الوحدة الأولى: الأعداد الحقيقية — Real Numbers

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

1 – 1: الجذور والتعبيرات الجذرية

جزء 1: الجذور والتعبيرات الجذرية

جزء 2: الجذور التكعيبية.

جزء 3: تبسيط الجذور .

جزء 4: جمع وطرح التعبيرات الجذرية.

جزء 5: ضرب وقسمة الجذور التربيعية والجذور التكعيبية.

جزء 6: تبسيط كسر مقامه يتضمّن جذرًا.

2 – 1: الأسس النسبية

جزء 1: قوانين الأسس النسبية.

3 – 1: حل المعادلات

جزء 1: حل المعادلات الجذرية.

جزء 2: حل المعادلات الأسية.

مقدمة الوحدة

الوحدة الأولى

الأعداد الحقيقية

The Real Numbers

مشروع الوحدة: معدل السرعة

1. **مقدمة المشروع:** شغلت حركة كواكب النظام الشمسي العلماء منذ القدم. ما هو مدار كل كوكب؟ ما كتلته؟ وفي أي اتجاه يدور؟ وما هي الشهب؟
يعتبر يوهانز كيبلر Johannes Kepler من أهم علماء الفلك وواضع ما عرف بقوانين كيبلر الثلاثة حول حركة الكواكب في 1609 و1618.
2. **الهدف:** التعرف على قوانين كيبلر وإجراء بعض العمليات الحسابية حول مدار كوكب، وسرعته، وزنته.
3. **اللوازم:** آلة حاسبة علمية، أوراق رسم بياني، حاسوب، جهاز إسقاط Data Show.
4. **أسئلة حول التطبيق:**
   a. اعرض قوانين كيبلر الثلاثة وادعم عرضك ببعض الرسوم التي تبيّن حركة الكواكب وعلاقتها بالمدار الإهليليجي (بيضاوي).
   b. ضع جدولًا يبيّن خصائص بعض كواكب النظام الشمسي: بُعدها عن الشمس، كتلتها، طول قطرها، الزمن المستغرق لدورانها دورة كاملة حول الشمس وحول نفسها.
   c. أوجد نسبة مربع الزمن لدورة الأرض دورة كاملة حول الشمس إلى مربع الزمن لدورة عطارد دورة كاملة حول الشمس، وقارنها بنسبة مكعب بُعد الأرض عن الشمس إلى مكعب بُعد عطارد عن الشمس.
   d. اسأل معلم مادة الجغرافيا عن حركة الكواكب وعن أبحاث كوبرنيكوس، وكيبلر، وجاليليو حول هذا الموضوع.
5. **التقرير:** اكتب تقريرًا مفصّلًا يبيّن خطوات المشروع وكيف استفدت من دروس الوحدة في حساباتك.
ضمّن التقرير نتائج محادثتك مع معلم مادة الجغرافيا. ودعمه بصور وملصقات أو عرض على جهاز الإسقاط Data Show.

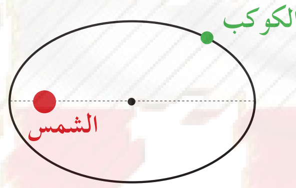
دروس الوحدة

الجذور والتعبيرات الجذرية	الأسس النسبية	حل المعادلات
1-1	1-2	1-3

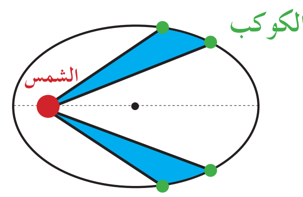
10

اشتهر عالم الفلك الألماني يوهانز كيبلر (Johannes Kepler) (1571 – 1630) بدراسة نظرية مركزية الشمس (الأرض تدور حول الشمس) لكوبرنيك (Nicolas Copernic)، وخاصة لاكتشافه أن الكواكب لا تدور بشكل دائري حول الشمس بل وفق مسارٍ إهليليجي (على شكل قطع ناقص) فاكتشف العلاقات الرياضية الثلاث المسماة «قوانين كيبلر» التي تحدد حركة الكواكب على مدارها، و نشر القانونين الأولين سنة 1609، ثمّ ألحق بهما القانون الثالث سنة 1618. ارتكز نيوتن على هذه القوانين في وضع قانون الجاذبية.

القانون الأول: حركة الكواكب حول الشمس إهليليجية (على شكل قطع ناقص) تكون الشمس في إحدى بؤرتيه.



القانون الثاني: تختلف سرعة دوران كوكب حول الشمس بحيث تتساوى مساحة القطاعين المشكلين بين الشمس وأحد الكواكب خلال فترتين زمنيتين متساويتين.



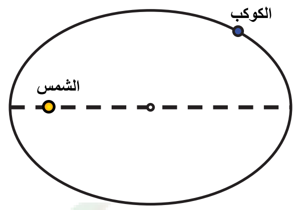
القانون الثالث: النسبة بين مربّعي فترتي دوران أي كوكبين هي نفسها النسبة بين القيمة التكعيبية للبعد المتوسط لكل منهما عن الشمس.

مشروع الوحدة

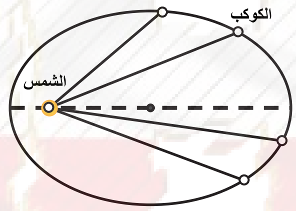
لم يتعرف بعد الطالب «القطوع المخروطية» الناتجة عن تقاطع سطح مخروطي ومستوٍ بوضعيات مختلفة. يمكن للمعلم إعطاء فكرة سريعة عن هذه القطوع مدعمًا فكرته برسوم بيانية.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

(a) القانون الأول: حركة الشمس حول الكواكب على شكل قطع ناقص تكون الشمس في إحدى بؤرتيه.



القانون الثاني: تختلف سرعة دوران كوكب حول الشمس بحيث تتساوى مساحة القطاعين المشكلين بين الشمس وأحد الكواكب خلال فترتين زمنيتين متساويتين.



القانون الثالث: النسبة بين مربعي فترتي دوران كوكبين تساوي النسبة بين مكعب البعد المتوسط لكل منهما عن الشمس.

(b)

	عطارد	الزهرة	الأرض	المريخ	المشتري	زحل	أورانوس	نبتون
البعد عن الشمس (10^6 km)	46 إلى 69.8	108.21	149.6	227.94	7 778.34	1 427	2 869	4 496.7
الكتلة (بالنسبة إلى الأرض)	0.06	0.82	1	0.11	317.9	95.1	14.5	17.2
القطر (km)	4 870	12 100	12 750	6 790	142 790	120 600	51 100	40 600
زمن الدوران حول الشمس	87.9 يومًا	224.7 يومًا	1 سنة = 365.25 يومًا	1.88 سنة	11.86 سنة	29.46 سنة	84 سنة	164.7 سنة
زمن الدوران حول نفسه	58.6 يومًا	243 يومًا	1 يوم = 23.9 h	1.025 يوم = 24.6 h	9.9 h	10.7 h	17.2 h	16.05 h

(c) 1 :17 ، نلاحظ تساوي النسبتين.

(d) تتنوّع أساليب العرض.


الوحدة الأولى

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعرفت الأعداد الحقيقية.
- تعرفت الجذر التربيعي.
- تعرفت حل المتباينات.
- استخدمت الآلة الحاسبة لإيجاد الجذور التربيعية.
- تعرفت القيمة المطلقة وحل متباينات تتضمن القيمة المطلقة.

ماذا سوف تتعلم؟

- ضرب الجذور التربيعية والجذور التكعيبية وقسمتها.
- ضرب التعبيرات الجذرية النونية وقسمتها.
- كيفية إيجاد المرافق واستخدامه.
- كتابة عدد حقيقي بالصورة الجذرية.
- كتابة عدد حقيقي بالصورة الأسية.
- حل معادلات جذرية.
- حل معادلات أسية.

المصطلحات الأساسية

الجذر التربيعي – الجذر التكعيبي – الجذر النوني – المرافق – دليل الجذر – المجذور– المعادلة الجذرية – المعادلة الأسية – الصورة الجذرية – الصورة الأسية.

أضف إلى معلوماتك

المعكوس الضربي لكل عدد حقيقي موجب أكبر من واحد هو عدد حقيقي موجب أصغر من واحد.
إذًا يوجد أعداد حقيقية موجبة أصغر من واحد بقدر ما يوجد أعداد حقيقية موجبة أكبر من واحد.
ظهور الصفر في الهند: في العام 876 وجدت الأرقام التالية في مغارة غواليور Gwalior (على بعد 300 km من نيودلهي) وتعود إلى القرن الخامس ويظهر فيها الصفر.

مثلًا: 270 933

انتقل هذا الترقيم إلى الغرب بواسطة الخوارزمي (بين القرنين الثامن والتاسع).
خضعت هذه الأرقام لعدة تحولات وأصبحت حاليًا:
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

11

التقرير

اعرض تقريرك أمام زملائك في غرفة الصف، وناقش معهم النتائج التي توصلت إليها، ثمّ أعد النظر ببعض الأفكار والاقتراحات والحسابات إذا رأيت ذلك ضروريًّا.

سلّم التقييم	
4	العرض في المشروع بكامله واضح– الجدول متكامل ويخلو من الأخطاء– الحسابات صحيحة. التقرير مفصل ومنظّم ويعكس دقةً وجهدًا في العمل.
3	معظم العرض في المشروع واضح– بعض الأخطاء في الجدول– أخطاء طفيفة في الحسابات. التقرير مفصل ومنظّم ولكن ينقصه بعض التفاصيل الصغيرة.
2	بعض العرض في المشروع واضح– أخطاء متكرّرة ومتعدّدة في الجدول وفي الحسابات– التقرير غير مفصل وغير منظّم إجمالًا.
1	معظم عناصر المشروع ناقصة وبحاجة إلى إعادة.

1–1: الجذور والتعبيرات الجذرية

1 الأهداف

- يختصر الجذور.
- يضرب التعبيرات الجذرية ويقسمها.
- يستخدم المرافق لتبسيط كسر إلى كسر مقامه عدد نسبي.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

التعبيرات الجذرية – الجذر التربيعي – الجذر التكعيبي – المرافق – دليل الجذر – المجذور – تحليل – عوامل أولية.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) أوجد الجذر التربيعي لكل عدد مما يلي:

$\sqrt{64}, \sqrt{121}, \sqrt{256}, \sqrt{200}$

(b) أوجد الجذر التربيعي إلى أقرب جزء من مئة لكل عدد مما يلي باستخدام الآلة الحاسبة:

$\sqrt{17}, \sqrt{182}, \sqrt{200}$

(c) بسّط كلًّا مما يلي:

$\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}, (4)^2, (-4)^2, \sqrt{3}\times\sqrt{12}, \sqrt{2}\times\sqrt{32}$

5 التدريس

التعامل مع الجذور والتعبيرات الجذرية يحتاج إلى الكثير من الانتباه وتأنٍّ وخبرة، خاصة عند إجراء العمليات التي تحوي التعابير الجذرية.

ركّز أولًا على أن: $\sqrt{x^2} = |x|$

وأن: $\pm\sqrt{x^2} = \pm|x|$

أي أن: $\sqrt{25} = \sqrt{(\pm 5)^2} = |\pm 5| = 5$

1–1

سوف تتعلم
- اختصار الجذور.
- ضرب التعبيرات الجذرية.
- قسمة التعبيرات الجذرية.
- استخدام المرافق لتبسيط كسر إلى كسر مقامه عدد نسبي.

المفردات والمصطلحات:
- الجذر التربيعي Square Root
- الجذر التكعيبي Cubic Root
- التعبيرات الجذرية Radical Expressions
- دليل الجذر Radix
- المجذور Radicand
- المرافق Conjugate
- تحليل Analyse
- عوامل أولية Prime Factors

معلومة:
أسماء وحدات الطول

millimetre	mm
centimetre	cm
decimetre	dm
metre	m
decametre	dam
hectometre	hm
kilometre	km

معلومة:
عندما يكون دليل الجذر يساوي 2 فلا يكتب الدليل.
مثال: $\sqrt{x}$ تعني الجذر التربيعي لِـ x
أي مقدار يتضمن جذورًا يسمى تعبيرًا جذريًّا.

الجذور والتعبيرات الجذرية

Roots and Radical Expressions

دعنا نفكر ونتناقش

1 صالة عرض سيّارات مكعبة الشكل. إذا كان:

a طول ضلعها يساوي 12 m فإن مساحة أحد أوجهها تساوي ....

b مساحة أحد أوجهها تساوي $100\ m^2$ فإن طول ضلعها يساوي ...

c مساحة أحد أوجهها تساوي $400\ m^2$ فإن طول ضلعها يساوي ... (يمكن استخدام الآلة الحاسبة).

d مساحتها الكلية تساوي $384\ m^2$ فإن طول ضلعها يساوي ...

e طول ضلعها يساوي 12 m فإن حجمها يساوي ...

f حجمها يساوي $512\ m^3$ فإن طول ضلعها يساوي ...

g حجمها يساوي $970\ m^3$ فإن طول ضلعها يساوي ...

الجذور والتعبيرات الجذرية Roots and Radical Expressions

بما أن $(5)^2 = (-5)^2 = 25$

فإن العددين 5 – , 5+ هما الجذران التربيعيان للعدد 25

بما أن $(5)^3 = 125$ فإن العدد 5 هو الجذر التكعيبي للعدد 125

وأيضًا بما أن $(-5)^3 = -125$

فإن العدد (5–) هو الجذر التكعيبي للعدد (125–)

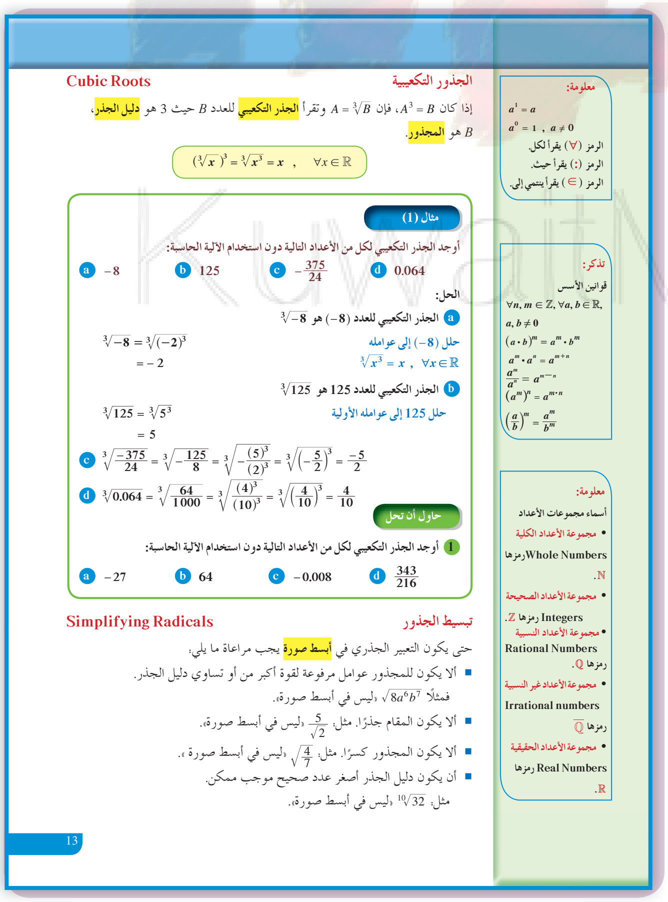
وبالتالي:

- لكل عدد حقيقي موجب جذران تربيعيان أحدهما موجب والآخر سالب.
  أي أن إذا كان $A^2 = x$ فإن $A = \pm\sqrt{x}\ ,\ x > 0$
- لكل عدد حقيقي جذر تكعيبي حقيقي واحد.

ملخص عدد الجذور الحقيقية لعدد حقيقي

العدد الحقيقي	عدد الجذور التربيعية	عدد الجذور الحقيقية التكعيبية
موجب	2	1
صفر	1	1
سالب	0	1

12



معلومة:
$a^1 = a$
$a^0 = 1\ ,\ a \neq 0$
الرمز ($\forall$) يقرأ لكل.
الرمز (:) يقرأ حيث.
الرمز ($\in$) يقرأ ينتمي إلى.

تذكر:
قوانين الأسس
$\forall n, m \in \mathbb{Z}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \neq 0$
$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

معلومة:
أسماء مجموعات الأعداد
- مجموعة الأعداد الكلية Whole Numbers رمزها $\mathbb{N}$.
- مجموعة الأعداد الصحيحة Integers رمزها $\mathbb{Z}$.
- مجموعة الأعداد النسبية Rational Numbers رمزها $\mathbb{Q}$.
- مجموعة الأعداد غير النسبية Irrational numbers رمزها $\overline{\mathbb{Q}}$
- مجموعة الأعداد الحقيقية Real Numbers رمزها $\mathbb{R}$.

الجذور التكعيبية Cubic Roots

إذا كان $A^3 = B$، فإن $A = \sqrt[3]{B}$ وتقرأ **الجذر التكعيبي** للعدد B حيث 3 هو **دليل الجذر**، B هو **المجذور**.

$$(\sqrt[3]{x})^3 = \sqrt[3]{x^3} = x\ ,\quad \forall x \in \mathbb{R}$$

مثال (1)

أوجد الجذر التكعيبي لكل من الأعداد التالية دون استخدام الآلة الحاسبة:

a -8 b 125 c $-\frac{375}{24}$ d 0.064

الحل:

a الجذر التكعيبي للعدد (8–) هو $\sqrt[3]{-8}$

حلل (8–) إلى عوامله $\sqrt[3]{x^3} = x\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

b الجذر التكعيبي للعدد 125 هو $\sqrt[3]{125}$

حلل 125 إلى عوامله الأولية

$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

c $\sqrt[3]{\frac{-375}{24}} = \sqrt[3]{-\frac{125}{8}} = \sqrt[3]{-\frac{(5)^3}{(2)^3}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{5}{2}\right)^3} = \frac{-5}{2}$

d $\sqrt[3]{0.064} = \sqrt[3]{\frac{64}{1000}} = \sqrt[3]{\frac{(4)^3}{(10)^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{4}{10}\right)^3} = \frac{4}{10}$

حاول أن تحل

1 أوجد الجذر التكعيبي لكل من الأعداد التالية دون استخدام الآلة الحاسبة:

a -27 b 64 c -0.008 d $\frac{343}{216}$

تبسيط الجذور Simplifying Radicals

حتى يكون التعبير الجذري في **أبسط صورة** يجب مراعاة ما يلي:

- ألا يكون للمجذور عوامل مرفوعة لقوة أكبر من أو تساوي دليل الجذر. فمثلًا $\sqrt{8a^6b^7}$ «ليس في أبسط صورة».
- ألا يكون المقام جذرًا. مثل: $\frac{5}{\sqrt{2}}$ «ليس في أبسط صورة».
- ألا يكون المجذور كسرًا. مثل: $\sqrt{\frac{4}{7}}$ «ليس في أبسط صورة».
- أن يكون دليل الجذر أصغر عدد صحيح موجب ممكن. مثل: $\sqrt[10]{32}$ «ليس في أبسط صورة».

