الوحدة الرابعة: وصف البيانات Describing Data

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

٤-١ الوسيط والربيع الأدنى والربيع الأعلى ومخطط الصندوق ذو العارضتين

- الوسيط والربيع الأدنى والربيع الأعلى من جدول تكراري.
- الوسيط، الربيع الأدنى والربيع الأعلى لمجموعة من البيانات موزعة على فئات.

٤-٢ الالتواء

- الالتواء وعلاقته بمقاييس النزعة المركزية.
- العلاقة بين الالتواء ومخطط الصندوق ذي العارضتين.

٤-٣ مقاييس التشتت وتطبيقاتها

- مقاييس التشتت.
- التوزيع الطبيعي.
- القيمة المعيارية.

٤-٤ تطبيقات إحصائية

- مقاييس النزعة المركزية.
- الوسيط.

KuwaitMath.com

مقدمة الوحدة

الوحدة الرابعة

وصف البيانات

Describing Data

مشروع الوحدة: الأجهزة الخلوية.

١ مقدمة المشروع: أصبحت الأجهزة الخلوية تشكل عنصرًا هامًا في استخداماتنا اليومية لما توفّره من خدمات سريعة نحصل عليها في أي زمن وفي أي مكان نتواجد فيه.

٢ الهدف: معرفة المدة المستغرقة في استخدام الأجهزة الخلوية لبعض فئات المجتمع.

٣ اللوازم: آلة حاسبة.

٤ أسئلة حول التطبيق:

١ كيف ستحدد الفئات التي سوف يشملها الاستطلاع؟

ب ما هي فئات المجتمع المستهدفة؟ (أطباء، محامون، مهندسون، معلمون، رجال أعمال، ضباط، طلاب، ....)

ج اختر عينات متساوية العدد من كل فئة.

د احسب المتوسط الحسابي لكل فئة بالساعات.

أكمل الجدول التالي لإيجاد مدة استخدام الجهاز في يوم واحد:

الفئات المستهدفة	أطباء	محامون	مهندسون	معلمون	رجال أعمال	ضباط	طلاب
التكرار							
متوسط المدة (ساعات)							

استخدم هذا الجدول لإيجاد المتوسط الحسابي للمدة المستغرقة لفرد واحد.

هـ التقرير: اكتب تقريرًا مفصلًا تبيّن فيه النتائج التي حصلت عليها وذلك من خلال الجدول.

اعرض اقتراحاتك حول الأرقام التي حصلت عليها.

دروس الوحدة

٤-١ الوسيط والربيع الأدنى والربيع الأعلى ومخطط الصندوق ذو العارضتين	٤-٢ الالتواء	٤-٣ مقاييس التشتت وتطبيقاتها	٤-٤ تطبيقات إحصائية
(٤-١-أ) الوسيط والربيع الأدنى والربيع الأعلى من جدول تكراري	(٤-٢-أ) الالتواء وعلاقته بمقاييس النزعة المركزية	(٤-٣-أ) مقاييس التشتت	(٤-٤-أ) مقاييس النزعة المركزية
(٤-١-ب) الوسيط، الربيع الأدنى والربيع الأعلى لمجموعة من البيانات موزعة على فئات	(٤-٢-ب) العلاقة بين الالتواء ومخطط الصندوق ذي العارضتين	(٤-٣-ب) التوزيع الطبيعي	(٤-٤-ب) الوسيط
		(٤-٣-جـ) القيمة المعيارية	

١٠

أصبح للإحصاء دور يتعاظم يومًا بعد يوم ليطال نواحي الحياة كافة وفي كل المراحل، حتى أصبح يتناول مجالات الزراعة وعلم الأحياء والأعمال والاقتصاد والاتصالات والتربية والتقنيات والطب والعلوم السياسية والكيمياء والفيزياء وعلم النفس وعلم الاجتماع.

كما أن شركات الصناعة والتسويق وضعت في أول اهتماماتها ضرورة معرفة حاجات المستهلك ورغباته وآرائه واقتراحاته فنظمت إحصاءات تتناول هذه النواحي، كما أنها ذهبت إلى حدّ دراسة نفسية المستهلك وسلوكه ضمن الظروف التي تحيط به لجهة العمر والدخل والجنس.

من ناحية أخرى يُستخدم الإحصاء في تطوير عملية اتخاذ القرارات من قبل القيمين على المؤسسات والشركات.

ومن هنا أصبح ضروريًّا تنمية مهارات المدراء وتزويدهم باتجاهات وممارسات إدارية حديثة تعتمد بفاعلية على مهارات وأساليب كمية قابلة للقياس ومدعمة بحقائق وقوانين تستفيد من قوة المعطيات الإحصائية والرياضية للتحليل والتفسير من دون تحيّز شخصي في التوصل إلى القرارات الصائبة.

لقد تنبهت معظم الدول إلى المنهج الإحصائي كونه أداة للتخطيط له أهمية بالغة في المجالات كافة حيث تأثر نمو اقتصاد بلدان كثيرة بدراسة البيانات الإحصائية وتحليل نتائجها وتفسيرها مما دفع بهذه الدول إلى تأليف مجموعة من الأخصائيين في علم الإحصاء تكون قادرة على تحليل البيانات وتفسيرها وتوقع نتائج سليمة مبنية على أسس واضحة ومتينة.

من المهم الإشارة إلى أن علم الإحصاء يوفر فرصة مهمة لوصف البيانات بطريقة علمية وموضوعية، كما أن استخدام البرامج الإحصائية الإلكترونية ساهم بفاعلية كبيرة في تطور نتائج البيانات وإيجاد مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت وكيفية تطبيقها واستخداماتها.

KuwaitMath.com

مشروع الوحدة

من المتعارف عليه أن الأجهزة الخليوية أصبحت ضرورة لا يمكن الاستغناء عنها لدى الأفراد كافة، وذلك نتيجة للخدمات التي توفرها في أي زمان ومكان. وفي الحقبة الحالية مع صعود نجم الهاتف الذكي (Smart Phone) لا بد من الإشارة إلى الخدمات التالية التي يمكن تنفيذها:

- تنظيم قائمة بالمهام والمواعيد.
- استخدام التطبيقات وآلات التصوير.
- استخدام الآلة الحاسبة.
- استقبال وإرسال البريد الإلكتروني.
- الألعاب الترفيهية في أوقات الفراغ.
- الإلمام بالمعلومات المهمة والمفيدة إخبارية كانت أم علمية أم اقتصادية أم مالية.
- استخدام أجهزة تحديد المواقع (GPS).

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

تتنوّع الإجابات. تابع عمل الطلاب، ساعدهم وأرشدهم لإتمام فقرات المشروع كافة.

التقرير

يجب أن يتضمن التقرير إجابات عن الأسئلة كافة وأن يكون الجدول معبرًا عن البيانات وأن تكون الحسابات دقيقة والاقتراحات مناسبة. أعد النظر ببعض النتائج إذا كان ذلك ضروريًّا.

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعرّف الحصر الشامل.
- تعرّف المعاينة.
- تعرّف تصنيف البيانات.
- تعرّف طرق جمع البيانات وتنظيمها.
- تعرّف أنواع العينات العشوائية.
- تعرّف التكرار النسبي والنسبة المئوية للتكرار.
- تعرّف التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل.
- تعرّف المنحنيات التكرارية المتجمعة.
- تعرّف التمثيل البياني بالقطاعات الدائرية.
- تعرّف المدرج والمنحنى والمضلع التكراري والخط المنكسر.

ماذا سوف تتعلم؟

- إيجاد الربيع الأدنى والربيع الأعلى من قيم البيانات.
- استخدام مخطط الصندوق ذي العارضتين لتمثيل البيانات.
- تمييز أنواع الالتواء.
- الربط بين الالتواء ومخطط الصندوق ومقاييس النزعة المركزية.
- إيجاد المدى ونصف المدى الربيعي والتباين والانحراف المعياري.
- استخدام القاعدة التجريبية والقيمة المعيارية في اتخاذ قرارات مناسبة.
- استخدام الحاسوب لإيجاد مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت.

المصطلحات الأساسية

الربيع الأدنى – الربيع الأعلى – مخطط الصندوق ذي العارضتين – الالتواء – التماثل – الالتواء الموجب – الالتواء السالب – نصف المدى الربيعي – التباين – الانحراف المعياري – القاعدة التجريبية – القيمة المعيارية.

أضف إلى معلوماتك

في عصر العولمة الذي نعيش فيه تحت راية الإنجازات الإلكترونية يتصدر الهاتف المحمول قائمة هذه التقنيات، حيث أصبح من الأساسيات في حياتنا اليومية وذلك في مجال الاتصالات، وهو يعتمد على الاتصال اللاسلكي بواسطة شبكة من أبراج البث موزّعة ضمن مساحة محددة. ولقد أصبحت أجهزة الهاتف المحمول أكثر من مجرد وسيلة للاتصال الصوتي بل هي تستخدم أيضًا كأجهزة حاسوب وآلات تصوير وجهاز إرسال للرسائل النصية واستقبالها.

يعتبر الأمريكي مارتن كوبر الذي يعمل كباحث في شركة موتورولا للاتصالات صاحب أول إنجاز في هذا المجال، إذ أجرى أول مكالمة من هاتف محمول يوم ٣ إبريل من عام ١٩٧٣.

ولكن إلى جانب الخدمات المهمة التي يقدمها الهاتف المحمول لا بد من الإشارة إلى أن عدة دراسات أجريت على الحقل المغناطيسي الذي يولده هذا الجهاز أظهرت أن وضع الهاتف المحمول إلى جانب القلب قد يلحق به ضررًا.

١١

سلّم التقييم

٤	خطوات تنفيذ المشروع كاملة – الحسابات دقيقة – الجدول صحيح بكامله – التقرير مفصل والاقتراحات مناسبة.
٣	معظم خطوات تنفيذ المشروع موجودة – بعض الأخطاء في الحسابات – الجدول بحاجة إلى بعض المعلومات – معظم التقرير مفصل والاقتراحات مناسبة.
٢	بعض خطوات تنفيذ المشروع متوفرة – أخطاء كثيرة في الحسابات – نواقص كثيرة على الجدول – التقرير ناقص وغير واضح.
١	معظم عناصر المشروع ناقصة وبحاجة إلى إعادة النظر فيها.

KuwaitMath.com

٤-١: الوسيط والربيع الأدنى والربيع الأعلى ومخطط الصندوق ذو العارضتين

١ الأهداف

- يتعرف الوسيط ($م_٢$).
- يتعرف الربيع الأدنى ($م_١$).
- يتعرف الربيع الأعلى ($م_٣$).
- يمثّل البيانات بصندوق ذي العارضتين.
- يجري تطبيقات على بيانات موزعة فئات.

٢ المفردات الأساسية والمفاهيم الجديدة

وسيط – ربيع أدنى – ربيع أعلى – صندوق ذو العارضتين.

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – ورق رسم بياني – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

٤ التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(أ) لتكن البيانات: ٧، ١٣، ١٠، ٨، ١٠، ١٢، ٩، ١١.
رتِّب قيم هذه البيانات تصاعديًّا، ثم أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال. ماذا تلاحظ؟ اشرح.

(ب) لتكن البيانات: ١٢، ١٤، ١٥، ١٦، ١٨، ١٣، ١٠، ١١، ١٢، ١٥، ١٦، ١٧، ١٥، ١٤، ١٦، ١٢، ١٠، ١٣، ١١، ١٩، ١٧، ١٥، ١٢، ٩، ١٤.
كوّن جدولًا تبيّن فيه فئات حيث طول كل فئة ٢ وعلامات التكرار والتكرار.

١-٤

الوسيط والربيع الأدنى والربيع الأعلى ومخطط الصندوق ذو العارضتين

Median, Lower and Upper Quartile–Box and Whisker Plot

عمل تعاوني

تمثّل البيانات التالية رواتب شهرية لبعض العاملين في إحدى المؤسسات بالدينار الكويتي:
٧٠٠، ٧٥٠، ١١٥٠، ٧٠٠، ١١٠٠، ٩٥٠، ٨٠٠، ٨٠٠، ٧٥٠، ١٠٠٠، ٧٥٠، ٨٠٠، ٨٥٠، ٩٠٠، ٧٠٠، ٧٠٠، ١٠٥٠، ٧٥٠، ٨٥٠، ٩٥٠، ٧٠٠، ٧٥٠، ٨٠٠، ٨٠٠، ٩٠٠، ٨٥٠، ٧٠٠، ٧٥٠، ٧٠٠، ٧٥٠، ٨٥٠، ٧٠٠، ٧٥٠، ٧٥٠، ٨٥٠، ٧٥٠، ٧٠٠، ٧٠٠.

١) أوجد الوسيط ($م_٢$) لهذه الرواتب بعد ترتيبها تصاعديًّا.
(لاحظ أنّ الوسيط يقسم هذه البيانات إلى مجموعتين متساويتين في العدد).
ب) أوجد وسيط المجموعة الأولى أي الربيع الأدنى ($م_١$).
ج) أوجد وسيط المجموعة الثانية أي الربيع الأعلى ($م_٣$).

سوف تتعلم

- الوسيط ($م_٢$).
- الربيع الأدنى ($م_١$).
- الربيع الأعلى ($م_٣$).
- الصندوق ذو العارضتين.
- تطبيقات على بيانات موزعة فئات.

(٤-١-أ) الوسيط والربيع الأدنى والربيع الأعلى من جدول تكراري

Median, Lower and Upper Quartile from Frequency Table

• **الوسيط**

الوسيط لعدد ن من قيم البيانات المرتبة تصاعديًّا هو القيمة التي ترتيبها $\frac{ن+١}{٢}$ من هذه القيم إذا كان العدد ن فرديًّا. والمتوسط الحسابي للقيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{ن}{٢}$، $\frac{ن}{٢}+١$ من هذه القيم إذا كان العدد ن زوجيًّا.

يقسم الوسيط مجموعة القيم في البيانات إلى مجموعتين متساويتين من حيث عدد القيم ويرمز له بالرمز $م_٢$.

