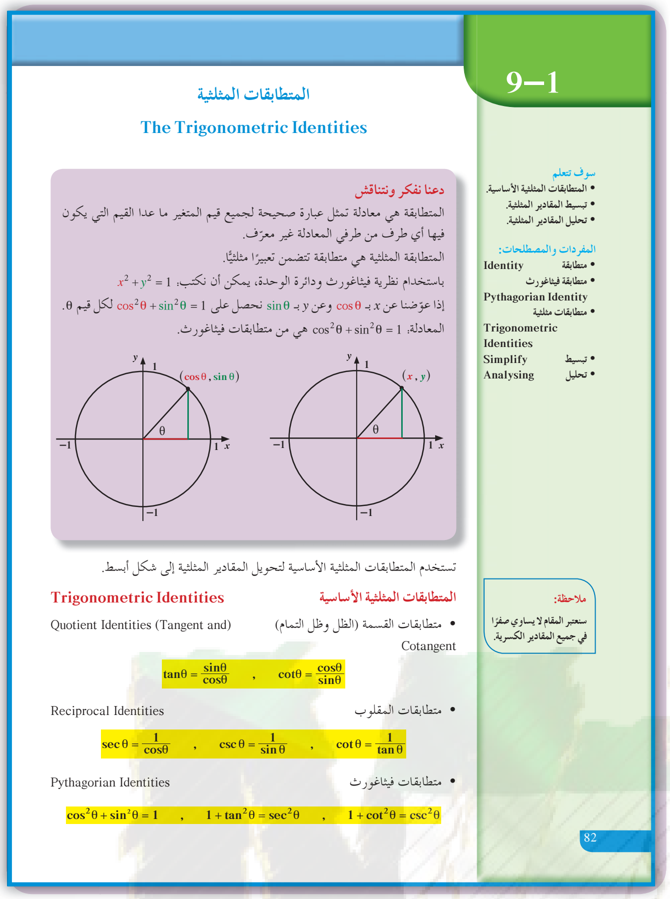
(a) $y=x^2-9x+20$

(b) $y=3x^2+10x-8$

(c) $y=x^3-3x^2+2x$

5 التدريس

تعرف الطلاب سابقًا على متطابقات جبرية واستخدموها في تبسيط مقادير جبرية مختلفة، لذا لا بد من التذكير كما ورد في فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» بتعريف المتطابقة. ركز مع الطلاب قبل البدء في هذا الدرس على بعض المتطابقات الجبرية لتريهم مدى أهمية فهم المتطابقة.



9–1

المتطابقات المثلثية

The Trigonometric Identities

سوف تتعلم
- المتطابقات المثلثية الأساسية.
- تبسيط المقادير المثلثية.
- تحليل المقادير المثلثية.

المفردات والمصطلحات:
- متطابقة Identity
- متطابقة فيثاغورث Pythagorian Identity
- متطابقات مثلثية Trigonometric Identities
- تبسيط Simplify
- تحليل Analysing

دعنا نفكر ونتناقش

المتطابقة هي معادلة تمثل عبارة صحيحة لجميع قيم المتغير ما عدا القيم التي يكون فيها أي طرف من طرفي المعادلة غير معرّف.

المتطابقة المثلثية هي متطابقة تتضمن تعبيرًا مثلثيًا.

باستخدام نظرية فيثاغورث ودائرة الوحدة، يمكن أن نكتب: $x^2+y^2=1$

إذا عوّضنا عن x بـ $\cos\theta$ وعن y بـ $\sin\theta$ نحصل على $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ لكل قيم θ.

المعادلة: $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ هي من متطابقات فيثاغورث.

تستخدم المتطابقات المثلثية الأساسية لتحويل المقادير المثلثية إلى شكل أبسط.

ملاحظة: سنعتبر المقام لا يساوي صفرًا في جميع المقادير الكسرية.

المتطابقات المثلثية الأساسية Trigonometric Identities

- متطابقات القسمة (الظل وظل التمام) Quotient Identities (Tangent and Cotangent)

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

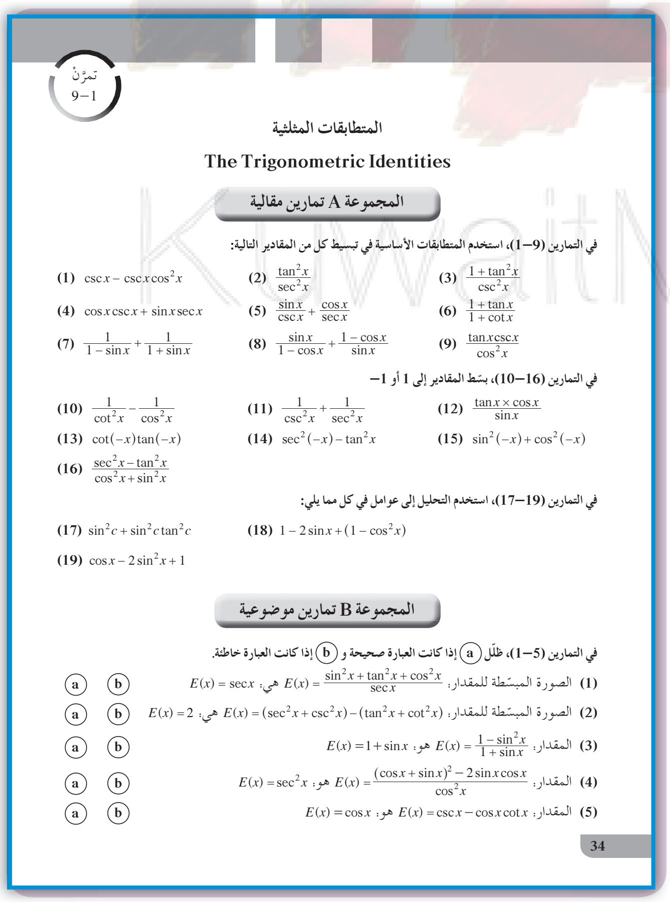
- متطابقات المقلوب Reciprocal Identities

$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta} \quad , \quad \csc\theta=\frac{1}{\sin\theta} \quad , \quad \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$$

- متطابقات فيثاغورث Pythagorian Identities

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1 \quad , \quad 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta \quad , \quad 1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$$

82



تمرّنْ 9–1

المتطابقات المثلثية

The Trigonometric Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–9)، استخدم المتطابقات الأساسية في تبسيط كل من المقادير التالية:

(1) $\csc x-\csc x\cos^2 x$ **(2)** $\dfrac{\tan^2 x}{\sec^2 x}$ **(3)** $\dfrac{1+\tan^2 x}{\csc^2 x}$

(4) $\cos x\csc x+\sin x\sec x$ **(5)** $\dfrac{\sin x}{\csc x}+\dfrac{\cos x}{\sec x}$ **(6)** $\dfrac{1+\tan x}{1+\cot x}$

(7) $\dfrac{1}{1-\sin x}+\dfrac{1}{1+\sin x}$ **(8)** $\dfrac{\sin x}{1-\cos x}+\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ **(9)** $\dfrac{\tan x\csc x}{\cos^2 x}$

في التمارين (10–16)، بسّط المقادير إلى 1 أو 1–

(10) $\dfrac{1}{\cot^2 x}-\dfrac{1}{\cos^2 x}$ **(11)** $\dfrac{1}{\csc^2 x}+\dfrac{1}{\sec^2 x}$ **(12)** $\dfrac{\tan x\times\cos x}{\sin x}$

(13) $\cot(-x)\tan(-x)$ **(14)** $\sec^2(-x)-\tan^2 x$ **(15)** $\sin^2(-x)+\cos^2(-x)$

(16) $\dfrac{\sec^2 x-\tan^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}$

في التمارين (17–19)، استخدم التحليل إلى عوامل في كل مما يلي:

(17) $\sin^2 c+\sin^2 c\tan^2 c$ **(18)** $1-2\sin x+(1-\cos^2 x)$

(19) $\cos x-2\sin^2 x+1$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الصورة المبسّطة للمقدار: $E(x)=\dfrac{\sin^2 x+\tan^2 x+\cos^2 x}{\sec x}$ هي: $E(x)=\sec x$ (a) (b)

(2) الصورة المبسّطة للمقدار: $E(x)=(\sec^2 x+\csc^2 x)-(\tan^2 x+\cot^2 x)$ هي: $E(x)=2$ (a) (b)

(3) المقدار: $E(x)=\dfrac{1-\sin^2 x}{1+\sin x}$ هو: $E(x)=1+\sin x$ (a) (b)

(4) المقدار: $E(x)=\dfrac{(\cos x+\sin x)^2-2\sin x\cos x}{\cos^2 x}$ هو: $E(x)=\sec^2 x$ (a) (b)

(5) المقدار: $E(x)=\csc x-\cos x\cot x$ هو: $E(x)=\cos x$ (a) (b)

34

مثال على ذلك:

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ هي متطابقة لكل قيم x , y

ولكن: $\sin x + \cos x = 1$ قد تكون صحيحة لبعض قيم x

مثل:

$x = 0$ يكون $\sin 0 + \cos 0 = 1$

$x = \frac{\pi}{2}$ يكون $\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1$

$x = 2\pi$ يكون $\sin 2\pi + \cos 2\pi = 1$

$x = \frac{5\pi}{2}$ يكون $\sin\frac{5\pi}{2} + \cos\frac{5\pi}{2} = 1$

والسؤال: هل هي صحيحة لكل قيم x؟ بالطبع لا، لأن:

$x = \frac{\pi}{6}$ يكون $\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{1+\sqrt{3}}{2} \neq 1$

$x = \frac{\pi}{4}$ يكون $\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \neq 1$

بالتالي $\sin x + \cos x = 1$ ليست متطابقة.

وهنا يكمن الفرق مع متطابقات فيثاغورث:

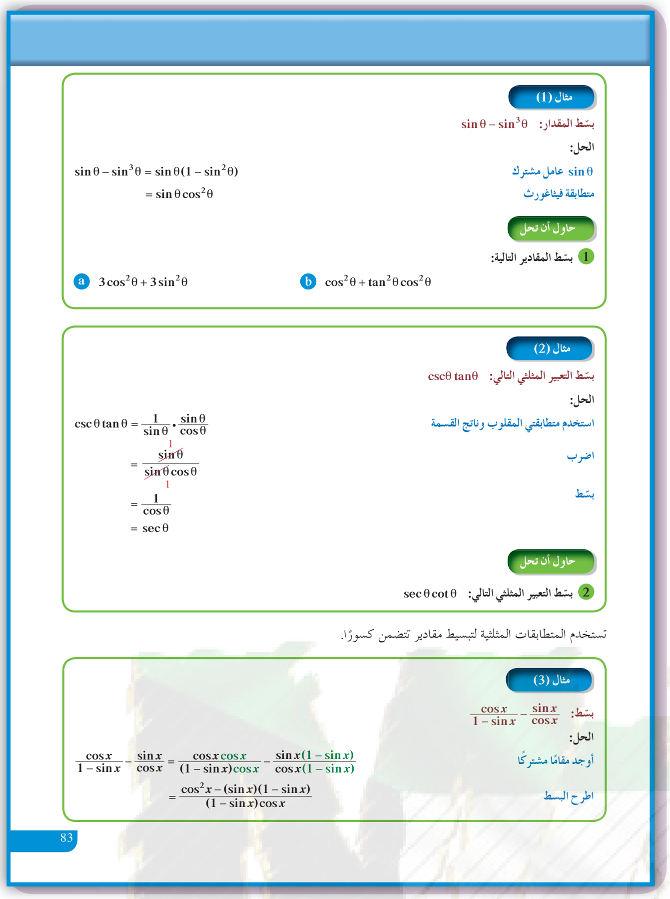
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$، $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$،

$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

وهي صحيحة لكل قيم $x \in (-\infty, +\infty)$

وتكمن أهمية المتطابقات المثلثية في أنها تساعد كثيرًا على تبسيط مقادير تتضمن تعابير مثلثية كما في الأمثلة (1), (2), (3), (4), (5) وهذا التبسيط يساعد على تحقيق عدة أهداف:

- يسهل عملية الحل إذا كان ذلك مطلوبًا.
- يسهل تمثيل المقدار بيانيًّا.



مثال (1)

بسّط المقدار: $\sin\theta - \sin^3\theta$

الحل:

$\sin\theta$ عامل مشترك

متطابقة فيثاغورث

$$\sin\theta - \sin^3\theta = \sin\theta(1-\sin^2\theta) = \sin\theta\cos^2\theta$$

حاول أن تحل

1 بسّط المقادير التالية:

a $3\cos^2\theta + 3\sin^2\theta$

b $\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta$

مثال (2)

بسّط التعبير المثلثي التالي: $\csc\theta\tan\theta$

الحل:

استخدم متطابقتي المقلوب وناتج القسمة

اضرب

بسّط

$$\csc\theta\tan\theta = \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\cancel{\sin\theta}^{\,1}}{\cancel{\sin\theta}_{\,1}\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

حاول أن تحل

2 بسّط التعبير المثلثي التالي: $\sec\theta\cot\theta$

تستخدم المتطابقات المثلثية لتبسيط مقادير تتضمن كسورًا.

مثال (3)

بسّط: $\frac{\cos x}{1-\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}$

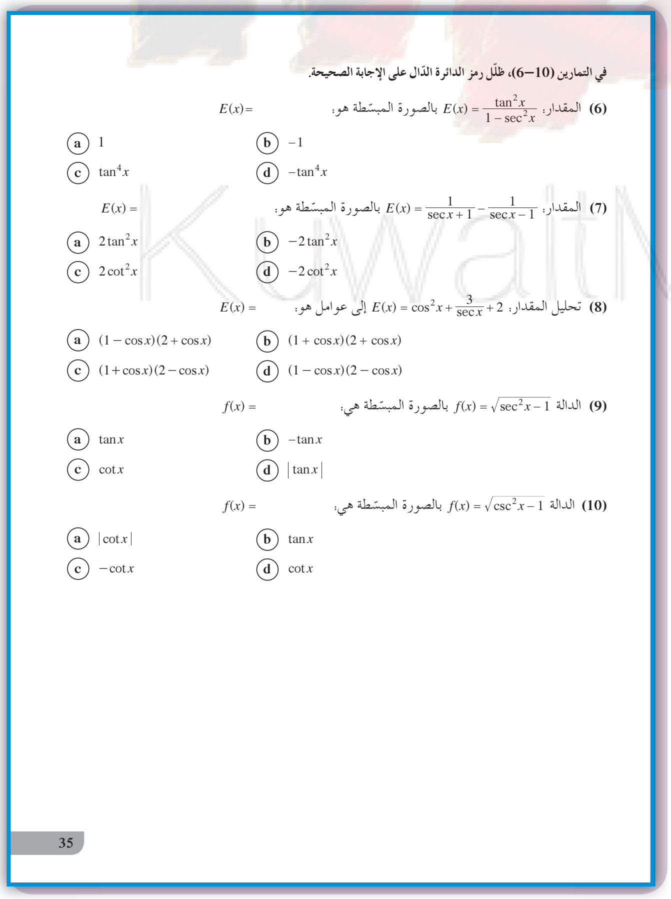
الحل:

أوجد مقامًا مشتركًا

اطرح البسط

$$\frac{\cos x}{1-\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x\cos x}{(1-\sin x)\cos x} - \frac{\sin x(1-\sin x)}{\cos x(1-\sin x)} = \frac{\cos^2 x - (\sin x)(1-\sin x)}{(1-\sin x)\cos x}$$

83



في التمارين (10–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) المقدار: $E(x) = \frac{\tan^2 x}{1-\sec^2 x}$ بالصورة المبسّطة هو: $E(x) =$

a 1 b -1

c $\tan^4 x$ d $-\tan^4 x$

(7) المقدار: $E(x) = \frac{1}{\sec x + 1} - \frac{1}{\sec x - 1}$ بالصورة المبسّطة هو: $E(x) =$

a $2\tan^2 x$ b $-2\tan^2 x$

c $2\cot^2 x$ d $-2\cot^2 x$

(8) تحليل المقدار: $E(x) = \cos^2 x + \frac{3}{\sec x} + 2$ إلى عوامل هو: $E(x) =$

a $(1-\cos x)(2+\cos x)$ b $(1+\cos x)(2+\cos x)$

c $(1+\cos x)(2-\cos x)$ d $(1-\cos x)(2-\cos x)$

(9) الدالة $f(x) = \sqrt{\sec^2 x - 1}$ بالصورة المبسّطة هي: $f(x) =$

a $\tan x$ b $-\tan x$

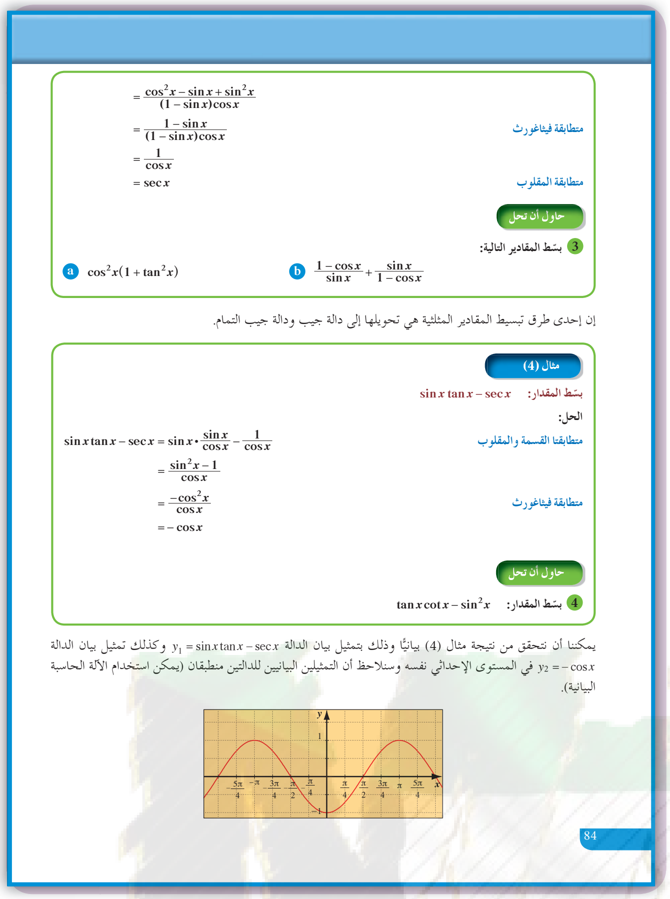
c $\cot x$ d $|\tan x|$

(10) الدالة $f(x) = \sqrt{\csc^2 x - 1}$ بالصورة المبسّطة هي: $f(x) =$

a $|\cot x|$ b $\tan x$

c $-\cot x$ d $\cot x$

35


$$= \frac{\cos^2 x - \sin x + \sin^2 x}{(1 - \sin x)\cos x}$$

متطابقة فيثاغورث $= \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)\cos x}$

$$= \frac{1}{\cos x}$$

متطابقة المقلوب $= \sec x$

حاول أن تحل

3 بسّط المقادير التالية:

a $\cos^2 x(1 + \tan^2 x)$

b $\frac{1 - \cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 - \cos x}$

إن إحدى طرق تبسيط المقادير المثلثية هي تحويلها إلى دالة جيب ودالة جيب التمام.

مثال (4)

بسّط المقدار: $\sin x \tan x - \sec x$

الحل:

متطابقتا القسمة والمقلوب $\sin x \tan x - \sec x = \sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x}$

$$= \frac{\sin^2 x - 1}{\cos x}$$

متطابقة فيثاغورث $= \frac{-\cos^2 x}{\cos x}$

$$= -\cos x$$

حاول أن تحل

4 بسّط المقدار: $\tan x \cot x - \sin^2 x$

يمكننا أن نتحقق من نتيجة مثال (4) بيانيًّا وذلك بتمثيل بيان الدالة $y_1 = \sin x \tan x - \sec x$ وكذلك تمثيل بيان الدالة $y_2 = -\cos x$ في المستوى الإحداثي نفسه وسنلاحظ أن التمثيلين البيانيين للدالتين منطبقان (يمكن استخدام الآلة الحاسبة البيانية).

84

كما أن المتطابقات المثلثية تساعد كثيرًا في تحليل مقادير تتضمن تعابير مثلثية إلى عوامل كما في المثالين (7) ,(6) بحيث يساعد هذا التحليل على إيجاد حلول لهذه المقادير إذا كان ذلك مطلوبًا.