13

ولكن: $\pm\sqrt{25} = \pm\sqrt{(\pm 5)^2} = \pm|5| = \pm 5$

من ناحية ثانية، فإن $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{(4)^3} = 4$

ثم $\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$

وعلى العموم إذا كان: $x^2 = a$، فإن $a > 0$, $x = \pm\sqrt{a}$

أي يوجد قيمتان للمتغير x تحققان المعادلة $x^2 = a$، ولكن إذا $x^3 = a$، فإن $x = \sqrt[3]{a}$ أي يوجد قيمة واحدة فقط تحقق المعادلة $x^3 = a$

توسع في هذه المفاهيم من خلال المثال (1) وذلك بعرض أمثلة بديلة تساعد على تعميق هذه المعلومات.

في المثال (2)

تبسيط التعبيرات الجذرية تدخل ضمن إطار ما تقدم، والمهم هو إيجاد الربط بين أس المجذور ودليل الجذر فيصبح التبسيط عندها في غاية السهولة.

شجِّع الطلاب دائمًا على كتابة أس المجذور بصورة مضاعفات لدليل الجذر.

في الأمثلة (4 — 7)

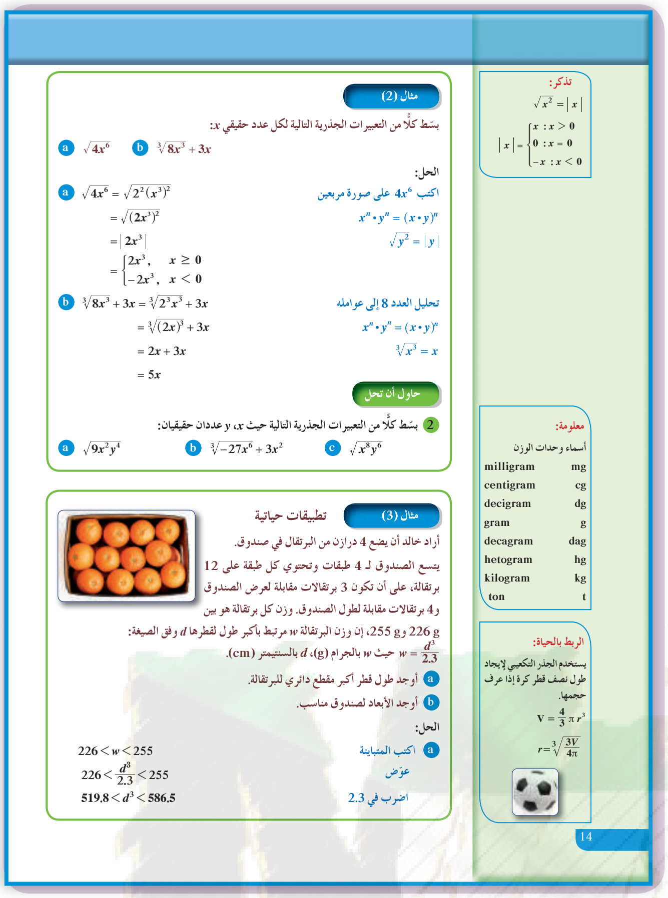
تتناول العمليات التي يمكن القيام بها على التعابير الجذرية ألا وهي الجمع والطرح والضرب والقسمة، ومن ثم العودة إلى تبسيط هذه الجذور. شدّد على أن العمليات الأربع تتم بين التعابير الجذرية إذا كان لها الدليل نفسه.

في المثال (8)

وضِّح للطلاب معنى المرافق والغاية من استخدامه. أخبرهم أن مرافق الجذر التربيعي هو نفسه الجذر التربيعي، أي أن مرافق $\sqrt{a}$ هو $\sqrt{a}$، لأن $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2$ فنتخلص من الجذر ولكن مرافق $\sqrt[3]{a}$ هو $\sqrt[3]{a^2}$ كي نتخلص من الجذر أي:

$$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = a$$

أما إذا كان يوجد تعبير جذريّ تربيعيّ، فإن مرافق $(a-b)$ هو $(a+b)$، لأن: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$، وهذا يجعلنا أيضًا نتخلص من الجذر. وعلى العموم فإن عملية ضرب مقام الكسر في المرافق هي إجراء يهدف إلى التخلص من الجذر في مقام الكسر وبالتالي يساعد على تبسيط الكسر إذا أمكن ذلك.



تذكر:

$\sqrt{x^2} = |x|$

$|x| = \begin{cases} x & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$

مثال (2)

بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية لكل عدد حقيقي x:

a $\sqrt{4x^6}$ b $\sqrt[3]{8x^3} + 3x$

الحل:

a $\sqrt{4x^6} = \sqrt{2^2(x^3)^2}$ اكتب $4x^6$ على صورة مربعين

$= \sqrt{(2x^3)^2}$ $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$

$= |2x^3|$ $\sqrt{y^2} = |y|$

$= \begin{cases} 2x^3, & x \geq 0 \\ -2x^3, & x < 0 \end{cases}$

b $\sqrt[3]{8x^3} + 3x = \sqrt[3]{2^3x^3} + 3x$ تحليل العدد 8 إلى عوامله

$= \sqrt[3]{(2x)^3} + 3x$ $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$

$= 2x + 3x$ $\sqrt[3]{x^3} = x$

$= 5x$

حاول أن تحل

2 بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية حيث x، y عددان حقيقيان:

a $\sqrt{9x^2y^4}$ b $\sqrt[3]{-27x^6} + 3x^2$ c $\sqrt{x^8y^6}$

معلومة:

أسماء وحدات الوزن

milligram	mg
centigram	cg
decigram	dg
gram	g
decagram	dag
hetogram	hg
kilogram	kg
ton	t

مثال (3) تطبيقات حياتية

أراد خالد أن يضع 4 درازن من البرتقال في صندوق.

يتسع الصندوق لـ 4 طبقات وتحتوي كل طبقة على 12 برتقالة، على أن تكون 3 برتقالات مقابلة لعرض الصندوق و4 برتقالات مقابلة لطول الصندوق. وزن كل برتقالة هو بين 226 g و255 g، إن وزن البرتقالة w مرتبط بأكبر طول لقطرها d وفق الصيغة: $w = \frac{d^3}{2.3}$ حيث w بالجرام (g)، d بالسنتيمتر (cm).

a أوجد طول قطر أكبر مقطع دائري للبرتقالة.

b أوجد الأبعاد لصندوق مناسب.

الحل:

a اكتب المتباينة $226 < w < 255$

عوّض $226 < \frac{d^3}{2.3} < 255$

اضرب في 2.3 $519.8 < d^3 < 586.5$

الربط بالحياة:

يستخدم الجذر التكعيبي لإيجاد طول نصف قطر كرة إذا عرف حجمها.

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

14

أوجد الجذر التكعيبي $\sqrt[3]{519.8} < \sqrt[3]{d^3} < \sqrt[3]{586.5}$

استخدم الآلة الحاسبة $8.04 < d < 8.37$

وبالتالي طول قطر أكبر مقطع دائري بين 8.04cm و8.37cm

b عرض الصندوق: $3 \times 8.37 = 25.11\,cm$

طول الصندوق = ارتفاع الصندوق: $4 \times 8.37 = 33.48\,cm$

حاول أن تحل

3 استخدم الصيغة $w = \frac{d^3}{2.3}$ لإيجاد طول قطر أكبر مقطع دائري لكل برتقالة وزنها كما يلي:

a 85 g b 195.93 g c 177.19 g

معلومة:

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

- $\mathbb{R}^-$ مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة.
- $\mathbb{R}^+$ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

جمع وطرح التعبيرات الجذرية Adding and Subtracting Radical Expressions

لجمع التعبيرات الجذرية وطرحها، يجب أن تكون متشابهة

يكون التعبيران الجذريان متشابهين عندما يكون لهما دليل الجذر نفسه والمجذور نفسه.

يجب وضع التعبيرات الجذرية في أبسط صورة مما يسمح لنا بمعرفة ما إذا كانت متشابهة أم لا.

لاحظ أن: $5\sqrt{3}$ و $2\sqrt{3}$ تعبيران جذريان متشابهان

$8\sqrt{x}$ و $-3\sqrt{x}$ $(x \geqslant 0)$ تعبيران جذريان متشابهان

$\sqrt{27}$ و $\sqrt{12}$ تعبيران جذريان متشابهان. لماذا؟

في حين أن:

$\sqrt{3}$ و $3\sqrt{5}$ هما تعبيران جذريان غير متشابهين

$\sqrt{x}$ و $-3\sqrt{y}$ $(x \geqslant 0$ ، $y \geqslant 0)$ هما تعبيران جذريان غير متشابهين

معلومة:

إذا كان $a \in \mathbb{R}^-$ ، فإن $\sqrt{a} \notin \mathbb{R}$ فمثلًا $\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$.

معلومة:

نتعامل مع التعبيرات الجذرية المتشابهة مثل تعاملنا مع الحدود الجبرية المتشابهة.

مثال (4)

أوجد الناتج في أبسط صورة

a $3\sqrt{32} - \sqrt{98}$ b $2\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{375}$

c $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{72}$ d $\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{250}$

15

6 الربط

يوفّر المثالان (9) ,(3) فرصة أمام الطلاب للتعرف على كيفية استخدام الجذور في مواقف حياتية.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في جمع التعابير الجبرية للجذور وطرحها،

مثل: $\sqrt{x \pm y} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$

ساعدهم على تخطي ذلك بأمثلة حسيّة مثل:

$$\sqrt{36+64} \neq \sqrt{36} + \sqrt{64}$$

$$10 \neq 14$$

8 التقييم

من المهم جدًّا متابعة عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لمعرفة مدى قدرتهم على فهم العمليات على الجذور والتعبيرات الجذرية وتبسيطها واستخدام المرافق.

تمرّن 1-1

الجذور والتعبيرات الجذرية
Roots and Radical Expressions

المجموعة A تمارين مقالية

(1) باستخدام قوانين الجذور أوجد إن أمكن:

(a) $\sqrt{400}$ **(b)** $\sqrt{1600}$ **(c)** $\sqrt{10^4}$ **(d)** $\sqrt{0.01}$

(e) $\sqrt{0.25}$ **(f)** $\sqrt{0.0064}$ **(g)** $\sqrt{\frac{-16}{49}}$ **(h)** $\sqrt{\frac{2}{50}}$

(i) $\sqrt{\frac{12}{147}}$ **(j)** $\sqrt{36 \times 25}$ **(k)** $\sqrt{\frac{-1}{121}}$ **(l)** $\sqrt{75 \times 300}$

(2) باستخدام قوانين الجذور أوجد:

(a) $\sqrt[3]{27}$ **(b)** $\sqrt[3]{1000}$ **(c)** $\sqrt[3]{-64}$ **(d)** $\sqrt[3]{0.125}$

(e) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$ **(f)** $\sqrt[3]{216 \times 343}$ **(g)** $\sqrt[3]{-\frac{375}{24}}$ **(h)** $\sqrt[3]{0}$

(i) $\sqrt[3]{60 \times 90}$

(3) بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية مستخدمًا قوانين الجذور:

(a) $\sqrt{16x^2}$ **(b)** $\sqrt{0.25x^6}$ **(c)** $\sqrt{x^8y^{18}}$

(d) $\sqrt{8x^3},\ x \geq 0$ **(e)** $\sqrt{\frac{x^3y^5}{25x}},\ y \geq 0,\ x > 0$ **(f)** $5\sqrt{216x^2} + 23\sqrt{64x^4}, x > 0$

(g) $\sqrt[3]{-125y^6}$ **(h)** $\sqrt[3]{81x^2}$ **(i)** $\sqrt[3]{-250x^6y^5}$

(j) $\sqrt[3]{49x^2} \times \sqrt[3]{56xy^3}$ **(k)** $\sqrt[3]{256u^5v} \div \sqrt[3]{4u^2v^{10}}, u \neq 0, v \neq 0$

(4) بسّط كلًّا من التعبيرات التالية مستخدمًا قوانين الجذور:

(a) $\sqrt{5} \times \sqrt{40}$ **(b)** $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{80}$ **(c)** $\frac{\sqrt[3]{640}}{\sqrt[3]{270}}$

(d) $\sqrt{5} \times (\sqrt{5} + \sqrt{15})$ **(e)** $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$ **(f)** $\sqrt{2} \times (\sqrt{50} + 7)$

(g) $(5 + 2\sqrt{11})^2$ **(h)** $\frac{\sqrt{3.6 \times 10^8}}{\sqrt{4 \times 10^3}}$ **(i)** $3\sqrt[3]{16} - 4\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128}$

(j) $\sqrt{75} - 4\sqrt{18} + 2\sqrt{32}$ **(k)** $4\sqrt[3]{81} - 3\sqrt[3]{54}$ **(l)** $\sqrt[3]{-18} \times \sqrt[3]{-12}$

(m) $(2\sqrt{7} + 1)^2 - (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)$

9

الحل:

a $3\sqrt{32} - \sqrt{98}$

$= 3\sqrt{16 \times 2} - \sqrt{49 \times 2}$

$= 3\sqrt{4^2 \times 2} - \sqrt{7^2 \times 2}$ اكتب 16 , 49 على صورة مربعات كاملة

$= 3 \times 4 \times \sqrt{2} - 7 \times \sqrt{2}$ $\sqrt{x^2} = x, x \geqslant 0$

$= 12\sqrt{2} - 7\sqrt{2}$ بسّط

$= 5\sqrt{2}$

b $2\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{375}$

$= 2\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{125 \times 3}$

$= 2\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{5^3 \times 3}$ اكتب 125 على صورة مكعب كامل

$= 2\sqrt[3]{3} + 5 \times 5 \times \sqrt[3]{3}$ $\sqrt[3]{x^3} = x$

$= 2\sqrt[3]{3} + 25\sqrt[3]{3}$ بسّط

$= 27\sqrt[3]{3}$

c $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{72}$

$= \sqrt{9 \times 2} + \sqrt{25 \times 2} - \sqrt{36 \times 2}$

$= \sqrt{3^2 \times 2} + \sqrt{5^2 \times 2} - \sqrt{6^2 \times 2}$ اكتب 9 , 25 , 16 على صورة مربعات كاملة

$= 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 6\sqrt{2}$ $\sqrt{x^2} = x\ ,\ x \geqslant 0$

$= 2\sqrt{2}$ بسّط

d $\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{250}$

$= \sqrt[3]{64 \times 2} + \sqrt[3]{27 \times 2} - 2\sqrt[3]{125 \times 2}$

$= \sqrt[3]{4^3 \times 2} + \sqrt[3]{3^3 \times 2} - 2\sqrt[3]{5^3 \times 2}$ اكتب 64 , 27 , 125 على صورة مكعبات كاملة

$= 4\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} - 2 \times 5\sqrt[3]{2}$ $\sqrt[3]{x^3} = x$

$= 4\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} - 10\sqrt[3]{2}$

$= -3\sqrt[3]{2}$ بسّط

حاول أن تحل

4 أوجد الناتج في أبسط صورة:

a $4\sqrt[3]{8} + 2\sqrt[3]{128}$ **b** $2\sqrt{75} - \sqrt{48}$

c $\sqrt{12} + \sqrt{147} - \sqrt{27}$ **d** $\sqrt[3]{320} + \sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{135}$

16

(5) حديقة مستطيلة الشكل طولها $5\sqrt{21}$ m وعرضها $2\sqrt{7}$ m

(a) أوجد محيط الحديقة.

(b) أوجد مساحة الحديقة.

(6) اكتب كلًّا مما يلي بحيث يكون المقام عددًا نسبيًّا:

(a) $\sqrt{\frac{21}{4}} \times \sqrt{\frac{7}{27}}$ **(b)** $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ **(c)** $\frac{4}{3\sqrt{3} - 2}$

(d) $\frac{3 + \sqrt{8}}{2 - 2\sqrt{8}}$ **(e)** $\frac{5 + \sqrt{5}}{4 - 3\sqrt{5}}$ **(f)** $\frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} + 2} - (9 - 4\sqrt{5})$

(g) $\frac{\sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}}$ **(h)** $\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}$ **(i)** $\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1},\ x \in \mathbb{Z}^+,\ x \neq 1$

(j) $\frac{x + y + 2\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}, x, y \in \mathbb{Z}^+$

(7) أوجد قيمة التعبير: $x^2 - 6$، إذا كان $x = \frac{4}{\sqrt{5} - 1}$

(8) أوجد قيمة التعبير: $x^2 - x + 1$، إذا كان $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

(9) اكتب كلًّا من التعبيرين التاليين على الصورة $a + b\sqrt{2}\ ,\ a, b \in \mathbb{Z}$

$F = (7\sqrt{2} - 4)^2$ $E = 5 + 6\sqrt{2}(3\sqrt{2} + 4)$

(10) **الحساب الذهني.** بسّط: $\sqrt{1 + \sqrt{5 + \sqrt{11 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}}}}}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\sqrt[3]{-64x^3} + 4x = 0$ (a) (b)

(2) $\frac{8 - \sqrt{7}}{3} + \frac{3}{4 - \sqrt{7}} \in \mathbb{Z}$ (a) (b)

(3) $(3 - 2\sqrt{2})^{27} \times (3 + 2\sqrt{2})^{27} = 1$ (a) (b)

(4) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{5}$ (a) (b)

(5) $|m| \times \sqrt{m^2} = m^2, \forall m \in \mathbb{R}$ (a) (b)

10

اختبار سريع

1. بسّط ما يلي:

(a) $\sqrt{49x^5y^7}$

$$7x^2y^2|y|\sqrt{xy}=\begin{cases}7x^2y^3\sqrt{xy}: & y\geqslant 0\\ -7x^2y^3\sqrt{xy}: & y<0\end{cases}$$

(b) $3\sqrt{12}-4\sqrt{27}+5\sqrt{147}$

$29\sqrt{3}$

(c) $\sqrt{3xm}\times\sqrt{15xy}$

$3|x|\sqrt{5my}=3x\sqrt{5my}$

(d) $\dfrac{\sqrt[3]{243x^5y^8}}{\sqrt[3]{9xy^2}}\quad x\neq 0,\ y\neq 0$

$3xy^2\sqrt[3]{x}$

2. يعطى حجم الكرة بالقاعدة: $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$.