• **الربيع الأدنى والربيع الأعلى لمجموعة من قيم البيانات مرتبة تصاعديًّا.**

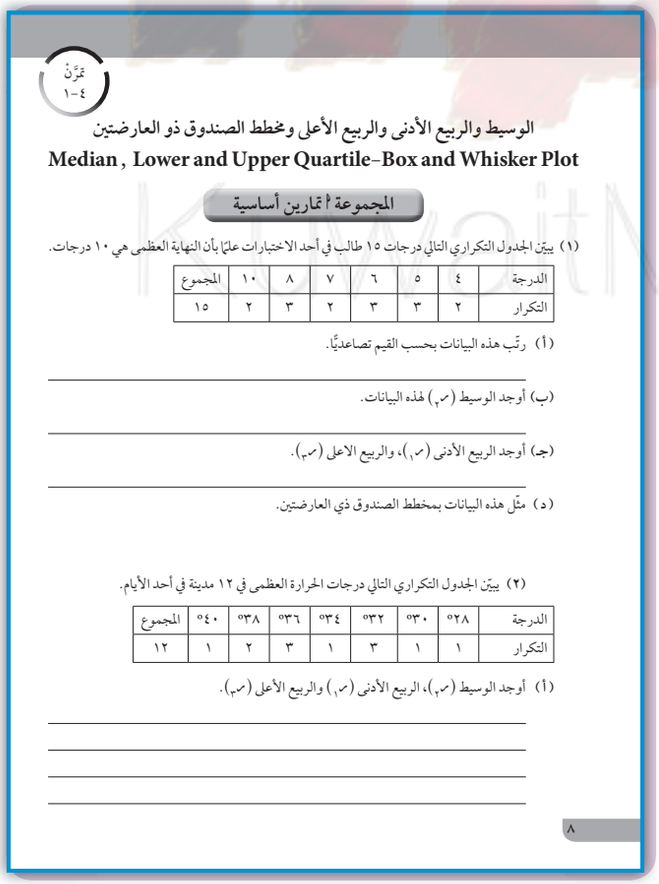
– الربيع الأدنى هو وسيط النصف الأدنى من قيم البيانات ويرمز له بالرمز $م_١$.

– الربيع الأعلى هو وسيط النصف الأعلى من قيم البيانات ويرمز له بالرمز $م_٣$.

• **مخطط الصندوق ذي العارضتين**

يبين الشكل التالي مخطط الصندوق ذي العارضتين، ممثل عليه مجمل الأعداد الخمسة وهي:
القيمة الصغرى، الربيع الأدنى، الوسيط، الربيع الأعلى، القيمة العظمى

١٢



تمرّن ١-٤

الوسيط والربيع الأدنى والربيع الأعلى ومخطط الصندوق ذو العارضتين

Median , Lower and Upper Quartile–Box and Whisker Plot

المجموعة ١ تمارين أساسية

(١) يبيّن الجدول التكراري التالي درجات ١٥ طالب في أحد الاختبارات علمًا بأن النهاية العظمى هي ١٠ درجات.

الدرجة	٤	٥	٦	٧	٨	١٠	المجموع
التكرار	٢	٣	٣	٢	٣	٢	١٥

(أ) رتّب هذه البيانات بحسب القيم تصاعديًّا.

(ب) أوجد الوسيط ($م_٢$) لهذه البيانات.

(جـ) أوجد الربيع الأدنى ($م_١$)، والربيع الاعلى ($م_٣$).

(د) مثّل هذه البيانات بمخطط الصندوق ذي العارضتين.

(٢) يبيّن الجدول التكراري التالي درجات الحرارة العظمى في ١٢ مدينة في أحد الأيام.

الدرجة	٥٢٨	٥٣٠	٥٣٢	٥٣٤	٥٣٦	٥٣٨	٥٤٠	المجموع
التكرار	١	١	٣	١	٣	٢	١	١٢

(أ) أوجد الوسيط ($م_٢$)، الربيع الأدنى ($م_١$) والربيع الأعلى ($م_٣$).

٨

KuwaitMath.com

٥ التدريس

يتابع الطالب في هذا الدرس بناء مفاهيم ومهارات في الإحصاء فيتعرف الربيع الأدنى والأعلى لقيم البيانات ويمثلها على الصندوق ذي العارضتين ليحللها ويفسرها.

في المثالين (١)، (٢)

يقدم هذان المثالان عرضًا للخطوات المطلوبة كي يتمكن الطالب من تمثيل البيانات على مخطط الصندوق ذي العارضتين. حيث يجب إيجاد الوسيط لهذه القيم، ثم الربيع الأدنى والربيع الأعلى. وبعد ذلك تحديد القيم الخمس وفي الختام يرسم مخطط الصندوق.

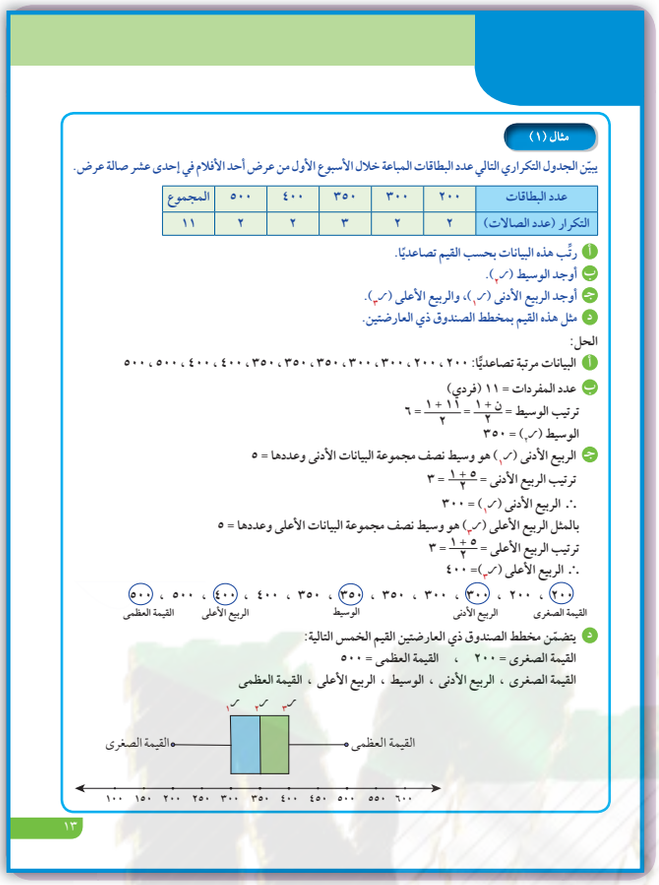
أخبر الطلاب أن ترتيب قيم البيانات تصاعديًّا هو خطوة مهمة جدًّا للانطلاق إلى الحلول. ناقش مع الطلاب مدلول المساحات داخل الصندوق والتي يفصلها الوسيط.

في المثال (٣)

لهذا المثال أهمية كبرى لأنه يساعد الطالب على احتساب قيم الوسيط في حالة توزيع البيانات على فئات متساوية في الطول. ساعد الطلاب على كيفية تحديد الفئة التي ينتمي إليها الوسيط ومن ثم كيفية تطبيق القوانين لإيجاد هذه المقاييس. أعط أمثلة بديلة للإيضاح إذا لزم الأمر.

في المثال (٤)

يبيّن هذا المثال كيفية صنع جدول التكرار المتجمع الصاعد وكيفية استخدامه لإيجاد الربيع الأدنى والربيع الأعلى.



مثال (١)

يبيّن الجدول التكراري التالي عدد البطاقات المباعة خلال الأسبوع الأول من عرض أحد الأفلام في إحدى عشر صالة عرض.

عدد البطاقات	٢٠٠	٣٠٠	٣٥٠	٤٠٠	٥٠٠	المجموع
التكرار (عدد الصالات)	٢	٢	٣	٢	٢	١١

أ) رتّب هذه البيانات بحسب القيم تصاعديًا.
ب) أوجد الوسيط ($س_٢$).
ج) أوجد الربيع الأدنى ($س_١$)، والربيع الأعلى ($س_٣$).
د) مثل هذه القيم بمخطط الصندوق ذي العارضتين.

الحل:

أ) البيانات مرتبة تصاعديًا: ٢٠٠، ٢٠٠، ٣٠٠، ٣٠٠، ٣٥٠، ٣٥٠، ٣٥٠، ٤٠٠، ٤٠٠، ٥٠٠، ٥٠٠

ب) عدد المفردات = ١١ (فردي)

ترتيب الوسيط = $\frac{ن+١}{٢} = \frac{١+١١}{٢} = ٦$

الوسيط ($س_٢$) = ٣٥٠

ج) الربيع الأدنى ($س_١$) هو وسيط نصف مجموعة البيانات الأدنى وعددها = ٥

ترتيب الربيع الأدنى = $\frac{٥+١}{٢} = ٣$

∴ الربيع الأدنى ($س_١$) = ٣٠٠

بالمثل الربيع الأعلى ($س_٣$) هو وسيط نصف مجموعة البيانات الأعلى وعددها = ٥

ترتيب الربيع الأعلى = $\frac{٥+١}{٢} = ٣$

∴ الربيع الأعلى ($س_٣$) = ٤٠٠

٢٠٠ ، ٢٠٠ ، ٣٠٠ ، ٣٠٠ ، ٣٥٠ ، ٣٥٠ ، ٣٥٠ ، ٤٠٠ ، ٤٠٠ ، ٥٠٠ ، ٥٠٠

القيمة الصغرى — الربيع الأدنى — الوسيط — الربيع الأعلى — القيمة العظمى

د) يتضمن مخطط الصندوق ذي العارضتين القيم الخمس التالية:

القيمة الصغرى = ٢٠٠ ، القيمة العظمى = ٥٠٠

القيمة الصغرى ، الربيع الأدنى ، الوسيط ، الربيع الأعلى ، القيمة العظمى

١٣

حاول أن تحل

أ) يمثّل الجدول التكراري التالي معدل أجر الموظفين بالدينار الكويتي مقابل كل ساعة عمل في بعض الشركات.

معدل الأجر	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	المجموع
التكرار	٢	٢	٢	٣	٢	٢	١٣

أجب عن الأسئلة الواردة في مثال (١).

مثال (٢)

يمثل الجدول التكراري التالي الارتفاع بالأمتار لبعض ألعاب القطار في عدة مدن من العالم

الارتفاع بالمتر	١٠	١٢	١٣	١٨	٢١	٢٣	٢٤	٢٥	٣٠	المجموع
التكرار	١	٣	١	٢	٢	٣	٢	٢	٢	١٨

أ) رتّب هذه البيانات بحسب القيم تصاعديًا.
ب) أوجد الوسيط لهذه البيانات ($س_٢$).
ج) أوجد الربيع الأدنى ($س_١$) والربيع الأعلى ($س_٣$).
د) مثّل هذه البيانات بمخطط الصندوق ذي العارضتين.

الحل:

أ) البيانات مرتبة تصاعديًا:

١٠، ١٢، ١٢، ١٢، ١٣، ١٨، ١٨، ٢١، ٢١، ٢٣، ٢٣، ٢٣، ٢٤، ٢٤، ٢٥، ٢٥، ٣٠، ٣٠

ب) عدد القيم = ١٨ (زوجي)

الوسيط هو المتوسط الحسابي للقيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{ن}{٢} = \frac{١٨}{٢} = ٩$ ، $\frac{ن}{٢} + ١ = ٩ + ١ = ١٠$

الوسيط ($س_٢$) = $\frac{٢٣ + ٢١}{٢} = ٢٢$

ج) الربيع الأدنى ($س_١$) هو وسيط نصف مجموعة البيانات الأدنى وعددها = ٩ (فردي)

ترتيب الربيع الأدنى: $\frac{٩ + ١}{٢} = ٥$

١٤

٦ الربط

جميع الأمثلة توفر الربط بين المفاهيم والمهارات ومواقف حياتية.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

يخطئ الطلاب في تحديد الفئات الصحيحة لكل من الوسيط والربيع الأدنى والربيع الأعلى. أرشدهم إلى استخدام التكرار المتجمع الصاعد، ومن خلاله إيجاد كل فئة.

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتتأكد من إمكانيتهم على فهم ما ورد من مفاهيم ومهارات في هذا الدرس.

اختبار سريع

١ البيانات أدناه هي الأوزان بالكيلوجرام لعدد من طلاب الصف الحادي عشر.

٦٣، ٦٤، ٦٤، ٦٦، ٦٨، ٦٩، ٧٠، ٧٠، ٧٢،
٧٣، ٧٤، ٧٤، ٧٦، ٧٦، ٧٦، ٧٧

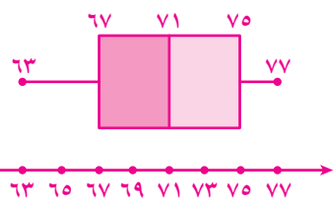
(أ) أوجد الوسيط، الربيع الأدنى، الربيع الأعلى.

الوسيط $(م_٢) = \frac{٧٠ + ٧٢}{٢} = ٧١$

الربيع الأدنى $(م_١) = \frac{٦٦ + ٦٨}{٢} = ٦٧$

الربيع الأعلى $(م_٣) = \frac{٧٤ + ٧٦}{٢} = ٧٥$

(ب) مثّل هذه البيانات على مخطط الصندوق ذي العارضتين.



∴ الربيع الأدنى $(م_١) = ١٣$

بالمثل الربيع الأعلى $(م_٣)$ هو وسيط نصف مجموعة البيانات الأعلى وعددها = ٩ (فردي).

ترتيب الربيع الأعلى: $\frac{٩ + ١}{٢} = ٥$

∴ الربيع الأعلى $(م_٣) = ٢٤$

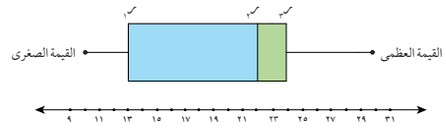
٥ يتضمن مخطط الصندوق ذي العارضتين القيم الخمس التالية:

القيمة الصغرى، الربيع الأدنى، الوسيط، الربيع الأعلى، القيمة العظمى.

القيمة العظمى = ٣٠، القيمة الصغرى = ١٠.

١٠، ١٢، ١٢، ١٢، ١٣، ١٨، ١٨، ٢١، ٢١، ٢٢، ٢٣، ٢٣، ٢٤، ٢٤، ٢٥، ٢٥، ٣٠، ٣٠

القيمة الصغرى — الربيع الأدنى — الوسيط — الربيع الأعلى — القيمة العظمى



حاول أن تحل

٢ يمثل الجدول التكراري التالي مبيعات أحد المتاجر في أحد الأيام لأنواع مختلفة من ساعات اليد بالدينار الكويتي.

سعر الساعة	٥٠	٦٥	٧١	٩٥	١٢٠	المجموع
التكرار	٤	٢	٣	٥	٢	١٦

أجب عن الأسئلة الواردة في المثال (٢).

(٤–١ ب) الوسيط والربيع الأدنى والربيع الأعلى لمجموعة من البيانات موزعة على فئات

Median, Lower and Upper Quartile for Interval Data

تعلّمنا كيفية إيجاد الوسيط $(م_٢)$ والربيع الأدنى $(م_١)$ والربيع الأعلى $(م_٣)$ من جدول تكراري حيث القيم في البيانات متقطعة.