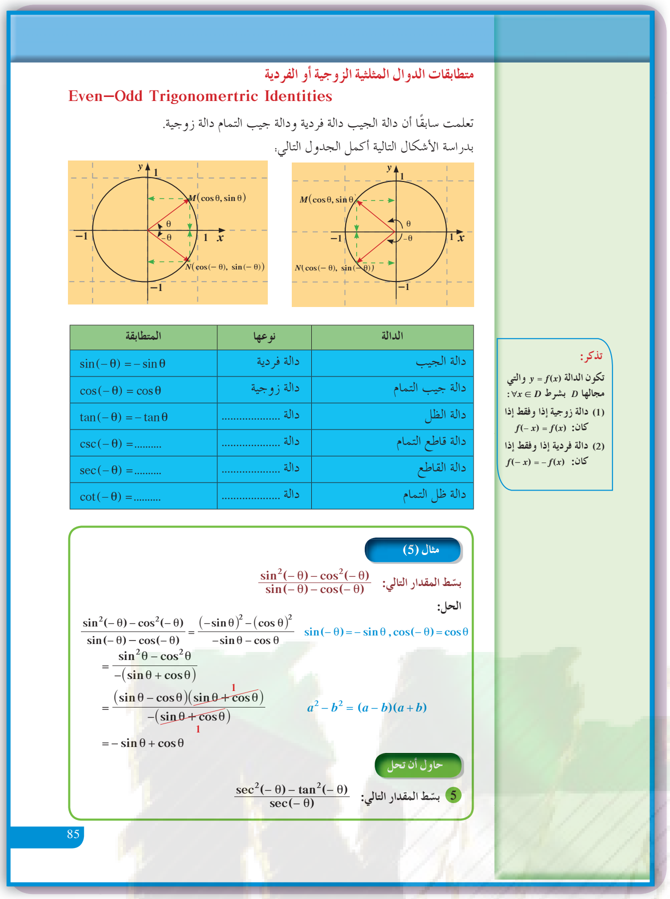
وهنا لا بد من الإشارة إلى الطلاب أنه لا يمكن تحليل مقدار يتضمن نسبًا مثلثية متعددة إلا إذا استخدمت المتطابقات المثلثية وكتب المقدار بدلالة نسبة مثلثية واحدة وهذا يبدو واضحًا في المثالين (7) ,(6).

6 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام المتطابقات المثلثية $\csc\theta, \sec\theta$. ذكرهم أن $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ ،$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ وذلك بكتابة كل واحدة عدة مرّات.

7 التقييم

توفر فقرات «حاول أن تحل» فرصة مهمة أمام المعلم للتعرف على كيفية تعامل الطلاب مع المتطابقات المثلثية.



متطابقات الدوال المثلثية الزوجية أو الفردية
Even–Odd Trigonomertric Identities

تعلمت سابقًا أن دالة الجيب دالة فردية ودالة جيب التمام دالة زوجية.

بدراسة الأشكال التالية أكمل الجدول التالي:

$M(\cos\theta, \sin\theta)$, $N(\cos(-\theta), \sin(-\theta))$

المتطابقة	نوعها	الدالة
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	دالة فردية	دالة الجيب
$\cos(-\theta) = \cos\theta$	دالة زوجية	دالة جيب التمام
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$	دالة	دالة الظل
$\csc(-\theta) =$..........	دالة	دالة قاطع التمام
$\sec(-\theta) =$..........	دالة	دالة القاطع
$\cot(-\theta) =$..........	دالة	دالة ظل التمام

تذكر: تكون الدالة $y = f(x)$ والتي مجالها D بشرط $\forall x \in D$:
(1) دالة زوجية إذا وفقط إذا كان: $f(-x) = f(x)$
(2) دالة فردية إذا وفقط إذا كان: $f(-x) = -f(x)$

مثال (5)

بسّط المقدار التالي: $\dfrac{\sin^2(-\theta) - \cos^2(-\theta)}{\sin(-\theta) - \cos(-\theta)}$

الحل:

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$

$$\frac{\sin^2(-\theta) - \cos^2(-\theta)}{\sin(-\theta) - \cos(-\theta)} = \frac{(-\sin\theta)^2 - (\cos\theta)^2}{-\sin\theta - \cos\theta}$$
$$= \frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{-(\sin\theta + \cos\theta)}$$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$= \frac{(\sin\theta - \cos\theta)\cancel{(\sin\theta + \cos\theta)}^{1}}{-\cancel{(\sin\theta + \cos\theta)}_{1}}$$
$$= -\sin\theta + \cos\theta$$

حاول أن تحل

5 بسّط المقدار التالي: $\dfrac{\sec^2(-\theta) - \tan^2(-\theta)}{\sec(-\theta)}$

85

اختبار سريع

1 أثبت أن: $\csc^2 x \cdot \sec^2 x - 2 = \tan^2 x + \cot^2 x$

$$\csc^2 x \cdot \sec^2 x - 2$$
$$= \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 2$$
$$= \frac{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$$
$$= \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x}$$
$$= \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$
$$= \tan^2 x + \cot^2 x$$

2 أثبت أن: $\tan^2 x - \cot^2 x = \sec^2 x - \csc^2 x$

$$\tan^2 x - \cot^2 x$$
$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$
$$= \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\cos^2 x \sin^2 x}$$
$$= \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x \cos^2 x}$$
$$= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x \times \sin^2 x}$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}$$
$$= \sec^2 x - \csc^2 x$$

3 حلّل المقدار: $\tan^2 x + 4\tan x \sec x - 3$

$$\tan^2 x + 4\tan x \sec x - 3$$
$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 4\frac{\sin x}{\cos^2 x} - 3$$
$$= \frac{\sin^2 x + 4\sin x - 3(1 - \sin^2 x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{4\sin^2 x + 4\sin x - 3}{\cos^2 x}$$
$$= \sec^2 x(2\sin x + 3)(2\sin x - 1)$$

تحليل المقادير المثلثية Factorising Trigonometric Expressions

يمكن تحليل المقادير المثلثية وذلك بكتابتها بدلالة دالة مثلثية واحدة.

مثال (6)

اكتب $1+\cos x-\sin^2 x$ في صورة ناتج ضرب عوامل.

الحل:

بسبب عدم إمكانية التحليل نستبدل $\sin^2 x$ بـ $1-\cos^2 x$

متطابقة فيثاغورث

$$\begin{aligned}1+\cos x-\sin^2 x &= 1+\cos x-(1-\cos^2 x)\\ &= 1+\cos x-1+\cos^2 x\\ &= \cos x+\cos^2 x\\ &= \cos x(1+\cos x)\end{aligned}$$

حاول أن تحل

6 اكتب $\sin^4 x-\sin^2 x$ في صورة ناتج ضرب عوامل.

مثال (7)

حلّل المقدار: $\sec^2 x+\tan x-3$

الحل:

نستبدل $\sec^2 x$ بـ $(1+\tan^2 x)$ ليكون المقدار بدلالة دالة مثلثية واحدة.

$$\sec^2 x+\tan x-3 = 1+\tan^2 x+\tan x-3$$

بسّط $= \tan^2 x+\tan x-2$

حلّل $= (\tan x-1)(\tan x+2)$

حاول أن تحل

7 حلّل المقدار: $\sin^2 x-\frac{5}{4}\sin x+\frac{3}{8}$

86

8 إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

1 (a) $3(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=3\times 1=3$

(b) $\cos^2\theta+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cos^2\theta$

$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

2 $\dfrac{1}{\cos\theta}\times\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta}=\csc\theta$

3 (a) $\cos^2 x\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)=1\,(\cos x\neq 0)$

(b) $\dfrac{(1-\cos x)^2+\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}=\dfrac{2-2\cos x}{\sin x(1-\cos x)}$

$=\dfrac{2}{\sin x}=2\csc x$

4 $1-\sin^2 x=\cos^2 x$

5 $\dfrac{1}{\cos\theta}-\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$

$=\dfrac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta}=\cos\theta$

6 $\sin^2 x(\sin^2 x-1)=-\sin^2 x\cos^2 x$

7 $\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)\left(\sin x-\frac{3}{4}\right)$

«متطابقات الدوال المثلثية الزوجية أو الفردية»

الدالة	نوعها	المتطابقة
دالة الجيب	دالة فردية	$\sin(-\theta)=-\sin\theta$
دالة جيب التمام	دالة زوجية	$\cos(-\theta)=\cos\theta$
دالة الظل	دالة فردية	$\tan(-\theta)=-\tan\theta$
دالة قاطع التمام	دالة فردية	$\csc(-\theta)=-\csc\theta$
دالة القاطع	دالة زوجية	$\sec(-\theta)=\sec\theta$
دالة ظل التمام	دالة فردية	$\cot(-\theta)=-\cot\theta$

9–2: إثبات صحة متطابقات مثلثية

1 الأهداف

- يبيّن ما إذا كانت المعادلة المثلثية متطابقة أم لا.
- يتثبت من صحة المتطابقات المثلثية.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

إثبات متطابقة – دمج الحدود – ضرب العوامل – فصل الحدود – التحليل.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة بيانية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

بسّط ما يلي:

(a) $\sin x\cos^3 x+\cos x\sin^3 x$

(b) $\dfrac{1}{\cos x+1}-\dfrac{1}{1-\cos x}$

(c) $2\sin^4 x+2\cos^4 x+4\sin^2 x\cos^2 x$

[استخدم: $(a^2+b^2)^2=a^4+b^4+2a^2b^2$]

(d) اكتب التعبير: $\sin\theta\cos\theta(1+\tan^2\theta)$ بدلالة $\tan\theta$ فقط.

(e) اكتب التعبير: $\sin^2\theta\cos\theta(1+\cot^2\theta)$ بدلالة $\cos\theta$ فقط.

5 التدريس

لإثبات صحة متطابقة مثلثية، شجّع الطلاب على النظر مليًّا إلى المتطابقة ليتعرفوا الجهة الأسهل للبدء في الحل.

قد يكون البدء بالمقدار من اليمين للحصول على المقدار في اليسار هو أسهل أو قد يكون البدء بالمقدار من اليسار للحصول على المقدار في اليمين هو أسهل.

وهذا يتوقف على مقدرة الطالب ومكتسباته السابقة.

حفّز الطلاب على استخدام المتطابقات الأساسية التي تعلموها في الدرس السابق في المكان المناسب لإثبات متطابقات مركبة.


9–2

إثبات صحة متطابقات مثلثية

Confirming Trigonometric Identities

سوف تعلم
- تبيان ما إذا كانت المعادلة تمثل متطابقة.
- إثبات صحة المتطابقات جبريًّا.

المفردات والمصطلحات:
- إثبات متطابقة Confirming an Identity
- دمج الحدود Associate Terms
- ضرب العوامل Multiplying Factors
- فصل الحدود Separating Terms
- التحليل Analysing

دعنا نفكر ونتناقش

لإثبات أن معادلة ما هي متطابقة، عليك إثبات أن طرفي المعادلة متساويان لكل قيم المتغير.

فمثلًا، هل المعادلة: $\sin^2 x-\tan x=-\cos^2 x+\cot x$ هي متطابقة؟

للتحقق من ذلك، يمكن تمثيل الدالتين التاليتين بيانيًّا. (باستخدام الآلة الحاسبة البيانية)

$y_1=\sin^2 x-\tan x$ ، $y_2=-\cos^2 x+\cot x$

بالنظر إلى الشكل نجد أن البيانين غير متطبقين. أي أن الطرفين غير متساويين، لذلك فإن المعادلة ليست متطابقة.

أحيانًا يكون من السهل إثبات أن الدالتين غير متساويتين جبريًّا، فمثلًا، قيم y_1، y_2 عند $x=0$ هي: $y_1(0)=0$ ولكن $y_2(0)$ غير معرّفة.

لذلك فالدالتان غير متساويتين والمعادلة ليست متطابقة.

$y_1=\sin^2 x-\tan x$

$y_2=-\cos^2 x+\cot x$

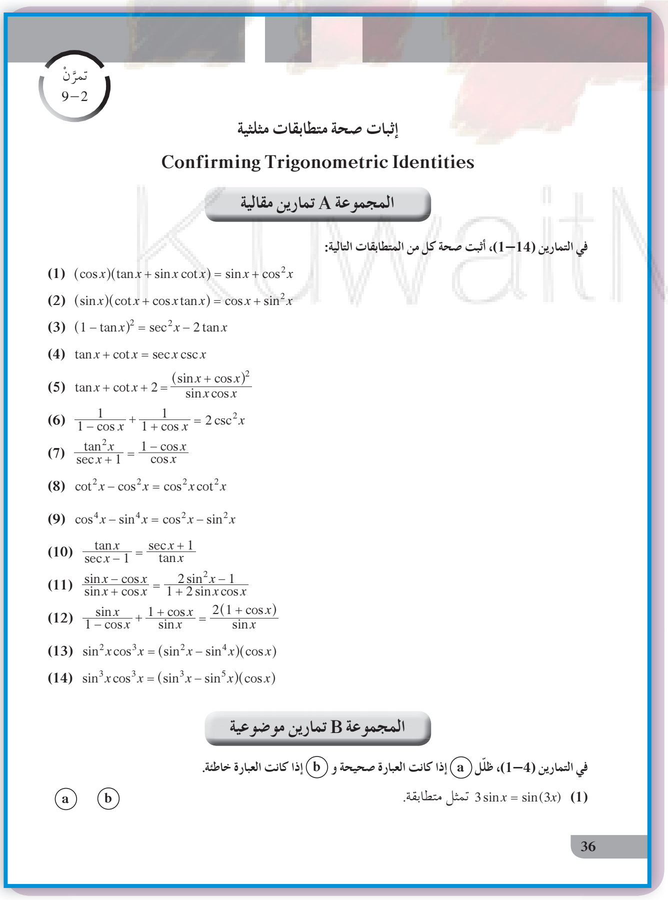
إثبات صحة متطابقة Confirming an Identity

لإثبات أن معادلة ما هي متطابقة نحتاج إلى محاولة إثبات أن طرفي المعادلة متساويان عند كل قيم المتغير نفسهما، من خلال استخدام إحدى الإستراتيجيات التالية:

1. تبسيط الطرف الأيمن بصورة الطرف الأيسر أو العكس.
2. تبسيط كلًّا من الطرفين على حدة حتى يتطابق ناتج تبسيطهما.

ويتم تبسيط كل طرف باستخدام إحدى الطرق التالية:
- دمج الحدود
- فصل الحدود
- ضرب العوامل
- التحليل
- استخدام متطابقات معلومة
- تبسيط الكسور
- التحويل إلى الجيب وجيب التمام

87


تمرّن 9–2

إثبات صحة متطابقات مثلثية

Confirming Trigonometric Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–14)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

(1) $(\cos x)(\tan x+\sin x\cot x)=\sin x+\cos^2 x$

(2) $(\sin x)(\cot x+\cos x\tan x)=\cos x+\sin^2 x$

(3) $(1-\tan x)^2=\sec^2 x-2\tan x$

(4) $\tan x+\cot x=\sec x\csc x$

(5) $\tan x+\cot x+2=\dfrac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x\cos x}$

(6) $\dfrac{1}{1-\cos x}+\dfrac{1}{1+\cos x}=2\csc^2 x$

(7) $\dfrac{\tan^2 x}{\sec x+1}=\dfrac{1-\cos x}{\cos x}$

(8) $\cot^2 x-\cos^2 x=\cos^2 x\cot^2 x$

(9) $\cos^4 x-\sin^4 x=\cos^2 x-\sin^2 x$

(10) $\dfrac{\tan x}{\sec x-1}=\dfrac{\sec x+1}{\tan x}$

(11) $\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}=\dfrac{2\sin^2 x-1}{1+2\sin x\cos x}$

(12) $\dfrac{\sin x}{1-\cos x}+\dfrac{1+\cos x}{\sin x}=\dfrac{2(1+\cos x)}{\sin x}$

(13) $\sin^2 x\cos^3 x=(\sin^2 x-\sin^4 x)(\cos x)$

(14) $\sin^3 x\cos^3 x=(\sin^3 x-\sin^5 x)(\cos x)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $3\sin x=\sin(3x)$ تمثل متطابقة. (a) (b)

36

اطلب إليهم إعادة قراءة طرائق إثبات متطابقة كما وردت في كتاب الطالب: دمج الحدود، ضرب العوامل، استخدام متطابقات معلومة، التحويل إلى الجيب وجيب التمام، فصل الحدود، التحليل أو التفكيك، تبسيط الكسور...

في المثال (1)

ركّز مع الطلاب على أن الحل في هذا المثال اعتمد على البدء بالمقدار من جهة اليسار، ثم إجراء عملية الضرب في البسط، وبعد ذلك استخدام متطابقة فيثاغورث $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ للوصول إلى المقدار في جهة اليمين.

في المثال (2)

ركّز انتباه الطلاب في هذا المثال إلى أن الحل بدأ من جهة اليمين، حيث كان استخدام لمقام مشترك ثم جمع الحدود المتشابهة في البسط واستخدام ناتج ضرب المتطابقة الجبرية.

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ في المقام وبعد ذلك المتطابقة الأساسية المثلثة $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

وهكذا كانت النتيجة في جهة اليسار.

في المثال (3)

اطلب إلى الطلاب إثبات صحة هذه المتطابقة بأن يبدأوا من جهة اليسار للحصول على المقدار في جهة اليمين. ناقشهم بالخطة التي اعتمدوها.

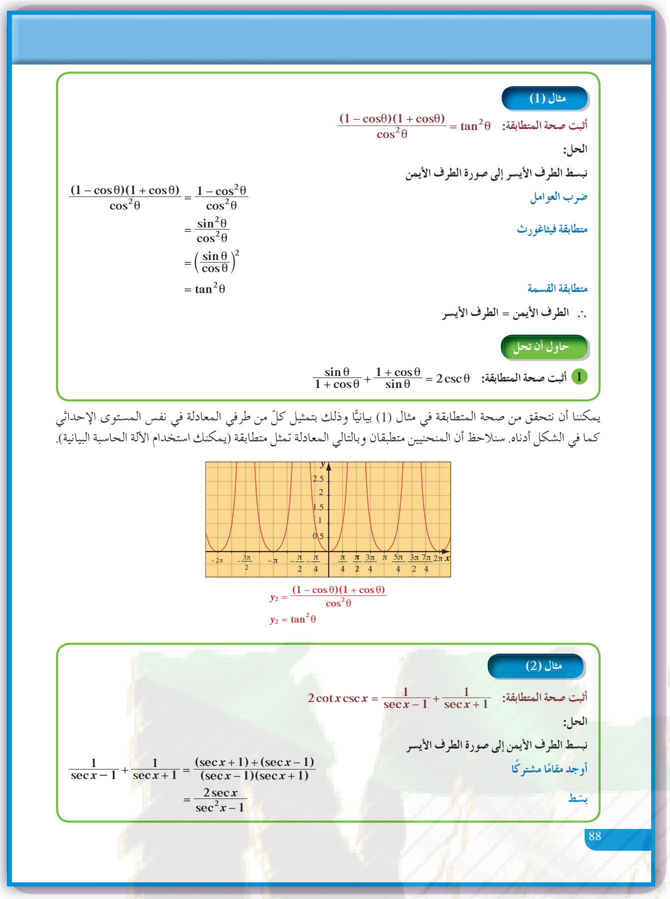
أخبرهم أن لإثبات بعض المتطابقات يمكن التعامل معها بحيث نبدأ من اليمين إلى اليسار أو من اليسار إلى اليمين.

في المثال (4)

قد يكون من الصعب في بعض الأحيان الانطلاق من مقدار في جهة للوصول إلى مقدار آخر في الجهة الثانية، لذا يمكن استخدام عملية التبسيط في الجهتين، وذلك باستخدام المتطابقات المثلثة الأساسية.

في المثال (5)

تستخدم متطابقة فيثاغورث $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ لتفكيك قوى مثلثية بدلالة $\sin\theta$ فقط أو بدلالة $\cos\theta$ فقط أو بدلالة $\sin\theta,\ \cos\theta$ معًا وذلك بحسب الحاجة.



مثال (1)

أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta$

الحل:

نبسط الطرف الأيسر إلى صورة الطرف الأيمن

ضرب العوامل $\dfrac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos^2\theta} = \dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$

متطابقة فيثاغورث $= \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$= \left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2$

متطابقة القسمة $= \tan^2\theta$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

حاول أن تحل

1 أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = 2\csc\theta$

يمكننا أن نتحقق من صحة المتطابقة في مثال (1) بيانيًّا وذلك بتمثيل كلّ من طرفي المعادلة في نفس المستوى الإحداثي كما في الشكل أدناه. سنلاحظ أن المنحنيين متطبقان وبالتالي المعادلة تمثل متطابقة (يمكنك استخدام الآلة الحاسبة البيانية).