إذا كان حجم كرة يساوي $972\pi\ \text{cm}^3$

فما طول قطرها؟

$r=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}=9\ ,\ d=9\times 2=18\,\text{cm}$

3. اكتب الكسر التالي بحيث يكون مقامه عددًا نسبيًّا:

$$\frac{\sqrt{7}-6}{\sqrt{7}+6}$$

$$\frac{-43+12\sqrt{7}}{29}$$

ضرب وقسمة الجذور التربيعية والجذور التكعيبية

الجذور التربيعية	الجذور التكعيبية
$\forall x, y\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$	$\forall x, y\in\mathbb{R}$
$\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert=x$	$\sqrt[3]{x^3}=x$
$(\sqrt{x})^2=x$	$(\sqrt[3]{x})^3=x$
$\sqrt{x\cdot y}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$	$\sqrt[3]{x\cdot y}=\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y}$
$\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\ ,\ y\neq 0$	$\sqrt[3]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}\ ,y\neq 0$

فمثلًا:

$$\sqrt{12}=\sqrt{(4)(3)}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$
$$\sqrt{2}\times\sqrt{8}=\sqrt{16}=4$$
$$\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{-2}}=\sqrt[3]{\frac{54}{-2}}=\sqrt[3]{-27}=-3$$
$$\sqrt{0.49}=\sqrt{\frac{49}{100}}=\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{100}}=\frac{7}{10}=0.7$$

مثال (5)

بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\sqrt{72x^3}\quad ,\quad x\geq 0$

b $\sqrt[3]{80n^5}$

الحل:

a $\sqrt{72x^3}=\sqrt{(6^2)(2)(x^2)(x)}$ — حلل 72، x^3

$=\sqrt{6^2x^2}\times\sqrt{2x}$ — $\sqrt{x\cdot y}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}, x\geq 0, y\geq 0$

$=6|x|\times\sqrt{2x}$ — $\sqrt{x^2}=|x|,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$=6x\sqrt{2x}$ — $|x|=x,\ x\geq 0$

b $\sqrt[3]{80n^5}=\sqrt[3]{2^3(10)(n^3)(n^2)}$ — تحليل n^5 و80 إلى مكعبات كاملة

$=\sqrt[3]{2^3n^3}\times\sqrt[3]{10n^2}$ — $\sqrt[3]{x\cdot y}=\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y}$

$=2n\sqrt[3]{10n^2}$ — $\sqrt[3]{x^3}=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$

17

في التمارين (6–12)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) التعبير الجذري الذي في أبسط صورة هو:

(a) $\sqrt[3]{216}$ (b) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$ (c) $\sqrt[3]{9}$ (d) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

(7) لوضع التعبير الجذري $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{4}}$ في أبسط صورة نضرب كلًّا من البسط والمقام في:

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt[3]{2}$ (c) 2 (d) 4

(8) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ يساوي:

(a) $2-\sqrt{3}$ (b) $2+\sqrt{3}$ (c) $3-\sqrt{2}$ (d) $3+\sqrt{2}$

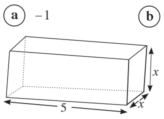
(9) إذا كان $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ فإن:

(a) $\varphi^2+\varphi=1$ (b) $\varphi^2=\varphi+1$ (c) $\varphi+\varphi^2+1=0$ (d) $\varphi^2+1=\varphi$

(10) إذا كان $x\in\mathbb{R}^-$ فإن $|x|\cdot\frac{1}{x}$ يساوي:

(a) -1 (b) $-x$ (c) 1 (d) x

(11) إذا كان حجم شبه المكعب المقابل يساوي $40\,\text{cm}^3$، فإن x تساوي:



(a) 2 cm (b) $2\sqrt{2}$ cm (c) $-2\sqrt{2}$ cm (d) 4 cm

(12) إذا كان حجم أسطوانة ارتفاعها h وطول نصف قطرها r يعطى بالعلاقة: $V=\pi r^2h$ حيث الحجم (V) بدلالة كل من ارتفاع ونصف قطر الأسطوانة، فأي من العلاقات التالية صحيحة؟

(a) $h=\pi r^2V$ (b) $h=\frac{\pi}{r^2}\cdot V$ (c) $r=\sqrt{\pi hV}$ (d) $r=\sqrt{\frac{V}{\pi h}}$

11

حاول أن تحل

5 بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\sqrt{50x^4}$ b $\sqrt[3]{18x^3}$

مثال (6)

بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\sqrt{5x^3} \times \sqrt{40x} \quad , \quad x \geq 0$

b $\sqrt[3]{5x^3y^4} \times \sqrt[3]{64x^2y^3}$

الحل:

a $\sqrt{5x^3} \times \sqrt{40x} = \sqrt{5(40)(x^3)(x)}$ — $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}, x \geq 0, y \geq 0$

$= \sqrt{200x^4}$ — اضرب

$= 10x^2\sqrt{2}$ — بسّط

b $\sqrt[3]{5x^3y^4} \times \sqrt[3]{64x^2y^3} = \sqrt[3]{(5x^3y^4) \times (64x^2y^3)}$ — $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x \cdot y}$

$= \sqrt[3]{(5x^3y^3y)(4^3)(x^2)(y^3)}$ — حلل إلى مكعبات كاملة

$= \sqrt[3]{5(4^3) \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot y^3 \cdot x^2 \cdot y}$ — خاصية التجميع

$= \sqrt[3]{4^3x^3(y^2)^3} \times \sqrt[3]{5x^2y}$ — $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x \cdot y}$

$= 4xy^2\sqrt[3]{5x^2y}$ — $\sqrt[3]{x^3} = x$

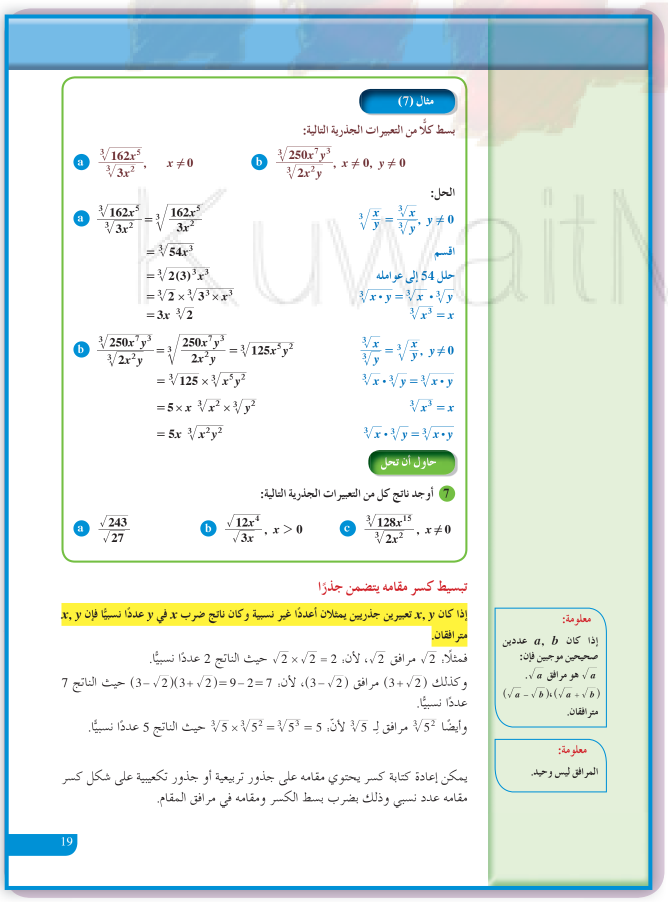
حاول أن تحل

6 بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $3\sqrt{7x^3} \times 2\sqrt{x^3y^2} \quad , \quad x \geq 0$

b $4\sqrt[3]{x^4y} \times 3\sqrt[3]{x^2y}$

18



مثال (7)

بسط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\dfrac{\sqrt[3]{162x^5}}{\sqrt[3]{3x^2}}, \quad x \neq 0$

b $\dfrac{\sqrt[3]{250x^7y^3}}{\sqrt[3]{2x^2y}}, \ x \neq 0, \ y \neq 0$

الحل:

a $\dfrac{\sqrt[3]{162x^5}}{\sqrt[3]{3x^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{162x^5}{3x^2}}$ — $\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}, \ y \neq 0$

$= \sqrt[3]{54x^3}$ — اقسم

$= \sqrt[3]{2(3)^3x^3}$ — حلل 54 إلى عوامله

$= \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3^3 \times x^3}$ — $\sqrt[3]{x \cdot y} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$

$= 3x\sqrt[3]{2}$ — $\sqrt[3]{x^3} = x$

b $\dfrac{\sqrt[3]{250x^7y^3}}{\sqrt[3]{2x^2y}} = \sqrt[3]{\dfrac{250x^7y^3}{2x^2y}} = \sqrt[3]{125x^5y^2}$ — $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}} = \sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}, \ y \neq 0$

$= \sqrt[3]{125} \times \sqrt[3]{x^5y^2}$ — $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x \cdot y}$

$= 5 \times x\sqrt[3]{x^2} \times \sqrt[3]{y^2}$ — $\sqrt[3]{x^3} = x$

$= 5x\sqrt[3]{x^2y^2}$ — $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x \cdot y}$

حاول أن تحل

7 أوجد ناتج كل من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\dfrac{\sqrt{243}}{\sqrt{27}}$ b $\dfrac{\sqrt{12x^4}}{\sqrt{3x}}, \ x > 0$ c $\dfrac{\sqrt[3]{128x^{15}}}{\sqrt[3]{2x^2}}, \ x \neq 0$

تبسيط كسر مقامه يتضمن جذرًا

إذا كان x, y تعبيرين جذريين يمثلان أعدادًا غير نسبية وكان ناتج ضرب x في y عددًا نسبيًّا فإن x, y مترافقان.

فمثلًا: $\sqrt{2}$ مرافق $\sqrt{2}$، لأن: $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ حيث الناتج 2 عددًا نسبيًّا.

وكذلك $(3+\sqrt{2})$ مرافق $(3-\sqrt{2})$، لأن: $(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2}) = 9 - 2 = 7$ حيث الناتج 7 عددًا نسبيًّا.

وأيضًا $\sqrt[3]{5^2}$ مرافق لِـ $\sqrt[3]{5}$ لأنّ: $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{5^3} = 5$ حيث الناتج 5 عددًا نسبيًّا.

يمكن إعادة كتابة كسر يحتوي مقامه على جذور تربيعية أو جذور تكعيبية على شكل كسر مقامه عدد نسبي وذلك بضرب بسط الكسر ومقامه في مرافق المقام.

معلومة:
إذا كان a, b عددين صحيحين موجبين فإن:
$\sqrt{a}$ هو مرافق $\sqrt{a}$.
$(\sqrt{a}+\sqrt{b})$، $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ مترافقان.

معلومة:
المرافق ليس وحيد.

19

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a) 144 m^2

(b) 10 m

(c) 20 m

(d) 8 m

(e) 1728 m^3

(f) 8 m

(g) $\approx 9.9 \text{ m}$

«حاول أن تحل»

1 **(a)** $\sqrt[3]{-27} = -3$

(b) $\sqrt[3]{64} = 4$

(c) $\sqrt[3]{-0.008} = -0.2$

(d) $\sqrt[3]{\dfrac{343}{216}} = \dfrac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{216}} = \dfrac{7}{6}$

2 **(a)** $3|x|y^2$

(b) $-3x^2 + 3x^2 = 0$

(c) $x^4y^2|y| = \begin{cases} x^4y^3 & : \ y \geq 0 \\ -x^4y^3 & : \ y < 0 \end{cases}$

3 **(a)** 5.8 cm

(b) 7.67 cm

(c) 7.4 cm

4 **(a)** $8 + 8\sqrt[3]{2}$

(b) $6\sqrt{3}$

(c) $6\sqrt{3}$

(d) $3\sqrt[3]{5}$

5 **(a)** $5x^2\sqrt{2}$

(b) $x\sqrt[3]{18}$

6 **(a)**

$$6\sqrt{7(x^3)^2y^2} = 6x^3 \times |y|\sqrt{7} = \begin{cases} 6x^3y\sqrt{7} & : \ y \geq 0 \\ -6x^3y\sqrt{7} & : \ y < 0 \end{cases}$$

مثال (8)

اكتب كل كسر بحيث يكون المقام عددًا نسبيًا:

a $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ b $\frac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}}$ c $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$ d $\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-9x}$, $x>1$, $x\in\mathbb{Q}$

الحل:

a $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$ اضرب بسط الكسر ومقامه في $\sqrt{3}$ وهو مرافق المقام $\sqrt{3}$

$=\frac{\sqrt{3}+(\sqrt{2}\times\sqrt{3})}{(\sqrt{3})^2}$ اضرب

$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}$ بسّط

$\therefore\ \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}$ المقام عدد نسبيّ

b $\frac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}}\times\left(\frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\right)$ اضرب بسط الكسر ومقامه في $3+\sqrt{2}$ وهو مرافق المقام $3-\sqrt{2}$

$=\frac{3\sqrt{2}+(\sqrt{2}\times\sqrt{2})-3-\sqrt{2}}{3^2-(\sqrt{2})^2}$ $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$=\frac{3\sqrt{2}+2-3-\sqrt{2}}{9-2}$ بسّط

$=\frac{2\sqrt{2}-1}{7}$ بسّط

c $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}=\frac{3}{\sqrt[3]{5}}\times\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}}$ اضرب بسط الكسر ومقامه في $\sqrt[3]{5^2}$ وهو مرافق المقام $\sqrt[3]{5}$

$=\frac{3\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}}$ $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{x\cdot y}$

$=\frac{3\sqrt[3]{25}}{5}$ $\sqrt[3]{x^3}=x$ وبالتالي المقام عدد نسبيّ

d $\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-9x}=\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-9x}\times\frac{\sqrt{x}+9x}{\sqrt{x}+9x}$ اضرب بسط الكسر ومقامه في مرافق المقام

$=\frac{x\sqrt{x}+9x^2+(\sqrt{x})^2+9x\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2-(9x)^2}$ اضرب

$=\frac{x\sqrt{x}+9x^2+x+9x\sqrt{x}}{x-81x^2}$ بسّط

$=\frac{9x^2+10x\sqrt{x}+x}{x-81x^2}$

20

(b) $12\sqrt[3]{x^6y^2}=12x^2\sqrt[3]{y^2}$

7 **(a)** $\sqrt{9}=3$

(b) $2x\sqrt{x}$

(c) $4x^4\sqrt[3]{x}$

8 **(a)** $\frac{3+\sqrt{6}}{3}$

(b) $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$

(c) $\frac{\sqrt[3]{7}}{7}$

(d) $\frac{(x+1)\sqrt{x}+2x}{x-1}$

9 الزمن الدوري: $\sqrt{\frac{4\pi^2\times(5.84\times10^5)^3}{6.673\times10^{-11}\times5.4\times10^{21}}}$

فيكون الزمن الدوري $\approx 4\,671\,\text{s}$

$=\frac{x(9x+10\sqrt{x}+1)}{x(1-81x)}$, $x>1$ x عامل مشترك

$=\frac{9x+10\sqrt{x}+1}{1-81x}$ بسّط

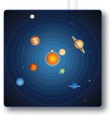
حاول أن تحل

8 أوجد ناتج كل من التعبيرات التالية في أبسط صورة:

a $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ b $\frac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$ c $\frac{1}{\sqrt[3]{7^2}}$ d $\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$, $x>1$, $x\in\mathbb{Q}$

مثال (9)

تطبيقات حياتية

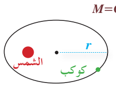


ينص قانون كيبلر الثالث على أن مربع الزمن الدوري (T^2) لدوران كوكب حول الشمس يتناسب طردًا مع مكعب نصف طول المحور الأكبر لمدار الكوكب (r^3) ويمكن تمثيل ذلك بالعلاقة:

$\mathrm{T}^2=\frac{4\pi^2}{(6.673)\times(10^{-11})\times M}\times r^3$، حيث M بالكيلوجرام، r بالمتر، T بالثانية.

أوجد نصف طول المحور الأكبر لمدار كوكب كتلته: $M=6\times10^{24}\,\text{kg}$

وزمنه الدوري: $\mathrm{T}=5175\,s$.