سوف نتعلّم الآن كيفية إيجاد هذه المقاييس من جدول تكراري ذو فئات حيث القيم في البيانات مستمرّة.

يمكن إيجاد هذه المقاييس الثلاثة من توزيع تكراري ذو فئات باستخدام جدول التكرار المتجمع الصاعد أو جدول التكرار المتجمع النازل (سوف تقتصر دراستنا على جدول التكرار المتجمع الصاعد).

١٥

(ب) مثّل البيانات السابقة بمخطط الصندوق ذي العارضتين.

(٣) من الجدول التكراري التالي:

الفئة	١٠–	٢٠–	٣٠–	٤٠–	٥٠–	المجموع
التكرار	٤	٨	٩	٧	٢	٣٠

(أ) كوّن جدول التكرار المتجمع الصاعد.

(ب) أوجد الوسيط حسابيًا.

(٤) يبيّن الجدول أطوال ٢٤ طالب (بالسنتيمتر).

الطول	١٦٠–	١٦٥–	١٧٠–	١٧٥–	١٨٠–	١٨٥–	المجموع
التكرار	٤	١	٤	٦	٧	٢	٢٤

(أ) كوّن جدول التكرار المتجمع الصاعد.

٩

Kuwait Math Portal

٢ يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لقيم بيانات بحسب الفئات.

الفئة	-٥	-٨	-١١	-١٤	-١٧	-٢٠
التكرار	٤	٧	٦	٥	٣	٢

(أ) أكمل الجدول بإضافة صف تبيّن فيه التكرار المتجمع الصاعد.

الفئة	التكرار	أقل من الحد الأعلى للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
-٥	٤	أقل من ٨	٤
-٨	٧	أقل من ١١	١١
-١١	٦	أقل من ١٤	١٧
-١٤	٥	أقل من ١٧	٢٢
-١٧	٣	أقل من ٢٠	٢٥
-٢٠	٢	أقل من ٢٣	٢٧

(ب) أوجد الوسيط، الربيع الأدنى، الربيع الأعلى لقيم هذه البيانات.

عدد القيم في البيانات: ن = ٢٧

$\because \frac{ن}{٢} = \frac{٢٧}{٢} = ١٣,٥$

∴ فئة الوسيط هي: [١١-١٤)

$\text{الوسيط } (م_٢) = ١١ + \frac{١٣,٥ - ١١}{٦} \times ٣$

$= ١٢,٢٥$

$\because \frac{ن}{٤} = \frac{٢٧}{٤} = ٦,٧٥$

∴ فئة الربيع الأدنى هي: [٨-١١)

$\text{الربيع الأدنى } (م_١) = ٨ + \frac{٦,٧٥ - ٤}{٧} \times ٣$

$\approx ٩,١٨$

$\because \frac{٣ن}{٤} = \frac{٨١}{٤} = ٢٠,٢٥$

∴ فئة الربيع الأعلى هي: [١٤-١٧)

$\text{الربيع الأعلى } (م_٣) = ١٤ + \frac{٢٠,٢٥ - ١٧}{٥} \times ٣$

$= ١٥,٩٥$

حساب الوسيط للفئات:

$\text{الوسيط } (م_٢) = \text{الحد الأدنى لفئة الوسيط} + \frac{\frac{ن}{٢} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة الوسيط}}{\text{التكرار الأصلي لفئة الوسيط}} \times \text{طول الفئة}$

$\text{الربيع الأدنى } (م_١) = \text{الحد الأدنى لفئة الربيع الأدنى} + \frac{\frac{ن}{٤} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة الربيع الأدنى}}{\text{التكرار الأصلي لفئة الربيع الأدنى}} \times \text{طول الفئة}$

$\text{الربيع الأعلى } (م_٣) = \text{الحد الأدنى لفئة الربيع الأعلى} + \frac{\frac{٣ن}{٤} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة الربيع الأعلى}}{\text{التكرار الأصلي لفئة الربيع الأعلى}} \times \text{طول الفئة}$

حيث ن مجموع التكرارات

مثال (٣)

يمثل الجدول التالي أعمار سكان أحد الأبنية بالسنوات:

الفئة	-٠	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	المجموع
التكرار	٣	٣	٥	٢	٥	٢	٢٠

١ كوّن جدول التكرار المتجمع الصاعد.

ب أوجد الوسيط حسابيًا.

الحل:

الفئة	التكرار	أقل من الحد الأعلى للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
-٠	٣	أقل من ١٠	٣
-١٠	٣	أقل من ٢٠	٦
-٢٠	٥	أقل من ٣٠	١١
-٣٠	٢	أقل من ٤٠	١٣
-٤٠	٥	أقل من ٥٠	١٨
-٥٠	٢	أقل من ٦٠	٢٠
المجموع	٢٠		

١٦

(ب) أوجد الربيع الأدنى حسابيًا.

(٥) من الجدول التكراري التالي:

الفئة	-٦	-٨	-١٠	-١٢	-١٤	-١٦	المجموع
التكرار	٤	٥	٧	٤	٣	٥	٢٨

(أ) كوّن جدول التكرار المتجمع الصاعد.

(ب) أوجد الربيع الأعلى حسابيًا.

١٠

KuwaitMath.com

٩ إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

(أ) عدد القيم في البيانات ٣٩ فيكون ترتيب الوسيط ٢٠

أي أن الوسيط $(\text{ر}_٢) = ٧٥٠$

(ب) الربيع الأدنى $(\text{ر}_١)$ ترتيبه ١٠،

أي أن: $\text{ر}_١ = ٧٠٠$

(جـ) الربيع الأعلى $(\text{ر}_٣)$ ترتيبه ٣٠،

أي أن: $\text{ر}_٣ = ٨٥٠$

«حاول أن تحل»

١ (أ) ٥، ٥، ٦، ٦، ٧، ٧، ٨، ٨، ٨، ٩، ٩، ١٠، ١٠

(ب) عدد القيم = ١٣ (فردي)

ترتيب الوسيط $= \frac{ن + ١}{٢} = \frac{١٣ + ١}{٢} = ٧$

∴ الوسيط $(\text{ر}_٢) = ٨$

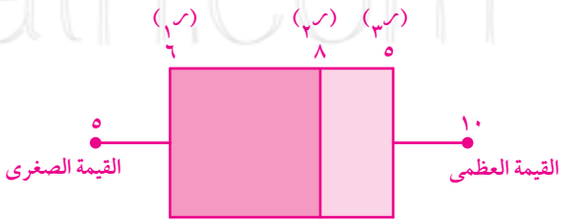
(جـ) عدد قيم المجموعة الأدنى للبيانات = ٦ (زوجي)

فيكون $(\text{ر}_١) = \frac{٦+٦}{٢} = ٦$

عدد قيم المجموعة الأعلى للبيانات = ٦ (زوجي)

فيكون $(\text{ر}_٣) = \frac{٩+٩}{٢} = ٩$

(د)



مجموع التكرارات ن = ٢٠

ترتيب الوسيط = $\frac{ن}{٢} = \frac{٢٠}{٢} = ١٠$

فئة الوسيط: هي الفئة المقابلة للتكرار المتجمع الصاعد (الذي قيمته أكبر من أو يساوي ترتيب الوسيط مباشرة)

أي أكبر من أو يساوي ١٠ مباشرة وبالتالي فئة الوسيط هي [٢٠، ٣٠)

الوسيط $(\text{ر}_٢)$ = الحد الأدنى لفئة الوسيط + $\frac{\frac{ن}{٢} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة الوسيط}}{\text{التكرار الأصلي لفئة الوسيط}} \times$ طول الفئة

التكرار الأصلي لفئة الوسيط = ٥ ، طول الفئة = ١٠

الحد الأدنى لفئة الوسيط = ٢٠ ، التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة الوسيط = ٦

$\text{ر}_٢ = ٢٠ + \frac{١٠ - ٦}{٥} \times ١٠$

$\text{ر}_٢ = ٢٨$

حاول أن تحل

٣ يمثل الجدول التالي أعمار سكان أحد الأبنية بالسنوات

الفئة	٠ـ	١٥ـ	٣٠ـ	٤٥ـ	المجموع
التكرار	٤	٧	٦	٣	٢٠

أ كوّن جدول التكرار المتجمع الصاعد.

ب أوجد الوسيط حسابيًا.

مثال (٤)

يمثل الجدول التالي درجات ٢٤ طالبًا في مادة الرياضيات في أحد فصول الصف الحادي عشر الأدبي، علمًا بأن الدرجة النهائية هي ٣٠ درجة.

الفئة	٥ـ	١٠ـ	١٥ـ	٢٠ـ	٢٥ـ	المجموع
التكرار	١	٤	٧	٩	٣	٢٤

والمطلوب إيجاد كلًا من:

أ جدول التكرار المتجمع الصاعد

ب الربيع الأدنى والربيع الأعلى.

١٧

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) جاءت أوزان ١٣ طالبًا في أحد صفوف المرحلة الثانوية بالكيلوجرام وفق الجدول التالي:

الوزن	٥٦	٥٧	٥٨	٦٠	٧٠	المجموع
التكرار	٢	٣	٥	٢	١	١٣

مثّل هذه البيانات على مخطط الصندوق ذي العارضتين.

(٢) تبيّن في إحدى المؤسسات أن عدد سنوات خدمة العاملين فيها يمكن ترتيبه على الجدول التالي:

الفئة (سنوات الخدمة)	٠ـ	٥ـ	١٠ـ	١٥ـ	٢٠ـ	٢٥ـ	٣٠ـ	المجموع
عدد العاملين	١٤	٥٣	٤٥	٢٢	١٢	٨	٦	١٦٠

(أ) كوّن جدول تكراري متجمع صاعد.

(ب) أوجد الوسيط، الربيع الأدنى، والربيع الأعلى حسابيًا.

١١

KuwaitMath.com

٢ (أ) ٥٠، ٥٠، ٥٠، ٥٠، ٦٥، ٦٥، ٧١، ٧١، ٧١، ٧١، ٩٥، ٩٥، ٩٥، ٩٥، ٩٥، ١٢٠، ١٢٠

(ب) عدد القيم = ١٦ (زوجي)

الوسيط $(ر_٢) = \frac{٧١ + ٧١}{٢} = ٧١$

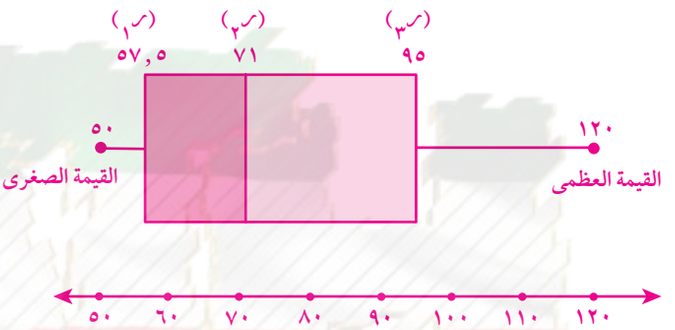
(جـ) عدد قيم المجموعة الأدنى للبيانات = ٨ (زوجي)

فيكون الربيع الأدنى $(ر_١) = \frac{٦٥ + ٥٠}{٢} = ٥٧,٥$

عدد قيم المجموعة الأعلى للبيانات = ٨ (زوجي)

فيكون الربيع الأعلى $(ر_٣) = \frac{٩٥ + ٩٥}{٢} = ٩٥$

(د) مخطط الصندوق ذو العارضتين



٣ (أ)

الفئة	التكرار	أقل من الحد الأعلى للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
٠ –	٤	أقل من ١٥	٤
١٥ –	٧	أقل من ٣٠	١١
٣٠ –	٦	أقل من ٤٥	١٧
٤٥ –	٣	أقل من ٦٠	٢٠

(ب) ∵ ن = ٢٠ ومنه $\frac{ن}{٢} = ١٠$

∴ فئة الوسيط هي: [١٥ – ٣٠)

الوسيط $(ر_٢) = ١٥ + \frac{١٠ - ٤}{٧} \times ١٥$

$\approx ٢٧,٨٦$

الحل:

مجموع التكرارات ن = ٢٤

ترتيب $(ر_١) = \frac{٢٤}{٤} = ٦$

الفئة	التكرار	أقل من الحد الأعلى للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
٥ –	١	أقل من ١٠	١
١٠ –	٤	أقل من ١٥	٥
١٥ –	٧	أقل من ٢٠	١٢
٢٠ –	٩	أقل من ٢٥	٢١
٢٥ –	٣	أقل من ٣٠	٢٤
المجموع	٢٤		

ومنه تكون فئة الربيع الأدنى هي الفئة المقابلة للتكرار المتجمع الصاعد (الذي قيمته أكبر من أو يساوي ترتيب الربيع الأدنى مباشرة). وبالتالي فئة الربيع الأدنى هي [١٥، ٢٠)

التكرار الأصلي لفئة الربيع الأدنى = ٧ ، طول الفئة = ٥

الحد الأدنى لفئة الربيع الأدنى = ١٥ ، التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة $(ر_١) = ٥$

$ر_١ = ١٥ + \frac{٦ - ٥}{٧} \times ٥ = ١٥\frac{٥}{٧}$

ترتيب $ر_٣ = \frac{٣ن}{٤} = ١٨$

ومنه تكون فئة الربيع الأعلى هي الفئة المقابلة للتكرار المتجمع (الذي قيمته أكبر من أو يساوي ترتيب الربيع الأعلى مباشرة). وبالتالي فئة الربيع الأعلى هي: [٢٠، ٢٥)

التكرار الأصلي لفئة الربيع الأعلى = ٩ ، طول الفئة = ٥

الحد الأدنى لفئة الربيع الأدنى = ٢٠ ، التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة $(ر_٣) = ١٢$

∴ $ر_٣ = ٢٠ + \frac{١٨ - ١٢}{٩} \times ٥$

$= ٢٣\frac{١}{٣}$

حاول أن تحل

١ يمثل الجدول التكراري التالي درجات ٣٢ طالب في مادة الرياضيات في أحد فصول الصف الحادي عشر حيث النهاية العظمى ٣٠ درجة.

الفئة	٥ –	١٠ –	١٥ –	٢٠ –	٢٥ –	المجموع
التكرار	٩	٦	٨	٥	٤	٣٢

المطلوب إيجاد كلًّا من:

أ جدول التكرار المتجمع الصاعد.

ب الربيع الأدنى والربيع الأعلى.