$y_2 = \dfrac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos^2\theta}$

$y_2 = \tan^2\theta$

مثال (2)

أثبت صحة المتطابقة: $2\cot x \csc x = \dfrac{1}{\sec x - 1} + \dfrac{1}{\sec x + 1}$

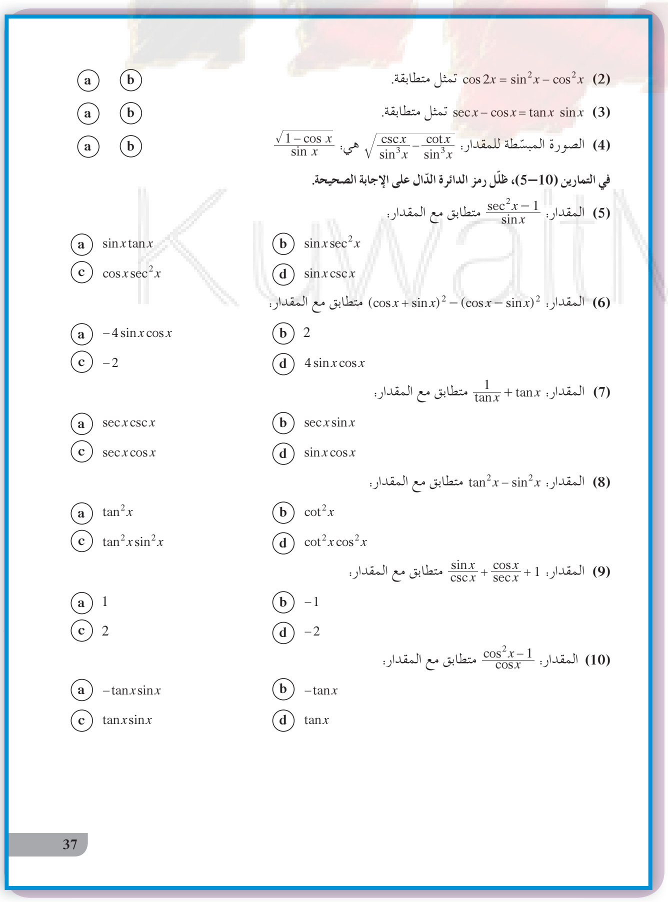
الحل:

نبسط الطرف الأيمن إلى صورة الطرف الأيسر

أوجد مقامًا مشتركًا $\dfrac{1}{\sec x-1} + \dfrac{1}{\sec x+1} = \dfrac{(\sec x+1)+(\sec x-1)}{(\sec x-1)(\sec x+1)}$

بسّط $= \dfrac{2\sec x}{\sec^2 x - 1}$

88



(2) $\cos 2x = \sin^2 x - \cos^2 x$ تمثل متطابقة. (a) (b)

(3) $\sec x - \cos x = \tan x\ \sin x$ تمثل متطابقة. (a) (b)

(4) الصورة المبسّطة للمقدار: $\sqrt{\dfrac{\csc x}{\sin^3 x} - \dfrac{\cot x}{\sin^3 x}}$ هي: $\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$ (a) (b)

في التمارين (10–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) المقدار: $\dfrac{\sec^2 x - 1}{\sin x}$ متطابق مع المقدار:

(a) $\sin x \tan x$ (b) $\sin x \sec^2 x$
(c) $\cos x \sec^2 x$ (d) $\sin x \csc x$

(6) المقدار: $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2$ متطابق مع المقدار:

(a) $-4\sin x\cos x$ (b) 2
(c) -2 (d) $4\sin x \cos x$

(7) المقدار: $\dfrac{1}{\tan x} + \tan x$ متطابق مع المقدار:

(a) $\sec x \csc x$ (b) $\sec x \sin x$
(c) $\sec x \cos x$ (d) $\sin x \cos x$

(8) المقدار: $\tan^2 x - \sin^2 x$ متطابق مع المقدار:

(a) $\tan^2 x$ (b) $\cot^2 x$
(c) $\tan^2 x \sin^2 x$ (d) $\cot^2 x \cos^2 x$

(9) المقدار: $\dfrac{\sin x}{\csc x} + \dfrac{\cos x}{\sec x} + 1$ متطابق مع المقدار:

(a) 1 (b) -1
(c) 2 (d) -2

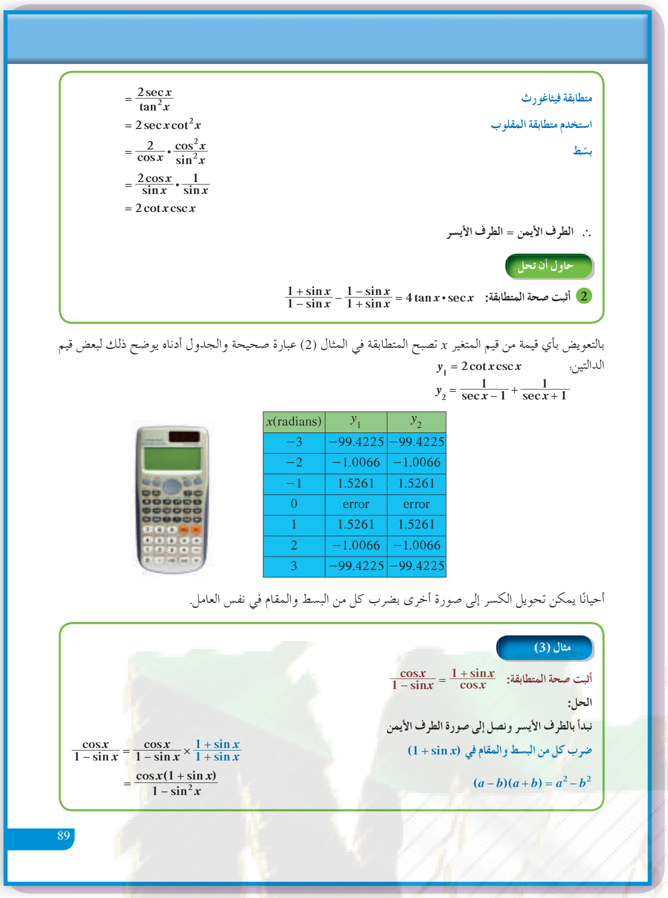
(10) المقدار: $\dfrac{\cos^2 x - 1}{\cos x}$ متطابق مع المقدار:

(a) $-\tan x \sin x$ (b) $-\tan x$
(c) $\tan x \sin x$ (d) $\tan x$

37

6 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام المتطابقات المثلثية الأساسية وخاصة $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ و $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$، ساعدهم على فهم كيفية الحصول على هذه المتطابقات دون حفظها غيبًا.



متطابقة فيثاغورث $= \dfrac{2\sec x}{\tan^2 x}$

استخدم متطابقة المقلوب $= 2\sec x \cot^2 x$

بسّط $= \dfrac{2}{\cos x} \cdot \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$

$= \dfrac{2\cos x}{\sin x} \cdot \dfrac{1}{\sin x}$

$= 2\cot x \csc x$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

حاول أن تحل

2 أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} - \dfrac{1-\sin x}{1+\sin x} = 4\tan x \cdot \sec x$

بالتعويض بأي قيمة من قيم المتغير x تصبح المتطابقة في المثال (2) عبارة صحيحة والجدول أدناه يوضح ذلك لبعض قيم الدالتين:

$y_1 = 2\cot x \csc x$

$y_2 = \dfrac{1}{\sec x - 1} + \dfrac{1}{\sec x + 1}$

x(radians)	y_1	y_2
−3	−99.4225	−99.4225
−2	−1.0066	−1.0066
−1	1.5261	1.5261
0	error	error
1	1.5261	1.5261
2	−1.0066	−1.0066
3	−99.4225	−99.4225

أحيانًا يمكن تحويل الكسر إلى صورة أخرى بضرب كل من البسط والمقام في نفس العامل.

مثال (3)

أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{\cos x}{1 - \sin x} = \dfrac{1 + \sin x}{\cos x}$

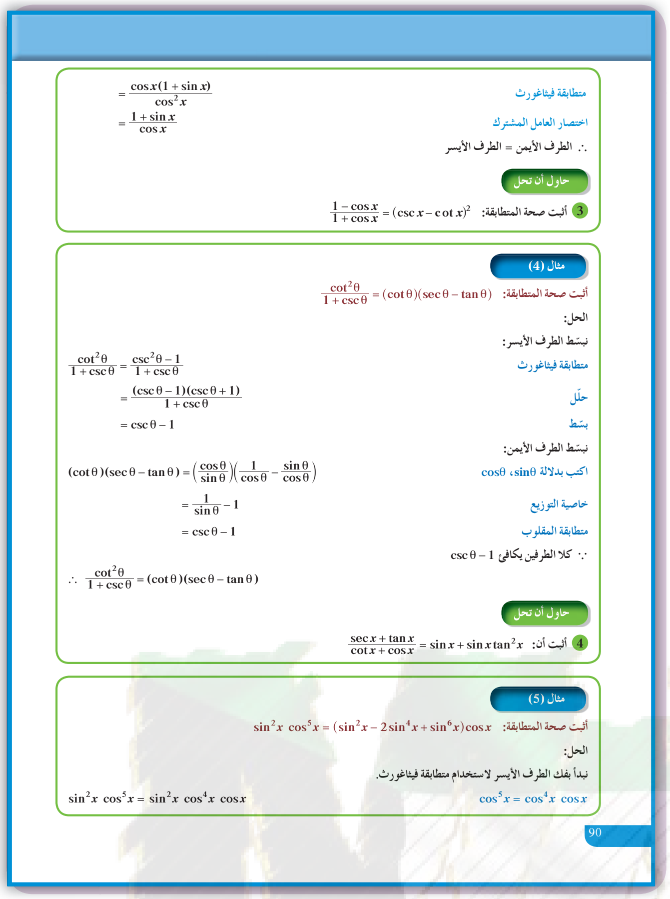
الحل:

نبدأ بالطرف الأيسر ونصل إلى صورة الطرف الأيمن

ضرب كل من البسط والمقام في $(1 + \sin x)$ $\quad \dfrac{\cos x}{1 - \sin x} = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x} \times \dfrac{1 + \sin x}{1 + \sin x}$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ $\quad = \dfrac{\cos x(1 + \sin x)}{1 - \sin^2 x}$

89



متطابقة فيثاغورث $= \dfrac{\cos x(1+\sin x)}{\cos^2 x}$

اختصار العامل المشترك $= \dfrac{1+\sin x}{\cos x}$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

حاول أن تحل

3 أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x} = (\csc x - \cot x)^2$

مثال (4)

أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = (\cot\theta)(\sec\theta - \tan\theta)$

الحل:

نبسّط الطرف الأيسر:

متطابقة فيثاغورث $\dfrac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = \dfrac{\csc^2\theta - 1}{1+\csc\theta}$

حلّل $= \dfrac{(\csc\theta - 1)(\csc\theta + 1)}{1+\csc\theta}$

بسّط $= \csc\theta - 1$

نبسّط الطرف الأيمن:

اكتب بدلالة $\sin\theta$، $\cos\theta$ $(\cot\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = \left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(\dfrac{1}{\cos\theta} - \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$

خاصية التوزيع $= \dfrac{1}{\sin\theta} - 1$

متطابقة المقلوب $= \csc\theta - 1$

∵ كلا الطرفين يكافئ $\csc\theta - 1$

$\therefore \dfrac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = (\cot\theta)(\sec\theta - \tan\theta)$

حاول أن تحل

4 أثبت أن: $\dfrac{\sec x + \tan x}{\cot x + \cos x} = \sin x + \sin x \tan^2 x$

مثال (5)

أثبت صحة المتطابقة: $\sin^2 x \cos^5 x = (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x)\cos x$

الحل:

نبدأ بفك الطرف الأيسر لاستخدام متطابقة فيثاغورث.

$\cos^5 x = \cos^4 x \cos x$ $\sin^2 x \cos^5 x = \sin^2 x \cos^4 x \cos x$

90

7 التقييم

النقاش والحوار حول كيفية البدء بالحل، وخاصة أن التنوع بين التمارين يفسح المجال للتفكير في الجهة التي سوف يتمّ البدء فيها.

اختبار سريع

بسّط ما يلي:

1 أثبت أن: $1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = \sin^4 x + \cos^4 x$

نبدأ من اليمين: $\sin^4 x + \cos^4 x$

$= \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x$

$\quad - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$= 1^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x$

2 أثبت أن:

$$\sqrt{(2+2\tan^2 x)(2+2\cot^2 x)} = 2|\sec x|\,|\csc x|$$

نبدأ من اليسار: $\sqrt{2(1+\tan^2 x)2(1+\cot^2 x)}$

$= \sqrt{4\sec^2 x \cdot \csc^2 x}$

$= 2|\sec x|\,|\csc x|$

3 أثبت أن: $\dfrac{\csc^2 x + \sec^2 x}{\tan x + \cot x} = \sec x \times \csc x$

نبدأ من اليسار:

$$= \frac{\dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}}{\dfrac{1}{\sin x\cos x}}$$

$$= \frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x\cos^2 x}$$

$$= \sec x \cdot \csc x$$

$= (\sin^2 x)(1-\sin^2 x)^2 \cos x$ $\quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$= (\sin^2 x)(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)\cos x$

$= (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x)\cos x$

حاول أن تحل

5 أثبت صحة المتطابقة: $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$

إرشاد: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

91

8 إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

1 $\dfrac{\sin^2\theta + 1 + \cos^2\theta + 2\cos\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta} = \dfrac{2(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$

$= 2\csc\theta$

2 $\dfrac{1+\sin^2 x + 2\sin x - 1 - \sin^2 x + 2\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$

$= \dfrac{4\sin x}{\cos^2 x} = 4\tan x \sec x$

3 $\left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{\cos x}{\sin x}\right)^2 = \left(\dfrac{1-\cos x}{\sin x}\right)^2$

$= \dfrac{(1-\cos x)(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}$

$= \dfrac{(1-\cos x)(1-\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$

$= \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

4 $\dfrac{\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{\sin x}{\cos x}}{\dfrac{\cos x}{\sin x} + \cos x}$

$= \dfrac{(1+\sin x)}{\cos x} \times \dfrac{\sin x}{\cos x(1+\sin x)} = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

$= \sin x(1+\tan^2 x) = \sin x + \sin x \tan^2 x$

نستنتج أن: $\dfrac{\sec x + \tan x}{\cot x + \cos x} = \sin x + \sin x \tan^2 x$

5 طريقة أولى، نبدأ من اليمين: $1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x$

$= \sin^6 x + 3\sin^4 x\cos^2 x + 3\cos^4 x\sin^2 x$

$+\cos^6 x - 3\sin^2 x\cos^2 x$

$= \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$-3\sin^2 x\cos^2 x$

$= \sin^6 x + \cos^6 x$

طريقة ثانية، نبدأ من اليسار:

$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x)$

$= 1((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x - \sin^2 x\cos^2 x)$

$= 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$

3–9: حل معادلات مثلثية

1 الأهداف

- يحل معادلات مثلثية بالطرائق الجبرية.
- يستخدم الدالة الدورية في حل المعادلات المثلثية.
- يحل معادلات مثلثية تتضمن مضاعفات الزاوية.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

معادلة مثلثية – دالة دورية – العامل الصفري – مضاعفات الزاوية.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة بيانية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) أوجد مجموعة حل المعادلة: $x^2 - 9x + 14 = 0$

(b) أوجد:

$\sin\frac{\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{3}$, $\cos\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{3}$,

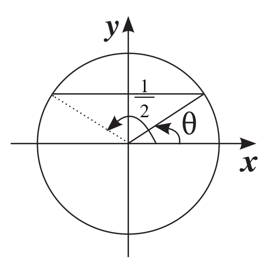
$\tan\frac{\pi}{6}$, $\tan\frac{\pi}{4}$, $\tan\frac{\pi}{3}$

5 التدريس

ركّز مع الطلاب على المفاهيم التالية:

(a) إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{2}$، فما هي قيمة θ؟

ساعدهم على رؤية الحل باستخدام دائرة الوحدة.



9–3

حل معادلات مثلثية

Solving Trigonometric Equations

دعنا نفكر ونتناقش

زاوية الإسناد للزاوية الموجهة $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ في الوضع القياسي، هي الزاوية الحادة α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات.

لتكن α زاوية الإسناد حيث $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$، أكمل الجدول التالي:

الشكل	1	2	3
الربع من المستوى الإحداثي	θ تقع في الربع ...	θ تقع في الربع ...	θ تقع في الربع ...
زاوية الإسناد	α = ...	α = ...	$\alpha = 2\pi - \theta$
الزاوية في الوضع القياسي	θ = ...	θ = ...	$\theta = 2\pi - \alpha$

الدوال الجيبية هي دوال دورية. يمكن لخط مستقيم أفقي (مثل محور السينات) أن يتقاطع مع منحناها في عدد غير منتهٍ من النقاط. نوجد عادة حلول المعادلة المثلثية على فترة دورة واحدة، ثم نستنتج باقي قيم الحلول بإضافة دورة الدالة.

مثال توضيحي

حل المعادلة: $\sin x = \frac{1}{2}$

الحل:

$y_1 = \sin x$, $y_2 = \frac{1}{2}$

يوضح الشكل السابق أن التمثيلين البيانيين للدالتين:

$y_1 = \sin x$ و $y_2 = \frac{1}{2}$ يتقاطعان في عدة نقاط.

هذا يعني أن للمعادلة $\sin x = \frac{1}{2}$ عدة حلول وهي الإحداثي السيني لنقطة التقاطع.

(وهذا ما نتوقعه عندما تكون الدالة المثلثية مساوية لعدد ثابت ينتمي إلى مداها).

سوف تتعلم

- حل معادلات مثلثية.
- دور الدالة الدورية في عمليات حل المعادلات.

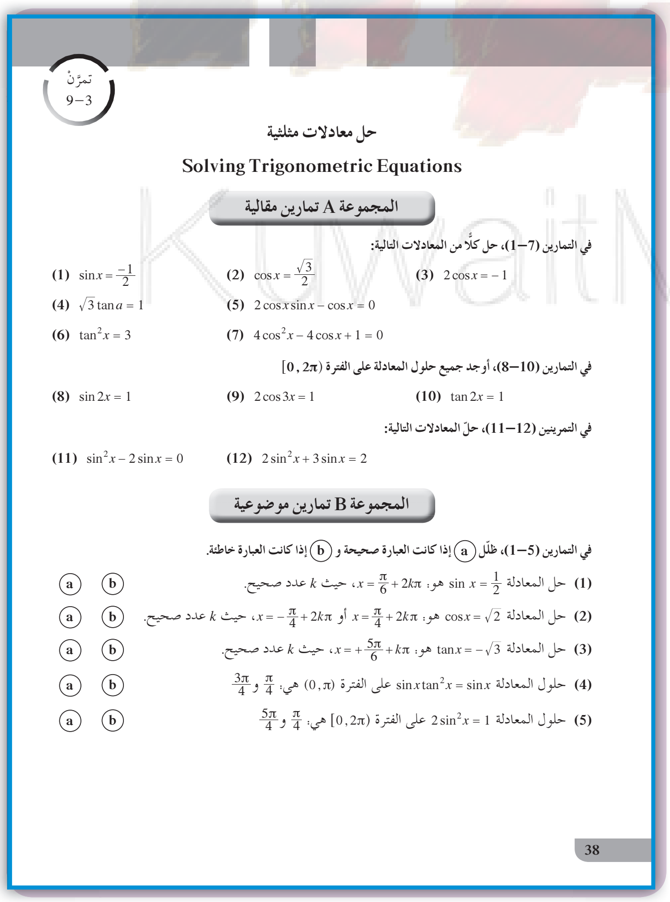
المفردات والمصطلحات:

- معادلة مثلثية Trigonometric Equation
- دالة دورية Periodic Function
- العامل الصفري Zero Factor
- مضاعفات الزاوية Multiples of an Angle

معلومة:

إذا كانت θ تقع في الربع الأول، فإن زاوية الإسناد α تساوي θ

92



تمرَّنْ 9–3

حل معادلات مثلثية

Solving Trigonometric Equations

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–7)، حل كلًّا من المعادلات التالية:

(1) $\sin x = \frac{-1}{2}$ (2) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $2\cos x = -1$

(4) $\sqrt{3}\tan a = 1$ (5) $2\cos x\sin x - \cos x = 0$

(6) $\tan^2 x = 3$ (7) $4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$

في التمارين (8–10)، أوجد جميع حلول المعادلة على الفترة $[0, 2\pi)$

(8) $\sin 2x = 1$ (9) $2\cos 3x = 1$ (10) $\tan 2x = 1$

في التمرينين (11–12)، حلّ المعادلات التالية:

(11) $\sin^2 x - 2\sin x = 0$ (12) $2\sin^2 x + 3\sin x = 2$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة $\sin x = \frac{1}{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(2) حل المعادلة $\cos x = \sqrt{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(3) حل المعادلة $\tan x = -\sqrt{3}$ هو: $x = +\frac{5\pi}{6} + k\pi$، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(4) حلول المعادلة $\sin x\tan^2 x = \sin x$ على الفترة $(0, \pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ (a) (b)

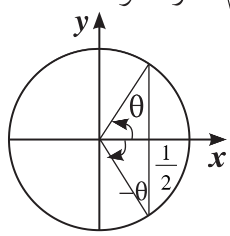
(5) حلول المعادلة $2\sin^2 x = 1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ (a) (b)

38

من النقطة $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ على محور الصادات نأخذ مستقيمًا موازيًا لمحور السينات حيث يقطع الدائرة في نقطتين ويكون لدينا قيمتان لِـ θ بحيث $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$، و $\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ وهما $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

(b) إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{2}$، فما هي قيمة θ؟

ساعدهم على رؤية الحل باستخدام دائرة الوحدة.