الحل:

$$\mathrm{T}^2=\frac{4\pi^2}{(6.673)(10^{-11})\times M}\times r^3$$

$$r^3=\frac{M\times(6.673)(10^{-11})\times T^2}{4\pi^2}$$

$$r=\sqrt[3]{\frac{M\times(6.673)\times(10^{-11})\times \mathrm{T}^2}{4\pi^2}}$$

$$r=\sqrt[3]{\frac{(6\times10^{24})(6.673\times10^{-11})(5175)^2}{4\pi^2}}$$

$$\approx 6.476\times10^6\ \text{m}$$

يبلغ نصف طول المحور الأكبر لمدار الكوكب حوالي 6.476×10^6 m

حاول أن تحل

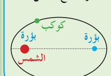
9 باستخدام العلاقة في مثال (9) أوجد الزمن الدوري إذا كان نصف طول المحور الأكبر لمدار كوكب 5.84×10^5 m، وكتلته 5.4×10^{21} kg

معلومة:

كبلر عالم رياضيات وفلك وفيزياء ألماني، وضع قوانينًا تصف حركة دوران الكوكب حول الشمس.

من قوانينه:

كل كوكب يدور في مدار إهليليجي (بيضاوي) حول الشمس وتقع الشمس في إحدى بؤرتيه ويسمى هذا المدار بالقطع الناقص.



21

1–2: الأسس النسبية

1 الأهداف

- يكتب عددًا حقيقيًّا في الصورة الجذرية.
- يكتب عددًا حقيقيًّا في الصورة الأسية.
- يتعرف التحويل بين الصورتين الجذرية والأسية.
- يتعرف الجذر النوني للعدد وخواصه.
- يضرب الجذور النونية ويقسمها.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

الصورة الجذرية – الصورة الأسية – الجذر النوني.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية :

(a) أوجد ناتج كلّ مما يلي: $\sqrt[3]{216}\ ,\ -\sqrt{81}$

(b) بسّط التعابير التالية: $\sqrt{128x^5y^9}\ ,\ \sqrt[3]{250x^6y^8}\ ,\ \sqrt{72x^2y^5}$

(c) أوجد الناتج ثم بسّط إذا أمكن:

- $\sqrt{3xy^2} \times \sqrt{12x^3y^5}$
- $\sqrt[3]{5x^4y^5} \times \sqrt[3]{25x^7y^4}$
- $\dfrac{\sqrt{162x^7y^9}}{\sqrt{2x^5y^6}} \quad (x \neq 0\ ,\ y \neq 0)$

1–2

الأسس النسبية

Rational Exponents

سوف تتعلم

- كتابة عدد حقيقي في الصورة الجذرية.
- كتابة عدد حقيقي في الصورة الأسية.
- تحويل من الصورة الجذرية إلى الصورة الأسية.
- تحويل من الصورة الأسية إلى الصورة الجذرية.
- الجذر النوني للعدد.
- خواص الجذور النونية.
- ضرب الجذور النونية وقسمتها.

المفردات والمصطلحات:

- الصورة الجذرية Radical Form
- الصورة الأسية Exponential Form
- الجذر النوني nth Root

دعنا نفكر ونتناقش

عرفت سابقًا أن: $x^3 \cdot x^3 = x^6$

ومنه استنتجنا أن x^3 هو جذر تربيعي لِـ x^6

كذلك $x^2 \cdot x^2 = x^4$ $\therefore$ x^2 جذر تربيعي لِـ x^4

$x^{-1} \cdot x^{-1} = x^{-2}\ ,\ x \neq 0$

$\therefore$ x^{-1} جذر تربيعي لِـ x^{-2}

الجذر التربيعي الأساسي للعدد الموجب x هو $\sqrt{x}$

ونكتب: $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$

إذا حاولنا كتابة هذه المعادلة بالصيغة الأسية،

$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$

$x^{\square} \cdot x^{\square} = x^1 = x$

بالمقارنة مع ما ورد أعلاه نستطيع أن نكتب: $\square + \square = 1$

$\square = \frac{1}{2}$.

$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$ تكتب $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x$

وقد اعتمدت الصيغة الأسية وعممت لكتابة أي تعبير جذري.

يقدّر علماء الآثار عمر المحفورات باستخدام الأسس النسبية

يمكنك كتابة أي تعبير جذري باستخدام الأس النسبي.

في الصورة الجذرية يعبر دليل الجذر عن الجذر الذي تريده، وفي الصورة الأسية يصبح دليل الجذر مقامًا للأس كما هو مبين في الجدول التالي:

الصورة الأسية	الصورة الجذرية
$25^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{25} = \sqrt[2]{25}$
$27^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[3]{27}$
$64^{\frac{1}{4}}$	$\sqrt[4]{64}$

ويمكن استخدام خواص الأسس لتبسيط التعبيرات الجذرية.

معلومة:

يعتبر عالما الرياضيات واليس WALLIS، وديكارت DESCARTES أول من استخدم الأسس النسبية.

معلومة:

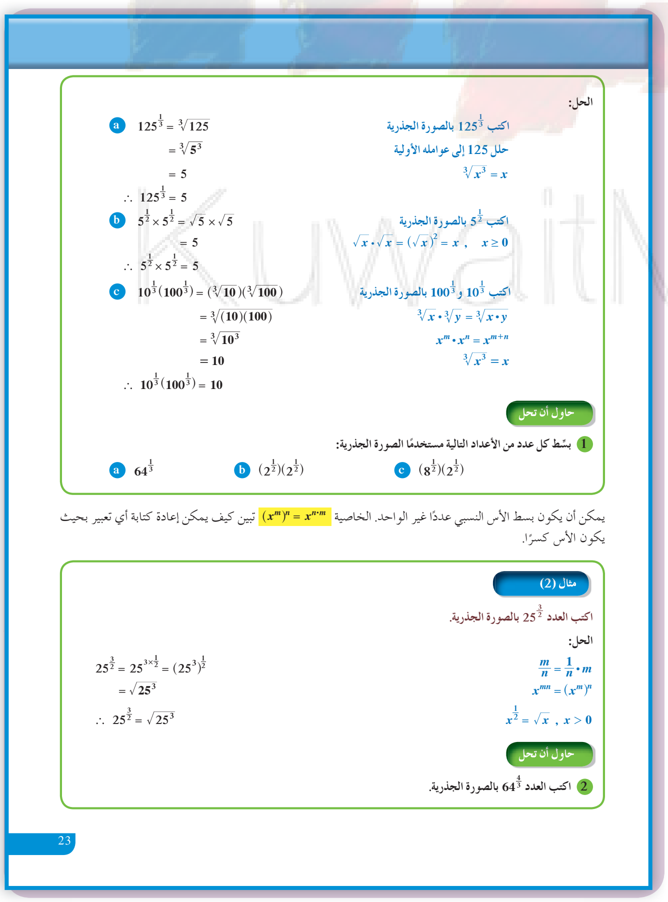
يرمز المفتاح ^ في بعض الآلات الحاسبة إلى الأس. وفي حالة الأسس النسبية يكتب الأس بين قوسين. فمثلاً: $432^{\frac{3}{5}}$ يتم إدخالها إلى الآلة الحاسبة كما يلي: 432 ^ (3 ÷ 5)

مثال (1)

بسّط كل عدد من الأعداد التالية مستخدمًا الصورة الجذرية:

a $125^{\frac{1}{3}}$ b $5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}}$ c $10^{\frac{1}{3}} \times 100^{\frac{1}{3}}$

22



الحل:

a اكتب $125^{\frac{1}{3}}$ بالصورة الجذرية: $125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125}$

حلل 125 إلى عوامله الأولية: $= \sqrt[3]{5^3}$

$\sqrt[3]{x^3} = x$: $= 5$

$\therefore\ 125^{\frac{1}{3}} = 5$

b اكتب $5^{\frac{1}{2}}$ بالصورة الجذرية: $5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \times \sqrt{5}$

$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 = x\ ,\ \ x \geq 0$: $= 5$

$\therefore\ 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = 5$

c اكتب $10^{\frac{1}{3}}$ و $100^{\frac{1}{3}}$ بالصورة الجذرية: $10^{\frac{1}{3}}(100^{\frac{1}{3}}) = (\sqrt[3]{10})(\sqrt[3]{100})$

$\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x \cdot y}$: $= \sqrt[3]{(10)(100)}$

$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$: $= \sqrt[3]{10^3}$

$\sqrt[3]{x^3} = x$: $= 10$

$\therefore\ 10^{\frac{1}{3}}(100^{\frac{1}{3}}) = 10$

حاول أن تحل

1 بسّط كل عدد من الأعداد التالية مستخدمًا الصورة الجذرية:

a $64^{\frac{1}{3}}$ b $(2^{\frac{1}{2}})(2^{\frac{1}{2}})$ c $(8^{\frac{1}{2}})(2^{\frac{1}{2}})$

يمكن أن يكون بسط الأس النسبي عددًا غير الواحد. الخاصية $(x^m)^n = x^{n \cdot m}$ تبين كيف يمكن إعادة كتابة أي تعبير بحيث يكون الأس كسرًا.

مثال (2)

اكتب العدد $25^{\frac{3}{2}}$ بالصورة الجذرية.

الحل:

$\frac{m}{n} = \frac{1}{n} \cdot m$: $25^{\frac{3}{2}} = 25^{3 \times \frac{1}{2}}$

$x^{mn} = (x^m)^n$: $= (25^3)^{\frac{1}{2}}$

$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}\ ,\ x > 0$: $= \sqrt{25^3}$

$\therefore\ 25^{\frac{3}{2}} = \sqrt{25^3}$

حاول أن تحل

2 اكتب العدد $64^{\frac{4}{3}}$ بالصورة الجذرية.

23

5 التدريس

يعتبر التحويل بين الجذور والأسس النسبية مهمًّا. سوف يستكشفه الطالب الآن في عمليات حسابية لتبسيط النتائج، كما أنه سوف يدرك أهميته لاحقًا في دراسات متقدمة.

شدّد أولًا للطلاب على فكرة العلاقة بين الجذر التربيعي والجذر التكعيبي والأسس وذلك من خلال التعامل مع المثال (1) ومع أمثلة بديلة.

اكتب على السبورة ما يلي:

لكل عدد حقيقي $a \geq 0$ فإن $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

لكل عدد حقيقي a فإن $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$

ثم اطلب إليهم كتابة أمثلة متعددة تطبيقًا لهاتين العلاقتين.

في المثالين (3) , (2)

في خطوة متقدمة لتعميم ما ورد في المثال (1)،

اكتب الآن على السبورة ما يلي:

$$\sqrt{a^m} = a^{\frac{m}{2}}$$

$$\sqrt[3]{a^m} = a^{\frac{m}{3}}$$

اطلب إليهم كتابة أمثلة متعددة كتطبيق على هاتين العلاقتين.

دع الطلاب يلاحظون أن خواص الأسس النسبية مشابهة تمامًا لخواص الأسس الصحيحة التي تعلمها الطالب سابقًا. ولكن تبقى الأهمية في استخدام العمليات الأربع على الأعداد النسبية. أي المقامات المشتركة عند الجمع والطرح.

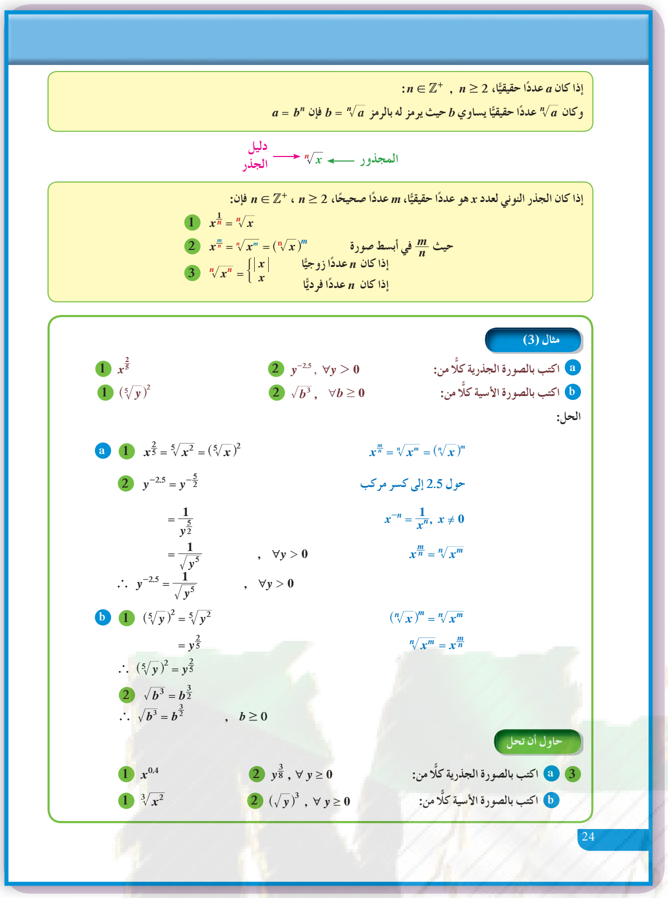
في المثال (5)

استمع إلى أسئلتهم في التحويلات عند قسمة الأعداد النسبية.

أعط أمثلة بديلة تساعد الطلاب على فهم العمليات مع الجذور عندما تكون العلاقة مع الأسس النونية.

في المثال (6)

يتناول هذا المثال كيفية حل التمرين نفسه بطريقتين مختلفتين وذلك بالربط بين خواص الجذور وخواص الأسس.



إذا كان a عددًا حقيقيًّا، $n \geq 2$, $n \in \mathbb{Z}^+$:

وكان $\sqrt[n]{a}$ عددًا حقيقيًّا يساوي b حيث يرمز له بالرمز $b = \sqrt[n]{a}$ فإن $a = b^n$

إذا كان الجذر النوني لعدد x هو عددًا حقيقيًّا، m عددًا صحيحًا، $n \geq 2$ ، $n \in \mathbb{Z}^+$ فإن:

1. $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$
2. $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$ حيث $\frac{m}{n}$ في أبسط صورة
3. $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x| & \text{إذا كان } n \text{ عددًا زوجيًّا} \\ x & \text{إذا كان } n \text{ عددًا فرديًّا} \end{cases}$

مثال (3)

a اكتب بالصورة الجذرية كلًّا من: (1) $x^{\frac{2}{5}}$ (2) $y^{-2.5}, \forall y > 0$

b اكتب بالصورة الأسية كلًّا من: (1) $(\sqrt[5]{y})^2$ (2) $\sqrt{b^3}, \forall b \geq 0$

الحل:

a (1) $x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{x^2} = (\sqrt[5]{x})^2$ — $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$

(2) $y^{-2.5} = y^{-\frac{5}{2}}$ — حول 2.5 إلى كسر مركب

$= \frac{1}{y^{\frac{5}{2}}}$ — $x^{-n} = \frac{1}{x^n}, x \neq 0$

$= \frac{1}{\sqrt{y^5}} \quad , \forall y > 0$ — $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

$\therefore y^{-2.5} = \frac{1}{\sqrt{y^5}} \quad , \forall y > 0$

b (1) $(\sqrt[5]{y})^2 = \sqrt[5]{y^2}$ — $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$

$= y^{\frac{2}{5}}$ — $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

$\therefore (\sqrt[5]{y})^2 = y^{\frac{2}{5}}$

(2) $\sqrt{b^3} = b^{\frac{3}{2}}$

$\therefore \sqrt{b^3} = b^{\frac{3}{2}} \quad , b \geq 0$

حاول أن تحل

3 a اكتب بالصورة الجذرية كلًّا من: (1) $x^{0.4}$ (2) $y^{\frac{3}{8}}, \forall y \geq 0$

b اكتب بالصورة الأسية كلًّا من: (1) $\sqrt[3]{x^2}$ (2) $(\sqrt{y})^3, \forall y \geq 0$

24

مثال (4)

إن عدم شعور رائد الفضاء بانعدام التوازن في رحلة فضائية يعود إلى دوران جهاز يجلس فيه ويشعره بجاذبية وهمية تحاكي الجاذبية الأرضية.

يدور الجهاز وفق المعادلة الرياضية: $n = \frac{g^{0.5}}{2 \cdot \pi \cdot r^{0.5}}$

حيث n هي السرعة الدورانية وتقاس بالدورة في الثانية (s).

r هو طول نصف قطر جهاز الدوران ويقاس بالمتر (m).

g هي الجاذبية الوهمية التي تحاكي الجاذبية الأرضية.

احسب سرعة دوران جهاز، طول نصف قطره 1.7 m يدور ليحاكي الجاذبية الأرضية التي تساوي $9.8\ m/s^2$

الحل:

$n = \frac{g^{0.5}}{2 \cdot \pi \cdot r^{0.5}}$ — اكتب المعادلة

$\approx \frac{9.8^{0.5}}{2(3.14)(1.7)^{0.5}}$ — عوض

$n \approx 0.382$ — استخدم الآلة الحاسبة

تبلغ سرعة دوران الجهاز حوالي 0.382 دورة في الثانية.

حاول أن تحل

4 احسب السرعة الدورانية المطلوبة للجهاز في المثال (4) ليحاكي جاذبية تحاكي نصف مقدار الجاذبية الأرضية.

الربط بالحياة:

نيل آرمسترونغ

Neil Armstrong

(1930 – 2012)

هو أول رائد فضاء وطأت قدماه سطح القمر.

- قاد سنة 1966 المركبة Gemini 8 وقام مع زميله ديفيد سكوت بإجراء أول عملية التحام بين مركبتين في الفضاء بواسطة إنسان.
- سنة 1969 قاد المركبة Apollo 11 برفقة بن آلدرن ومايكل كولينز. هبط آرمسترونغ مع آلدرن على سطح القمر حيث أمضيا 2h31min.

قوانين الأسس النسبية Laws of Rational Exponents

ليكن n , m عددين نسبيين، b , a عددين حقيقيين حيث b^m , b^n , a^n أعدادًا حقيقية.

المثال	القانون
$8^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{3}{3}} = 8^1 = 8$	$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$
$(5^{\frac{1}{2}})^4 = 5^{\frac{1}{2} \times 4} = 5^2 = 25$	$(b^m)^n = b^{m \cdot n}$
$(4 \times 5)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = 2 \times 5^{\frac{1}{2}}$	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
$9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3}$	$b^{-n} = \frac{1}{b^n}, b \neq 0$
$\frac{9^{\frac{3}{2}}}{9^{\frac{1}{2}}} = 9^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = 9^1 = 9$	$\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}, b \neq 0$
$\left(\frac{-125}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{-125^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{-5}{3}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$

25


يمكنك تبسيط أي عدد أسه عدد نسبي باستخدام قوانين الأسس النسبية أو بتحويله إلى تعبير جذري.