٤ (أ)

الفئة	التكرار	أقل من الحد الأعلى للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
٥ –	٩	أقل من ١٠	٩
١٠ –	٦	أقل من ١٥	١٥
١٥ –	٨	أقل من ٢٠	٢٣
٢٠ –	٥	أقل من ٢٥	٢٨
٢٥ –	٤	أقل من ٣٠	٣٢

(ب) ترتيب $(ر_١) = \frac{٣٢}{٤} = ٨$

∴ فئة الربيع الأدنى: [٥، ١٠)،

$ر_١ = ٥ + \frac{٨ - ٠}{٩} \times ٥ = ٩\frac{٤}{٩}$

ترتيب $(ر_٣) = \frac{٣ \times ٣٢}{٤} = ٢٤$

∴ فئة الربيع الأعلى: [٢٠، ٢٥)،

$ر_٣ = ٢٠ + \frac{٢٤ - ٢٣}{٥} \times ٥ = ٢١$

KuwaitMath.com

٤ـ٢: الالتواء

١ الأهداف

- يتعرف الالتواء وأنواعه.
- يربط بين الالتواء ومقاييس النزعة المركزية.
- يربط بين الالتواء ومخطط الصندوق ذي العارضتين.

٢ المفردات الأساسية والمفاهيم الجديدة

التواء – التواء متماثل (تماثل) – التواء موجب (إلى اليمين) – التواء سالب (إلى اليسار).

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

٤ التمهيد

اطلب إلى الطلاب استخدام الجدول للإجابة عن الأسئلة التالية:

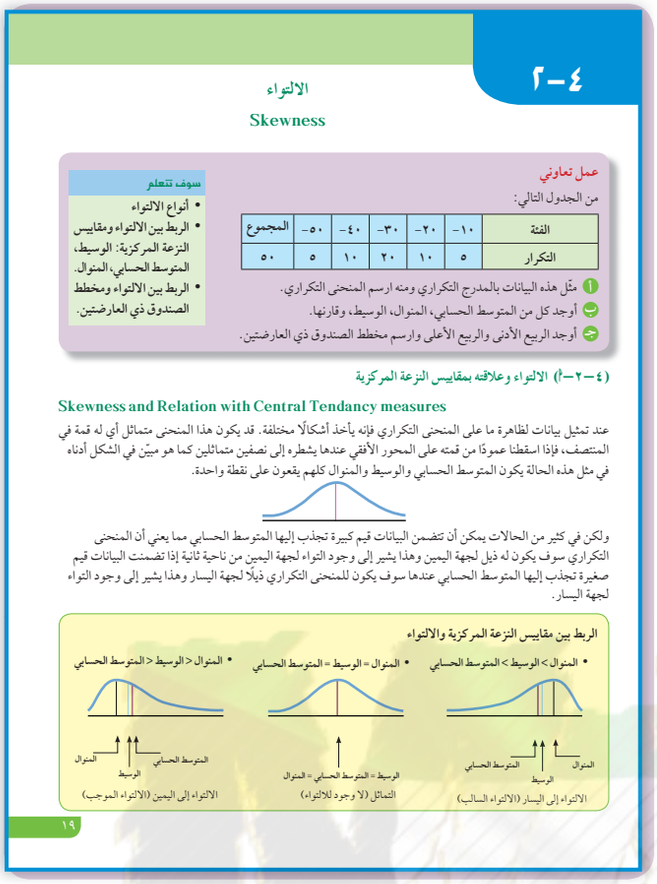
الفئة	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	المجموع
التكرار	٤	٩	٧	٥	٣	٢	٣٠

(أ) أكمل الجدول بإضافة صف ثالث يبيّن مركز كل فئة.

(ب) أوجد المتوسط الحسابي، الوسيط، المنوال وقارن بينها.

(جـ) مثّل هذه البيانات بالمدرج التكراري ومنه ارسم المنحنى التكراري.

(د) أوجد الربيع الأدنى والربيع الأعلى.



٤-٢

الالتواء

Skewness

عمل تعاوني

من الجدول التالي:

الفئة	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
التكرار	٥	١٠	٢٠	١٠	٥	٥٠

أ) مثّل هذه البيانات بالمدرج التكراري ومنه ارسم المنحنى التكراري.

ب) أوجد كل من المتوسط الحسابي، المنوال، الوسيط، وقارنها.

جـ) أوجد الربيع الأدنى والربيع الأعلى وارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين.

سوف تتعلم

- أنواع الالتواء
- الربط بين الالتواء ومقاييس النزعة المركزية: الوسيط، المتوسط الحسابي، المنوال.
- الربط بين الالتواء ومخطط الصندوق ذي العارضتين.

(٤-٢-أ) الالتواء وعلاقته بمقاييس النزعة المركزية

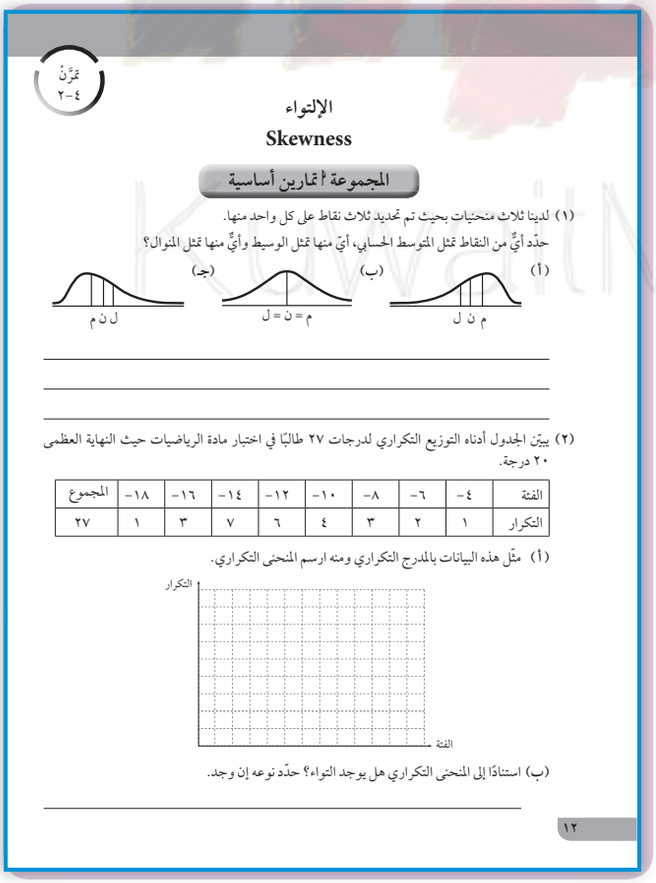
Skewness and Relation with Central Tendancy measures

عند تمثيل بيانات لظاهرة ما على المنحنى التكراري فإنه يأخذ أشكالًا مختلفة. قد يكون هذا المنحنى متماثل أي له قمة في المنتصف، فإذا اسقطنا عمودًا من قمته على المحور الأفقي عندها يشطره إلى نصفين متماثلين كما هو مبيّن في الشكل أدناه في مثل هذه الحالة يكون المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال كلهم يقعون على نقطة واحدة.

ولكن في كثير من الحالات يمكن أن تتضمن البيانات قيم كبيرة تجذب إليها المتوسط الحسابي مما يعني أن المنحنى التكراري سوف يكون له ذيل لجهة اليمين وهذا يشير إلى وجود التواء لجهة اليمين من ناحية ثانية إذا تضمنت البيانات قيم صغيرة تجذب إليها المتوسط الحسابي عندها سوف يكون للمنحنى التكراري ذيلًا لجهة اليسار وهذا يشير إلى وجود التواء لجهة اليسار.

الربط بين مقاييس النزعة المركزية والالتواء

١٩



تمرّن ٤-٢

الإلتواء

Skewness

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) لدينا ثلاث منحنيات بحيث تم تحديد ثلاث نقاط على كل واحد منها.

حدّد أيٌّ من النقاط تمثل المتوسط الحسابي، أيّ منها تمثل الوسيط وأيٌّ منها تمثل المنوال؟

(أ) م ن ل (ب) م = ن = ل (جـ) ل ن م

(٢) بيّن الجدول أدناه التوزيع التكراري لدرجات ٢٧ طالبًا في اختبار مادة الرياضيات حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة.

الفئة	٤-	٦-	٨-	١٠-	١٢-	١٤-	١٦-	١٨-	المجموع
التكرار	١	٢	٣	٤	٦	٧	٣	١	٢٧

(أ) مثّل هذه البيانات بالمدرج التكراري ومنه ارسم المنحنى التكراري.

(ب) استنادًا إلى المنحنى التكراري هل يوجد التواء؟ حدّد نوعه إن وجد.

١٢

٥ التدريس

في بعض البيانات حيث توجد قيمة متطرفة من الممكن أن يكون المتوسط الحسابي مؤشرًا غير دقيق وغير سليم عن هذه البيانات، إذا أخذنا درجات اختبار ١٠ طلاب حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة كما يلي: ١٦، ١٤، ١٣، ٣، ١٠، ١٥، ١٨، ١٤، ١٧، ١٨.

فنلاحظ وجود قيمة متطرفة ٣ ولكن المتوسط الحسابي هو: ١٣,٨ درجة. وبدون القيمة المتطرفة يصبح المتوسط الحسابي ١٥ درجة مما يعطي فكرة أفضل عن مستوى الدرجات لهؤلاء الطلاب. وهذا ما دفع العاملين في مجال الإحصاء للبحث عن مؤشرات ومقاييس أفضل لدراسة قيم البيانات فكانت مقاييس التشتت التي تعطي فكرة أوضح لموقع القيم مقارنة بالمتوسط الحسابي.

في المثال (١)

يبيّن هذا المثال للطالب كيف يساعده المنحنى التكراري على تحديد نوع الالتواء. اشرح للطلاب شروط الالتواء إلى اليمين وشروط الالتواء إلى اليسار.

في المثال (٢)

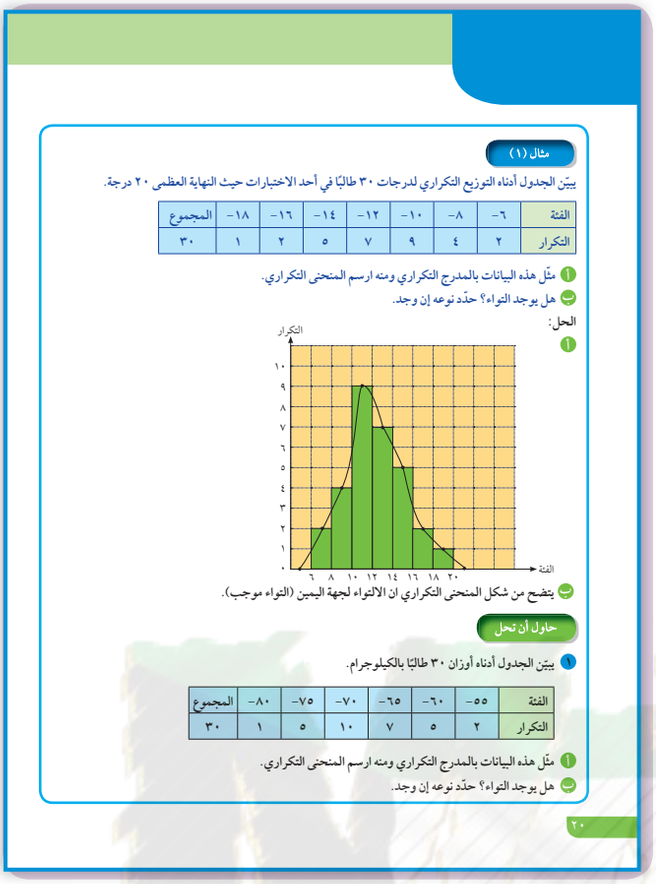
تطبيق مباشر يبيّن للطالب كيف يحسب المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لبعض البيانات وكيف يستنتج منها وجود التواء ونوعه.

في المثال (٣)

يلاحظ الطالب من خلال مخطط الصندوق ذي العارضتين كيفية الالتواء إلى اليسار، فالوسيط هو أقرب إلى الربيع الأعلى منه إلى الربيع الأدنى أي أن المساحة بين الربيع الأدنى والوسيط هي أكبر من المساحة بين الربيع الأعلى والوسيط. كما لو حسبنا المتوسط الحسابي نجد أنه أصغر من الوسيط وبالتالي يصبح لدى الطلاب وسائل متنوعة للتعرف على نوع الالتواء والتأكد منه.

٦ الربط

من الملاحظ أن الأمثلة كافة في هذا الدرس توفر الربط بين مفاهيم هذا الدرس ومهاراته ومواقف حياتية يمكن مصادفتها دائمًا.



مثال (١)

يبيّن الجدول أدناه التوزيع التكراري لدرجات ٣٠ طالبًا في أحد الاختبارات حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة.

الفئة	−٦	−٨	−١٠	−١٢	−١٤	−١٦	−١٨	المجموع
التكرار	٢	٤	٩	٧	٥	٢	١	٣٠

١ مثّل هذه البيانات بالمدرج التكراري ومنه ارسم المنحنى التكراري.

هل يوجد التواء؟ حدّد نوعه إن وجد.

الحل:

١

يتضح من شكل المنحنى التكراري ان الالتواء لجهة اليمين (التواء موجب).

حاول أن تحل

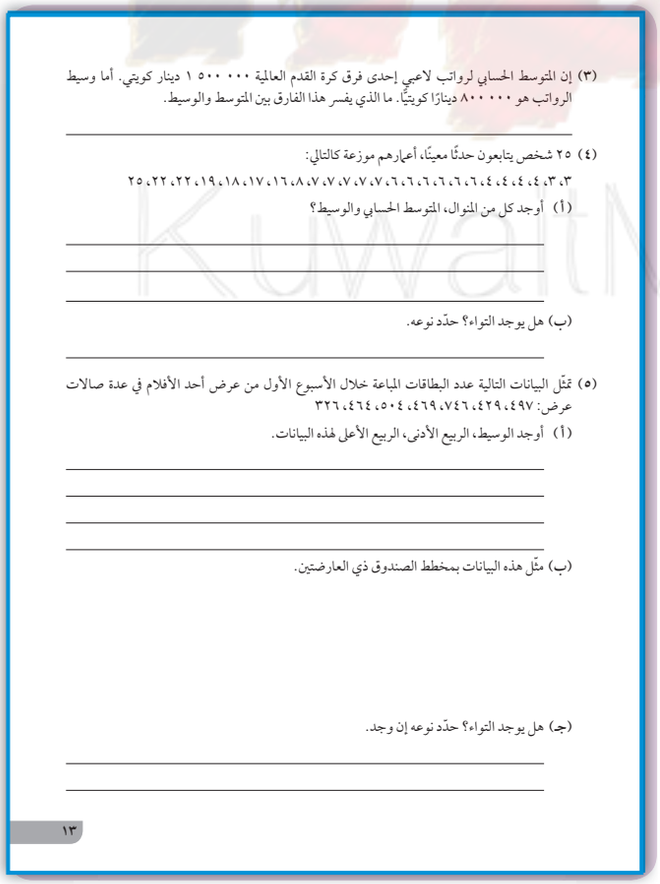
١ يبيّن الجدول أدناه أوزان ٣٠ طالبًا بالكيلوجرام.