من نقطة $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ على محور السينات نأخذ مستقيمًا موازيًا لمحور الصادات حيث يقطع الدائرة في نقطتين ويكون لدينا زاوية θ بحيث $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ وزاوية أخرى $-\theta$ بحيث $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

أخبرهم أن هذه الحلول تحدث فقط على فترة واحدة وهي $[0, 2\pi)$

ولكن بما أن $\sin\theta$، $\cos\theta$ هما دالتان دوريتان وأن الرسم البياني لكل منهما له عدد لا ينتهي من القيم العظمى والقيم الصغرى فإن الحلول هي أيضًا غير منتهية كما يبدو على الرسم البياني.

في المثال (1)

ذكّر الطلاب أن الزاوية تقع في الربع الثاني أو الربع الثالث لأن $\cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} < 0$ مما يعطي حلّين للمعادلة.

شدّد على إضافة $2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ على كل من الحلّين.

في المثال (2)

$\sin\theta = -\frac{1}{3} < 0$ ∴ تقع الزاوية θ في الربع الثالث أو الربع الرابع مما يعطي حلّين للمعادلة.

الزاوية θ ليست من الزوايا الخاصة، على الطلاب استخدام الآلة الحاسبة لوضع حلول تقريبية تنتمي للفترة المحددة.

تذكر:

إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية $(\pi - \theta)$ تقع في الربع الثاني ويكون:

$\sin\theta = \sin(\pi - \theta)$

وحل المعادلة:

$\sin x = \sin\theta$

هو: $x = \theta + 2k\pi$

أو $x = (\pi - \theta) + 2k\pi$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

تذكر:

إذا كانت θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية $(-\theta)$ تقع في الربع الرابع ويكون:

$\cos\theta = \cos(-\theta)$

وحل المعادلة:

$\cos x = \cos\theta$

هو: $x = \theta + 2k\pi$

أو $x = -\theta + 2k\pi$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

الدالة المثلثية $y = \sin x$ دالة دورية.

دورتها $= 2\pi$

∴ في حالة المعادلة $\sin x = \frac{1}{2}$ يوجد حلّان على الفترة $[0, 2\pi)$ وهي تمثل دورة واحدة

والحلّان هما: $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{6}$

ونستنتج الحلول الأخرى بإضافة مضاعفات 2π لكل من هاتين القيمتين.

يمكن كتابة هذه الحلول غير المنتهية على الشكل:

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ، $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

حيث k تنتمي إلى مجموعة الأعداد الصحيحة $(k \in \mathbb{Z})$.

مثال (1)

حل المعادلة: $2\cos x + \sqrt{3} = 0$

الحل:

$2\cos x + \sqrt{3} = 0$

$2\cos x = -\sqrt{3}$

$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x

$\therefore \cos\alpha = |\cos x|$

$= \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$

$\because \cos x < 0$

∴ x تقع في الربع الثاني أو الربع الثالث

عندما x تقع في الربع الثاني: $x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\therefore x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

وعندما x تقع في الربع الثالث: $x = \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$= \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$

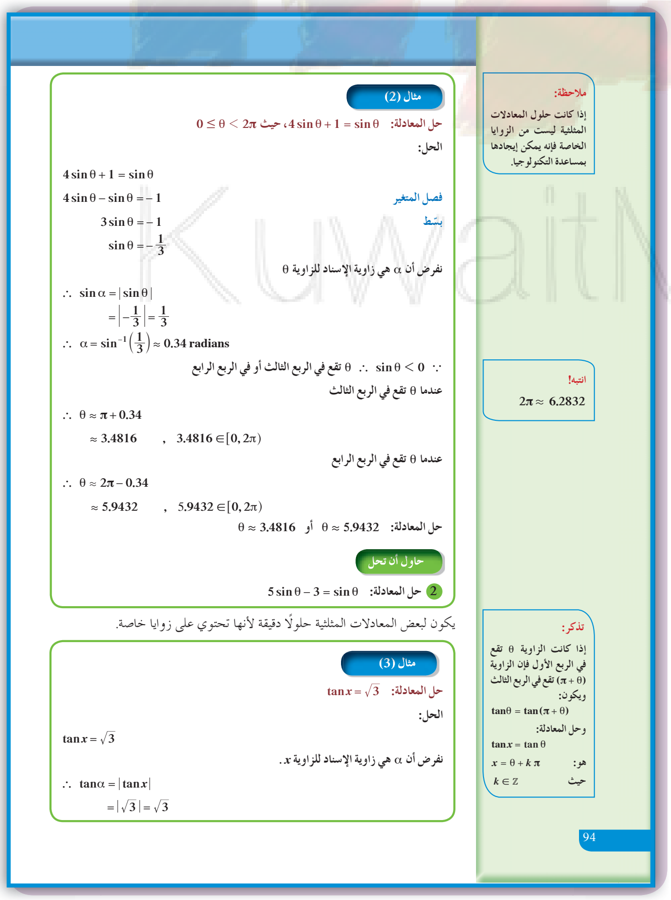
∴ حل المعادلة: $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$، حيث $k \in \mathbb{Z}$

حاول أن تحل

1 حل المعادلة: $\sqrt{2}\cos x = 1$

نحتاج أحيانًا إلى حل معادلات مثلثية على فترات معينة.

93



ملاحظة:

إذا كانت حلول المعادلات المثلثية ليست من الزوايا الخاصة فإنه يمكن إيجادها بمساعدة التكنولوجيا.

انتبه!

$2\pi \approx 6.2832$

تذكر:

إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية $(\pi + \theta)$ تقع في الربع الثالث ويكون:

$\tan\theta = \tan(\pi + \theta)$

وحل المعادلة:

$\tan x = \tan\theta$

هو: $x = \theta + k\pi$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

مثال (2)

حل المعادلة: $4\sin\theta + 1 = \sin\theta$، حيث $0 \le \theta < 2\pi$

الحل:

$4\sin\theta + 1 = \sin\theta$

فصل المتغير $4\sin\theta - \sin\theta = -1$

بسّط $3\sin\theta = -1$

$\sin\theta = -\frac{1}{3}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$\therefore \sin\alpha = |\sin\theta|$

$= \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$

$\therefore \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0.34$ radians

$\because \sin\theta < 0 \quad \therefore$ θ تقع في الربع الثالث أو في الربع الرابع

عندما θ تقع في الربع الثالث

$\therefore \theta \approx \pi + 0.34$

$\approx 3.4816 \quad , \quad 3.4816 \in [0, 2\pi)$

عندما θ تقع في الربع الرابع

$\therefore \theta \approx 2\pi - 0.34$

$\approx 5.9432 \quad , \quad 5.9432 \in [0, 2\pi)$

حل المعادلة: $\theta \approx 5.9432$ أو $\theta \approx 3.4816$

حاول أن تحل

2 حل المعادلة: $5\sin\theta - 3 = \sin\theta$

يكون لبعض المعادلات المثلثية حلولًا دقيقة لأنها تحتوي على زوايا خاصة.

مثال (3)

حل المعادلة: $\tan x = \sqrt{3}$

الحل:

$\tan x = \sqrt{3}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x.

$\therefore \tan\alpha = |\tan x|$

$= |\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

94

في المثال (3)

دورة الدالة $\tan\theta$ هي π، وبالتالي هناك حلّان للمعادلة أحدهما في الربع الأول والثاني في الربع الثالث لكن نعوض عن ذلك بكتابة الحل في الربع الأول وإضافة $k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

في المثال (4)

يجب التعامل بدقة مع هذا المثال، وذكّر الطلاب بمتابعة الحل بكل تشعباته حتى النهاية مع إضافة $2k\pi$ إلى كل حل.

في المثال (5)

حلّ المعادلات المثلثية بالاستعانة بطريقة حل معادلات الدرجة الثانية بالتحليل أو استخدام المميز مما يعطي أيضًا حلّين مع إضافة $2k\pi$. مع التذكير برفض الحل إذا كان قيم $\cos x$، $\sin x$ لا تنتمي للفترة $[-1,1]$

في المثال (6)

هذا المثال هو تطبيق لحل معادلة مضاعفات الزاوية.

من المهم جدًّا تنبيه الطلاب إلى فترة المتغير x وهي $[0,\pi)$ ومن ثم إيجاد فترة المتغير $3x$ وهذا يتطلب الضرب بمعامل x والذي هو 3 لإيجاد الفترة $[0,3\pi)$.

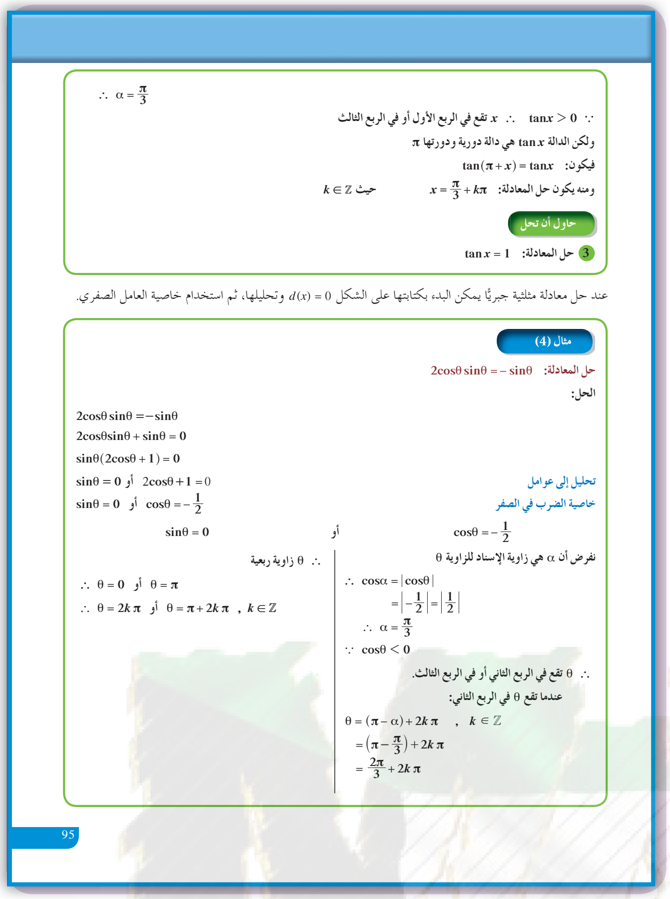
أخبرهم أن المعادلة تعطي قيمة المتغير $3x$ لذا يجب القسمة على 3 لإيجاد قيمة x.

6 الربط

يؤمن المثال (7) الربط بين الدوال المثلثية والنابض المتأرجح صعودًا ونزولًا بحركة تكرارية تندرج تحت تسمية الحركة التوافقية البسيطة.

اطلب إلى الطلاب رسم منحنى الدالة:

$y = -10\cos\frac{2\pi}{3}t$، حيث t تمثل الزمن بالثواني، y الارتفاع أو الانخفاض بالسنتيمتر ثم دراسة النتائج التي يلاحظونها.



$\therefore\ \alpha = \frac{\pi}{3}$

$\because\ \tan x > 0$ $\therefore$ x تقع في الربع الأول أو في الربع الثالث

ولكن الدالة $\tan x$ هي دالة دورية ودورتها π

فيكون: $\tan(\pi + x) = \tan x$

ومنه يكون حل المعادلة: $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

حاول أن تحل

3 حل المعادلة: $\tan x = 1$

عند حل معادلة مثلثية جبريًّا يمكن البدء بكتابتها على الشكل $d(x) = 0$ وتحليلها، ثم استخدام خاصية العامل الصفري.

مثال (4)

حل المعادلة: $2\cos\theta\sin\theta = -\sin\theta$

الحل:

$2\cos\theta\sin\theta = -\sin\theta$

$2\cos\theta\sin\theta + \sin\theta = 0$

$\sin\theta(2\cos\theta + 1) = 0$

تحليل إلى عوامل: $\sin\theta = 0$ أو $2\cos\theta + 1 = 0$

خاصية الضرب في الصفر: $\sin\theta = 0$ أو $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$ أو $\sin\theta = 0$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$\therefore\ \cos\alpha = |\cos\theta|$

$= \left|-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2}\right|$

$\therefore\ \alpha = \frac{\pi}{3}$

$\because\ \cos\theta < 0$

$\therefore$ θ تقع في الربع الثاني أو في الربع الثالث.

عندما تقع θ في الربع الثاني:

$\theta = (\pi - \alpha) + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

$= \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$

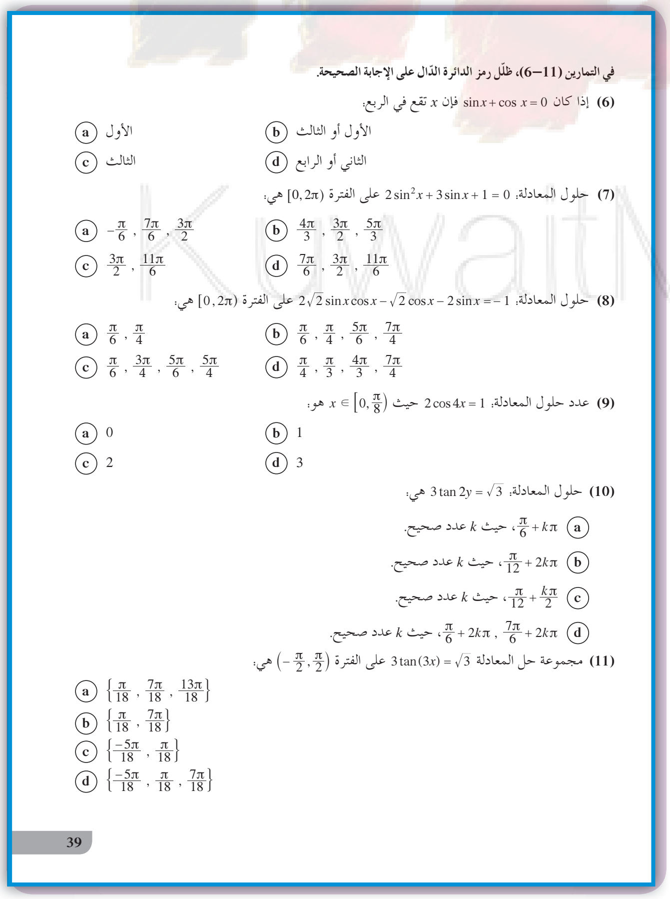
$= \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

$\therefore$ θ زاوية ربعية

$\therefore\ \theta = 0$ أو $\theta = \pi$

$\therefore\ \theta = 2k\pi$ أو $\theta = \pi + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

95



في التمارين (11–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان $\sin x + \cos x = 0$ فإن x تقع في الربع:

(a) الأول
(b) الأول أو الثالث
(c) الثالث
(d) الثاني أو الرابع

(7) حلول المعادلة: $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

(a) $-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$
(b) $\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$
(c) $\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$
(d) $\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

(8) حلول المعادلة: $2\sqrt{2}\sin x\cos x - \sqrt{2}\cos x - 2\sin x = -1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

(a) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$
(b) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}$
(c) $\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}$
(d) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}$

(9) عدد حلول المعادلة: $2\cos 4x = 1$ حيث $x \in \left[0, \frac{\pi}{8}\right)$ هو:

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3

(10) حلول المعادلة: $3\tan 2y = \sqrt{3}$ هي:

(a) $\frac{\pi}{6} + k\pi$، حيث k عدد صحيح.
(b) $\frac{\pi}{12} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.
(c) $\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$، حيث k عدد صحيح.
(d) $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\ ,\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.

(11) مجموعة حل المعادلة $3\tan(3x) = \sqrt{3}$ على الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ هي:

(a) $\left\{\frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}\right\}$
(b) $\left\{\frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\right\}$
(c) $\left\{\frac{-5\pi}{18}, \frac{\pi}{18}\right\}$
(d) $\left\{\frac{-5\pi}{18}, \frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\right\}$

39

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في كتابة مجموعة الحل بين $\sin\theta$، $\cos\theta$، $\tan\theta$. أعد تذكيرهم بأن مجموعة الحل:

$\sin\theta = \sin\alpha$ هي: $\theta = \alpha + 2k\pi$ أو $\theta = (\pi - \alpha) + 2k\pi$

ولكن $\cos\theta = \cos\alpha$ تعطي:

$$\theta = \alpha + 2k\pi$$

أو

$$\theta = -\alpha + 2k\pi$$

$\tan\theta = \tan\alpha$ تعطي:

$$\theta = \alpha + k\pi$$

شدّد على الطلاب الانتباه إلى الفترة المعطاه.

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من حسن أدائهم وأنهم قد استطاعوا إيجاد الحلول الصحيحة دون ارتكاب الأخطاء.

اختبار سريع

1 أوجد مجموعة حل المعادلة: $\cos^2 x - \frac{1}{4} = 0$

$\cos x = \frac{1}{2}$ أو $\cos x = -\frac{1}{2}$

إذا $\cos x = \frac{1}{2}$، $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

أي $\cos x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

إذا $\cos x = -\frac{1}{2}$، $\cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$

$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi$

أي $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

حيث k عدد صحيح.

2 أوجد مجموعة حل المعادلة: $4\sin\theta - 2 = \sin\theta$

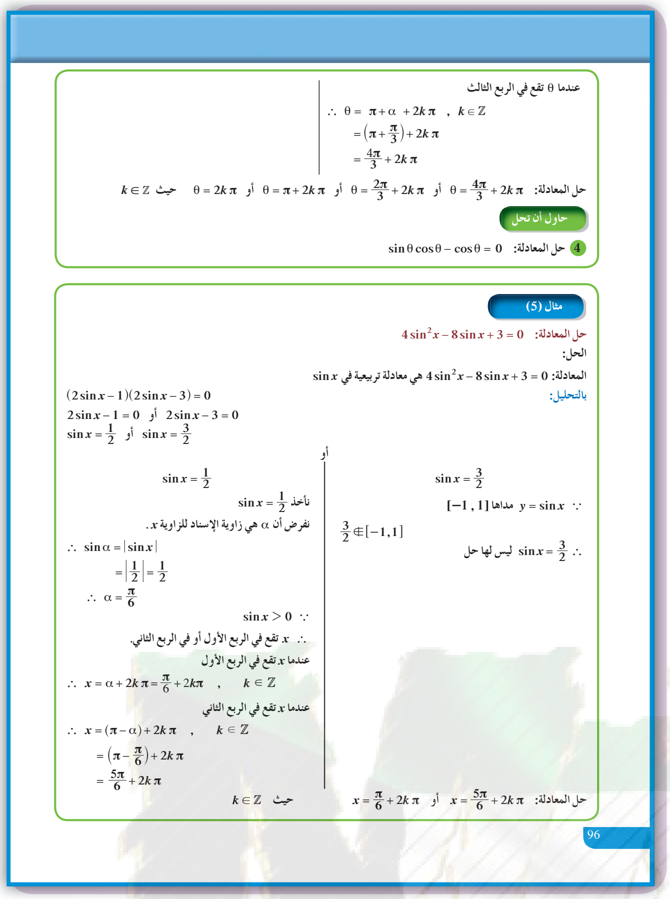
$\sin\theta = \frac{2}{3}$، $3\sin\theta = 2$، $4\sin\theta - \sin\theta = 2$

باستخدام الآلة الحاسبة نجد $\sin\theta = \sin 41.8°$

أي $\theta = 41.8° + 360°k$

أو $\theta = 138.2° + 360°k$

حيث k عدد صحيح.



عندما θ تقع في الربع الثالث

$\therefore\ \theta = \pi + \alpha + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

$= \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$

$= \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

حل المعادلة: $\theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ أو $\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ أو $\theta = \pi + 2k\pi$ أو $\theta = 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

حاول أن تحل

4 حل المعادلة: $\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

مثال (5)

حل المعادلة: $4\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0$

الحل:

المعادلة: $4\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0$ هي معادلة تربيعية في $\sin x$

بالتحليل:

$(2\sin x - 1)(2\sin x - 3) = 0$

$2\sin x - 1 = 0$ أو $2\sin x - 3 = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$ أو $\sin x = \frac{3}{2}$

$\sin x = \frac{3}{2}$

$\because\ y = \sin x$ مداها $[-1, 1]$

$\frac{3}{2} \notin [-1,1]$

$\therefore\ \sin x = \frac{3}{2}$ ليس لها حل

أو

$\sin x = \frac{1}{2}$

نأخذ $\sin x = \frac{1}{2}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x.

$\therefore\ \sin\alpha = |\sin x|$

$= \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

$\therefore\ \alpha = \frac{\pi}{6}$

$\because\ \sin x > 0$

$\therefore$ x تقع في الربع الأول أو في الربع الثاني.