مثال (5)

بسّط كلًّا مما يلي مستخدمًا قوانين الأسس:

(a) $(-32)^{\frac{3}{5}}$ (b) $(x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{5}{6}})\div x^{\frac{2}{3}}$, $x>0$

الحل:

(a) $(-32)^{\frac{3}{5}}=(-2^5)^{\frac{3}{5}}$ — $2^5=32$

$=(-2)^{\frac{15}{5}}$ — $(b^m)^n=b^{m\cdot n}$

$=(-2)^3$ — بسّط

$=-8$

(b) $(x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{5}{6}})\div x^{\frac{2}{3}}$

$=\left(x^{\frac{1}{2}+\frac{5}{6}}\right)\div x^{\frac{2}{3}}$ — الخاصيّة

$=\left(x^{\frac{8}{6}}\right)\div x^{\frac{2}{3}}$ — بسّط $\frac{b^m}{b^n}=b^{m-n}$

$=x^{\frac{8}{6}-\frac{2}{3}}=x^{\frac{4}{6}}=x^{\frac{2}{3}}$

حاول أن تحل

5 بسّط كلًّا من الأعداد التالية مستخدمًا قوانين الأسس:

(a) $25^{-\frac{3}{2}}$ (b) $(-32)^{\frac{4}{5}}$ (c) $\left(\frac{16x^{14}}{81y^{18}}\right)^{\frac{1}{2}}$, $x\ge0$, $y>0$

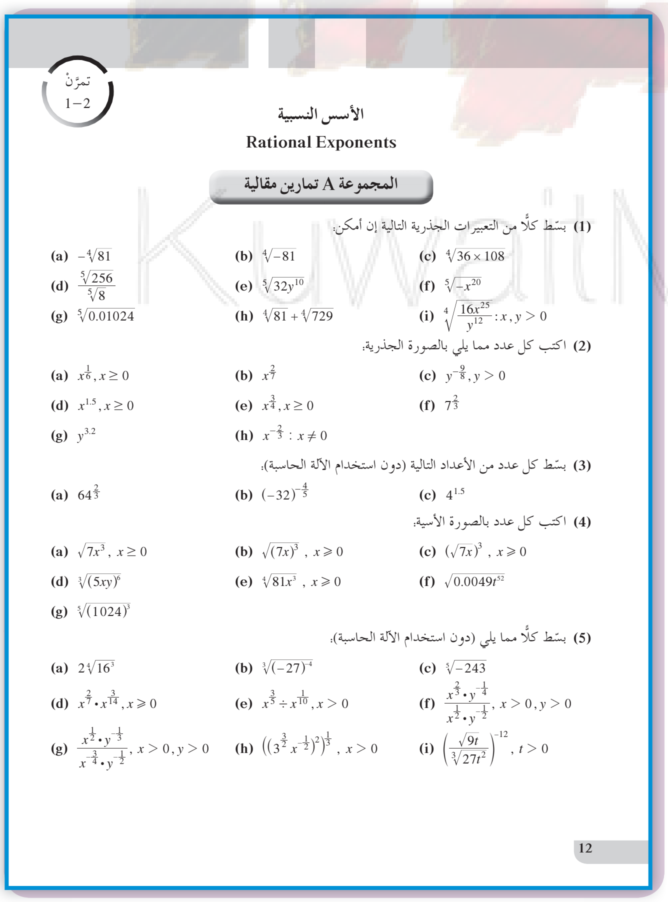
لضرب أو لقسمة $\sqrt[n]{y}$, $\sqrt[n]{x}$ يمكن استخدام الصورة الأسية لكل منهما وتطبيق قوانين الأسس أو تطبيق قوانين الجذور النونية.

قوانين الجذور النونية

إذا كان: $\sqrt[n]{y}$, $\sqrt[n]{x}$ عددين حقيقيين، فإن:

1. $\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{x\cdot y}$
2. $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}=\sqrt[n]{\frac{x}{y}}$, $y\neq0$
3. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}=\sqrt[m\cdot n]{x}$, $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}\in\mathbb{R}$

26


تمرَّنْ 1−2

الأسس النسبية

Rational Exponents

المجموعة A تمارين مقالية

(1) بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية إن أمكن:

(a) $-\sqrt[4]{81}$ (b) $\sqrt[4]{-81}$ (c) $\sqrt[4]{36\times108}$

(d) $\frac{\sqrt[5]{256}}{\sqrt[5]{8}}$ (e) $\sqrt[5]{32y^{10}}$ (f) $\sqrt[5]{-x^{20}}$

(g) $\sqrt[5]{0.01024}$ (h) $\sqrt[4]{81}+\sqrt[4]{729}$ (i) $\sqrt[4]{\frac{16x^{25}}{y^{12}}}:x,y>0$

(2) اكتب كل عدد مما يلي بالصورة الجذرية:

(a) $x^{\frac{1}{6}},x\ge0$ (b) $x^{\frac{2}{7}}$ (c) $y^{-\frac{9}{8}},y>0$

(d) $x^{1.5},x\ge0$ (e) $x^{\frac{3}{4}},x\ge0$ (f) $7^{\frac{2}{3}}$

(g) $y^{3.2}$ (h) $x^{-\frac{2}{3}}:x\neq0$

(3) بسّط كل عدد من الأعداد التالية (دون استخدام الآلة الحاسبة):

(a) $64^{\frac{2}{3}}$ (b) $(-32)^{-\frac{4}{5}}$ (c) $4^{1.5}$

(4) اكتب كل عدد بالصورة الأسية:

(a) $\sqrt{7x^3}$, $x\ge0$ (b) $\sqrt{(7x)^3}$, $x\geqslant0$ (c) $(\sqrt{7x})^3$, $x\geqslant0$

(d) $\sqrt[3]{(5xy)^6}$ (e) $\sqrt[4]{81x^3}$, $x\geqslant0$ (f) $\sqrt{0.0049t^{52}}$

(g) $\sqrt[5]{(1024)^3}$

(5) بسّط كلًّا مما يلي (دون استخدام الآلة الحاسبة):

(a) $2\sqrt[4]{16^3}$ (b) $\sqrt[3]{(-27)^{-4}}$ (c) $\sqrt[5]{-243}$

(d) $x^{\frac{2}{7}}\cdot x^{\frac{3}{14}},x\geqslant0$ (e) $x^{\frac{3}{5}}\div x^{\frac{1}{10}},x>0$ (f) $\frac{x^{\frac{2}{3}}\cdot y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}},x>0,y>0$

(g) $\frac{x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{-\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{3}{4}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}},x>0,y>0$ (h) $\left((3^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{1}{2}})^2\right)^{\frac{1}{3}}$, $x>0$ (i) $\left(\frac{\sqrt{9t}}{\sqrt[3]{27t^2}}\right)^{-12}$, $t>0$

12

6 الربط

يوفّر المثالان (7) , (4) فرصة أمام الطلاب ليتعرفوا كيفية الربط بين الجذور والأسس في موقف حياتي.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في تحويل الأسس على صورة أعداد نسبية إلى جذور نونية وبالعكس. ساعدهم على كتابة المساواة $\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$ عدة مرات وبأمثلة عددية.

وقد يخطئ الطلاب أيضًا في عدم مراعاة شروط الجذر النوني.

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يجيبون عن أسئلة فقرات «حاول أن تحل» لتقف على أدائهم في التحويل بين الجذور والأسس.

اختبار سريع

1 بسّط ما يلي:

(a) $625^{\frac{1}{4}}$ $\sqrt[4]{625}=5$

(b) $128^{\frac{1}{7}}$ $\sqrt[7]{128}=2$

(c) $4^{\frac{1}{3}}\times4^{\frac{2}{3}}$ $4^{\frac{3}{3}}=4^1=4$

2 اكتب $x\ge0$, $x^{\frac{13}{4}}$ على صورة جذر، ثم بسّط.

$\sqrt[4]{x^{13}}=x^3\sqrt[4]{x}$

3 اكتب $x\ge0$, $\sqrt[6]{x^3y^4}$ بالصورة الأسية.

$x^{\frac{3}{6}}y^{\frac{4}{6}}=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}$

4 بسّط: $\sqrt[3]{\sqrt[4]{262144}}$

$\sqrt[12]{2^{18}}=2^{\frac{18}{12}}=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$

9 إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

1 (a) 4

(b) 2

(c) 4

2 $(64 = 4^3)\ \sqrt[3]{64^4} = 64\sqrt[3]{64} = 64 \times 4 = 256$

3 (a) $(1)\ \sqrt[5]{x^2}$, $(2)\ \sqrt[8]{y^3}$

(b) $(1)\ x^{\frac{2}{3}}$, $(2)\ y^{\frac{3}{2}}$

4 $v = \dfrac{4.9^{0.5}}{2 \times 3.14 \times (1.7)^{0.5}} \approx 0.27$

السرعة الدورانية 0.27 دورة بالثانية.

مثال (6)

بسط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{7}$

b $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$

c $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

d $\left[\left(\sqrt{x^3y^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-1}$ $x, y \in \mathbb{Q}^+$

الحل:

طريقة أولى

a $\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{5 \times 7}$ — $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$

$= \sqrt[4]{35}$ — اضرب

$\therefore \sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{35}$

طريقة ثانية

$\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{7} = 5^{\frac{1}{4}} \times 7^{\frac{1}{4}}$ — $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

$= (5 \times 7)^{\frac{1}{4}}$ — $x^m \cdot y^m = (x \cdot y)^m$

$= (35)^{\frac{1}{4}}$ — اضرب

$= \sqrt[4]{35}$ — $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

طريقة أولى

b $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{16}{2}}$ — $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}\ (y \neq 0)$

$= \sqrt[3]{8}$ — اقسم

$= \sqrt[3]{2^3}$ — حلل 8 إلى عوامله

$= 2$ — $\sqrt[3]{x^3} = x$

$\therefore \dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = 2$

طريقة ثانية

$\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{16^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}$ — $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

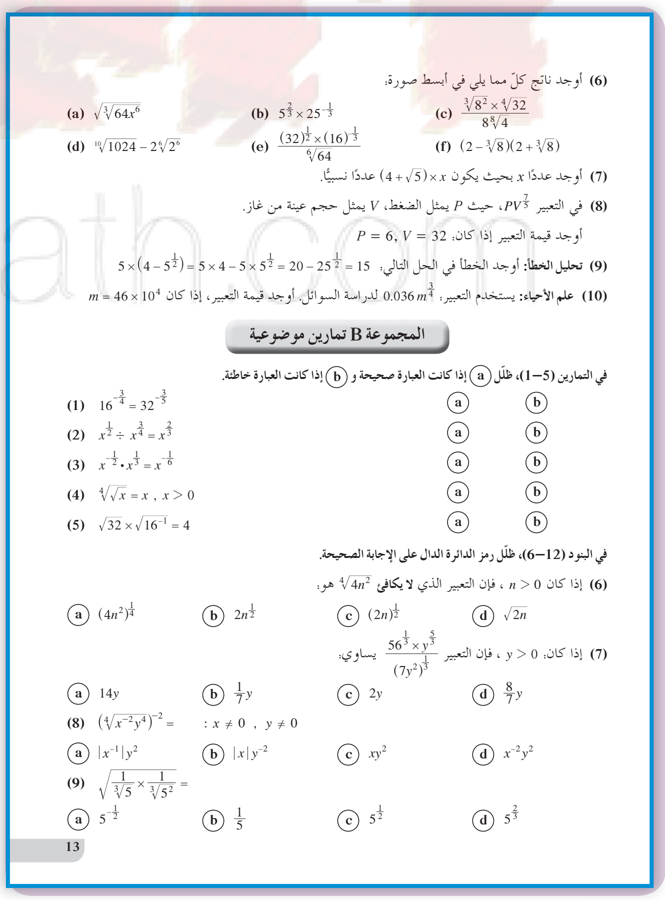
$= \left(\dfrac{16}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ — $\dfrac{x^n}{y^n} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^n,\ y \neq 0$

$= 8^{\frac{1}{3}}$ — اقسم

$= \sqrt[3]{8}$ — $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

$= 2$ — بسّط

27



(6) أوجد ناتج كلّ مما يلي في أبسط صورة:

(a) $\sqrt{\sqrt[3]{64x^6}}$ (b) $5^{\frac{2}{3}} \times 25^{-\frac{1}{3}}$ (c) $\dfrac{\sqrt[3]{8^2} \times \sqrt[4]{32}}{8\sqrt[8]{4}}$

(d) $\sqrt[10]{1024} - 2\sqrt[6]{2^6}$ (e) $\dfrac{(32)^{\frac{1}{2}} \times (16)^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{64}}$ (f) $(2 - \sqrt[3]{8})(2 + \sqrt[3]{8})$

(7) أوجد عددًا x بحيث يكون $x \times (4 + \sqrt{5})$ عددًا نسبيًّا.

(8) في التعبير $PV^{\frac{7}{5}}$، حيث P يمثل الضغط، V يمثل حجم عينة من غاز.

أوجد قيمة التعبير إذا كان: $P = 6, V = 32$

(9) **تحليل الخطأ:** أوجد الخطأ في الحل التالي: $5 \times (4 - 5^{\frac{1}{2}}) = 5 \times 4 - 5 \times 5^{\frac{1}{2}} = 20 - 25^{\frac{1}{2}} = 15$

(10) **علم الأحياء:** يستخدم التعبير: $0.036\,m^{\frac{3}{4}}$ لدراسة السوائل. أوجد قيمة التعبير، إذا كان $m = 46 \times 10^4$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $16^{-\frac{3}{4}} = 32^{-\frac{3}{5}}$ — (a) (b)

(2) $x^{\frac{1}{2}} \div x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{2}{3}}$ — (a) (b)

(3) $x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{6}}$ — (a) (b)

(4) $\sqrt[4]{\sqrt{x}} = x\ ,\ x > 0$ — (a) (b)

(5) $\sqrt{32} \times \sqrt{16^{-1}} = 4$ — (a) (b)

في البنود (6–12)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان $n > 0$ ، فإن التعبير الذي **لا يكافئ** $\sqrt[4]{4n^2}$ هو:

(a) $(4n^2)^{\frac{1}{4}}$ (b) $2n^{\frac{1}{2}}$ (c) $(2n)^{\frac{1}{2}}$ (d) $\sqrt{2n}$

(7) إذا كان: $y > 0$ ، فإن التعبير $\dfrac{56^{\frac{1}{3}} \times y^{\frac{5}{3}}}{(7y^2)^{\frac{1}{3}}}$ يساوي:

(a) $14y$ (b) $\frac{1}{7}y$ (c) $2y$ (d) $\frac{8}{7}y$

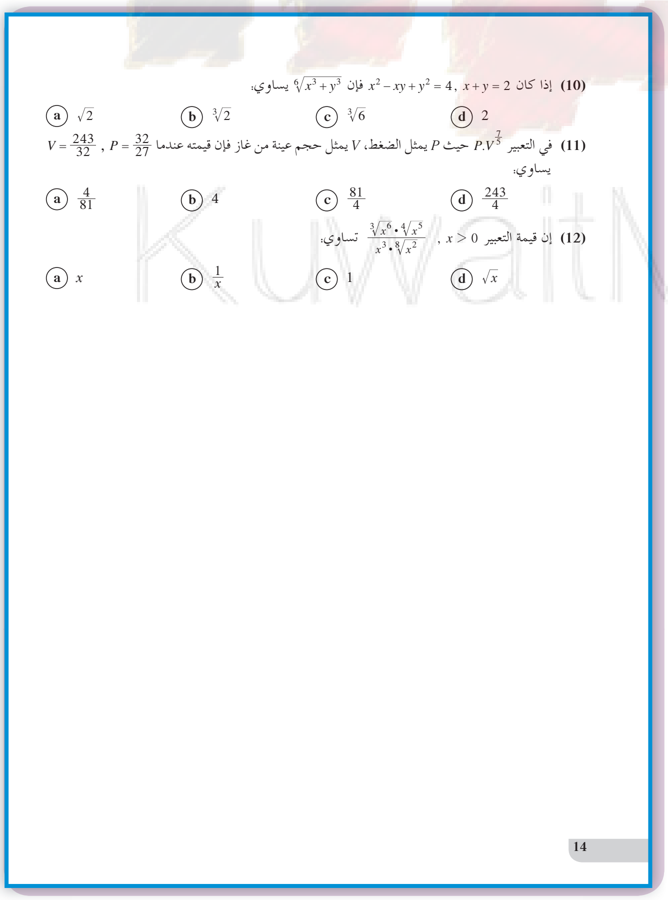
(8) $\left(\sqrt[4]{x^{-2}y^4}\right)^{-2} =$ $: x \neq 0\ ,\ y \neq 0$

(a) $|x^{-1}|y^2$ (b) $|x|y^{-2}$ (c) xy^2 (d) $x^{-2}y^2$

(9) $\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}} \times \dfrac{1}{\sqrt[3]{5^2}}} =$

(a) $5^{-\frac{1}{2}}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $5^{\frac{1}{2}}$ (d) $5^{\frac{2}{3}}$

13



(10) إذا كان $x + y = 2$, $x^2 - xy + y^2 = 4$ فإن $\sqrt[6]{x^3 + y^3}$ يساوي:

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt[3]{2}$ (c) $\sqrt[3]{6}$ (d) 2

(11) في التعبير $P.V^{\frac{7}{5}}$ حيث P يمثل الضغط، V يمثل حجم عينة من غاز فإن قيمته عندما $P = \frac{32}{27}$, $V = \frac{243}{32}$ يساوي:

(a) $\frac{4}{81}$ (b) 4 (c) $\frac{81}{4}$ (d) $\frac{243}{4}$

(12) إن قيمة التعبير $x > 0$, $\dfrac{\sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt[4]{x^5}}{x^3 \cdot \sqrt[8]{x^2}}$ تساوي:

(a) x (b) $\frac{1}{x}$ (c) 1 (d) $\sqrt{x}$

14

طريقة أولى

c $\sqrt{\sqrt[4]{256}} = \sqrt{(256)^{\frac{1}{4}}}$ — $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

$= \left[(256)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{2}}$ — $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

$= 256^{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}$ — $(x^m)^n = x^{m\cdot n}$

$= 256^{\frac{1}{8}}$ — اضرب

$= (2^8)^{\frac{1}{8}}$ — حلل 256 إلى عوامله

$= 2$ — $(x^m)^n = x^{m.n}$

طريقة ثانية

$\sqrt{\sqrt[4]{256}} = \sqrt[2\times4]{256}$ — $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n\cdot m]{x}$

$= \sqrt[8]{2^8}$ — حلل 256 إلى عوامله الأولية

$= 2$ — $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ (n عدد زوجي)

$\therefore \sqrt{\sqrt[4]{256}} = 2$

d $\left(\left(\sqrt{x^3y^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} = \left(\left((x^3y^3)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}$ — $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

$= \left(\left(((xy)^3)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}$ — الخاصية: $(a\cdot b)^m = a^m\cdot b^m$

$= \left(\left((xy)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}$ — الخاصية: $(b^n)^m = b^{n\cdot m}$

$= \left((xy)^{\frac{1\times3}{3\times2}}\right)^{-1}$

$= \left((xy)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$ — بسِّط

$= (xy)^{-\frac{1}{2}}$

$= \dfrac{1}{(xy)^{\frac{1}{2}}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$

$= \dfrac{\sqrt{xy}}{xy}$ — ضرب البسط والمقام بمرافق المقام

حاول أن تحل

6 بسط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\sqrt[5]{9}\times\sqrt[5]{27}$ b $\dfrac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{3}}$ c $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$ d $\left(\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[4]{y^3}\right)^{-12}, x, y \in \mathbb{Q}^+$

مثال (7)

تعطى قوة الجاذبية بين جسمين بالعلاقة:

$g = 6.67\times(10)^{-11}\cdot\dfrac{k_1\cdot k_2}{d^2}$ حيث: k_2 ،k_1 كتلتي الجسمين بالكيلوغرام (kg)،
d المسافة بين الجسمين بالمتر (m)، g قوة الجاذبية بالنيوتن (N).