الفئة	−٥٥	−٦٠	−٦٥	−٧٠	−٧٥	−٨٠	المجموع
التكرار	٢	٥	٧	١٠	٥	١	٣٠

١ مثّل هذه البيانات بالمدرج التكراري ومنه ارسم المنحنى التكراري.

هل يوجد التواء؟ حدّد نوعه إن وجد.

٢٠



(٣) إن المتوسط الحسابي لرواتب لاعبي إحدى فرق كرة القدم العالمية ١ ٥٠٠ ٠٠٠ دينار كويتي. أما وسيط الرواتب هو ٨٠٠ ٠٠٠ دينارًا كويتيًا. ما الذي يفسر هذا الفارق بين المتوسط والوسيط.

(٤) ٢٥ شخص يتابعون حدثًا معينًا، أعمارهم موزعة كالتالي:

٣، ٣، ٤، ٤، ٤، ٤، ٦، ٦، ٦، ٦، ٦، ٦، ٧، ٧، ٧، ٧، ٧، ٨، ١٦، ١٧، ١٨، ١٩، ٢٢، ٢٢، ٢٥

(أ) أوجد كل من المنوال، المتوسط الحسابي والوسيط؟

(ب) هل يوجد التواء؟ حدّد نوعه.

(٥) تمثّل البيانات التالية عدد البطاقات المباعة خلال الأسبوع الأول من عرض أحد الأفلام في عدة صالات عرض: ٤٩٧، ٤٢٩، ٧٤٦، ٤٦٩، ٥٠٤، ٤٦٤، ٣٢٦

(أ) أوجد الوسيط، الربيع الأدنى، الربيع الأعلى لهذه البيانات.

(ب) مثّل هذه البيانات بمخطط الصندوق ذي العارضتين.

(جـ) هل يوجد التواء؟ حدّد نوعه إن وجد.

١٣

KuwaitMath.com

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في الربط بين الوسيط والمتوسط الحسابي للتعرف على أنواع الالتواء.

ساعدهم وشجعهم على كتابة ما يلي:

(أ) متوسط حسابي > وسيط > منوال ⟸ التواء إلى اليمين.

(ب) متوسط حسابي < وسيط < منوال ⟸ التواء إلى اليسار.

(جـ) متوسط حسابي = وسيط = منوال ⟸ تماثل.

٨ التقييم

تأكد أن الطلاب يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» بجهد يعكس فهمهم لما هو مطلوب إنجازه.

اختبار سريع

يبيّن الجدول أدناه التوزيع التكراري لأطوال قامات بعض الطلاب بالسنتيمتر.

الفئة	١٥٦–	١٦٠–	١٦٤–	١٦٨–	١٧٢–	١٧٦–
التكرار	١	٤	٥	٧	٣	٢

(أ) أكمل الجدول بإضافة صف يبيّن مركز الفئات والتكرار المتجمع الصاعد.

الفئة	التكرار	مركز الفئة	أقل من الحد الأعلى للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
١٥٦–	١	١٥٨	أقل من ١٦٠	١
١٦٠–	٤	١٦٢	أقل من ١٦٤	٥
١٦٤–	٥	١٦٦	أقل من ١٦٨	١٠
١٦٨–	٧	١٧٠	أقل من ١٧٢	١٧
١٧٢–	٣	١٧٤	أقل من ١٧٦	٢٠
١٧٦–	٢	١٧٨	أقل من ١٨٠	٢٢

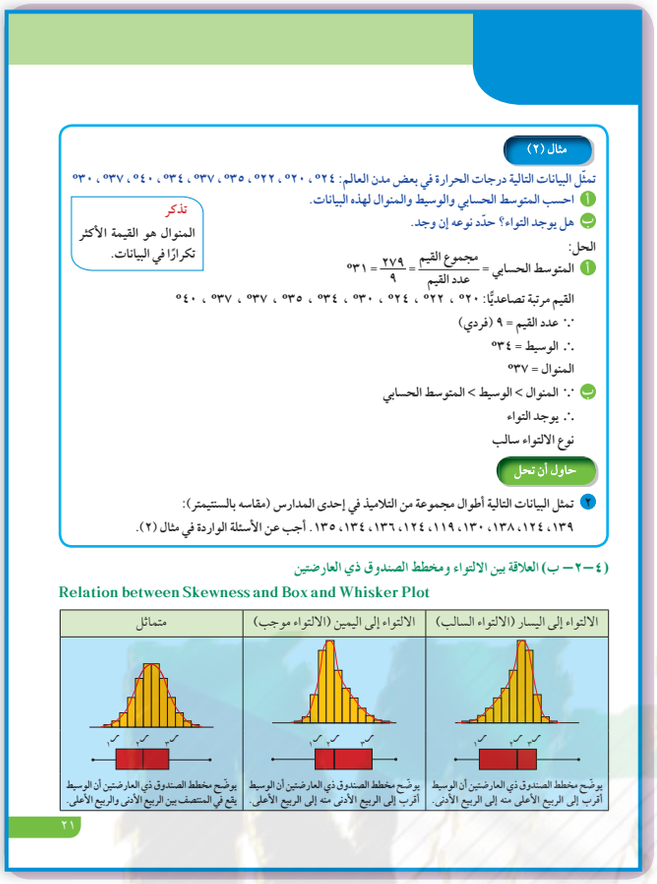
(ب) أوجد المتوسط الحسابي والوسيط.

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{٣٧٠٤}{٢٢} = ١٦٨,\overline{٣٦}$$

$$\because ن = ٢٢ \quad \therefore \frac{ن}{٢} = \frac{٢٢}{٢} = ١١$$

فتكون فئة الوسيط هي: [١٦٨ – ١٧٢)

$$\text{الوسيط} = ١٦٨ + \frac{١١ - ١٠}{٧} \times ٤ \approx ١٦٨,٥٧$$



مثال (٢)

تمثّل البيانات التالية درجات الحرارة في بعض مدن العالم: ٥٢٤، ٥٢٠، ٥٢٢، ٥٣٥، ٥٣٧، ٥٣٤، ٥٤٠، ٥٣٧، ٥٣٠

1 احسب المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لهذه البيانات.

ب هل يوجد التواء؟ حدّد نوعه إن وجد.

تذكر
المنوال هو القيمة الأكثر تكرارًا في البيانات.

الحل:

1 المتوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}} = \frac{٢٧٩}{٩} = ٥٣١$

القيم مرتبة تصاعديًا: ٥٢٠، ٥٢٢، ٥٢٤، ٥٣٠، ٥٣٤، ٥٣٥، ٥٣٧، ٥٣٧، ٥٤٠

∵ عدد القيم = ٩ (فردي)

∴ الوسيط = ٥٣٤

المنوال = ٥٣٧

ب ∵ المنوال > الوسيط > المتوسط الحسابي

∴ يوجد التواء

نوع الالتواء سالب

حاول أن تحل

2 تمثل البيانات التالية أطوال مجموعة من التلاميذ في إحدى المدارس (مقاسه بالسنتيمتر):
١٣٩، ١٢٤، ١٣٨، ١٣٠، ١١٩، ١٢٤، ١٣٦، ١٣٤، ١٣٥. أجب عن الأسئلة الواردة في مثال (٢).

(٤–٢– ب) العلاقة بين الالتواء ومخطط الصندوق ذي العارضتين

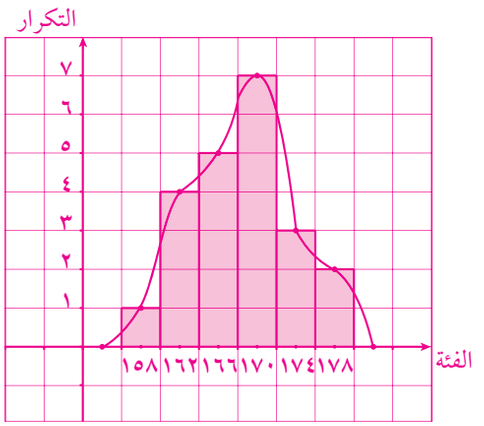
Relation between Skewness and Box and Whisker Plot

الالتواء إلى اليسار (الالتواء السالب)	الالتواء إلى اليمين (الالتواء موجب)	متماثل
يوضّح مخطط الصندوق ذي العارضتين أن الوسيط أقرب إلى الربيع الأعلى منه إلى الربيع الأدنى.	يوضّح مخطط الصندوق ذي العارضتين أن الوسيط أقرب إلى الربيع الأدنى منه إلى الربيع الأعلى.	يوضّح مخطط الصندوق ذي العارضتين أن الوسيط يقع في المنتصف بين الربيع الأدنى والربيع الأعلى.

٢١

KuwaitMath.com

(جـ) مثّل هذه البيانات بالمدرج التكراري والمنحنى التكراري.



(د) استنتج من الفقرة (جـ) نوع الالتواء للمنحنى التكراري.

يبيّن المنحنى التكراري التواء لجهة اليسار.

(هـ) أوجد العلاقة بين المتوسط الحسابي والوسيط ونوع الالتواء.

المتوسط الحسابي = $\overline{س}$ = ١٦٨,٣٦

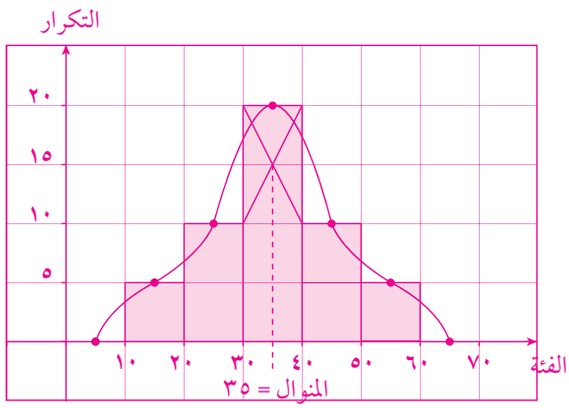
والوسيط = ١٦٨,٥٧

لذا المتوسط الحسابي < الوسيط، وبالتالي تؤكد هذه العلاقة أن الالتواء لجهة اليسار.

٩ إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

(أ)



المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) من الجدول التكراري التالي:

الفئة	-٢٠	-٤٠	-٦٠	-٨٠	-١٠٠	المجموع
التكرار	٥	٩	٣	٢	١	٢٠

(أ) مثّل هذه البيانات بالمدرج التكراري ومنه ارسم المنحنى التكراري.

التكرار

الفئة

(ب) هل يوجد التواء؟ حدّد نوعه إن وجد.

(٢) يقوم أحد الموظفين في أحد المطارات بتسجيل أوقات تأخير الرحلات عن الوقت المحدد. فجاء زمن تأخير ١٥ رحلة بالدقائق كالتالي: ٩، ١٢، ٢، ٥، ٥، ١٥، ٦، ٧، ١٧، ٥، ٣، ٥، ٤، ٣، ٦، ٩

(أ) أوجد كلًّا من المنوال والوسيط والمتوسط الحسابي.

(ب) هل يوجد التواء؟ حدّد نوعه إن وجد.

(٣) جاءت أوزان ١٦ طالبًا بالكيلوجرام كما يلي:

٥٦، ٥٦، ٥٧، ٥٨، ٥٨، ٥٩، ٦٠، ٦٠، ٦٠، ٦٠، ٦٢، ٦٢، ٦٥، ٦٦، ٦٧، ٧٠

(أ) احسب الوسيط والربيع الأدنى والربيع الأعلى.

١٤

(ب)

الفئة	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠
التكرار	٥	١٠	٢٠	١٠	٥
مركز الفئة	١٥	٢٥	٣٥	٤٥	٥٥
أقل من الحد الأعلى للفئة	أقل من ٢٠	أقل من ٣٠	أقل من ٤٠	أقل من ٥٠	أقل من ٦٠
التكرار المتجمع الصاعد	٥	١٥	٣٥	٤٥	٥٠
المجموع ٥٠					

المتوسط الحسابي

$$= \frac{٥ \times ١٥ + ١٠ \times ٢٥ + ٢٠ \times ٣٥ + ١٠ \times ٤٥ + ٥ \times ٥٥}{٥٠}$$

= ٣٥

فئة المنوال [٣٠، ٤٠)

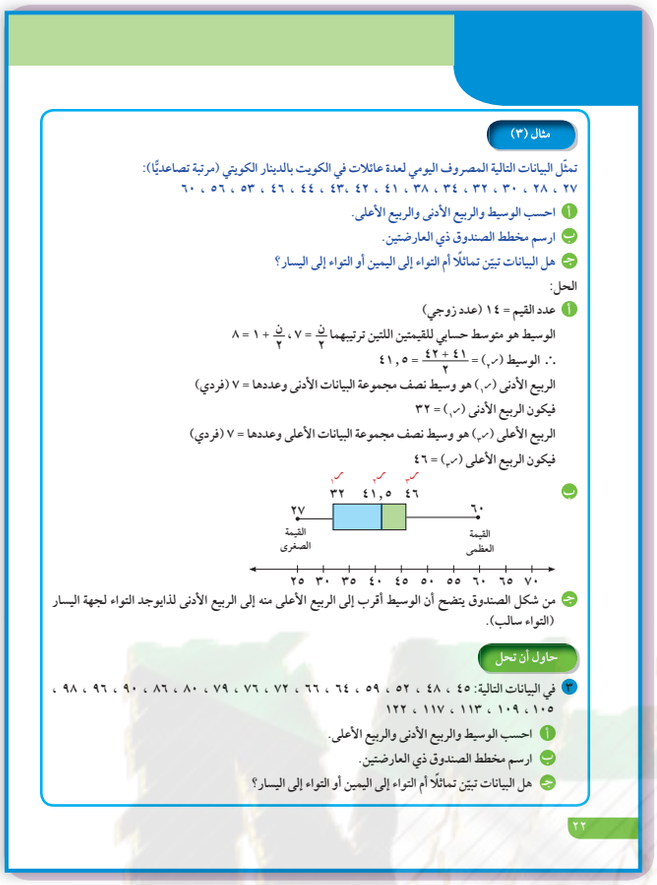
يمكن إيجاد قيمة المنوال بيانيًّا وذلك باستخدام المدرج التكراري كما يبدو في الرسم.