عندما x تقع في الربع الأول

$\therefore\ x = \alpha + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

عندما x تقع في الربع الثاني

$\therefore\ x = (\pi - \alpha) + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

$= \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

$= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

حل المعادلة: $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

96

3 أوجد مجموعة حل المعادلة:

$$4\sin^2 x - 2(1+\sqrt{3})\sin x + \sqrt{3} = 0$$

نستخدم المميز: $\Delta = b^2 - 4ac = 4(\sqrt{3}-1)^2$

ومنه: $\sin x = \frac{1}{2}$ أو $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

إذا $\sin x = \frac{1}{2}$، $\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$، $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

إذا $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$، $\sin x = \sin\frac{\pi}{3}$

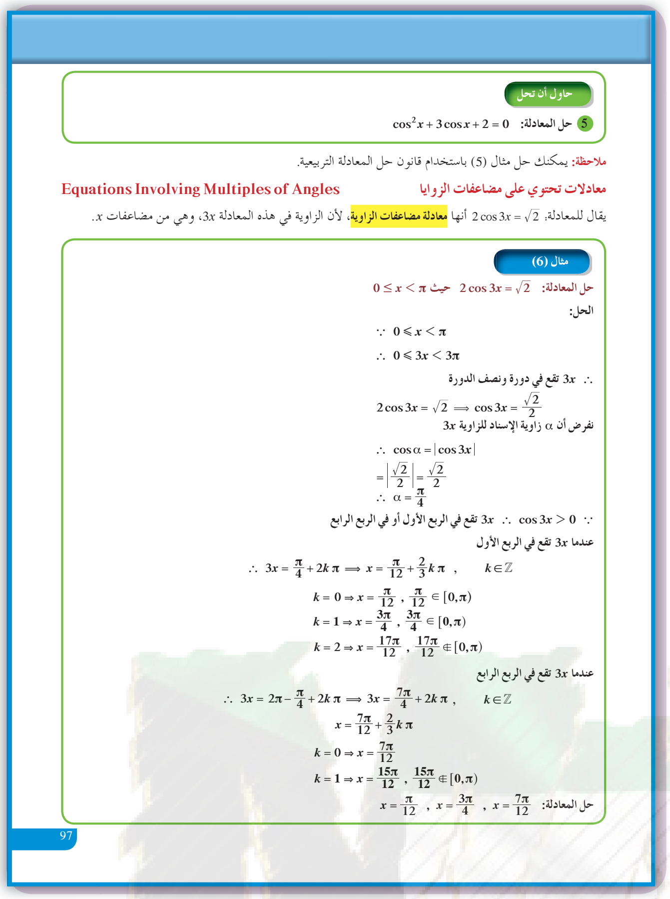
$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

أو $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.

4 أوجد مجموعة حل المعادلة: $\tan 3\theta = \sqrt{3}$

$\tan 3\theta = \tan\frac{\pi}{3}$ ، $3\theta = \frac{\pi}{3} + k\pi$

$\theta = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$



حاول أن تحل

5 حل المعادلة: $\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$

ملاحظة: يمكنك حل مثال (5) باستخدام قانون حل المعادلة التربيعية.

معادلات تحتوي على مضاعفات الزوايا **Equations Involving Multiples of Angles**

يقال للمعادلة: $2\cos 3x = \sqrt{2}$ أنها **معادلة مضاعفات الزاوية**، لأن الزاوية في هذه المعادلة $3x$، وهي من مضاعفات x.

مثال (6)

حل المعادلة: $2\cos 3x = \sqrt{2}$ حيث $0 \le x < \pi$

الحل:

$\because\ 0 \leqslant x < \pi$

$\therefore\ 0 \leqslant 3x < 3\pi$

$\therefore$ $3x$ تقع في دورة ونصف الدورة

$2\cos 3x = \sqrt{2} \Longrightarrow \cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

نفرض أن α زاوية الإسناد للزاوية $3x$

$\therefore\ \cos\alpha = |\cos 3x|$

$= \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \alpha = \frac{\pi}{4}$

$\because\ \cos 3x > 0\ \therefore$ $3x$ تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

عندما $3x$ تقع في الربع الأول

$\therefore\ 3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Longrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi\ ,\quad k \in \mathbb{Z}$

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{12}\ ,\ \frac{\pi}{12} \in [0,\pi)$

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}\ ,\ \frac{3\pi}{4} \in [0,\pi)$

$k = 2 \Rightarrow x = \frac{17\pi}{12}\ ,\ \frac{17\pi}{12} \notin [0,\pi)$

عندما $3x$ تقع في الربع الرابع

$\therefore\ 3x = 2\pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Longrightarrow 3x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\ ,\quad k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{7\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi$

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12}$

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{15\pi}{12}\ ,\ \frac{15\pi}{12} \notin [0,\pi)$

حل المعادلة: $x = \frac{7\pi}{12}\ ,\ x = \frac{3\pi}{4}\ ,\ x = \frac{\pi}{12}$

97

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1	2	3
الثاني	الثالث	الرابع
$\alpha = \pi - \theta$	$\alpha = \theta - \pi$	$\alpha = 2\pi - \theta$
$\theta = \pi - \alpha$	$\theta = \pi + \alpha$	$\theta = 2\pi - \alpha$

«حاول أن تحل»

1. $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos x = \cos\dfrac{\pi}{4}$

$x = \dfrac{-\pi}{4} + 2k\pi$ أو $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$

أي $x = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.

2. $\sin\theta = \dfrac{3}{4}$

$\theta = \sin^{-1}\left(\dfrac{3}{4}\right) \approx 0.848 \text{ rad} + 2k\pi$

أو $\approx 2.292 \text{ rad} + 2k\pi$

حيث k عدد صحيح.

3. $\tan x = \tan\dfrac{\pi}{4}$, $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

حيث k عدد صحيح.

4. $\cos\theta(\sin\theta - 1) = 0$

$\cos\theta = 0$ أو $\sin\theta = 1$

$\theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

حيث k عدد صحيح.

5. $\cos\theta = -1$, $\cos\theta = -2$ مرفوضة

$\cos\theta = -1$, $\theta = \pi + 2k\pi$

حيث k عدد صحيح.

6. $\cos(2x) = \dfrac{1}{2} = \cos 60^\circ$

- $2x = 60^\circ + 360k$

$x = 30^\circ + 180k$

$x = 30^\circ$, $x = 210^\circ$

- $2x = -60^\circ + 360k$

$x = -30^\circ + 180k$

$x = 150^\circ$, $x = 330^\circ$

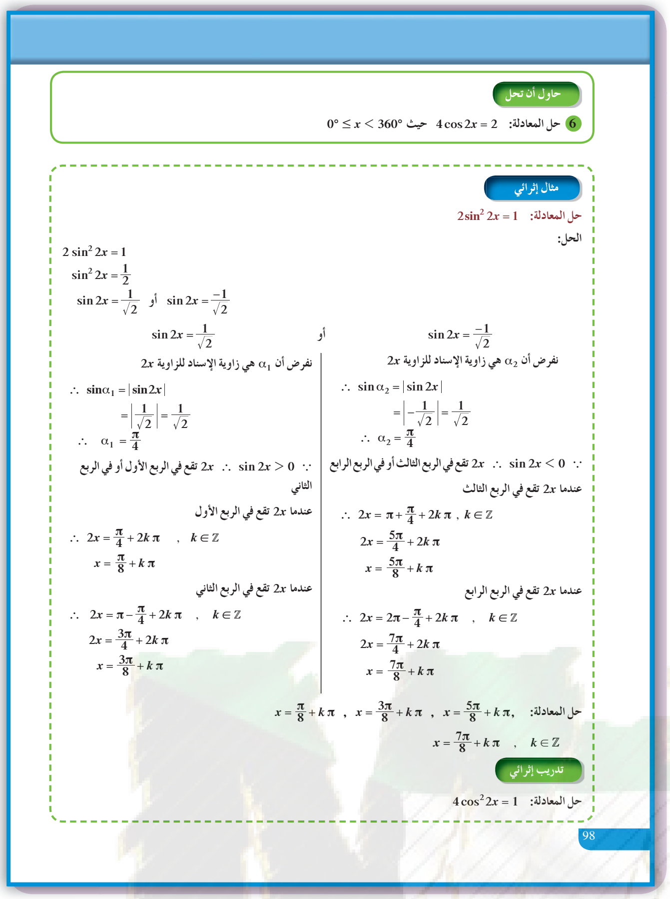
7. $t = \dfrac{5}{2}$

أي بعد ثانيتين ونصف الثانية

«تدريب إثرائي»

حل المعادلة $4\cos^2 2x = 1$ هو:

$x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi$, $x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi$



حاول أن تحل

6. حل المعادلة: $4\cos 2x = 2$ حيث $0^\circ \le x < 360^\circ$

مثال إثرائي

حل المعادلة: $2\sin^2 2x = 1$

الحل:

$2\sin^2 2x = 1$

$\sin^2 2x = \dfrac{1}{2}$

$\sin 2x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ أو $\sin 2x = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$

$\sin 2x = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$

نفرض أن α_2 هي زاوية الإسناد للزاوية $2x$

$\therefore \sin\alpha_2 = |\sin 2x| = \left|-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \alpha_2 = \dfrac{\pi}{4}$

$\because \sin 2x < 0 \quad \therefore$ $2x$ تقع في الربع الثالث أو في الربع الرابع

عندما $2x$ تقع في الربع الثالث

$\therefore 2x = \pi + \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$2x = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi$

$x = \dfrac{5\pi}{8} + k\pi$

عندما $2x$ تقع في الربع الرابع

$\therefore 2x = 2\pi - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$2x = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi$

$x = \dfrac{7\pi}{8} + k\pi$

أو

$\sin 2x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

نفرض أن α_1 هي زاوية الإسناد للزاوية $2x$

$\therefore \sin\alpha_1 = |\sin 2x| = \left|\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \alpha_1 = \dfrac{\pi}{4}$

$\because \sin 2x > 0 \quad \therefore$ $2x$ تقع في الربع الأول أو في الربع الثاني

عندما $2x$ تقع في الربع الأول

$\therefore 2x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$x = \dfrac{\pi}{8} + k\pi$

عندما $2x$ تقع في الربع الثاني

$\therefore 2x = \pi - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$2x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$

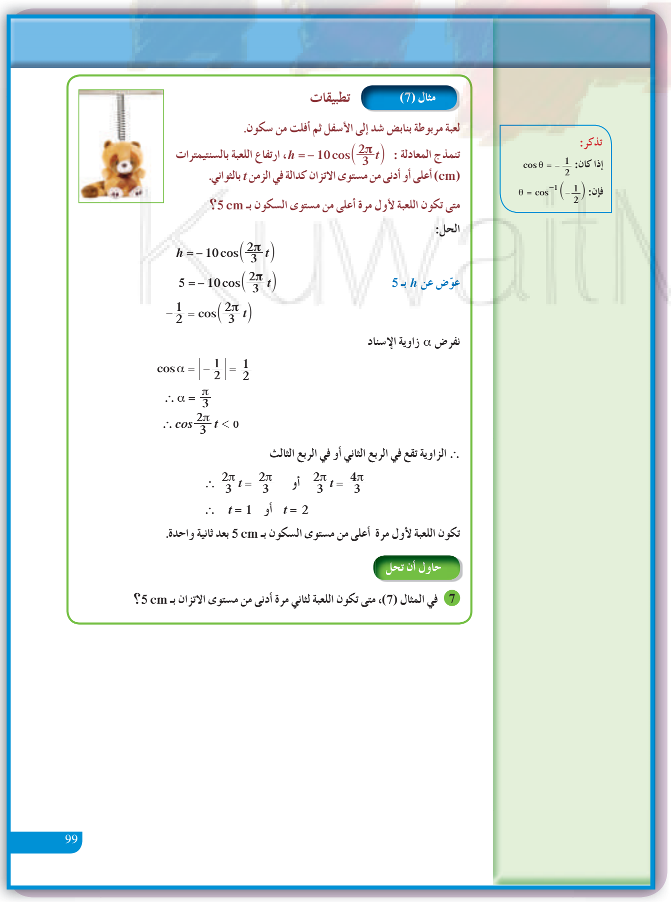
$x = \dfrac{3\pi}{8} + k\pi$

حل المعادلة: $x = \dfrac{\pi}{8} + k\pi$, $x = \dfrac{3\pi}{8} + k\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{8} + k\pi$, $x = \dfrac{7\pi}{8} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

تدريب إثرائي

حل المعادلة: $4\cos^2 2x = 1$

98



مثال (7) **تطبيقات**

لعبة مربوطة بنابض شد إلى الأسفل ثم أفلت من سكون.

تنمذج المعادلة: $h = -10\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}t\right)$، ارتفاع اللعبة بالسنتيمترات (cm) أعلى أو أدنى من مستوى الاتزان كدالة في الزمن t بالثواني.

متى تكون اللعبة لأول مرة أعلى من مستوى السكون بـ 5 cm؟

الحل:

$h = -10\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}t\right)$

عوّض عن h بـ 5

$5 = -10\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}t\right)$

$-\dfrac{1}{2} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}t\right)$

نفرض α زاوية الإسناد

$\cos\alpha = \left|-\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \alpha = \dfrac{\pi}{3}$

$\therefore \cos\dfrac{2\pi}{3}t < 0$

$\therefore$ الزاوية تقع في الربع الثاني أو في الربع الثالث

$\therefore \dfrac{2\pi}{3}t = \dfrac{2\pi}{3}$ أو $\dfrac{2\pi}{3}t = \dfrac{4\pi}{3}$

$\therefore t = 1$ أو $t = 2$

تكون اللعبة لأول مرة أعلى من مستوى السكون بـ 5 cm بعد ثانية واحدة.

حاول أن تحل

7. في المثال (7)، متى تكون اللعبة لثاني مرة أدنى من مستوى الاتزان بـ 5 cm؟

تذكر:

إذا كان: $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$

فإن: $\theta = \cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

99

4–9: متطابقات المجموع والفرق

1 الأهداف

- يتعرف جيب مجموع زاويتين أو الفرق بينهما.
- يتعرف جيب تمام مجموع زاويتين أو الفرق بينهما.
- يستخدم متطابقة الدوال المتكافئة.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

جيب مجموع زاويتين – جيب الفرق بين زاويتين – جيب تمام مجموع زاويتين – جيب تمام الفرق بين زاويتين – دوال متكافئة.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

بسّط التعابير المثلثية التالية:

(a) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ **(b)** $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

(c) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$ **(d)** $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد:

$\sin 15^\circ$, $\sin 75^\circ$, $\sin 105^\circ$, $\cos 15^\circ$, $\cos 75^\circ$, $\cos 105^\circ$

5 التدريس

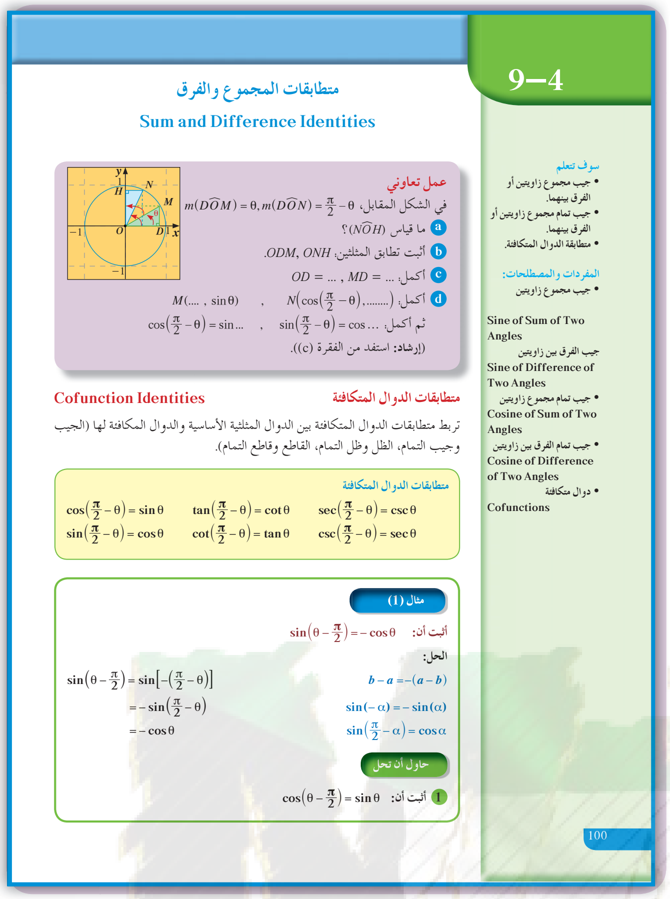
يتعرف الطلاب في هذا الدرس على متطابقات جديدة ترتكز على المتطابقات الأساسية التي رأيناها سابقًا ويمكن بواسطتها إيجاد قيم الجيب وجيب التمام والظل لزوايا خاصة مثل:

$15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$, $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$,

$105^\circ = 90^\circ + 15^\circ = 60^\circ + 45^\circ \ldots$

ساعد الطلاب على فهم كيفية إيجاد $\cos(\beta-\alpha)$،

اطلب إليهم كتابة طريقة إيجاد هذه المتطابقة.



9–4

سوف تتعلم
- جيب مجموع زاويتين أو الفرق بينهما.
- جيب تمام مجموع زاويتين أو الفرق بينهما.
- متطابقة الدوال المتكافئة.

المفردات والمصطلحات:
- جيب مجموع زاويتين Sine of Sum of Two Angles
- جيب الفرق بين زاويتين Sine of Difference of Two Angles
- جيب تمام مجموع زاويتين Cosine of Sum of Two Angles
- جيب تمام الفرق بين زاويتين Cosine of Difference of Two Angles
- دوال متكافئة Cofunctions

متطابقات المجموع والفرق

Sum and Difference Identities

عمل تعاوني

في الشكل المقابل، $m(D\widehat{O}M)=\theta, m(D\widehat{O}N)=\frac{\pi}{2}-\theta$

(a) ما قياس $(N\widehat{O}H)$؟

(b) أثبت تطابق المثلثين: ODM, ONH.

(c) أكمل: $OD = \ldots , MD = \ldots$

(d) أكمل: $N\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right), \ldots\ldots\right)$, $M(\ldots , \sin\theta)$

ثم أكمل: $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\ldots$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\ldots$

(**إرشاد:** استفد من الفقرة (c)).

متطابقات الدوال المتكافئة Cofunction Identities

تربط متطابقات الدوال المتكافئة بين الدوال المثلثية الأساسية والدوال المكافئة لها (الجيب وجيب التمام، الظل وظل التمام، القاطع وقاطع التمام).

متطابقات الدوال المتكافئة

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$ $\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\csc\theta$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta$ $\csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta$

مثال (1)

أثبت أن: $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\theta$

الحل:

$b-a=-(a-b)$ $\quad \sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]$

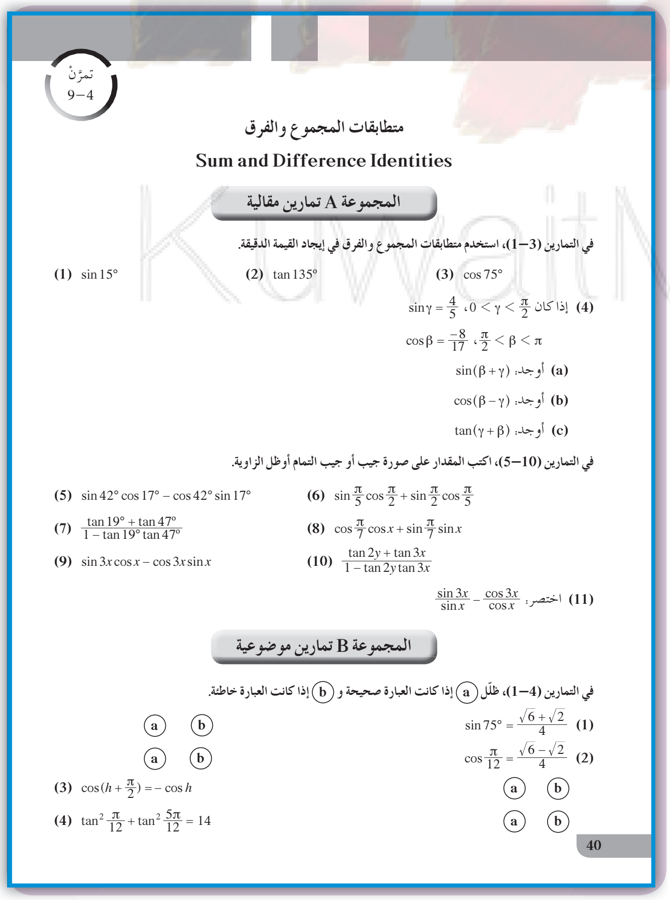
$\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)$ $\quad =-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ $\quad =-\cos\theta$

حاول أن تحل

(1) أثبت أن: $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\theta$

100



تمرَّنْ 9–4

متطابقات المجموع والفرق

Sum and Difference Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–3)، استخدم متطابقات المجموع والفرق في إيجاد القيمة الدقيقة.

(1) $\sin 15^\circ$ (2) $\tan 135^\circ$ (3) $\cos 75^\circ$

(4) إذا كان $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$، $\sin\gamma=\frac{4}{5}$

$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$، $\cos\beta=\frac{-8}{17}$

(a) أوجد: $\sin(\beta+\gamma)$

(b) أوجد: $\cos(\beta-\gamma)$

(c) أوجد: $\tan(\gamma+\beta)$

في التمارين (5–10)، اكتب المقدار على صورة جيب أو جيب التمام أوظل الزاوية.