أوجد المسافة بين الأرض والقمر إذا كانت كتلة الأرض تساوي تقريبًا 5.98×10^{24}kg ، كتلة القمر تساوي 1.23% من كتلة الأرض وقوة الجاذبية بينهما هي N 183×10^{19} تقريبًا.

الحل:

$k_1 = (5.98)(10^{24})\text{kg} \quad , \quad k_2 = (1.23\%)(5.98)(10^{24})\text{kg}$

$$g = (6.67)(10)^{-11}\cdot\frac{k_1\cdot k_2}{d^2}$$

$$\therefore\ d^2 = (6.67)(10)^{-11}\cdot\frac{k_1\cdot k_2}{g}$$

$$d = \sqrt{\frac{(6.67)(10)^{-11}\cdot k_1\cdot k_2}{g}}$$

$$= \sqrt{\frac{(6.67)(10)^{-11}(5.98)(10^{24})(0.0123)(5.98)(10^{24})}{183\times10^{19}}}$$

$$d = \sqrt{\frac{(6.67)(5.98)^2(0.0123)(10^{18})}{183}}$$

$$\approx 126\,616\,735.4\text{ m}$$

تبلغ المسافة بين الأرض والقمر 126 616 735.4 m تقريبًا.

حاول أن تحل

7 باستخدام العلاقة من مثال (7) أوجد المسافة بين الأرض والشمس إذا كانت كتلة الشمس تساوي kg$(10^{30})(2)$ تقريبًا. وقوة الجاذبية بينهما N$(53.2)(10^{23})$

5 **(a)** $5^{-3} = \dfrac{1}{5^3}$

(b) 16

(c) $\dfrac{4}{9}\times\dfrac{x^7}{y^9}$

6 **(a)** $\sqrt[5]{3^2}\times\sqrt[5]{3^3} = 3$

(b) $\sqrt[3]{81} = 3\sqrt[3]{3}$

(c) $\sqrt[3\times2]{729} = \sqrt[6]{729} = 3$

(d) $x^{\frac{-12}{4}}\times\left(y^{\frac{3}{4}}\right)^{-12} = x^{-3}\times y^{-9} = \dfrac{1}{x^3y^9}$

7 $d = \sqrt{\dfrac{6.67\times10^{-11}\times2\times10^{30}\times5.98\times10^{24}}{53.2\times10^{23}}}$

المسافة بين الأرض والشمس:

$d\approx 1.225\times10^{7}$ km أو $d\approx1.225\times10^{10}$ m

3–1: حل المعادلات

1 الأهداف

- يحل معادلات جذرية.
- يحل معادلات أسية.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

معادلة جذرية – معادلة أسية – كثيرة حدود من الدرجة الثانية.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) اكتب بالصورة الأسية ما يلي: $\sqrt[6]{x^5}$, $\sqrt[7]{x^3}$

(b) اكتب بالصورة الجذرية ما يلي:

$x^{\frac{6}{5}}$, $x^{\frac{3}{5}}$, $x^{\frac{3}{4}}$

(c) حل المعادلات الآتية:

$5x - 2 = 0$

$x^2 - 3x = 28$

$x^2 - 1 = 3$

(d) أكمل الفراغ في كل مما يلي:

$7^{-2} = \frac{\square}{\square}$

$(-2)^0 = \square$

$\frac{4}{9} = \left(\frac{\square}{\square}\right)^2$

1–3

حل المعادلات

Solving Equations

سوف تتعلم

- حل معادلات جذرية.
- حل معادلات أسية.

المفردات والمصطلحات:

- معادلة جذرية Radical Equation
- معادلة أسية Exponential Equation
- كثيرة حدود من الدرجة الثانية Quadratic Polynomial

دعنا نفكر ونتناقش

1 ليكن: $a = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$

a احسب: $(2+\sqrt{3})^2$

b استنتج قيمة مبسطة لِـ a

c أوجد مجموعة حل المعادلة: $x^2 = 7 + 4\sqrt{3}$

2 مستعينًا بما قمت به في الفقرة 1

أوجد مجموعة حل المعادلة: $y^2 = 7 - 4\sqrt{3}$

3 a احسب $(\sqrt{7} - \sqrt{5})^2$.

b حل المعادلة: $x^2 = 12 - 2\sqrt{35}$

أولًا: المعادلات الجذرية Radical Equations

المعادلة الجذرية هي معادلة يكون أس المتغير فيها عددًا نسبيًّا (ليس عددًا صحيحًا) أو يتضمن المجذور متغيرًا.

فمثلًا:

معادلة جذرية $3 + \sqrt{x} = 10$

معادلة جذرية $(x-2)^{\frac{1}{2}} = 1$

ليست معادلة جذرية $\sqrt{3} + x = 1$

تعلم

لحل معادلة جذرية اتبع الخطوات التالية:

الخطوة الأولى: أفصل الجذر إلى أحد طرفي المعادلة.

الخطوة الثانية: حدد شرط الحل

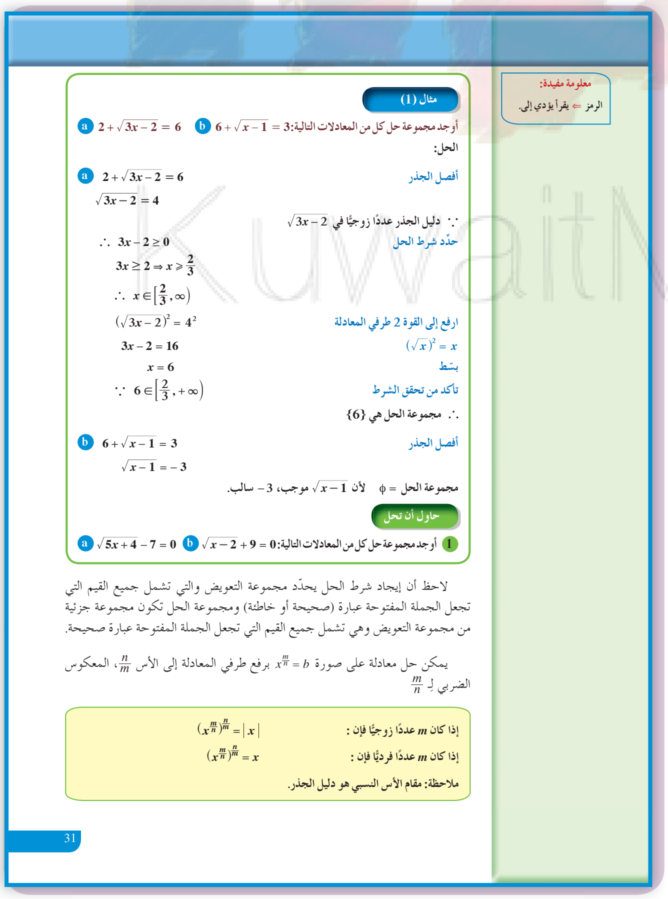
– إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًّا فإن قيمة ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي الصفر وكلًّا من طرفي المعادلة أكبر من أو يساوي الصفر أيضًا.

– إذا كان دليل الجذر عددًا فرديًّا فإن قيمة ما تحت الجذر ينتمي إلى $\mathbb{R}$.

الخطوة الثالثة: ارفع طرفي المعادلة إلى أس مناسب يحذف الجذر.

الخطوة الرابعة: تأكد من أن الحل يحقق الشرط.

30



معلومة مفيدة:

الرمز $\Rightarrow$ يقرأ يؤدي إلى.

مثال (1)

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية: a $2 + \sqrt{3x-2} = 6$ b $6 + \sqrt{x-1} = 3$

الحل:

a أفصل الجذر $2 + \sqrt{3x-2} = 6$

$\sqrt{3x-2} = 4$

$\because$ دليل الجذر عددًا زوجيًّا في $\sqrt{3x-2}$

حدِّد شرط الحل $\therefore\ 3x - 2 \geq 0$

$3x \geq 2 \Rightarrow x \geq \frac{2}{3}$

$\therefore\ x \in \left[\frac{2}{3}, \infty\right)$

ارفع إلى القوة 2 طرفي المعادلة $(\sqrt{3x-2})^2 = 4^2$

$(\sqrt{x})^2 = x$ $3x - 2 = 16$

بسّط $x = 6$

تأكد من تحقق الشرط $\because\ 6 \in \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$

$\therefore$ مجموعة الحل هي $\{6\}$

b أفصل الجذر $6 + \sqrt{x-1} = 3$

$\sqrt{x-1} = -3$

مجموعة الحل $= \phi$ لأن $\sqrt{x-1}$ موجب، -3 سالب.

حاول أن تحل

1 أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية: a $\sqrt{5x+4} - 7 = 0$ b $\sqrt{x-2} + 9 = 0$

لاحظ أن إيجاد شرط الحل يحدّد مجموعة التعويض والتي تشمل جميع القيم التي تجعل الجملة المفتوحة عبارة (صحيحة أو خاطئة) ومجموعة الحل تكون مجموعة جزئية من مجموعة التعويض وهي تشمل جميع القيم التي تجعل الجملة المفتوحة عبارة صحيحة.

يمكن حل معادلة على صورة $x^{\frac{m}{n}} = b$ برفع طرفي المعادلة إلى الأس $\frac{n}{m}$، المعكوس الضربي لِـ $\frac{m}{n}$

إذا كان m عددًا زوجيًّا فإن: $(x^{\frac{m}{n}})^{\frac{n}{m}} = |x|$

إذا كان m عددًا فرديًّا فإن: $(x^{\frac{m}{n}})^{\frac{n}{m}} = x$

ملاحظة: مقام الأس النسبي هو دليل الجذر.

31

5 التدريس

يعتبر هذا الدرس خطوة أولى في رحلة طويلة أمام الطلاب، حيث يقدم مسائل بسيطة لحل معادلات تتضمن جذورًا ومعادلات تتضمن أسسًا. والمهم أن يفهم الطلاب أن المعادلات الجذرية يمكن أن يكون لها حلول دخيلة. شدّد للطلاب على هذه الفكرة وذلك من خلال استخدام أمثلة بديلة متعددة.

أخبرهم أن الحلول الدخيلة تكون عادة ناتجة عن المعادلات التي تتضمن جذورًا حيث الدليل هو عدد زوجي، أما في المعادلات التي تتضمن جذورًا حيث الدليل هو عدد فردي فلا نتحدث عن حلول دخيلة.

في المثال (1)

حيث المعادلة تتضمن جذرًا تربيعيًّا يوجد حل واحد مقبول في المعادلة بعد أن تمّ عزل الجذر التربيعي وتحديد شرط الحل، ثم رفع المعادلة إلى التربيع.

أعطهم مثلًا حسيًّا عن هذه الإشكالية، حيث إن: $-3 \neq 3$ ولكن $(-3)^2 = (3)^2$.

في المثال (2)

إذا كانت المعادلة تتضمن أسًّا، بحيث يكون عددًا نسبيًّا على صورة $\frac{m}{n}$ فمن الضروري رفع طرفي المعادلة إلى الأس $\frac{n}{m}$ بعد عزل تعبير الأس. أعط أمثلة بديلة لحل معادلات تتضمن أسًّا عددًا نسبيًّا على الصورة $\frac{m}{n}$ في الحالتين:

- أولًا، m عدد زوجي.
- ثانيًا، m عدد فرديّ.

في المثال (3)

من المهم أولًا تحديد قيمة المتغير في تعبير المجذور، إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًّا وذلك كي يكون لدينا عددًا حقيقيًّا، ويمكن التحقق من الإجابات التي نحصل عليها للتأكد من انتمائه لمجموعة التعويض (شرط الحل).

أعط أمثلة بديلة للتأكد من فهم الطلاب لهذه الفكرة عن الحلول الدخيلة في المعادلة. فمثلًا المعادلة: $\sqrt{x+5} = x - 1$ التي شرط حلها $x \in [1, \infty)$ يوجد لها حلان: $x = -1$ أو $x = 4$.

مثال (2)

أوجد مجموعة الحل: $2(x-2)^{\frac{2}{3}} = 50$

الحل:

$2(x-2)^{\frac{2}{3}} = 50$

اقسم: $(x-2)^{\frac{2}{3}} = 25$

ارفع طرفي المعادلة إلى الأس $\frac{3}{2}$: $\left((x-2)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 25^{\frac{3}{2}}$

$(x^{\frac{m}{n}})^{\frac{n}{m}} = |x|$ إذا كان m عددًا زوجيًّا: $|x-2| = \sqrt{25^3}$

$|x-2| = \sqrt{5^6} = 125$

$|x| = b \Longrightarrow (x = b$ أو $x = -b)$: $\therefore\ x-2 = 125$ أو $x-2 = -125$

$x = 127$ أو $x = -123$

مجموعة الحل $= \{-123, 127\}$

حاول أن تحل

2 أوجد مجموعة الحل:

a $2(x+3)^{\frac{3}{2}} = 54$

b $(1-x)^{\frac{2}{5}} - 4 = 0$

يمكن الحصول على حلول دخيلة (لا تحقق الشرط) عند رفع طرفي المعادلة إلى قوة ما.

مثال (3)

أوجد مجموعة الحل: $5 + \sqrt{x-3} = x$

الحل:

$\sqrt{x-3} + 5 = x$

أفصل الجذر: $\sqrt{x-3} = x - 5$

تكون قيمة x مقبولة إذا حققت:

$x - 3 \geq 0\ ,\ x - 5 \geq 0$

$x \geq 3\ ,\ x \geq 5$

$\therefore\ x \geq 5$

$\therefore\ x \in [5, \infty)$

رفع طرفي المعادلة إلى القوة 2: $(\sqrt{x-3})^2 = (x-5)^2$

$(\sqrt{x})^2 = x$ إذا كان $0 \leq x$: $x - 3 = (x-5)^2$

فك: $x - 3 = x^2 - 10x + 25$

بسّط: $x^2 - 11x + 28 = 0$

حلّل: $(x-4)(x-7) = 0$

$a \cdot b = 0$ مكافئ لـ $a = 0$ أو $b = 0$: $x - 4 = 0$ أو $x - 7 = 0$

$x = 4$ أو $x = 7$

$4 \notin [5, \infty)\ ,\ 7 \in [5, \infty)$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{7\}$

ملاحظة: $x = 4$ هو حل دخيل (لا يحقق الشرط).

حاول أن تحل

3 أوجد مجموعة الحل: $\sqrt{5x-1} + 3 = x$

في بعض الحالات تحتوي المعادلة على جذرين، فيتم فصلهما بحيث يحتوي كل طرف في المعادلة على جذر.

مثال (4)

أوجد مجموعة الحل لكل معادلة: b $\sqrt{x} + \sqrt{2x-4} = 0$ a $\sqrt{8x} - 2\sqrt{4x-16} = 0$

الحل:

اكتب المعادلة: a $\sqrt{8x} - 2\sqrt{4x-16} = 0$

أفصل كل جذر: $\sqrt{8x} = 2\sqrt{4x-16}$

تكون قيمة x مقبولة إذا حققت: $4x - 16 \geq 0\ ,\ 8x \geq 0$

أي $x \geq 4\ ,\ x \geq 0$

$\therefore\ x \geq 4$

$\therefore\ x \in [4, \infty)$

ربّع طرفي المعادلة: $(\sqrt{8x})^2 = (2\sqrt{4x-16})^2$

$(\sqrt{x})^2 = x,\ x \geq 0$: $8x = 4(4x-16)$

اقسم على 4: $2x = 4x - 16$

$2x = 16 \Rightarrow x = 8$

$8 \in [4, \infty)$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{8\}$

ولكن $x = -1 \notin [0,1)$ غير مقبولة، لأن:

$\sqrt{x+5} = \sqrt{-1+5} = \sqrt{4} = 2$ (التعبير من جهة اليسار)

$x - 1 = -1 - 1 = -2$ (التعبير من جهة اليمين)

$-2 \neq 2$

أما المعادلة: $\sqrt{x+2} = 3$ فلها حل واحد هو $x = 7$.