المنوال = ٣٥

∵ عدد القيم ن = ٥٠ ∴ $\frac{ن}{٢} = \frac{٥٠}{٢}$ = ٢٥

وبالتالي فئة الوسيط هي: [٣٠، ٤٠)

KuwaitMath.com



مثال (٣)

تمثّل البيانات التالية المصروف اليومي لعدة عائلات في الكويت بالدينار الكويتي (مرتبة تصاعديًا):

٢٧ ، ٢٨ ، ٣٠ ، ٣٢ ، ٣٤ ، ٣٨ ، ٤١ ، ٤٢ ، ٤٣، ٤٤ ، ٤٦ ، ٥٣ ، ٥٦ ، ٦٠

أ) احسب الوسيط والربيع الأدنى والربيع الأعلى.

ب) ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين.

جـ) هل البيانات تبيّن تمائلًا أم التواء إلى اليمين أو التواء إلى اليسار؟

الحل:

أ) عدد القيم = ١٤ (عدد زوجي)

الوسيط هو متوسط حسابي للقيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{ن}{٢}$ ، $\frac{ن}{٢}$ + ١ = ٨ ، ٧

∴ الوسيط (س٢) = $\frac{٤٢ + ٤١}{٢}$ = ٤١,٥

الربيع الأدنى (س١) هو وسيط نصف مجموعة البيانات الأدنى وعددها = ٧ (فردي)

فيكون الربيع الأدنى (س١) = ٣٢

الربيع الأعلى (س٣) هو وسيط نصف مجموعة البيانات الأعلى وعددها = ٧ (فردي)

فيكون الربيع الأعلى (س٣) = ٤٦

ب)

جـ) من شكل الصندوق يتضح أن الوسيط أقرب إلى الربيع الأعلى منه إلى الربيع الأدنى لذا يوجد التواء لجهة اليسار (التواء سالب).

حاول أن تحل

٣) في البيانات التالية: ٤٥ ، ٤٨ ، ٥٢ ، ٥٩ ، ٦٤ ، ٦٦ ، ٧٢ ، ٧٦ ، ٧٩ ، ٨٠ ، ٨٦ ، ٩٠ ، ٩٦ ، ٩٨ ، ١٠٥ ، ١٠٩ ، ١١٣ ، ١١٧ ، ١٢٢

أ) احسب الوسيط والربيع الأدنى والربيع الأعلى.

ب) ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين.

جـ) هل البيانات تبيّن تمائلًا أم التواء إلى اليمين أو التواء إلى اليسار؟

٢٢

الوسيط = $٣٠ + \frac{٢٥ - ١٥}{٢٠} \times ١٠$

= ٣٥

نلاحظ أن المتوسط الحسابي = الوسيط = المنوال = ٣٥

(جـ) $\frac{ن}{٤} = \frac{٥٠}{٤} = ١٢,٥$

فئة الربيع الأدنى هي: [٢٠، ٣٠)

الربيع الأدنى = $٢٠ + \frac{١٢,٥ - ٥}{١٠} \times ١٠ = ٢٧,٥$

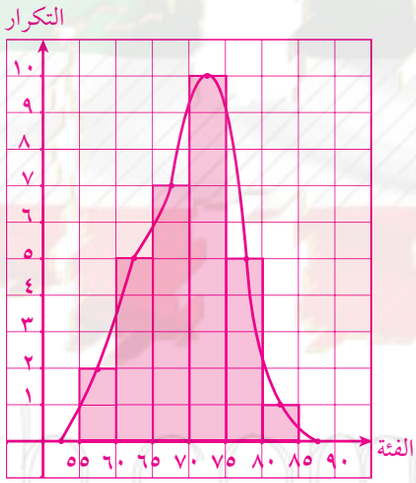
$\frac{٣ن}{٤} = \frac{٣ \times ٥٠}{٤} = ٣٧,٥$

فئة الربيع الأعلى هي: [٤٠، ٥٠)

الربيع الأعلى = $٤٠ + \frac{٣٧,٥ - ٣٥}{١٠} \times ١٠ = ٤٢,٥$

«حاول أن تحل»

١) (أ) المدرج التكراري والمنحنى التكراري



(ب) يبيّن المنحنى التكراري أن الالتواء لجهة اليسار.

KuwaitMath.com

(ب) مثّل هذه البيانات بمخطط الصندوق ذي العارضتين.

(جـ) هل البيانات تمثل تماثلًا أم التواء إلى اليمين أو التواء إلى اليسار؟

_____

_____

١٥

٢ (أ) المتوسط الحسابي = $\frac{١\,١٧٩}{٩}$ = ١٣١

البيانات مرتبة تصاعديًّا:

١١٩، ١٢٤، ١٢٤، ١٣٠، ١٣٤، ١٣٥، ١٣٦، ١٣٨، ١٣٩

عدد القيم ٩ (فردي)

الوسيط = ١٣٤

المنوال = ١٢٤

(ب) نعم، ∵ المتوسط الحسابي < الوسيط

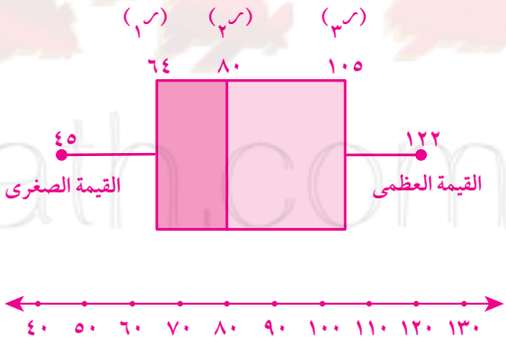
∴ التواء سالب.

٣ (أ) عدد القيم ١٩ (فردي). الوسيط ($ر_٢$) ترتيبه هو: $\frac{١٩ + ١}{٢}$ = ١٠ فيكون ($ر_٢$) = ٨٠

الربيع الأدنى ($ر_١$) هو وسيط نصف مجموعة البيانات الأدنى وعددها ٩ (فردي) فيكون الربيع الأدنى ($ر_١$) = ٦٤

الربيع الأعلى ($ر_٣$) هو وسيط نصف مجموعة البيانات الأعلى وعددها ٩ (فردي) فيكون الربيع الأعلى ($ر_٣$) = ١٠٥

(ب)



(جـ) يبيّن مخطط الصندوق أنه يوجد التواء لجهة اليمين لأن الوسيط يقترب أكثر لجهة الربيع الأدنى منه إلى الربيع الأعلى.

KuwaitMath.com

٤-٣: مقاييس التشتت وتطبيقاتها

١ الأهداف

- يتعرف المدى ونصف المدى الربيعي.
- يتعرف التباين والانحراف المعياري.
- يطبّق القاعدة التجريبية.
- يطبّق القيمة المعيارية.

٢ المفردات الأساسية والمفاهيم الجديدة

المدى – نصف المدى الربيعي – التباين – الانحراف المعياري – القاعدة التجريبية – القيمة المعيارية.

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

٤ التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

لتكن البيانات التالية: ٤، ٩، ١٧، ١٣، ١٠، ٧، ٨، ١١، ١٤، ٧.

(أ) رتِّب هذه البيانات تصاعديًّا.

(ب) أوجد الوسيط والمتوسط الحسابي.

(جـ) أوجد الربيع الأدنى والربيع الأعلى.

(د) مثّل هذه البيانات على مخطط الصندوق ذي العارضتين.

(هـ) ما نوع الالتواء الظاهر على مخطط الصندوق؟ اشرح ذلك.

(و) ما العلاقة بين المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال؟ هل ترتبط هذه العلاقة بالنتيجة في الفقرة (هـ)؟

٤-٣

مقاييس التشتت وتطبيقاتها

Measures of Dispersion and its Applications

عمل تعاوني

في نهاية الفصل الدراسي الأول كانت درجات احد الطلاب حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة كما يلي:

المادة	الدرجة					المتوسط الحسابي
تاريخ	٩	١٠	١١	١٢	١١	
جغرافيا	١٣	٧	١٠	٨	١٦	
فلسفة	٥	٥	١٥	١٥	١٥	
رياضيات	١١	١٠	١١	١٢	١١	

أ هل يمكن التعرف على المادة الأفضل في تحصيل الطالب دون إجراء عمليات حسابية، أو بايجاد المتوسط الحسابي لدرجات كل مادة ومقارنتها؟

ب أوجد المتوسط الحسابي لدرجات كل مادة عند هذا الطالب ماذا تلاحظ؟

جـ اوجد الانحراف المعياري لدرجات كل مادة. ماذا تلاحظ؟

سوف تتعلم

- المدى ونصف المدى الربيعي.
- التباين والانحراف المعياري.
- القاعدة التجريبية.
- القيمة المعيارية.
- تطبيقات على مقاييس التشتت.

المادة	الانحراف المعياري
تاريخ	
جغرافيا	
فلسفة	
رياضيات	

(٤ – ٣ – أ) مقاييس التشتت — Measures of Dispersion

المدى = القيمة العظمى – القيمة الصغرى

نصف المدى الربيعي = (الربيع الأعلى – الربيع الأدنى) / ٢

التباين $ع^2 = \frac{\sum (س - \bar{س})^2}{ن}$

الانحراف المعياري $ع = \sqrt{\frac{\sum (س - \bar{س})^2}{ن}}$

حيث س = المتغير، $\bar{س}$ = المتوسط الحسابي، ن = عدد القيم.

إذا كان يوجد تكرار للقيم في البيانات يكون لدينا:

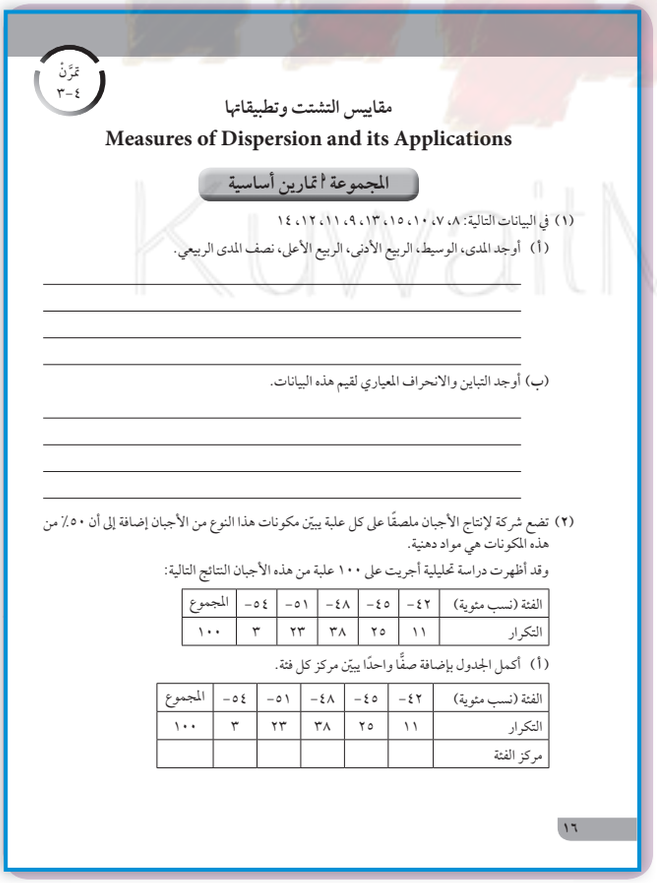
$$ع^2 = \frac{\sum_{ر=1}^{أ} ت_ر (س_ر - \bar{س})^2}{\sum_{ر=1}^{أ} ت_ر} \quad ، \quad ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{أ} ت_ر (س_ر - \bar{س})^2}{\sum_{ر=1}^{أ} ت_ر}}$$

حيث $ت_ر$ = عدد تكرار المتغيّر س

ملاحظة

في حالة التوزيع التكراري ذي الفئات $س_ر$ تمثل مراكز الفئات، ونستخدم القوانين السابقة نفسها.

٢٣



تمرّن ٤-٣

مقاييس التشتت وتطبيقاتها

Measures of Dispersion and its Applications

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) في البيانات التالية: ٨، ٧، ١٠، ١٥، ١٣، ٩، ١١، ١٢، ١٤

(أ) أوجد المدى، الوسيط، الربيع الأدنى، الربيع الأعلى، نصف المدى الربيعي.

(ب) أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم هذه البيانات.

(٢) تضع شركة لإنتاج الأجبان ملصقًا على كل علبة يبيّن مكونات هذا النوع من الأجبان إضافة إلى أن ٥٠٪ من هذه المكونات هي مواد دهنية.

وقد أظهرت دراسة تحليلية أجريت على ١٠٠ علبة من هذه الأجبان النتائج التالية:

الفئة (نسب مئوية)	٤٢-	٤٥-	٤٨-	٥١-	٥٤-	المجموع
التكرار	١١	٢٥	٣٨	٢٣	٣	١٠٠

(أ) أكمل الجدول بإضافة صفًّا واحدًا يبيّن مركز كل فئة.

الفئة (نسب مئوية)	٤٢-	٤٥-	٤٨-	٥١-	٥٤-	المجموع
التكرار	١١	٢٥	٣٨	٢٣	٣	١٠٠
مركز الفئة						

١٦

KuwaitMath.com

٥ التدريس

يتابع الطالب في هذا الدرس بناء معارفه في مجال الإحصاء حيث يتعرف على مقاييس تساعده على وصف البيانات وتبيّن تشتتها بالمقارنة مع المتوسط الحسابي.

في المثال (١)

شجع الطلاب على كتابة قواعد التباين والانحراف المعياري عدة مرات للتأكّد من أنهم قادرين على استخدامها. يقدم هذا المثال بيانات بسيطة وواضحة حيث يعتاد الطالب أوّلًا على تكوين جدول قبل أن يستخدم الآلة الحاسبة مع البيانات حيث يحتوي على عدد كبير من القيم.

فالمدى يعطي فكرة أوّلية عن تباعد هذه القيم أو قربها من بعضها بعضًا. أما نصف المدى الربيعي فيعطي فكرة عن كيفية تمركز قيم البيانات مقارنة مع الوسيط ولكن الانحراف المعياري هو المقياس الأدق الذي يعبّر عن تمركز هذه القيم مقارنة بالمتوسط الحسابي، إذا كان الانحراف المعياري كبيرًا فيكون تشتت هذه القيم بعيدًا عن المتوسط الحسابي أما إذا كان الانحراف المعياري يقترب من الصفر فقيم البيانات تتمركز أكثر حول المتوسط الحسابي.