(5) $\sin 42^\circ\cos 17^\circ-\cos 42^\circ\sin 17^\circ$ (6) $\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{5}$

(7) $\frac{\tan 19^\circ+\tan 47^\circ}{1-\tan 19^\circ\tan 47^\circ}$ (8) $\cos\frac{\pi}{7}\cos x+\sin\frac{\pi}{7}\sin x$

(9) $\sin 3x\cos x-\cos 3x\sin x$ (10) $\frac{\tan 2y+\tan 3x}{1-\tan 2y\tan 3x}$

(11) اختصر: $\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\sin 75^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (a) (b)

(2) $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (a) (b)

(3) $\cos\left(h+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos h$ (a) (b)

(4) $\tan^2\frac{\pi}{12}+\tan^2\frac{5\pi}{12}=14$ (a) (b)

40

شجعهم على إيجاد $\cos(\beta+\alpha)$ باستخدام $\cos(\beta-\alpha)$ لأن ذلك سوف يساعدهم على الفهم بدلًا من الحفظ، وبالتالي يساعدهم على إيجاد $\sin(\beta-\alpha)$ ثم $\sin(\beta+\alpha)$ بتطبيق العلاقة بين $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ وَ $\sin\alpha$ أو $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ وَ $\sin\alpha$.

في المثال (1)

يساعد هذا المثال الطلاب على التدريب على كيفية الانتقال من $\sin\theta$ إلى $\cos\theta$ وبالعكس.

في المثال (2)

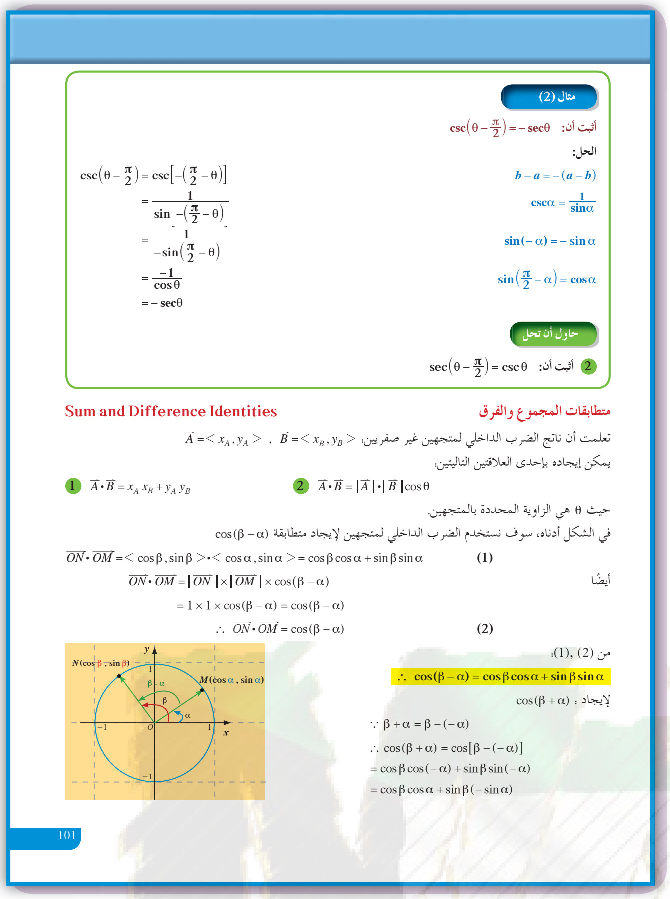
يبيّن هذا المثال للطلاب كيفية الانتقال من $\sec\theta$ إلى $\csc\theta$ وبالعكس أي من معكوس $\cos\theta$ إلى معكوس $\sin\theta$ وبالعكس.

في المثال (3)

يساعد هذا المثال الطلاب على استخدام جيب تمام الفرق بين زاويتين وإيجاد القيمة الصحيحة والدقيقة لجيب تمام الزاوية 15° وذلك دون استخدام الآلة الحاسبة.

في المثال (4)

يساعد هذا المثال الطلاب على استخدام جيب المجموع وجيب الفرق وإيجاد $\cos\theta$ بمعلومية $\sin\theta$ وبالعكس لإيجاد قيم مثلثية دقيقة لمجموع زاويتين أو الفرق بينهما.


مثال (2)

أثبت أن: $\csc\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\sec\theta$

الحل:

$b-a=-(a-b)$

$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$

$$\csc\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\csc\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]$$
$$=\frac{1}{\sin-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$
$$=\frac{1}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$
$$=\frac{-1}{\cos\theta}$$
$$=-\sec\theta$$

حاول أن تحل

2 أثبت أن: $\sec\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\csc\theta$

متطابقات المجموع والفرق Sum and Difference Identities

تعلمت أن ناتج الضرب الداخلي لمتجهين غير صفريين: $\vec{A}=<x_A,y_A>$ ، $\vec{B}=<x_B,y_B>$ يمكن إيجاده بإحدى العلاقتين التاليتين:

1 $\vec{A}\cdot\vec{B}=x_A x_B+y_A y_B$

2 $\vec{A}\cdot\vec{B}=\|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|\cos\theta$

حيث θ هي الزاوية المحددة بالمتجهين.

في الشكل أدناه، سوف نستخدم الضرب الداخلي لمتجهين لإيجاد متطابقة $\cos(\beta-\alpha)$

$\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OM}=<\cos\beta,\sin\beta>\cdot<\cos\alpha,\sin\alpha>=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha$ (1)

أيضًا $\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OM}=\|\overrightarrow{ON}\|\times\|\overrightarrow{OM}\|\times\cos(\beta-\alpha)$

$=1\times1\times\cos(\beta-\alpha)=\cos(\beta-\alpha)$

$\therefore\ \overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OM}=\cos(\beta-\alpha)$ (2)

من (1), (2):

$\therefore\ \cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha$

لإيجاد : $\cos(\beta+\alpha)$

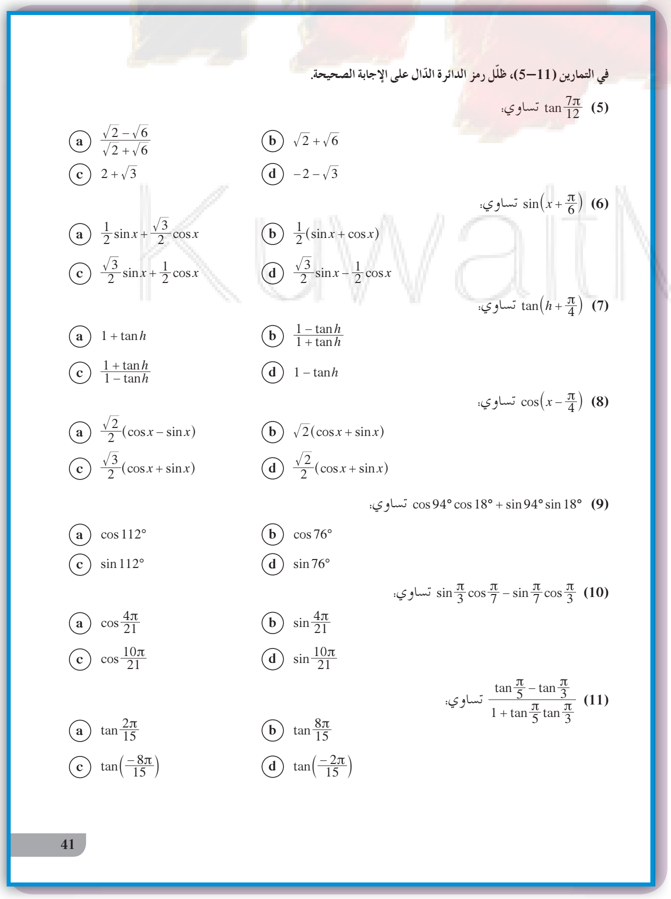
$\because\ \beta+\alpha=\beta-(-\alpha)$

$\therefore\ \cos(\beta+\alpha)=\cos[\beta-(-\alpha)]$

$=\cos\beta\cos(-\alpha)+\sin\beta\sin(-\alpha)$

$=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta(-\sin\alpha)$

101


في التمارين (11–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) $\tan\frac{7\pi}{12}$ تساوي:

(a) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ (b) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

(c) $2+\sqrt{3}$ (d) $-2-\sqrt{3}$

(6) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$ (b) $\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x$

(7) $\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

(a) $1+\tan h$ (b) $\frac{1-\tan h}{1+\tan h}$

(c) $\frac{1+\tan h}{1-\tan h}$ (d) $1-\tan h$

(8) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

(a) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$ (b) $\sqrt{2}(\cos x+\sin x)$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos x+\sin x)$ (d) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)$

(9) $\cos 94^\circ\cos 18^\circ+\sin 94^\circ\sin 18^\circ$ تساوي:

(a) $\cos 112^\circ$ (b) $\cos 76^\circ$

(c) $\sin 112^\circ$ (d) $\sin 76^\circ$

(10) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{3}$ تساوي:

(a) $\cos\frac{4\pi}{21}$ (b) $\sin\frac{4\pi}{21}$

(c) $\cos\frac{10\pi}{21}$ (d) $\sin\frac{10\pi}{21}$

(11) $\frac{\tan\frac{\pi}{5}-\tan\frac{\pi}{3}}{1+\tan\frac{\pi}{5}\tan\frac{\pi}{3}}$ تساوي:

(a) $\tan\frac{2\pi}{15}$ (b) $\tan\frac{8\pi}{15}$

(c) $\tan\left(\frac{-8\pi}{15}\right)$ (d) $\tan\left(\frac{-2\pi}{15}\right)$

41

6 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في كتابة المتطابقات فيستخدمون خاصية التوزيع مثل $\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta - \cos\alpha$،

اطلب إليهم إعادة كتابة جيب وجيب التمام وظل مجموع وفرق زاويتين، ثم ركز أفكارهم على تغير الإشارة في $\cos(\beta + \alpha)$ و $\cos(\beta - \alpha)$.

7 التقييم

راقب الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من أنهم قد فهموا جيّدًا المتطابقات الجديدة.

اختبار سريع

1 أوجد: $\sin(-75°)$، $\cos(-75°)$، $\tan(255°)$ دون استخدام الآلة الحاسبة.

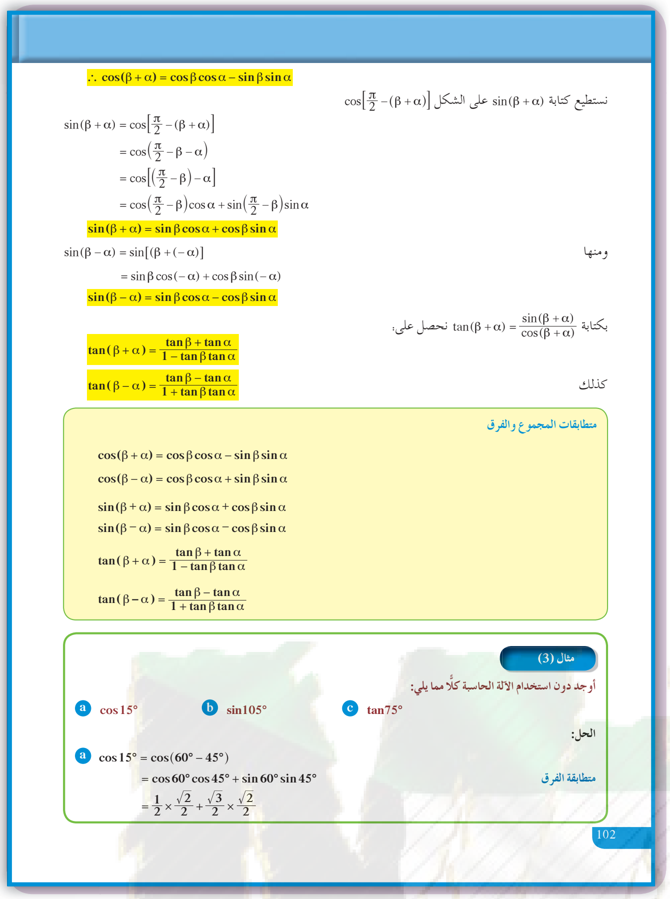
$$\sin(-75°) = -\sin 75°$$
$$= -\sin(45° + 30°)$$
$$= -(\sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°)$$
$$= -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos(-75°) = \cos 75°$$
$$= \cos(45° + 30°)$$
$$= \cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30°$$
$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\tan(255°) = \tan(180° + 75°) = \tan 75°$$
$$= \tan(45° + 30°)$$
$$= \frac{\tan 45° + \tan 30°}{1 - \tan 45° \tan 30°}$$
$$= 2 + \sqrt{3}$$

2 أوجد: $\tan 15°$

$$\tan 15° = \tan(60° - 45°)$$
$$= \frac{\tan 60° - \tan 45°}{1 + \tan 60° \tan 45°}$$
$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}}$$
$$= 2 - \sqrt{3}$$



$\therefore \cos(\beta+\alpha) = \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha$

نستطيع كتابة $\sin(\beta+\alpha)$ على الشكل $\cos\left[\frac{\pi}{2} - (\beta+\alpha)\right]$

$$\sin(\beta+\alpha) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\beta+\alpha)\right]$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta - \alpha\right)$$
$$= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - \alpha\right]$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\cos\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\sin\alpha$$

$\sin(\beta+\alpha) = \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha$

ومنها

$$\sin(\beta-\alpha) = \sin[(\beta + (-\alpha)]$$
$$= \sin\beta\cos(-\alpha) + \cos\beta\sin(-\alpha)$$

$\sin(\beta-\alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha$

بكتابة $\tan(\beta+\alpha) = \frac{\sin(\beta+\alpha)}{\cos(\beta+\alpha)}$ نحصل على:

$$\tan(\beta+\alpha) = \frac{\tan\beta + \tan\alpha}{1 - \tan\beta\tan\alpha}$$

كذلك

$$\tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha}$$

متطابقات المجموع والفرق

$$\cos(\beta+\alpha) = \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha$$
$$\cos(\beta-\alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha$$
$$\sin(\beta+\alpha) = \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha$$
$$\sin(\beta-\alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha$$
$$\tan(\beta+\alpha) = \frac{\tan\beta + \tan\alpha}{1 - \tan\beta\tan\alpha}$$
$$\tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha}$$

مثال (3)

أوجد دون استخدام الآلة الحاسبة كلًّا مما يلي:

a $\cos 15°$ b $\sin 105°$ c $\tan 75°$

الحل:

a متطابقة الفرق

$$\cos 15° = \cos(60° - 45°)$$
$$= \cos 60° \cos 45° + \sin 60° \sin 45°$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

102

8 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

(a) $m(\widehat{NOH}) = \theta$

(b) راجع عمل الطلاب.

(c) $OD = OH \ , \ MD = NH$

(d) $M(\cos\theta \ , \ \sin\theta) \ , \ N\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \ , \ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta \ , \ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$$

«حاول أن تحل»

1 $\cos\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$

2 $\sec\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = \sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$$= \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = \frac{1}{\sin\theta} = \csc\theta$$

3 **(a)** $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(b) $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ)$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(c) $\tan 105^\circ = \tan(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\times 1}$

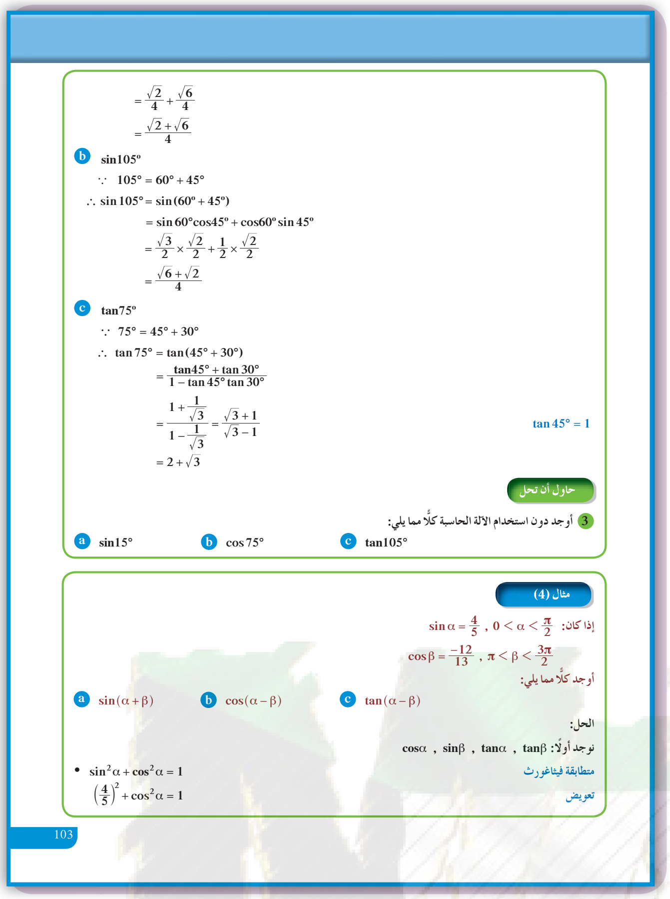
$$= \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -2-\sqrt{3}$$

4 **(a)** $\cos(\alpha+\beta) = \frac{3}{5} \times \left(\frac{-12}{13}\right) - \frac{4}{5} \times \left(\frac{-5}{13}\right)$

$$= \frac{-16}{65}$$

(b) $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{-\frac{63}{65}}{-\frac{16}{65}} = \frac{63}{16}$

(c) $\sin(\beta-\alpha) = \frac{-5}{13} \times \frac{3}{5} - \left(\frac{-12}{13}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{33}{65}$



$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

b $\sin 105^\circ$

$\because \ 105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$

$\therefore \sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ)$

$$= \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

c $\tan 75^\circ$

$\because \ 75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$

$\therefore \ \tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ)$

$$= \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= 2+\sqrt{3}$$

$\tan 45^\circ = 1$

حاول أن تحل

3 أوجد دون استخدام الآلة الحاسبة كلًّا مما يلي:

a $\sin 15^\circ$ **b** $\cos 75^\circ$ **c** $\tan 105^\circ$

مثال (4)

إذا كان: $\sin\alpha = \frac{4}{5} \ , \ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\cos\beta = \frac{-12}{13} \ , \ \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

أوجد كلًّا مما يلي:

a $\sin(\alpha+\beta)$ **b** $\cos(\alpha-\beta)$ **c** $\tan(\alpha-\beta)$

الحل:

نوجد أولًا: $\tan\beta \ , \ \tan\alpha \ , \ \sin\beta \ , \ \cos\alpha$

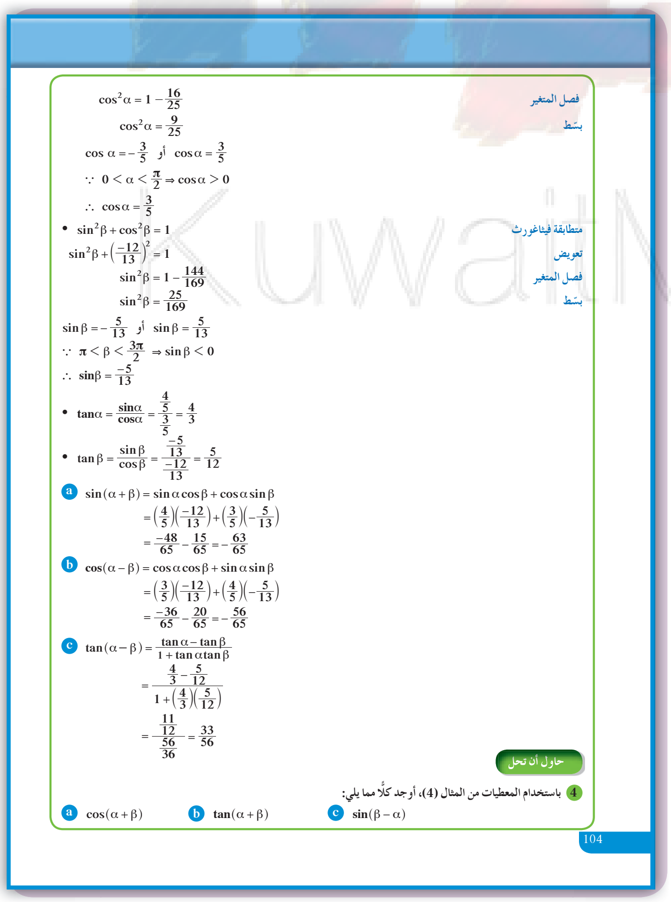
متطابقة فيثاغورث

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

تعويض

$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

103



فصل المتغير

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25}$

بسّط

$\cos^2\alpha = \frac{9}{25}$

$\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ أو $\cos\alpha = \frac{3}{5}$

$\because \ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha > 0$

$\therefore \ \cos\alpha = \frac{3}{5}$

متطابقة فيثاغورث

- $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$

تعويض

$\sin^2\beta + \left(\frac{-12}{13}\right)^2 = 1$

فصل المتغير

$\sin^2\beta = 1 - \frac{144}{169}$

بسّط

$\sin^2\beta = \frac{25}{169}$

$\sin\beta = -\frac{5}{13}$ أو $\sin\beta = \frac{5}{13}$

$\because \ \pi < \beta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin\beta < 0$

$\therefore \ \sin\beta = \frac{-5}{13}$

- $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$
- $\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{-5}{13}}{\frac{-12}{13}} = \frac{5}{12}$

a $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{-12}{13}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right)$$

$$= \frac{-48}{65} - \frac{15}{65} = -\frac{63}{65}$$

b $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$$= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{-12}{13}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right)$$

$$= \frac{-36}{65} - \frac{20}{65} = -\frac{56}{65}$$

c $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$$= \frac{\frac{4}{3}-\frac{5}{12}}{1+\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{12}\right)}$$

$$= \frac{\frac{11}{12}}{\frac{56}{36}} = \frac{33}{56}$$

حاول أن تحل

4 باستخدام المعطيات من المثال (4)، أوجد كلًّا مما يلي:

a $\cos(\alpha+\beta)$ **b** $\tan(\alpha+\beta)$ **c** $\sin(\beta-\alpha)$

104

5–9: متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

1 الأهداف

- يتعرف متطابقات ضعف الزاوية.
- يتعرف متطابقات نصف الزاوية.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

ضعف الزاوية – نصف الزاوية.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) أوجد $2\cos 30^\circ \sin 30^\circ$ ثم $\sin 60^\circ$، ماذا تلاحظ؟

(b) أوجد $\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ$ ثم $\cos 60^\circ$، ماذا تلاحظ؟

(c) أوجد $\tan 60^\circ$ ثم $\dfrac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}$، ماذا تلاحظ؟

(d) بسّط ما يلي:

$$\cos^2 42^\circ + \cos^2 48^\circ \ , \ \sin^2 37^\circ + \sin^2 53^\circ$$

5 التدريس

يتعرف الطلاب على متطابقات ضعف الزاوية ومتطابقات نصف الزاوية إذ تساعد هذه المتطابقات على حل معادلات مثلثية من خلال تبسيطها بدلالة واحدة فقط من الدوال المثلثية. كما أنها تساعد على إيجاد قيم دقيقة لزوايا خاصة هي في الأساس ضعف زوايا معروفة أو نصف زوايا معروفة.