في المثال (6)

في حلول المعادلات الأسية يجب دائمًا لفت انتباه الطالب إلى إيجاد معادلة لها الأساس نفسه، وعند ذلك يمكن استنتاج أن الأسس متساوية أي عندما تكون $a^d = a^c$، فإن $d = c$.

في المثال (7)

يمكن أيضًا وضع أمثلة بديلة أمام الطلاب للتأكد من أنهم قادرون على تحليل الأساس إلى عوامل متساوية.

6 الربط

يمثل المثال (5)، حالة ربط بين الأس والجذر لإيجاد إجابة عن حالة حياتية.

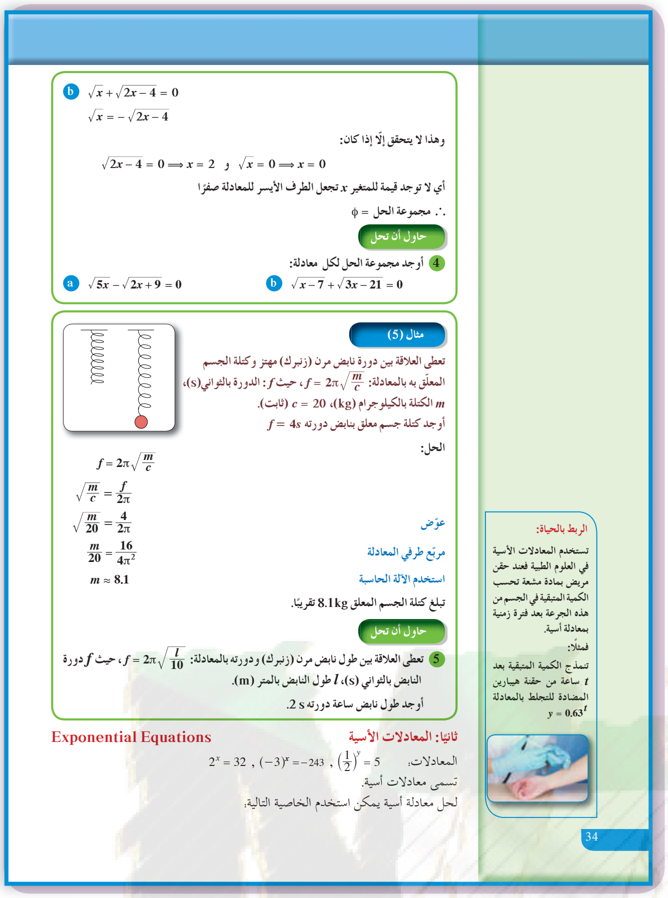
7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في كتابة أساسات متساوية لحل معادلة أسية. ساعدهم من خلال إعطائهم أمثلة متعددة عن تحليل بعض الأساسات لإيجاد المشترك في ما بينها.

وقد يخطئ الطلاب أيضًا في إيجاد شرط الحل فساعدهم في إعطائهم أمثلة متعددة لإيجاد تقاطع فترات مختلفة.

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» للتأكد من أنهم قادرون على تخطي بعض الإشكاليات في هذا الدرس.



b $\sqrt{x} + \sqrt{2x-4} = 0$

$\sqrt{x} = -\sqrt{2x-4}$

وهذا لا يتحقق إلّا إذا كان:

$\sqrt{2x-4} = 0 \Longrightarrow x = 2$ و $\sqrt{x} = 0 \Longrightarrow x = 0$

أي لا توجد قيمة للمتغير x تجعل الطرف الأيسر للمعادلة صفرًا

$\therefore$ مجموعة الحل $= \phi$

حاول أن تحل

4 أوجد مجموعة الحل لكل معادلة:

a $\sqrt{5x} - \sqrt{2x+9} = 0$

b $\sqrt{x-7} + \sqrt{3x-21} = 0$

مثال (5)

تعطى العلاقة بين دورة نابض مرن (زنبرك) مهتز وكتلة الجسم المعلّق به بالمعادلة: $f = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$، حيث f: الدورة بالثواني(s)، m الكتلة بالكيلوجرام (kg)، $c = 20$ (ثابت).

أوجد كتلة جسم معلق بنابض دورته $f = 4s$

الحل:

$f = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$

$\sqrt{\frac{m}{c}} = \frac{f}{2\pi}$

$\sqrt{\frac{m}{20}} = \frac{4}{2\pi}$ عوّض

$\frac{m}{20} = \frac{16}{4\pi^2}$ مربّع طرفي المعادلة

$m \approx 8.1$ استخدم الآلة الحاسبة

تبلغ كتلة الجسم المعلق 8.1kg تقريبًا.

حاول أن تحل

5 تعطى العلاقة بين طول نابض مرن (زنبرك) ودورته بالمعادلة: $f = 2\pi\sqrt{\frac{l}{10}}$، حيث f دورة النابض بالثواني (s)، l طول النابض بالمتر (m).

أوجد طول نابض ساعة دورته 2 s.

ثانيًا: المعادلات الأسية Exponential Equations

المعادلات: $2^x = 32$, $(-3)^x = -243$, $\left(\frac{1}{2}\right)^y = 5$

تسمى معادلات أسية.

لحل معادلة أسية يمكن استخدم الخاصية التالية:

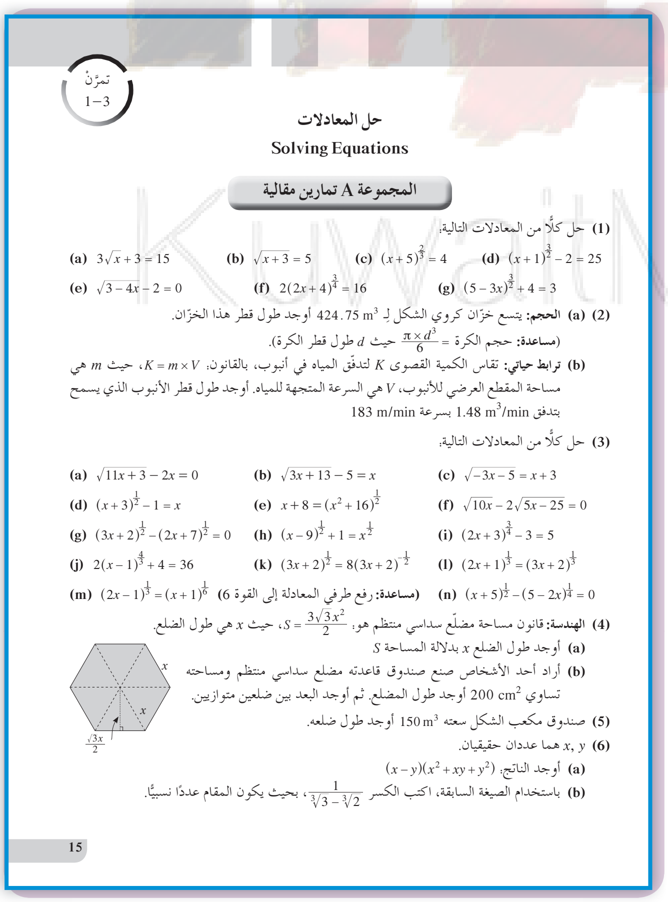
الربط بالحياة:

تستخدم المعادلات الأسية في العلوم الطبية فعند حقن مريض بمادة مشعة تحسب الكمية المتبقية في الجسم من هذه الجرعة بعد فترة زمنية بمعادلة أسية.

فمثلًا:

تنمذج الكمية المتبقية بعد t ساعة من حقنة هيبارين المضادة للتجلط بالمعادلة $y = 0.63^t$

34



تمرّن 1−3

حل المعادلات

Solving Equations

المجموعة A تمارين مقالية

(1) حل كلًّا من المعادلات التالية:

(a) $3\sqrt{x} + 3 = 15$ (b) $\sqrt{x+3} = 5$ (c) $(x+5)^{\frac{2}{3}} = 4$ (d) $(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2 = 25$

(e) $\sqrt{3-4x} - 2 = 0$ (f) $2(2x+4)^{\frac{3}{4}} = 16$ (g) $(5-3x)^{\frac{3}{2}} + 4 = 3$

(2) (a) **الحجم:** يتسع خزّان كروي الشكل لِـ $424.75\ m^3$ أوجد طول قطر هذا الخزّان.

(**مساعدة:** حجم الكرة $= \frac{\pi \times d^3}{6}$ حيث d طول قطر الكرة).

(b) **ترابط حياتي:** تقاس الكمية القصوى K لتدفّق المياه في أنبوب، بالقانون: $K = m \times V$، حيث m هي مساحة المقطع العرضي للأنبوب، V هي السرعة المتجهة للمياه. أوجد طول قطر الأنبوب الذي يسمح بتدفق $1.48\ m^3/min$ بسرعة $183\ m/min$

(3) حل كلًّا من المعادلات التالية:

(a) $\sqrt{11x+3} - 2x = 0$ (b) $\sqrt{3x+13} - 5 = x$ (c) $\sqrt{-3x-5} = x+3$

(d) $(x+3)^{\frac{1}{2}} - 1 = x$ (e) $x+8 = (x^2+16)^{\frac{1}{2}}$ (f) $\sqrt{10x} - 2\sqrt{5x-25} = 0$

(g) $(3x+2)^{\frac{1}{2}} - (2x+7)^{\frac{1}{2}} = 0$ (h) $(x-9)^{\frac{1}{2}} + 1 = x^{\frac{1}{2}}$ (i) $(2x+3)^{\frac{3}{4}} - 3 = 5$

(j) $2(x-1)^{\frac{4}{3}} + 4 = 36$ (k) $(3x+2)^{\frac{1}{2}} = 8(3x+2)^{-\frac{1}{2}}$ (l) $(2x+1)^{\frac{1}{3}} = (3x+2)^{\frac{1}{3}}$

(m) $(2x-1)^{\frac{1}{3}} = (x+1)^{\frac{1}{6}}$ (**مساعدة:** رفع طرفي المعادلة إلى القوة 6) (n) $(x+5)^{\frac{1}{2}} - (5-2x)^{\frac{1}{4}} = 0$

(4) **الهندسة:** قانون مساحة مضلّع سداسي منتظم هو: $S = \frac{3\sqrt{3}x^2}{2}$، حيث x هي طول الضلع.

(a) أوجد طول الضلع x بدلالة المساحة S

(b) أراد أحد الأشخاص صنع صندوق قاعدته مضلع سداسي منتظم ومساحته تساوي $200\ cm^2$ أوجد طول المضلع. ثم أوجد البعد بين ضلعين متوازيين.

x x $\frac{\sqrt{3}x}{2}$

(5) صندوق مكعب الشكل سعته $150\ m^3$ أوجد طول ضلعه.

(6) x, y هما عددان حقيقيان.

(a) أوجد الناتج: $(x-y)(x^2+xy+y^2)$

(b) باستخدام الصيغة السابقة، اكتب الكسر $\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}$، بحيث يكون المقام عددًا نسبيًّا.

15

اختبار سريع

أوجد مجموعة الحل لكل معادلة مما يلي:

(a) $\sqrt[3]{5x-7} = 2$

$x = 3$

(b) $\sqrt{-4x+5} = x+4$, $\left(-4 \le x \le \frac{5}{4}\right)$

$x = -1$ أو $x = -11$ غير مقبول

(c) $\sqrt{x+5} = x-1, \quad x \ge 1$

$x = -1$ غير مقبول أو $x = 4$ مقبول

(d) $5^{-x^2+4x} = 125$

$x = 1$ أو $x = 3$

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكّر ونتناقش»

1 (a) $7+4\sqrt{3}$

(b) $2+\sqrt{3}$

(c) $\pm(2+\sqrt{3})$

2 $y=\pm(2-\sqrt{3})$

3 (a) $12-2\sqrt{35}$

(b) $\pm(\sqrt{7}-\sqrt{5})$

«حاول أن تحل»

1 (a) $x=9$

(b) $x \in \phi$

2 (a) $x=6$

(b) $x=-31$ أو $x=33$

3 $\left.\begin{array}{l} 5x-1 \ge 0 \;;\; x \ge \frac{1}{5} \\ x-3 \geqslant 0 \;;\; x \geqslant 3 \end{array}\right\} \Rightarrow x \ge 3$

الحلول: $x = 1$ غير مقبول

$x = 10$ مقبول

4 (a) $x=3$ (b) $x=7$

ليكن a عدد حقيقي حيث $a \notin \{-1,0,1\}$

m، n عددان صحيحان

إذا كان $a^m = a^n$، فإن $m = n$

تم استثناء الحالات التي يكون فيها a مساويًا لأي من الأعداد 1−، 0، 1.

إليك أمثلة توضيحية لهذه الاستثناءات.

$1^{18} = 1^{17}$ ولكن $17 \ne 18$

$(-1)^3 = (-1)^{13}$ ولكن $3 \ne 13$

$0^3 = 0^4$ ولكن $3 \ne 4$

مثال (6)

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

(a) $2^x = 64$ (b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0.5$ (c) $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{64}{27}\right)$

الحل:

(a) $2^x = 64$

$2^x = 2^6$ حلل 64 إلى عوامله

$x = 6$

∴ مجموعة الحل = $\{6\}$

(b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0.5$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2}$ $0.5 = \frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^1$

$\therefore x = 1$ إذا كان $a^n = a^m$، فإن $n = m$

∴ مجموعة الحل = $\{1\}$

(c) $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{64}{27}\right)$

$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{4^3}{3^3}$ $4^3 = 64$ ؛ $3^3 = 27$

$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^3$ $\left(\frac{x^n}{y^n}\right) = \left(\frac{x}{y}\right)^n , y \ne 0$

$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$ $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \left(\frac{y}{x}\right)^{-n} , x \ne 0 , y \ne 0$

$\therefore x = -3$

∴ مجموعة الحل = $\{-3\}$

35

---

(7) حل كلًّا من المعادلات الأسية التالية:

(a) $5^{2x-3} = 125$ (b) $3^{x+1} = 1$ (c) $3^{x^2+5} = 3^9$

(d) $3^{x^2-5x} = \frac{1}{9^2}$ (e) $4^x = 2^x$ (f) $\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.25$

(g) $5^x = 125\sqrt{5}$ (h) $5^{x^2-3x} = 1$ (i) $(3^x-27)(2^x-1) = 0$

(j) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{125}{8}\right)^x$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) مجموعة حل $7^{3-x} = 1$ هي $\{3\}$ (a) (b)

(2) مجموعة حل $\sqrt{x-1} = \sqrt{1-x}$ هي $\{0\}$ (a) (b)

(3) إذا كان $\sqrt[3]{9+x^2} = 3$ فإن $x = 3\sqrt{2}$ (a) (b)

(4) $x = -1$ حلًّا للمعادلة $2^{x^2-4} = \frac{1}{32}$ (a) (b)

(5) مجموعة حل $25^{|x|+\frac{1}{2}} = 5^{1-2x}$ هي $\mathbb{R}^-$ (a) (b)

في التمارين (10–6)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

(6) مجموعة حل $\left(\sqrt{x^{20}}\right)^{\frac{1}{5}} - x^2 = 0$ هي:

(a) $\{0\}$ (b) $\mathbb{R}^+$ (c) $\mathbb{R}^-$ (d) $\mathbb{R}$

(7) مجموعة حل $\sqrt[3]{x-2} = \sqrt{x-2}$ هي:

(a) $\{2\}$ (b) $\{1,2\}$ (c) $\{1,2,3\}$ (d) $\{2,3\}$

(8) مجموعة حل $\sqrt[3]{2x^2+2} = \sqrt[3]{3-x}$ هي:

(a) $\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$ (b) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ (c) $\left\{-1,\frac{-1}{2}\right\}$ (d) $\left\{1,\frac{1}{2}\right\}$

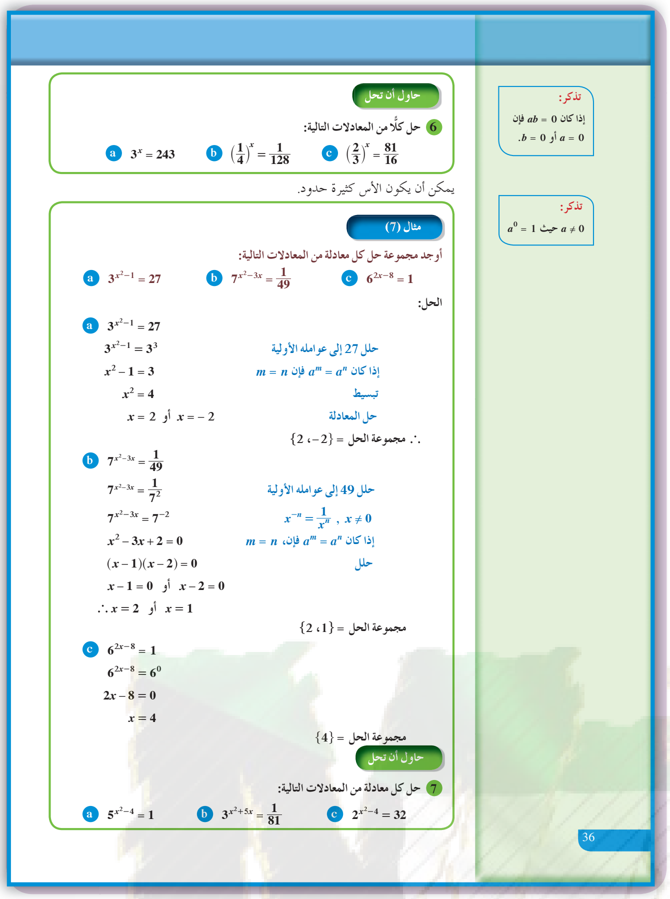
(9) مجموعة حل $x^2 = |x|$ هي:

(a) $\{-1,0,1\}$ (b) $\{0,1\}$ (c) $\{0\}$ (d) $\{1\}$

(10) إذا كان $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} = 3^{2-x}$ فإن x تساوي:

(a) -2 (b) 2 (c) -4 (d) 4

16



حاول أن تحل

6 حل كلًّا من المعادلات التالية:

a $3^x = 243$ b $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{128}$ c $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{81}{16}$

يمكن أن يكون الأس كثيرة حدود.