في المثال (٢)

يمكن التعامل مع هذا المثال بالطريقة نفسها التي اتبعت في المثال (١). ولا بد هنا من الإشارة إلى أن برامج الآلات الحاسبة قد تكون مختلفة، وعند إدخال المعطيات إلى برنامج الإحصاء في الآلة الحاسبة نحصل بسهولة على المتوسط الحسابي والانحراف المعياري والتباين حيث $ع^{٢}$ = التباين، ع = الانحراف المعياري.

في المثال (٣)

يوفر هذا المثال فرصة أمام الطلاب للتعرف إلى كيفية استخدام القاعدة التجريبية في مواقف حياتية تتناول أرباح الشركات حيث الربط بين المتوسط الحسابي والانحراف المعياري والنسب المئوية ٦٨٪، ٩٥٪، ٩٩,٧٪ من الأرباح وذلك على الفترات $[\bar{س} - \sigma، \bar{س} + \sigma]$، $[\bar{س} - ٢\sigma، \bar{س} + ٢\sigma]$، $[\bar{س} - ٣\sigma، \bar{س} + ٣\sigma]$ على الترتيب.

مثال (١)

لتأخذ البيانات: ٢، ٤، ٥، ٦، ٦، ٧، ٧، ٧، ٨، ٨.

أ) أوجد المدى، الوسيط، الربيع الأدنى، الربيع الأعلى لهذه البيانات.

ب) أوجد نصف المدى الربيعي.

جـ) أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

الحل:

البيانات: ٢، ٤، ٥، ٦، ٦، ٧، ٧، ٧، ٨، ٨.

أ) المدى = القيمة العظمى − القيمة الصغرى = ٨ − ٢ = ٦

الوسيط = $\frac{٦ + ٧}{٢}$ = ٦,٥ ، الربيع الأدنى = ٥ ، الربيع الأعلى = ٧

ب) نصف المدى الربيعي = $\frac{٧ - ٥}{٢}$ = ١

جـ) لإيجاد التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات يجب أولًا إيجاد المتوسط الحسابي:

$\bar{س} = \frac{٢ + ٤ + ٥ + ٦ + ٦ + ٧ + ٧ + ٧ + ٨ + ٨}{١٠}$

$= \frac{٦٠}{١٠} = ٦$

نكوّن الجدول التالي:

س	س − $\bar{س}$	$(س - \bar{س})^{٢}$
٢	−٤	١٦
٤	−٢	٤
٥	−١	١
٦	٠	٠
٦	٠	٠
٧	١	١
٧	١	١
٧	١	١
٨	٢	٤
٨	٢	٤
المجموع ٣٢		

التباين $ع^{٢} = \frac{٣٢}{١٠} = ٣,٢$

الانحراف المعياري ع = $\sqrt{٣,٢} \simeq ١,٧٨٨$

ملاحظة

إذا كان الانحراف المعياري قريبًا من الصفر، تكون قيم البيانات قريبة من المتوسط الحسابي.

٢٤

حاول أن تحل

أ) لتأخذ البيانات: ١٧، ١٦، ٨، ١٥، ٩، ١١، ١٢، ١٣، ٧.

أ) أوجد المدى، الوسيط، الربيع الأدنى، الربيع الأعلى، نصف المدى الربيعي لهذه البيانات.

ب) أوجد المتوسط الحسابي، التباين، الانحراف المعياري.

مثال (٢)

في استطلاع أجري في عيادة أحد الأطباء عن الوقت المستغرق لمعاينة ١٢٠ مريضًا، جاءت النتائج كما يلي:

الوقت المستغرق بالدقائق	−١٠	−١٥	−٢٠	−٢٥	−٣٠	−٣٥	−٤٠	−٤٥	−٥٠	المجموع
عدد المرضى	١١	٢١	٢٣	١٤	١٦	١٨	١٢	٣	٢	١٢٠

أ) أكمل الجدول بإيجاد مركز كل فئة، ثم أوجد المتوسط الحسابي.

ب) أوجد التباين والانحراف المعياري.

الحل:

أ)

الوقت المستغرق بالدقائق	−١٠	−١٥	−٢٠	−٢٥	−٣٠	−٣٥	−٤٠	−٤٥	−٥٠	المجموع
عدد المرضى	١١	٢١	٢٣	١٤	١٦	١٨	١٢	٣	٢	١٢٠
مركز الفئة	١٢,٥	١٧,٥	٢٢,٥	٢٧,٥	٣٢,٥	٣٧,٥	٤٢,٥	٤٧,٥	٥٢,٥	

$\bar{س} = \frac{\sum ك_{ر} س_{ر}}{\sum ك_{ر}}$

$\bar{س} = \frac{(١١ \times ١٢,٥) + (٢١ \times ١٧,٥) + (٢٣ \times ٢٢,٥) + \ldots + (١٢ \times ٤٢,٥) + (٣ \times ٤٧,٥) + (٢ \times ٥٢,٥)}{١٢٠}$

$\bar{س} = \frac{٣٣٦٠}{١٢٠} = ٢٨$

٢٥

في المثال (٤)

يساعد هذا المثال الطلاب على تطبيق القاعدة التجريبية وإيجاد النسبة المئوية لعمر أي منتج والتأكد من صحة ما تعلنه إدارة الإنتاج عن صلاحية هذا المنتج أو عدمه.

في المثالين (٥)، (٦)

توفر القيمة المعيارية فرصة لمقارنة قيم من البيانات مع قيم أخرى من بيانات مختلفة عن الأولى فالدرجة ١٦ في مادة الرياضيات والدرجة ١٦ في مادة الكيمياء لها قيمة معيارية ٠,٦ في الرياضيات ولها قيمة معيارية ٠,٥ في الكيمياء، وبالتالي يمكن القول إن ١٦ من ٢٠ في الرياضيات أفضل من ١٦ من ٢٠ في الكيمياء، كما أنه يمكن مقارنة قيمتين مختلفتين في مجموعتين من البيانات المختلفة وهذا ما ورد في المثال (٦).

٦ الربط

جميع الأمثلة الواردة في هذا الدرس تعالج مواقف حياتية باستخدام مقاييس التشتت.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يقع الطلاب في خطأ استخدام القيمة المعيارية فيكتبون

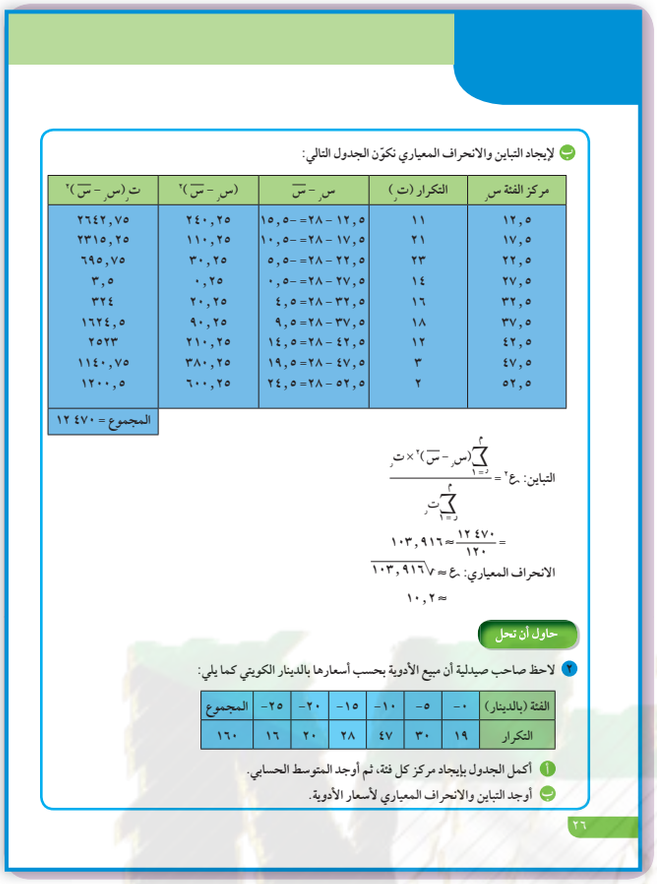
$$و = \frac{\overline{س} - س}{\sigma}$$

اطلب إليهم كتابة هذه القاعدة مرات عديدة بالصيغة:

$$و = \frac{س - \overline{س}}{\sigma}$$

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتقف على إمكانياتهم على تنفيذ ما ورد في هذا الدرس من مفاهيم ومهارات.



لإيجاد التباين والانحراف المعياري نكوّن الجدول التالي:

مركز الفئة $س_ر$	التكرار $(ت_ر)$	$س_ر - \overline{س}$	$(س_ر - \overline{س})^2$	$ت_ر(س_ر - \overline{س})^2$
١٢,٥	١١	$١٢,٥ - ٢٨ = -١٥,٥$	٢٤٠,٢٥	٢٦٤٢,٧٥
١٧,٥	٢١	$١٧,٥ - ٢٨ = -١٠,٥$	١١٠,٢٥	٢٣١٥,٢٥
٢٢,٥	٢٣	$٢٢,٥ - ٢٨ = -٥,٥$	٣٠,٢٥	٦٩٥,٧٥
٢٧,٥	١٤	$٢٧,٥ - ٢٨ = -٠,٥$	٠,٢٥	٣,٥
٣٢,٥	١٦	$٣٢,٥ - ٢٨ = ٤,٥$	٢٠,٢٥	٣٢٤
٣٧,٥	١٨	$٣٧,٥ - ٢٨ = ٩,٥$	٩٠,٢٥	١٦٢٤,٥
٤٢,٥	١٢	$٤٢,٥ - ٢٨ = ١٤,٥$	٢١٠,٢٥	٢٥٢٣
٤٧,٥	٣	$٤٧,٥ - ٢٨ = ١٩,٥$	٣٨٠,٢٥	١١٤٠,٧٥
٥٢,٥	٢	$٥٢,٥ - ٢٨ = ٢٤,٥$	٦٠٠,٢٥	١٢٠٠,٥
	المجموع = ١٢ ٤٧٠			

$$\text{التباين: } ع^2 = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \overline{س})^2 \times ت_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ت_ر}$$

$$= \frac{١٢\,٤٧٠}{١٢٠} \approx ١٠٣,٩١٦$$

$$\text{الانحراف المعياري: } ع \approx \sqrt{١٠٣,٩١٦} \approx ١٠,٢$$

حاول أن تحل

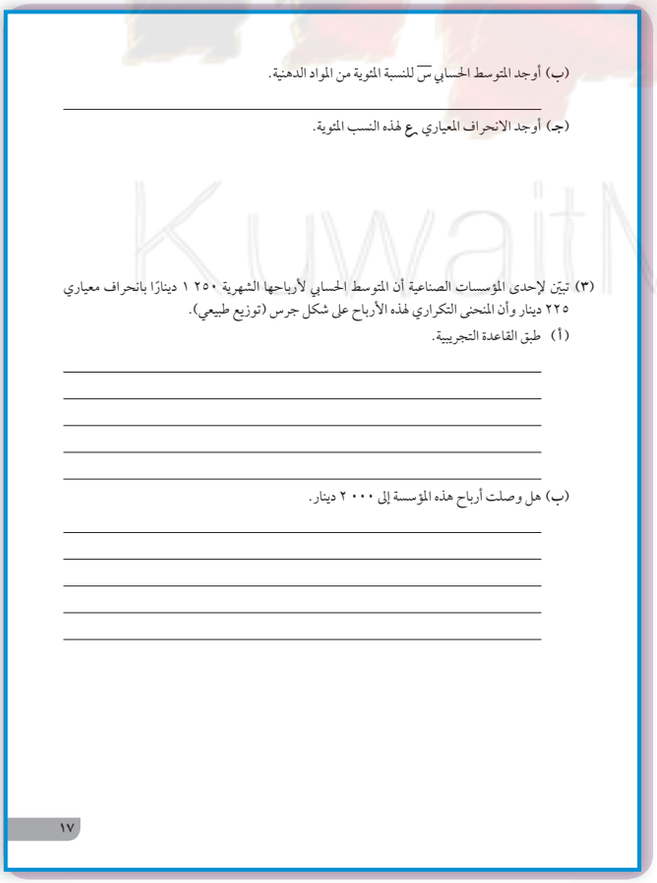
١ لاحظ صاحب صيدلية أن مبيع الأدوية بحسب أسعارها بالدينار الكويتي كما يلي:

الفئة (بالدينار)	٠-	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	المجموع
التكرار	١٩	٣٠	٤٧	٢٨	٢٠	١٦	١٦٠

أ) أكمل الجدول بإيجاد مركز كل فئة، ثم أوجد المتوسط الحسابي.

ب) أوجد التباين والانحراف المعياري لأسعار الأدوية.

٢٦



(ب) أوجد المتوسط الحسابي $\overline{س}$ للنسبة المئوية من المواد الدهنية.

(جـ) أوجد الانحراف المعياري ع لهذه النسب المئوية.

(٣) تبيّن لإحدى المؤسسات الصناعية أن المتوسط الحسابي لأرباحها الشهرية ١ ٢٥٠ دينارًا بانحراف معياري ٢٢٥ دينار وأن المنحنى التكراري لهذه الأرباح على شكل جرس (توزيع طبيعي).

(أ) طبق القاعدة التجريبية.

(ب) هل وصلت أرباح هذه المؤسسة إلى ٢٠٠٠ دينار.

١٧

KuwaitMath.com

اختبار سريع

١ لتكن البيانات: ٦، ٦، ٧، ٧، ٨، ٩، ٩، ١٢، ١٣، ١٣

(أ) أوجد المدى، الوسيط، المتوسط الحسابي.

المدى = ١٣ − ٦ = ٧، الوسيط = $\frac{٨ + ٩}{٢}$ = ٨,٥

المتوسط الحسابي = $\frac{٩٠}{١٠}$ = ٩

(ب) أوجد الربيع الأدنى، الربيع الأعلى، نصف المدى الربيعي.

الربيع الأدنى = ٧، الربيع الأعلى = ١٢

نصف المدى الربيعي = $\frac{١٢ - ٧}{٢}$ = ٢,٥

(جـ) أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

نكوّن الجدول:

$\overline{س}$	$س - \overline{س}$	$(س - \overline{س})^٢$
٦	−٣	٩
٦	−٣	٩
٧	−٢	٤
٧	−٢	٤
٨	−١	١
٩	٠	٠
٩	٠	٠
١٢	٣	٩
١٣	٤	١٦
١٣	٤	١٦
	المجموع = ٦٨	

التباين: $ع^٢ = \frac{٦٨}{١٠}$ = ٦,٨

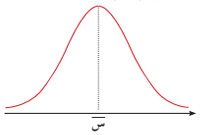
الانحراف المعياري: $ع \approx$ ٢,٦

أوجد الإحصائيون قواعد أخرى لدراسة تشتت قيم البيانات عندما تتوزع بطريقة معينة تعرف بالتوزيع الطبيعي وذلك من خلال استخدام القاعدة التجريبية التي سنوضحها في هذا البند.