فمثلًا: $15^\circ = \dfrac{30^\circ}{2}$, $22.5^\circ = \dfrac{45^\circ}{2}$, $120^\circ = 2 \times 60^\circ$

راجع مع الطلاب متطابقات الدرس السابق وشجّعهم على إيجاد $\tan 2\theta$, $\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$ بأنفسهم بدلًا من الحفظ.

5–9

متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

Double–Angle and Half–Angle Identities

سوف تتعلم
- متطابقات ضعف الزاوية.
- متطابقات نصف الزاوية.

المفردات والمصطلحات:
- ضعف الزاوية Double of an Angle
- نصف الزاوية Half of anAngle

عمل تعاوني

تعلمت في ما سبق:

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

إذا كانت $\alpha = \beta$ فإن:

$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha+\alpha)$
$= \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha$
$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

وبالمثل استخدم قوانين مجموع زاويتين في إيجاد كل من:

(a) $\sin 2\alpha$ (b) $\tan 2\alpha$

متطابقات ضعف الزاوية Double–Angle Identities

أولًا: جيب تمام ضعف الزاوية Cosine Double–Angle

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

مثال (1)

أثبت صحة متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية: $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

الحل:

من عمل تعاوني (1) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

من متطابقة فيثاغورث $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

نحصل على $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

في المعادلة (1) نعوّض عن $\sin^2\theta$ بـ $1-\cos^2\theta$

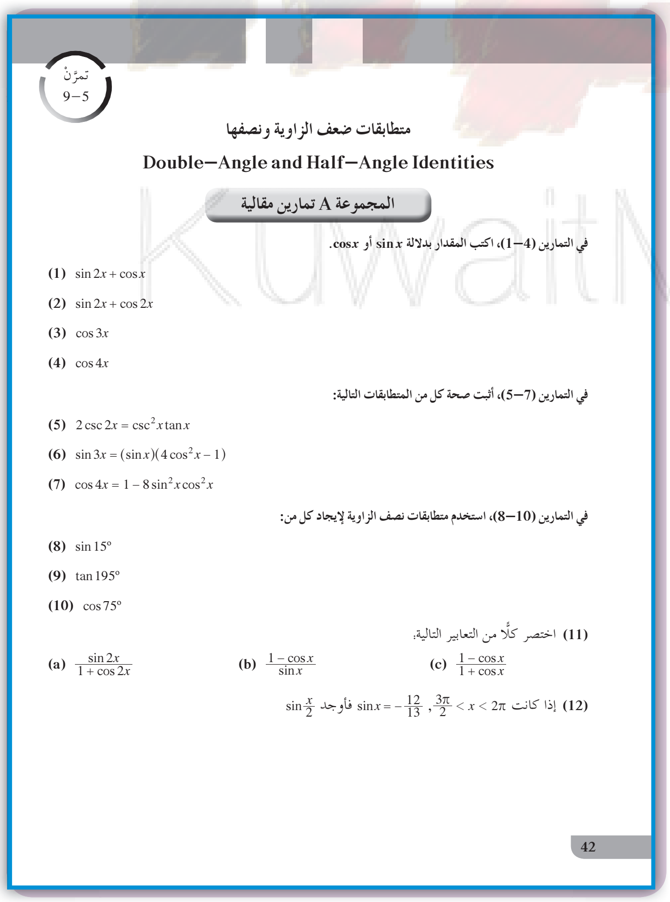
نحصل على $\cos 2\theta = \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta)$
$= \cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta$
$= 2\cos^2\theta - 1$

حاول أن تحل

1 أثبت صحة متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية: $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$
$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

105



تمرَّنْ 5–9

متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

Double–Angle and Half–Angle Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–4)، اكتب المقدار بدلالة $\sin x$ أو $\cos x$.

(1) $\sin 2x + \cos x$
(2) $\sin 2x + \cos 2x$
(3) $\cos 3x$
(4) $\cos 4x$

في التمارين (5–7)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

(5) $2\csc 2x = \csc^2 x \tan x$
(6) $\sin 3x = (\sin x)(4\cos^2 x - 1)$
(7) $\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x\cos^2 x$

في التمارين (8–10)، استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد كل من:

(8) $\sin 15^\circ$
(9) $\tan 195^\circ$
(10) $\cos 75^\circ$

(11) اختصر كلًّا من التعابير التالية:

(a) $\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$ (b) $\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ (c) $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

(12) إذا كانت $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, $\sin x = -\frac{12}{13}$ فأوجد $\sin\frac{x}{2}$

42

في المثال (1)

هذا المثال هو تطبيق مباشر لجيب تمام ضعف الزاوية واستنتاج متطابقة ثانية.

في المثالين (3) ,(2)

يتم استخدام متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية ومتطابقة جيب ضعف الزاوية لحل مسائل مثلثية.

في المثالين (5) ,(4)

يتم استخدام متطابقات ضعف الزاوية في حل مسائل مثلثية. شدّد على ضرورة حفظ هذه المتطابقات.

في المثال (6)

يتم استخدام متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد معادلات ومتطابقات جديدة.

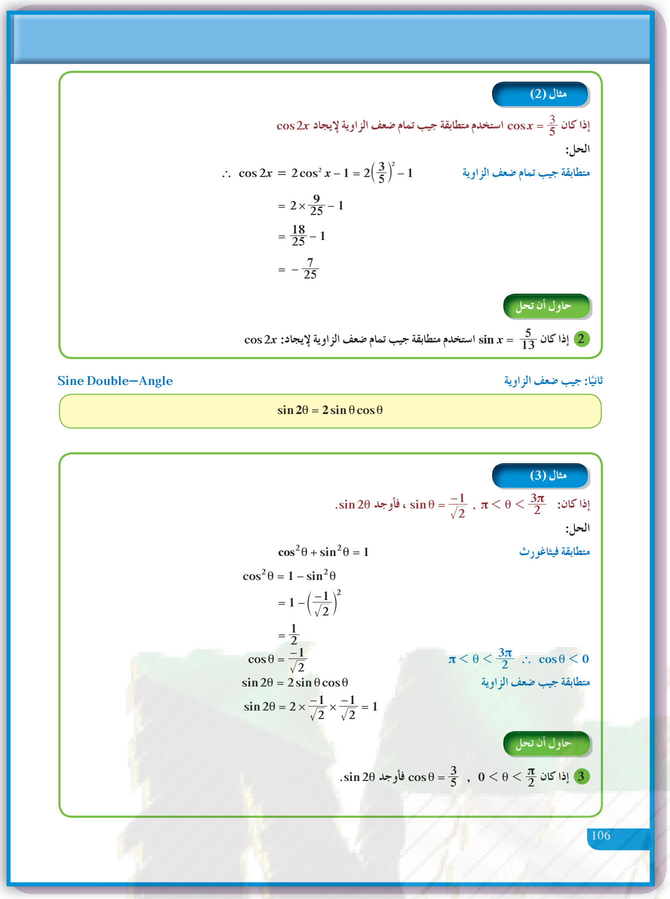
في المثالين (8) ,(7)

حل مسائل باستخدام متطابقات نصف الزاوية. أشر إلى أن الزاوية هي ضعف نصف الزاوية أيضًا.

6 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام متطابقات ضعف الزاوية ومتطابقات نصف الزاوية حفّزهم على إيجاد هذه المتطابقات كتابة عدة مرات انطلاقًا من متطابقات مجموع الزوايا.

نبّه الطلاب إلى أن بعض الحلول قد تحل باستخدام طرق أسهل وبخاصة باستخدام المطابقتين: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$، $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$، ولكن بالرغم من ذلك شدّد على استخدام متطابقات هذا الدرس لحفظها.



مثال (2)

إذا كان $\cos x = \frac{3}{5}$ استخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد $\cos 2x$

الحل:

متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية $\therefore \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1$

$= 2 \times \frac{9}{25} - 1$

$= \frac{18}{25} - 1$

$= -\frac{7}{25}$

حاول أن تحل

2 إذا كان $\sin x = \frac{5}{13}$ استخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد: $\cos 2x$

ثانيًا: جيب ضعف الزاوية Sine Double–Angle

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

مثال (3)

إذا كان: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ ، فأوجد $\sin 2\theta$.

الحل:

متطابقة فيثاغورث $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$= 1 - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$= \frac{1}{2}$

$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \quad \therefore \cos\theta < 0$ $\quad \cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

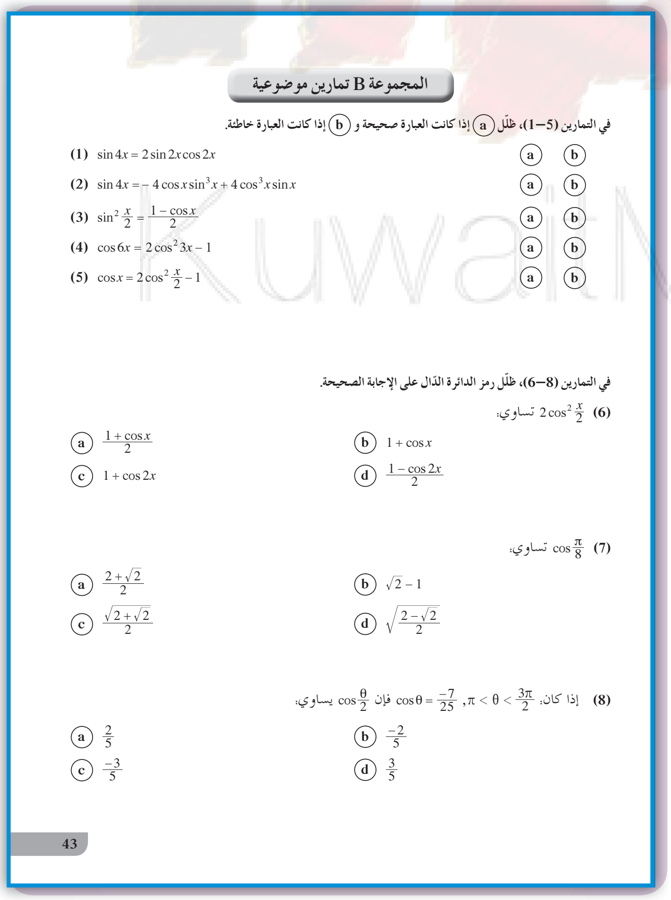
متطابقة جيب ضعف الزاوية $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\sin 2\theta = 2 \times \frac{-1}{\sqrt{2}} \times \frac{-1}{\sqrt{2}} = 1$

حاول أن تحل

3 إذا كان $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$ فأوجد $\sin 2\theta$.

106



المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x$ (a) (b)

(2) $\sin 4x = -4\cos x\sin^3 x + 4\cos^3 x\sin x$ (a) (b)

(3) $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$ (a) (b)

(4) $\cos 6x = 2\cos^2 3x - 1$ (a) (b)

(5) $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$ (a) (b)

في التمارين (6–8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $2\cos^2\frac{x}{2}$ تساوي:

(a) $\frac{1+\cos x}{2}$ (b) $1 + \cos x$

(c) $1 + \cos 2x$ (d) $\frac{1-\cos 2x}{2}$

(7) $\cos\frac{\pi}{8}$ تساوي:

(a) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ (b) $\sqrt{2} - 1$

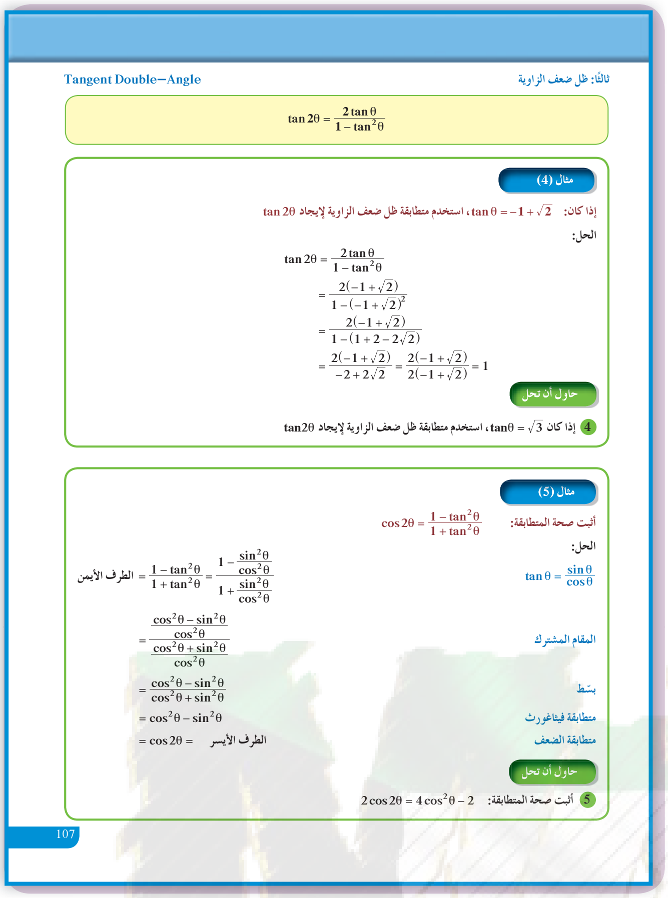
(c) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ (d) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$

(8) إذا كان: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\cos\theta = \frac{-7}{25}$ فإن $\cos\frac{\theta}{2}$ يساوي:

(a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{-2}{5}$

(c) $\frac{-3}{5}$ (d) $\frac{3}{5}$

43



ثالثاً: ظل ضعف الزاوية Tangent Double−Angle

$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

مثال (4)

إذا كان: $\tan\theta = -1+\sqrt{2}$، استخدم متطابقة ظل ضعف الزاوية لإيجاد $\tan 2\theta$

الحل:

$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2(-1+\sqrt{2})}{1-(-1+\sqrt{2})^2} = \frac{2(-1+\sqrt{2})}{1-(1+2-2\sqrt{2})} = \frac{2(-1+\sqrt{2})}{-2+2\sqrt{2}} = \frac{2(-1+\sqrt{2})}{2(-1+\sqrt{2})} = 1$

حاول أن تحل

4 إذا كان $\tan\theta = \sqrt{3}$، استخدم متطابقة ظل ضعف الزاوية لإيجاد $\tan 2\theta$

مثال (5)

أثبت صحة المتطابقة: $\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

الحل:

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ الطرف الأيمن $= \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$

المقام المشترك $= \frac{\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$

بسّط $= \frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

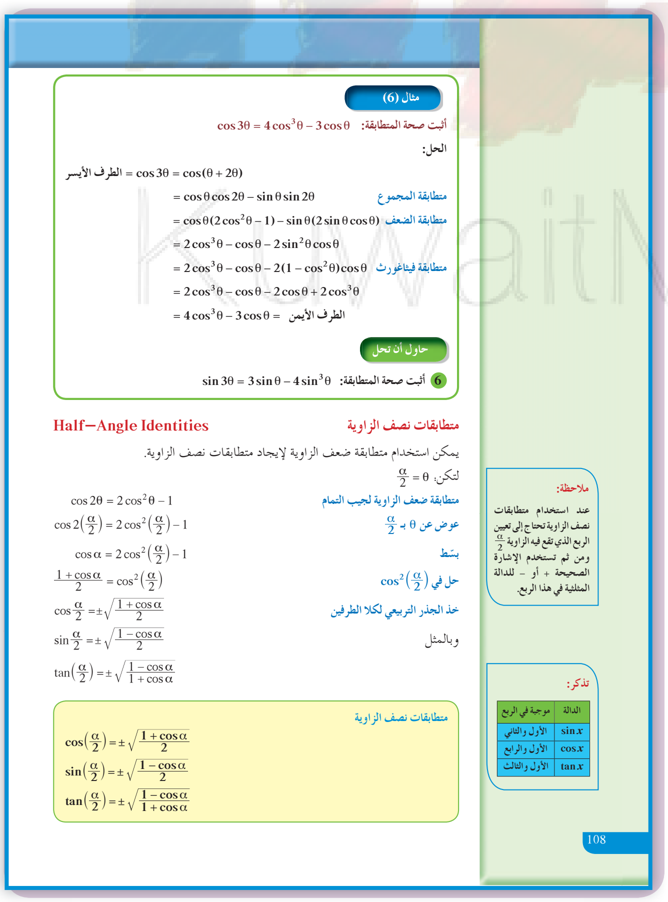
متطابقة فيثاغورث $= \cos^2\theta-\sin^2\theta$

متطابقة الضعف $= \cos 2\theta =$ الطرف الأيسر

حاول أن تحل

5 أثبت صحة المتطابقة: $2\cos 2\theta = 4\cos^2\theta - 2$

107



مثال (6)

أثبت صحة المتطابقة: $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

الحل:

الطرف الأيسر $= \cos 3\theta = \cos(\theta+2\theta)$

متطابقة المجموع $= \cos\theta\cos 2\theta - \sin\theta\sin 2\theta$

متطابقة الضعف $= \cos\theta(2\cos^2\theta-1) - \sin\theta(2\sin\theta\cos\theta)$

$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta$

متطابقة فيثاغورث $= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta$

$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta + 2\cos^3\theta$

$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta =$ الطرف الأيمن

حاول أن تحل

6 أثبت صحة المتطابقة: $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

متطابقات نصف الزاوية Half−Angle Identities

يمكن استخدام متطابقة ضعف الزاوية لإيجاد متطابقات نصف الزاوية.

لتكن $\theta = \frac{\alpha}{2}$

متطابقة ضعف الزاوية لجيب التمام $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

عوض عن θ بـ $\frac{\alpha}{2}$ $\cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$

بسّط $\cos\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$

حل في $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ $\frac{1+\cos\alpha}{2} = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

وبالمثل $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

متطابقات نصف الزاوية

$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

ملاحظة: عند استخدام متطابقات نصف الزاوية نحتاج إلى تعيين الربع الذي تقع فيه الزاوية $\frac{\alpha}{2}$ ومن ثم نستخدم الإشارة الصحيحة + أو − للدالة المثلثية في هذا الربع.

تذكر:

الدالة	موجبة في الربع
$\sin x$	الأول والثاني
$\cos x$	الأول والرابع
$\tan x$	الأول والثالث

108

7 التقييم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من حسن أدائهم وفهمهم لهذه المتطابقات.

اختبار سريع

1 **(a)** أثبت أن:

$$\sin\theta + \cos\theta + 1 = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)$$

نبدأ من اليسار:

$$\sin\theta + \cos\theta + 1 = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + 2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$= 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)$$

(b) أثبت أن:

$$2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right) = \sin\theta - \cos\theta + 1$$

نبدأ من اليمين:

$$\sin\theta - \cos\theta + 1 = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)$$

(c) استنتج أن: $\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta + 1} = \tan\frac{\theta}{2}$

باستخدام (a), (b) نكتب:

$$\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta + 1} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)}$$

بشرط $\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2} \neq 0$ يمكن التبسيط

ونحصل على: $\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}$

(d) أوجد مجموعة حل المعادلة:

$$\frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta + 1} = 1$$

باستخدام (c) نكتب: $\tan\frac{\theta}{2} = 1$

نحصل على: $\tan\frac{\theta}{2} = \tan\frac{\pi}{4}$

أي $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.