مثال (7)

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a $3^{x^2-1} = 27$ b $7^{x^2-3x} = \frac{1}{49}$ c $6^{2x-8} = 1$

الحل:

a $3^{x^2-1} = 27$

$3^{x^2-1} = 3^3$ حلل 27 إلى عوامله الأولية

$x^2 - 1 = 3$ إذا كان $a^m = a^n$ فإن $m = n$

$x^2 = 4$ تبسيط

$x = 2$ أو $x = -2$ حل المعادلة

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{2 ، -2\}$

b $7^{x^2-3x} = \frac{1}{49}$

$7^{x^2-3x} = \frac{1}{7^2}$ حلل 49 إلى عوامله الأولية

$7^{x^2-3x} = 7^{-2}$ $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $x \neq 0$

$x^2 - 3x + 2 = 0$ إذا كان $a^m = a^n$ فإن، $m = n$

$(x-1)(x-2) = 0$ حلل

$x - 1 = 0$ أو $x - 2 = 0$

$\therefore x = 2$ أو $x = 1$

مجموعة الحل = $\{2 ، 1\}$

c $6^{2x-8} = 1$

$6^{2x-8} = 6^0$

$2x - 8 = 0$

$x = 4$

مجموعة الحل = $\{4\}$

حاول أن تحل

7 حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a $5^{x^2-4} = 1$ b $3^{x^2+5x} = \frac{1}{81}$ c $2^{x^2-4} = 32$

تذكر:
إذا كان $ab = 0$ فإن $a = 0$ أو $b = 0$.

تذكر:
$a^0 = 1$ حيث $a \neq 0$

36

5 $l \backsimeq 1\,\text{m}$

6 **(a)** $3^x = 3^5$; $x = 5$

(b) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{128}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{2}\right)^7$

$2x = 7, x = \frac{7}{2} = 3.5$

(c) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$; $x = -4$

7 **(a)** $5^{x^2-4} = 5^0$; $x^2 - 4 = 0$; $x = \pm 2$

(b) $x^2 + 5x + 4 = 0$, $x = -1$ أو $x = -4$

(c) $2^{x^2-4} = 2^5$; $x^2 = 9$, $x = \pm 3$

المرشد لحل المسائل

إجابة «مسألة إضافية»

طول قطر الأسطوانة: $d = \sqrt{x^2 + x^2}$

$= x\sqrt{2}$

طول نصف قطر الأسطوانة: $r = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$

حجم الأسطوانة: $V_1 = \pi\left(\dfrac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times x$

$V_1 = \dfrac{\pi\, x^3}{2}$

حجم المكعب: $V_2 = x^3$

$$\frac{\text{حجم الأسطوانة}}{\text{حجم المكعب}} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi}{2} \approx \frac{1.57}{1}$$

المرشد لحل المسائل

مكعب طول ضلعه x محاط بكرة كما في الصورة المقابلة.
أوجد نسبة حجم الكرة إلى حجم المكعب.

كيف نفكر؟

إستراتيجية الحل:
إيجاد حجم المكعب، إيجاد حجم الكرة، ثم إيجاد نسبة حجم الكرة إلى حجم المكعب.

الخطوة الأولى: حجم المكعب.
في البداية علينا إيجاد حجم المكعب بدلالة طول ضلعه x.
حجم المكعب $= x^3$

الخطوة الثانية: حجم الكرة.
إيجاد نصف قطر الكرة.
AB هو قطر للكرة.
AB هو قطر للمكعب.
AB هو أيضًا وتر المثلث ABC قائم الزاوية C حيث: $AC = g$، $CB = x$.

a لإيجاد AB سنبدأ بإيجاد AC.
ACD مثلث قائم الزاوية D.
$(AC)^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$ نظرية فيثاغورث
$\therefore\ AC = x\sqrt{2}$

b لإيجاد AB نستخدم المثلث ABC
ABC مثلث قائم الزاوية C
$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$ نظرية فيثاغورث
$(AB)^2 = 2x^2 + x^2 = 3x^2$
$\therefore\ AB = x\sqrt{3}$

c لإيجاد طول نصف القطر:
$R = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$

37

d إيجاد حجم الكرة:
حجم الكرة: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$

$= \dfrac{4}{3}(3.14)\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right)^3$

$= \dfrac{4(3.14)(3x^3\sqrt{3})}{(8)(3)}$

$\approx 1.57\sqrt{3}\,x^3$

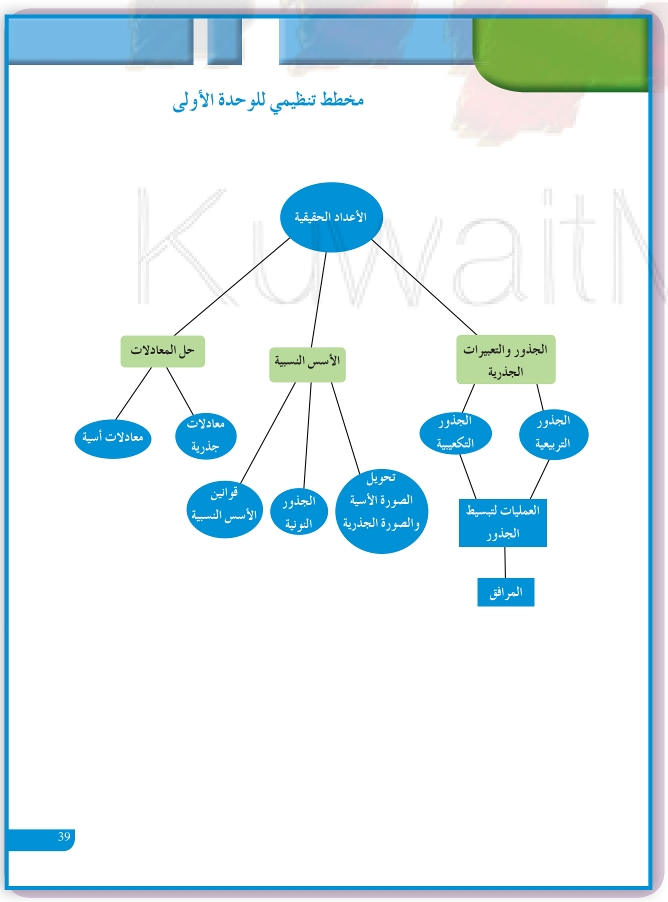
الخطوة الثالثة: احسب نسبة حجم الكرة إلى حجم المكعب:
نوجد $\dfrac{\text{حجم الكرة}}{\text{حجم المكعب}}$: $\dfrac{(1.57)\times x^3\sqrt{3}}{x^3} = \dfrac{2.72}{1}$

$\therefore$ حجم الكرة: حجم المكعب حوالي
2.72 : 1

مساعدة رياضية
حجم الأسطوانة $= \pi \times r^2 \times h$
حيث h = ارتفاع الأسطوانة.
r = طول نصف القطر للأسطوانة.

مسألة إضافية
مكعب طول ضلعه x محاط بأسطوانة كما في الصورة أدناه.
أوجد نسبة حجم الأسطوانة إلى حجم المكعب.

38



ملخص

- $\sqrt{x^2}=|x|\ ,\ (\sqrt{x})^2=x$
- $A^2=x,\ x\geqslant 0 \Longrightarrow A=\pm\sqrt{x}$
- $\forall x\in\mathbb{R}, (\sqrt[3]{x})^3=\sqrt[3]{x^3}=x$
- $\sqrt{x\cdot y}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y} \quad \forall x, y\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$
- $\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \quad \forall x, y\in\mathbb{R}^+$
- $\sqrt[3]{x\cdot y}=\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y} \quad \forall x, y\in\mathbb{R}$
- $\sqrt[3]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}} \quad \forall x\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R},\ y\neq 0$
- إذا كان a, b عددين نسبيين موجبين فإن:

  $\sqrt{a}$ هو مرافق $\sqrt{a}$

  $a+\sqrt{b}$ هو مرافق $a-\sqrt{b}$

  المجذور $\longleftarrow \sqrt[n]{x} \longrightarrow$ دليل الجذر
- إذا كان الجذر النوني لعدد x هو عددًا حقيقيًّا، m عددًا صحيحًا، n عددًا طبيعيًّا $n>1$ فإن:
- $x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$
- $x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m}$
- إذا كان n عددًا زوجيًّا
- إذا كان n عددًا فرديًّا

$$\sqrt[n]{x^n}=\begin{cases}|x|\\ x\end{cases}$$

- $(\forall m, n\in\mathbb{Z}\ ,\ \forall a, b\in\mathbb{R}\ ,\ a, b\neq 0)$

$$\Longrightarrow\begin{cases}(a\cdot b)^n=a^n.b^n\\ a^m\cdot a^n=a^{m+n}\\ (a^m)^n=a^{m\cdot n}\\ \left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}\\ b^{-n}=\frac{1}{b^n}\\ \frac{b^n}{b^m}=b^{n-m}\end{cases}$$

- إذا كان $\sqrt[n]{x}, \sqrt[n]{y}$ عددين حقيقيين فإن:
- $\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{x\cdot y}$
- $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}=\sqrt[n]{\frac{x}{y}} \quad y\neq 0$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}=\sqrt[n.m]{x}\ :\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}\in\mathbb{R}$
- المعادلة الجذرية معادلة أس المتغير فيها عدد نسبي أو يتضمن المجذور المتغير.
- إذا كان m عددًا زوجيًّا فإن: $(x^{\frac{m}{n}})^{\frac{n}{m}}=|x|$
- إذا كان m عددًا فرديًّا فإن: $(x^{\frac{m}{n}})^{\frac{n}{m}}=x$
- $m, n\in\mathbb{Z}, a\in\mathbb{R}, a\notin\{-1,0,1\}\ ,\ a^m=a^n\Longrightarrow m=n$

اختبار الوحدة الأولى

(1) بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

(a) $\sqrt{121x^{90}}$ **(b)** $\sqrt[3]{-64y^{81}}$ **(c)** $\sqrt[5]{32y^{25}}$

(d) $\sqrt{0.0081x^{60}}$ **(e)** $\sqrt{16x^{36}y^{96}}$ **(f)** $\sqrt{8}(\sqrt{24}+3\sqrt{8})$

(g) $2\sqrt{5x^3}\times 3\sqrt{28x^3y^2}$, ($x\geq 0$, حيث y عدد حقيقي) **(h)** $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$

(i) $\sqrt[3]{2x^2}\times\sqrt[3]{4x}$

(2) اكتب كل كسر مما يلي بحيث يكون مقامه عددًا نسبيًّا:

(a) $\frac{1}{(\sqrt{5}+2\sqrt{3})(\sqrt{5}-2\sqrt{3})}$ **(b)** $\frac{5}{4\sqrt{7}+5}$

(c) $\frac{2+\sqrt{10}}{2-3\sqrt{5}}$ **(d)** $\frac{-2+\sqrt{8}}{-3-\sqrt{2}}$

(3) بسّط كلًّا من التعابير التالية:

(a) $64^{\frac{2}{3}}$ **(b)** $25^{1.5}$ **(c)** $6^{\frac{1}{2}}\times 12^{\frac{1}{2}}$

(d) $81^{-0.25}$ **(e)** $\sqrt{8}\times\sqrt{2}-2\sqrt{75}+5\sqrt{12}$ **(f)** $\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$

(4) ليكن x العدد الحقيقي، $x=\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

(a) احسب x^2

(b) أثبت أن قيمة x تساوي -2

(5) اكتب كل تعبير مما يلي بالصورة الجذرية:

(a) $x^{\frac{5}{7}}$ **(b)** $y^{-\frac{2}{9}}, y\neq 0$ **(c)** $(\sqrt[5]{x})^2$

(d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{64}}$ **(e)** $2\sqrt{3}\times 5\sqrt[4]{3}$ **(f)** $3\sqrt{x}\times 2\sqrt[3]{x},\ x\geq 0$

(g) $2\sqrt[3]{3}\div\sqrt[4]{3}$ **(h)** $5\sqrt{10}\times 2\sqrt[4]{10}\times\sqrt[3]{10}$ **(i)** $\sqrt{2}\div 3\sqrt[6]{8}$

(6) بسّط كلًّا من التعبيرات التالية:

(a) $(8^{-3}y^{-6})^{-\frac{2}{3}}$ **(b)** $\left(\frac{16x^{14}}{81y^{18}}\right)^{\frac{1}{2}},\ y\neq 0$

(c) $((x^{-\frac{1}{2}})^2)^{\frac{1}{3}},\ x>0$ **(d)** $\frac{x^{\frac{1}{3}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{6}}\cdot y^{\frac{3}{4}}}, x>0,\ y>0$

(7) **تحليل الخطأ:** في سبيل تبسيط الكسر $\frac{1}{(1-\sqrt{2})^2}$ كتب أحد الطلاب ما يلي:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-\sqrt{2})^2}&=(1-\sqrt{2})^{-2}\\ &=1^{-2}-(\sqrt{2})^{-2}\\ &=1-\frac{1}{(\sqrt{2})^2}\\ &=1-\frac{1}{2}\\ &=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

ما الخطأ الذي ارتكبه الطالب؟

(8) حل كلًّا من المعادلات التالية:

(a) $5\sqrt{x}+7=8$ **(b)** $\sqrt{x+2}=x$ **(c)** $\sqrt{4x-23}-3=2$

(d) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+11}=0$ **(e)** $\sqrt{x}-\sqrt{x-5}=2$ (**مساعدة:** تربيع طرفي المعادلة مرتين متتاليتين)

(f) $\sqrt{3x-9}=\sqrt{2x+4}$

(9) **الفيزياء:** السرعة V لجسم ما أسقط عن سطح مبنى عال معطاة بالقانون: $V=8\sqrt{m}$، حيث m هي ارتفاع المبنى. أوجد الارتفاع m بدلالة السرعة V

(10) إذا كان $x=\frac{2}{\sqrt{3}-1}$، فأوجد قيمة $x^2(3-x)$

(11) حل كلًّا من المعادلات التالية:

(a) $2^{x^2}=512$ **(b)** $4^{x^2-x}=16$

تمارين إثرائية

(1) بسّط كلًّا مما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة:

(a) $\sqrt[3]{-343}$ **(b)** $\sqrt[4]{810\,000}$ **(c)** $\left(\sqrt[4]{\sqrt{3}}\right)^8$

(d) $-\sqrt[4]{6\,561}$ **(e)** $\sqrt[5]{-0.00001}$ **(f)** $\sqrt{9(\sqrt{3}-2)^2}-\sqrt{4(1-\sqrt{3})^2}$

(g) $\dfrac{27^{-2}\times 45^{-3}}{36^{-5}\times 45^{4}}$ **(h)** $\dfrac{12^{3}\times 18^{-2}}{6^{-2}\times 3^{-5}}$

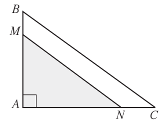
(2) أوجد ناتج ما يلي:

(a) $\sqrt[4]{(\sqrt[3]{4}-4)^4}-\sqrt[3]{-8(\sqrt[3]{2}+1)^6}$ **(b)** $\left(\sqrt[5]{\sqrt{32}}+3\right)\left(3-\sqrt[6]{8}\right)$ **(c)** $\dfrac{\sqrt[3]{13^2}\times\sqrt{13}}{\sqrt[3]{13^{\frac{1}{2}}}}$

(3) بسّط كلًّا من التعابير التالية:

(a) $\left(\dfrac{8x^9y^3}{27x^2y^{12}}\right)^{\frac{2}{3}}$, $x\neq 0,\ y\neq 0$ **(b)** $\left(x^{\frac{-3}{8}}\bullet y^{\frac{1}{4}}\right)^{16}$, $x>0,\ y\geq 0$

(c) $\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}-\sqrt[6]{x\bullet y}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{6}}\bullet y^{\frac{1}{6}}\right)$ **(d)** $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}\times\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}}}}$, $x>0$



(4) ABC مثلث قائم الزاوية A

$AN = 2+\sqrt{3}$ $AM = 2\sqrt{3}-1$

$\overleftrightarrow{MN} \,//\, \overleftrightarrow{BC}$ $MB = 1$

أوجد: **(b)** MN **(a)** CN

(5) اكتب كل كسر مما يلي بحيث يكون مقامه عددًا نسبيًّا دون استخدام الآلة الحاسبة:

(a) $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ **(b)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$ **(c)** $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x^{\frac{1}{2}}-1}$, $x\in\mathbb{Z}^+$, $x\neq 1$

(6) أوجد قيمة x ليكون العدد $\sqrt{x}\times\sqrt{-x}$ عددًا حقيقيًّا.

(7) **تحليل الخطأ:** أوجد الخطأ $\sqrt{16}=\sqrt{(-2)\times(-8)}=\sqrt{-2}\times\sqrt{-8}$

(8) ما قيمة x، إذا $32^{0.8}\times x = 1$؟

(9) بسّط كلًّا مما يلي:

(a) $\left(\dfrac{x^{a^2}}{x^{b^2}}\right)^{\frac{1}{a-b}}$ **(b)** $\dfrac{2\times 3^{x+2}-8\times 3^x}{3^{x+1}+2\times 3^x}$ **(c)** $\left(x^{\frac{1}{2}}\times y^{-\frac{1}{3}}\right)$, $x\geq 0$, $y\neq 0$

(10) حل كلًّا من المعادلات التالية:

(a) $(0.01)^x = 0.000001$ **(b)** $2^{\frac{1}{2}(x+3)}=\dfrac{2^3}{\sqrt{2}}$ **(c)** $(3^{2x}-9)(2^x-16)=0$

(d) $(3^x)^2-10\times 3^x+9=0$ (**مساعدة:** ليكن $3^x = y$) **(e)** $4^{x-1}-9\times 2^{x-1}+8=0$

19