2 أوجد مجموعة حل المعادلة:

$$\sin 2\theta + \cos 2\theta + 1 = 0$$

$$2\sin\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta = 0$$

$$2\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta) = 0$$

$\sin\theta + \cos\theta = 0$ أو $\cos\theta = 0$

(a) إذا $\cos\theta = 0$ فيكون $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{2}$

أي $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$

(b) إذا $\sin\theta + \cos\theta = 0\ ;\ \sin\theta = -\cos\theta$

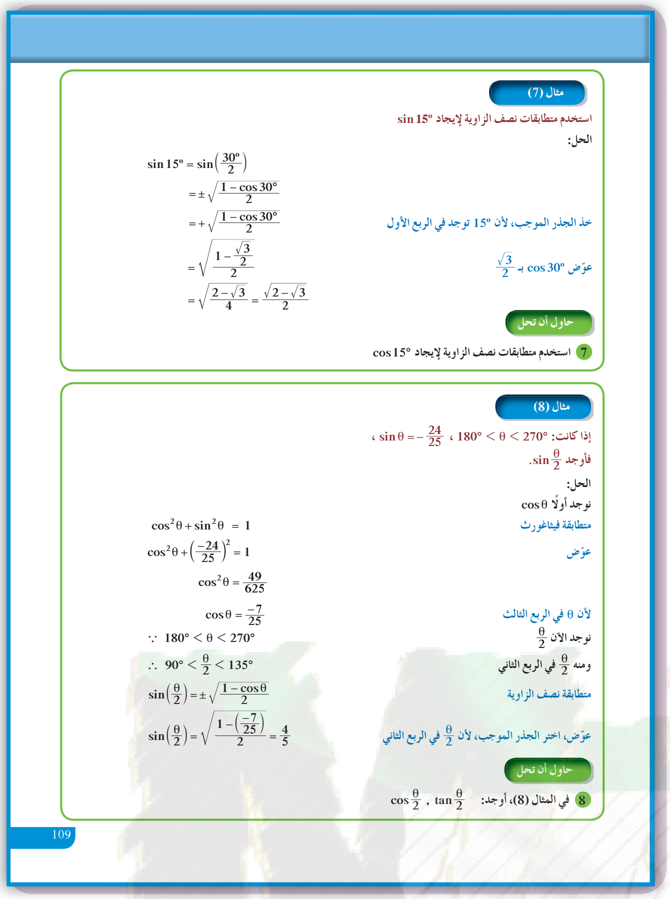
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\pi - \theta) \Rightarrow$$

- $\pi - \theta = \frac{\pi}{2} - \theta + 2k\pi$

لا يوجد حلول

- $\pi - \theta = -\frac{\pi}{2} + \theta + 2k\pi$

$\theta = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ k عدد صحيح



مثال (7)

استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد $\sin 15^\circ$

الحل:

$$\sin 15^\circ = \sin\left(\frac{30^\circ}{2}\right)$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}}$$

خذ الجذر الموجب، لأن 15° توجد في الربع الأول

$$= +\sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}}$$

عوّض $\cos 30^\circ$ بـ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

حاول أن تحل

7 استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد $\cos 15^\circ$

مثال (8)

إذا كانت: $180^\circ < \theta < 270^\circ$ ، $\sin\theta = -\frac{24}{25}$ ،

فأوجد $\sin\frac{\theta}{2}$.

الحل:

نوجد أولًا $\cos\theta$

متطابقة فيثاغورث $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

عوّض $\cos^2\theta + \left(\frac{-24}{25}\right)^2 = 1$

$$\cos^2\theta = \frac{49}{625}$$

لأن θ في الربع الثالث $\cos\theta = \frac{-7}{25}$

نوجد الآن $\frac{\theta}{2}$ $\because\ 180^\circ < \theta < 270^\circ$

ومنه $\frac{\theta}{2}$ في الربع الثاني $\therefore\ 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 135^\circ$

متطابقة نصف الزاوية $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}$

عوّض، اختر الجذر الموجب، لأن $\frac{\theta}{2}$ في الربع الثاني $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{-7}{25}\right)}{2}} = \frac{4}{5}$

حاول أن تحل

8 في المثال (8)، أوجد: $\cos\frac{\theta}{2}\ ,\ \tan\frac{\theta}{2}$

109

8 إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

(a) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

(b) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

«حاول أن تحل»

1 $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$$= (1 - \sin^2\theta) - \sin^2\theta$$

$$= 1 - 2\sin^2\theta$$

2 $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$$= 1 - 2\left(\frac{5}{13}\right)^2$$

$$= \frac{119}{169}$$

3 $\sin^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

$\sin\theta = \frac{4}{5}\ ,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$= 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

4 $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} = \dfrac{2\sqrt{3}}{1 - (\sqrt{3})^2} = -\sqrt{3}$

5 $2\cos 2\theta = 2(2\cos^2\theta - 1) = 4\cos^2\theta - 2$

6 $\sin(3\theta) = \sin(2\theta + \theta)$

$$= \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta$$

$$= 2\sin\theta\cos^2\theta + \sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)$$

$$= 2\sin\theta(1 - \sin^2\theta) + \sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)$$

$$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

7 $\cos 15^\circ = \sqrt{\dfrac{1 + \cos 30^\circ}{2}}$

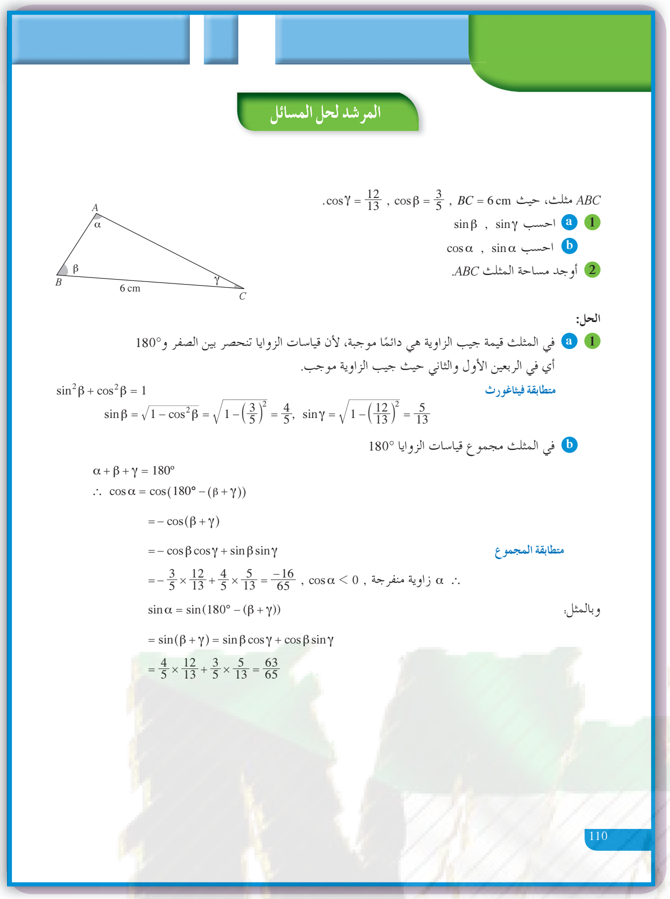
$$= \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

8 $\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\dfrac{1 + \cos\theta}{2}}\ ,\ 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 135^\circ$

$$= -\sqrt{\frac{1 - \frac{7}{25}}{2}} = -\sqrt{\frac{18}{25 \times 2}} = -\frac{3}{5}$$

$\tan\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}$

$$= -\sqrt{\frac{1 + \frac{7}{25}}{1 - \frac{7}{25}}} = -\sqrt{\frac{32}{18}} = -\frac{4}{3}$$



المرشد لحل المسائل

ABC مثلث، حيث $BC = 6\,cm$ ، $\cos\beta = \frac{3}{5}$ ، $\cos\gamma = \frac{12}{13}$.

1 a احسب $\sin\gamma$ ، $\sin\beta$

b احسب $\sin\alpha$ ، $\cos\alpha$

2 أوجد مساحة المثلث ABC.

الحل:

1 a في المثلث قيمة جيب الزاوية هي دائمًا موجبة، لأن قياسات الزوايا تنحصر بين الصفر و$180°$ أي في الربعين الأول والثاني حيث جيب الزاوية موجب.

متطابقة فيثاغورث $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$

$$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5},\quad \sin\gamma = \sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}$$

b في المثلث مجموع قياسات الزوايا $180°$

$$\alpha+\beta+\gamma = 180°$$

$$\therefore\ \cos\alpha = \cos(180° - (\beta+\gamma))$$

$$= -\cos(\beta+\gamma)$$

متطابقة المجموع

$$= -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma$$

$$= -\frac{3}{5}\times\frac{12}{13} + \frac{4}{5}\times\frac{5}{13} = \frac{-16}{65}$$ ، $\cos\alpha < 0$ ، $\therefore$ α زاوية منفرجة

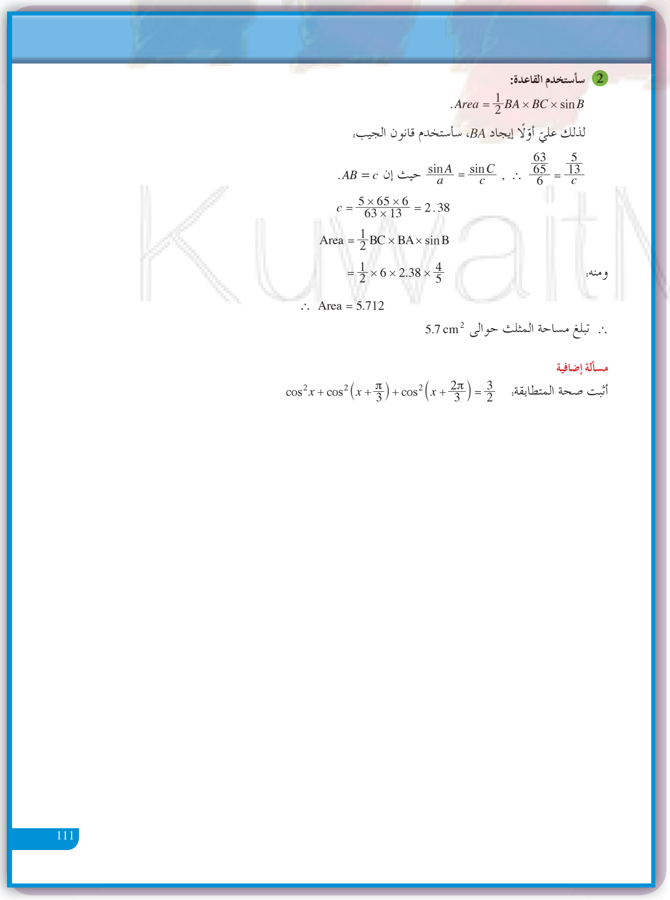
وبالمثل:

$$\sin\alpha = \sin(180° - (\beta+\gamma))$$

$$= \sin(\beta+\gamma) = \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma$$

$$= \frac{4}{5}\times\frac{12}{13} + \frac{3}{5}\times\frac{5}{13} = \frac{63}{65}$$

110



2 سأستخدم القاعدة:

$Area = \frac{1}{2} BA \times BC \times \sin B$.

لذلك عليّ أوّلًا إيجاد BA، سأستخدم قانون الجيب:

$$\frac{\frac{5}{13}}{c} = \frac{\frac{63}{65}}{6}\ ,\ \therefore\ \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$$ حيث إن $AB = c$.

$$c = \frac{5\times 65\times 6}{63\times 13} = 2.38$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\text{BC}\times\text{BA}\times\sin\text{B}$$

ومنه:

$$= \frac{1}{2}\times 6\times 2.38\times\frac{4}{5}$$

$$\therefore\ \text{Area} = 5.712$$

$\therefore$ تبلغ مساحة المثلث حوالى $5.7\,cm^2$

مسألة إضافية

أثبت صحة المتطابقة: $\cos^2 x + \cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$

111

إجابة «مسألة إضافية»

$$\cos^2 x + \left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^2$$

$$= \cos^2 x + \frac{1}{4}\cos^2 x + \frac{3}{4}\sin^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x$$

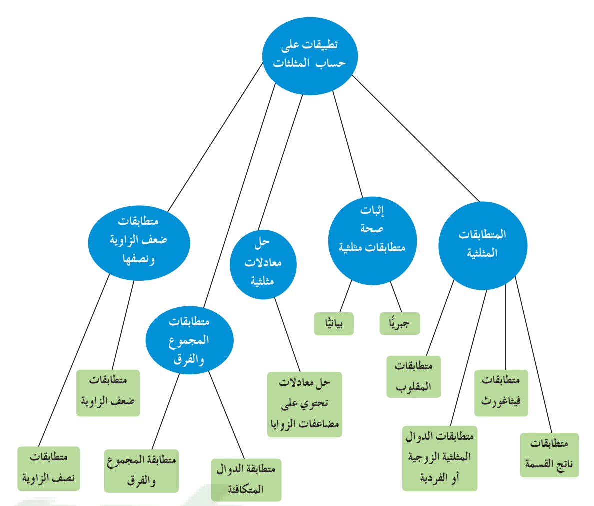
$$+\frac{1}{4}\cos^2 x + \frac{3}{4}\sin^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x$$

$$= \cos^2 x + \frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{3}{2}\sin^2 x$$

$$= \frac{3}{2}\cos^2 x + \frac{3}{2}\sin^2 x = \frac{3}{2}(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$= \frac{3}{2}$$

مخطط تنظيمي للوحدة التاسعة



112

ملخص

- متطابقات ناتج القسمة: $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
- متطابقات المقلوب: $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$, $\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$, $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$
- متطابقات فيثاغورث: $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$, $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$, $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$
- متطابقات الدوال الزوجية أو الفردية:

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(-\theta)=\cos\theta$ $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

$\csc(-\theta)=-\csc\theta$ $\sec(-\theta)=\sec\theta$ $\cot(-\theta)=-\cot\theta$

- طرق إثبات أن المعادلة متطابقة:

دمج الحدود، فصل الحدود، ضرب العوامل، التحليل، استخدام متطابقات معلومة، تبسيط الكسور، التحويل إلى الجيب وجيب التمام فقط.

- متطابقة الدوال المتكافئة:

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$ $\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\csc\theta$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta$ $\csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta$

- متطابقات المجموع والفرق:

$\cos(\beta+\alpha)=\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha$

$\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha$

$\sin(\beta+\alpha)=\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha$

$\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$

$\tan(\beta+\alpha)=\frac{\tan\beta+\tan\alpha}{1-\tan\beta\tan\alpha}$

$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$

- متطابقات ضعف الزاوية:

$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$ $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$

- متطابقات نصف الزاوية:

$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$, $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

113

اختبار الوحدة التاسعة

في التمارين (3—1)، حوّل المقادير إلى sin وcos. اكتب إجابتك على صورة كسر واحد.

(1) $\tan x+\cot x$

(2) $\sin x\cot x-\cos x\tan x$

(3) $\frac{\sec y}{\cos y}-\frac{\sin y}{\csc y\cos^2 y}$

في التمارين (8—4)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

(4) $\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\cos x}{1-\sin x}=2\sec x$

(5) $\frac{1-3\cos x-4\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{1-4\cos x}{1-\cos x}$

(6) $\sqrt{1-\cos x}\times\sqrt{1+\cos x}=\sin x \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

(7) $\frac{2\sin x\times\cos x}{1+\cos^2 x-\sin^2 x}=\tan x$

(8) $\frac{1+2\sin x\times\cos x}{\sin x+\cos x}=\sin x+\cos x$

في التمارين (13—9)، استخدم متطابقات المجموع والفرق في إيجاد القيمة الدقيقة.

(9) $\tan\frac{5\pi}{12}$

(10) $\sin\frac{-\pi}{12}$

(11) $\cos(x-y)-\cos(x+y)$

(12) $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

(13) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$

(14) **(a)** أوجد ناتج: $\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}$

(b) أوجد القيمة الصحيحة لكلّ مما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة:

(1) $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ **(2)** $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

(15) أوجد قيمة $\sin 2x$، إذا كان $\sin x-\cos x=\frac{1}{5}$

(16) أوجد: $\cos 2x$، إذا كان $\cos x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

44

تمارين إثرائية

في التمرينين (2—1)، حدّد ما إذا كانت الدالتان r , f متساويتين. إذا كانتا كذلك فاذكر سببًا مقنعًا. وإذا لم تكونا كذلك، فأوجد قيمة x التي تجعل $r(x) \neq f(x)$.

(1) $f(x) = \sqrt{x^2}\ ,\ r(x) = x$

(2) $f(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}\ ,\ r(x) = \sin x$

في التمارين (5—3)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

(3) $\dfrac{\tan x}{1 - \cot x} + \dfrac{\cot x}{1 - \tan x} = 1 + \sec x \csc x$

(4) $\dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} + \dfrac{1}{2\cos^2 x - 1} = \dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$

(5) $\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\sin^2 x}} - \dfrac{1 + \tan^2 x}{\tan x} = 0\ ,\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

(6) لتكن: $\tan x = \dfrac{\sin y - \cos y}{\sin y + \cos y}$

(a) أثبت أن: $2\cos^2 x = (\sin y + \cos y)^2$

(b) أثبت أن: $2\sin^2 x = (\sin y - \cos y)^2$

في التمارين (10—7)، حلّ كلًّا من المعادلات التالية:

(7) $\cos x = \cos\dfrac{\pi}{4}$

(8) $\sin^2 x - \dfrac{1}{2} = 0$

(9) $2\sin^2 x + 3\sin x - 5 = 0$

(10) $4\cos^2 x - 2(\sqrt{2} + \sqrt{3})\cos x + \sqrt{6} = 0$

(11) أوجد حلول المعادلة التالية: $2\sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0$ على الفترة $[0, 2\pi)$

(12) حلّ المعادلة: $\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0$

(13) استخدم متطابقات المجموع والفرق لإيجاد القيمة الدقيقة لِـ: $\tan\dfrac{11\pi}{12}$

(14) أوجد قيمة $\cos(x+y) \times \cos(x-y)$ بدلالة $\cos x$، $\cos y$

(15) **(a)** أثبت أن: $\tan 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(b) مستندًا إلى النتيجة في **(a)**،

أثبت أن: $\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos(x + 30°)$

(16) أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} + \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = 4\cos 2x$

(17) **(a)** أوجد قيمة $\cos(x+y+z)$ بدلالة: $\cos x$, $\cos y$, $\cos z$, $\sin x$, $\sin y$, $\sin z$

(b) استنتج قيمة $\cos 3x$ بدلالة $\cos x$ فقط **(مساعدة:** $x = y = z$**)**.

(18) أوجد قيمة x إذا كان $\cos x = 1 + \sqrt{3}\sin x$

(19) حلّ المعادلة: $2\cos x \tan x + \tan x - 2\cos x - 1 = 0$

(20) حلّ المعادلة: $2\cos^2 2x + \cos 2x = 1$

(21) لتكن: $y(x) = \dfrac{\sin^2 x + \sin x \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$، حيث $0 < x < \dfrac{\pi}{2}, x \neq \dfrac{\pi}{4}$

أوجد قيمة $\tan x$ إذا كانت $y = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$

(**مساعدة:** اكتب $y(x)$ بدلالة $\tan x$)

(22) **(a)** أثبت أن: $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

(b) اختصر: $\dfrac{1}{\tan x} - \dfrac{2}{\tan 2x}$

(23) أثبت صحة المتطابقة: $1 - \sin x + \cos x = 2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)$

(24) **(a)** أوجد قيمة $\cos 2x$، إذا كان $\cos x = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$، $0 < x < \pi$

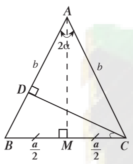
(b) أوجد قيمة $\cos 4x$

(c) أوجد قيمة x

(25) أوجد قيمة $\cos 18°$، $\sin 36°$، $\sin 9°$، إذا كان $\sin 18° = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$

(26) ABC مثلث متطابق الضلعين فيه $AB = AC$، $m(\widehat{A}) = 2\alpha$، حيث $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$،

M منتصف $\overline{BC}$، D الإسقاط العمودي للنقطة C على $\overline{AB}$



(a) أوجد BM باستخدام $\sin\alpha$ وبيّن أن $a = 2b\sin\alpha$

(b) استنتج $m(D\widehat{C}B)$

(c) أوجد CD باستخدام $\cos\alpha$

(d) استنتج أن مساحة المثلث ABC هي $b^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

(e) أثبت أن مساحة: ΔABC هي $\frac{1}{2}b^2\sin(2\alpha)$

(f) أثبت أن: $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$