(٤–٣– ب) التوزيع الطبيعي Normal Distribution

تعلمت سابقًا توزيع قيم البيانات بحسب قيم المتوسط الحسابي والوسيط مقارنة مع قيمة المنوال.

والتوزيع الطبيعي هو توزيع البيانات بشكل متماثل حول المتوسط الحسابي والمنحنى التكراري الذي يمثل هذه البيانات يأخذ شكل الجرس كما في الشكل التالي.



من خواص منحنى التوزيع الطبيعي:

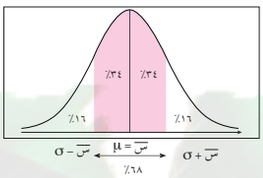
- أن يكون على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول المتوسط الحسابي.
- أن تتساوى فيه قيم المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.
- أن ينحدر طرفاه تدريجيًا ويمتدان إلى ما لانهاية ولا يلتقيان مع المحور الأفقي أبدًا.

القاعدة التجريبية Empirical Rule

تستخدم القاعدة التجريبية لدراسة الجودة في مواقف إحصائية متعددة لعينات ذات قيم مفردة عددها ن(ن > ٣٠) ويمكن اتخاذ القرارات المناسبة على ضوء هذه الدراسة. سوف نرمز للتباين ع^٢ بالرمز $\sigma^٢$ والانحراف المعياري ع بالرمز σ والمتوسط الحسابي $\overline{س}$ بالرمز μ.

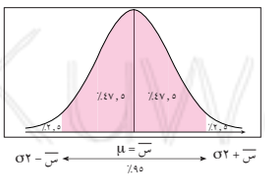
على افتراض أن لدينا مجموعة بيانات كمية ووجدنا المتوسط الحسابي $\overline{س}$ والانحراف المعياري σ لقيم هذه البيانات وتبين أن المنحنى التكراري هو على شكل الجرس يمكن عندها تطبيق القاعدة التجريبية التي تنص على ما يلي:

- حوالى ٦٨٪ من قيم هذه البيانات تقع على الفترة $[\overline{س} - \sigma ، \overline{س} + \sigma]$.



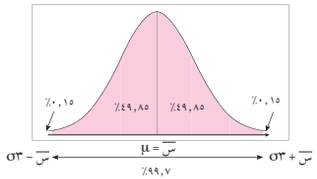
٦٨٪ من البيانات تقع على الفترة $[\overline{س} - \sigma ، \overline{س} + \sigma]$

- حوالى ٩٥٪ من قيم هذه البيانات تقع على الفترة $[\overline{س} - ٢\sigma ، \overline{س} + ٢\sigma]$



٩٥٪ من البيانات تقع على الفترة $[\overline{س} - ٢\sigma ، \overline{س} + ٢\sigma]$

- حوالى ٩٩,٧٪ من قيم هذه البيانات تقع على الفترة $[\overline{س} - ٣\sigma ، \overline{س} + ٣\sigma]$



٩٩,٧٪ من البيانات تقع على الفترة $[\overline{س} - ٣\sigma ، \overline{س} + ٣\sigma]$

KuwaitMath.com

٢ يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لدرجات طلاب الصف الحادي عشر ثانوي في اختبار الرياضيات حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة.

الفئة	٥-	٧-	٩-	١١-	١٣-	١٥-	١٧-	١٩-
التكرار	٢	٣	٦	٥	٤	٢	٢	١
مركز الفئة	٦	٨	١٠	١٢	١٤	١٦	١٨	٢٠

أوجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري والتباين لقيم هذه البيانات.

$$\overline{س} = \frac{٦ \times ٢ + ٨ \times ٣ + \ldots + ١٨ \times ٢ + ٢٠ \times ١}{٢٥}$$

$$\overline{س} = ١٢$$

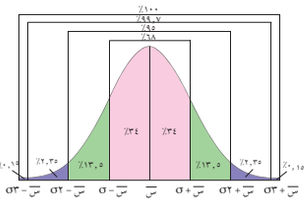
لإيجاد التباين والانحراف المعياري نستخدم الجدول التالي:

مركز الفئة $س_ر$	التكرار $(ت_ر)$	$س_ر - \overline{س}$	$(س_ر - \overline{س})^٢$	$ت_ر (س_ر - \overline{س})^٢$
٦	٢	٦-	٣٦	٧٢
٨	٣	٤-	١٦	٤٨
١٠	٦	٢-	٤	٢٤
١٢	٥	٠	٠	٠
١٤	٤	٢	٤	١٦
١٦	٢	٤	١٦	٣٢
١٨	٢	٦	٣٦	٧٢
٢٠	١	٨	٦٤	٦٤
	المجموع = ٣٢٨			

$ع^٢ = ١٣,١٢$ ، $ع \approx ٣,٦$

٣ أعلن صاحب أحد المحلات التجارية أن المتوسط الحسابي لأرباحه من مبيع الأجهزة المحمولة شهريًّا ٤٨٠ دينارًا والانحراف المعياري ١٢٠ دينارًا. إذا افترضنا أن المنحنى التكراري لأرباح صاحب المحل هو على شكل الجرس (توزيع طبيعي).

يبيّن الشكل أدناه التوزيعات للفترات الثلاث ونسبها المئوية.



مثال (٣)

إذا كان المتوسط الحسابي لأرباح إحدى الشركات الصغيرة ٣٥٠ دينارًا والانحراف المعياري ١١٥ والمنحنى التكراري لأرباح هذه الشركة هو على شكل الجرس (توزيع طبيعي).

أ طبّق القاعدة التجريبية.

ب هل وصلت أرباح الشركة إلى ٦٩٠ دينارًا؟ فسّر ذلك.

الحل:

أ $\overline{س} = ٣٥٠$ ، $\sigma = ١١٠$

باستخدام القاعدة التجريبية نحصل على ما يلي:

(١) حوالى ٦٨٪ من الأرباح تقع على الفترة: $[\overline{س} - \sigma ، \overline{س} + \sigma] = [٣٥٠ - ١١٠ ، ٣٥٠ + ١١٠] = [٢٤٠ ، ٤٦٠]$

(٢) حوالى ٩٥٪ من الأرباح تقع على الفترة: $[\overline{س} - ٢\sigma ، \overline{س} + ٢\sigma] = [٣٥٠ - ٢٢٠ ، ٣٥٠ + ٢٢٠] = [١٣٠ ، ٥٧٠]$

(٣) حوالى ٩٩,٧٪ من الأرباح تقع على الفترة: $[\overline{س} - ٣\sigma ، \overline{س} + ٣\sigma] = [٣٥٠ - ٣٣٠ ، ٣٥٠ + ٣٣٠] = [٢٠ ، ٦٨٠]$

ب نلاحظ أن المبلغ ٦٩٠ دينارًا يقع خارج الفترة الأخيرة [٦٨٠،٢٠] والتي تناظر ٩٩,٧٪ من الأرباح لذلك من غير المتوقع أن تكون أرباح هذه الشركة قد وصلت إلى المبلغ ٦٩٠ دينارًا.

حاول أن تحل

٣ لاحظت شركة تجارية أن المتوسط الحسابي لأرباحها ٤٧٥ دينارًا بانحراف معياري ١١٥ دينارًا.

أ طبّق القاعدة التجريبية.

ب هل وصلت أرباح هذه الشركة إلى ٧٥٠ دينارًا؟ فسّر ذلك.

٢٩

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) في البيانات التالية: ٢٤، ٢٥، ٢٠، ١٨، ٢١، ٢٧، ٢٩، ٢٨

(أ) أوجد المدى، الوسيط، الربيع الأدنى، الربيع الأعلى، نصف المدى الربيعي.

(ب) أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم هذه البيانات.

(٢) أراد صاحب متجر تصنيف السلع المباعة بحسب أسعارها. فوضع الجدول التالي:

الفئة بالدينار	٠-	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
التكرار	١٩٠	٣٠٠	٤٧٠	٢٨٠	٢٦٠	١٠٠	١٦٠٠

(أ) أوجد المتوسط الحسابي.

(ب) أوجد التباين والانحراف المعياري لأسعار السلع.

١٨

KuwaitMathcom

(أ) طبّق القاعدة التجريبية.

حوالى ٦٨٪ من الأرباح على الفترة [٣٦٠، ٦٠٠]

حوالى ٩٥٪ من الأرباح على الفترة [٢٤٠، ٧٢٠]

حوالى ٩٩,٧٪ من الأرباح على الفترة [١٢٠، ٨٤٠]

(ب) هل وصلت أرباح صاحب المحل إلى ٩٠٠ دينار؟ اشرح ذلك.

نلاحظ أن ٩٠٠ دينار تقع خارج الفترة [١٢٠، ٨٤٠]

لذا من غير المتوقع أن تصل الأرباح إلى ٩٠٠ دينار.

٤ نال صالح في اختبار مادة اللغة العربية الدرجات التالية حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة:

١٦، ١٤، ١٤، ١٥، ١٧، ١٦.

نال أيضًا في اختبار مادة الكيمياء الدرجات التالية حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة: ١٢، ١٠، ٩، ١٢، ١٧، ١٣.

أوجد القيمة المعيارية للدرجة ١٧ بالمقارنة مع قيم الدرجات في كل مادة.

$$\text{ن} = \frac{\text{القيمة} - \text{المتوسط الحسابي}}{\text{الانحراف المعياري}}$$

في مادة اللغة العربية: $\text{ن}_1 = \frac{١٧ - ١٥,٣}{١,١} \simeq ١,\overline{٥٤}$

في مادة الكيمياء: $\text{ن}_2 = \frac{١٧ - ١٢,١٧}{٢,٥٤٤} \simeq ١,٩$

فتكون الدرجة ١٧ في مادة الكيمياء أفضل من الدرجة ١٧ في مادة اللغة العربية مقارنة ببقية الدرجات في كل مادة.

٩ إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

(أ) من الممكن أن تكون درجات مادة الرياضيات هي الأفضل

(ب)

المادة	المتوسط الحسابي
تاريخ	١٠,٦
جغرافيا	١٠,٨
فلسفة	١١
رياضيات	١١

مثال (٤)

يعلن مصنع لإنتاج البطاريات المستخدمة في السيارات أن متوسط عمر البطارية من النوع (أ) هو ٦٠ شهرًا بانحراف معياري ١٠ أشهر.

على افتراض أن المنحنى الممثل لتوزيع عمر البطاريات يقترب كثيرًا من التوزيع الطبيعي.

أ طبّق القاعدة التجريبية.

ب أوجد النسبة المئوية للبطاريات من النوع (أ) التي يزيد عمرها عن ٥٠ شهرًا بفرض أن ما يعلنه المصنع صحيحًا.

ج أوجد النسبة المئوية للبطاريات من النوع (أ) التي يقل عمرها عن ٤٠ شهرًا بفرض أن ما يعلنه المصنع صحيحًا.

الحل:

أ (١) حوالى ٦٨٪ من البطاريات المصنعة عمرها يقع على الفترة:

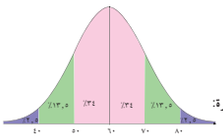
$[\overline{س} - \sigma ، \overline{س} + \sigma] = [٦٠ - ١٠ ، ٦٠ + ١٠] = [٥٠ ، ٧٠]$

(٢) حوالى ٩٥٪ من البطاريات المصنعة عمرها يقع على الفترة:

$[\overline{س} - ٢\sigma ، \overline{س} + ٢\sigma] = [٦٠ - ٢٠ ، ٦٠ + ٢٠] = [٤٠ ، ٨٠]$

(٣) حوالى ٩٩,٧٪ من البطاريات المصنعة عمرها يقع على الفترة:

$[\overline{س} - ٣\sigma ، \overline{س} + ٣\sigma] = [٦٠ - ٣٠ ، ٦٠ + ٣٠] = [٣٠ ، ٩٠]$



ب بما أن المنحنى الممثل لتوزيع عمر البطاريات يقترب كثيرًا من التوزيع الطبيعي لذا من الرسم أعلاه نستنتج:

٣٤٪ + ٣٤٪ + ١٣,٥٪ + ٢,٥٪ = ٨٤٪

أي أن ٨٤٪ من هذه البطاريات يزيد عمرها عن ٥٠ شهرًا بفرض أن ما تعلنه هذه الشركة صحيحًا.

ج يبيّن المنحنى الممثل لعمر البطاريات أن ٢,٥٪ من هذه البطاريات يقل عمرها عن ٤٠ شهرًا وذلك بفرض أن ما تعلنه الشركة صحيحًا.

حاول أن تحل

٤ يعلن مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية أن متوسط عمر المصباح الكهربائي من النوع (أ) هو ٧٠٠ ساعة بانحراف معياري ١٠٠ ساعة على افتراض أن المنحنى الممثل لتوزيع عمر المصابيح الكهربائية يقترب كثيرًا من التوزيع الطبيعي.

أ طبّق القاعدة التجريبية.

ب أوجد النسبة المئوية للمصابيح الكهربائية من النوع (أ) التي يزيد عمرها عن ٥٠٠ ساعة.

ج أوجد النسبة المئوية للمصابيح الكهربائية من النوع (أ) التي يقل عمرها عن ٤٠٠ ساعة.

(٤-٣-جـ) القيمة المعيارية Standarized Value

هي مؤشر يدل على انحراف قيمة مفردة من بيانات عن المتوسط الحسابي وذلك باستخدام الانحراف المعياري لقيم هذه البيانات. إذا كان المطلوب مقارنة قيمتين لمفردتين مختلفتين تنتمي كل منهما إلى مجموعة محددة فإنه لا يكفي إحصائيًا مقارنة قيم هذه المفردات بعضها بعضًا بل يجب الأخذ بعين الاعتبار المتوسط الحسابي لكل مجموعة من البيانات وانحرافها المعياري. ويتطلب منا هذا الأمر تحويل القيم المقاسة بوحدات قياس عادية إلى قيم معيارية مناظرة بعدد من الانحرافات المعيارية، وذلك باستخدام القاعدة:

$$\text{القيمة المعيارية (ن)} = \frac{\text{قيمة المفردة} - \text{المتوسط الحسابي}}{\text{الانحراف المعياري}} = \frac{س - \overline{س}}{\sigma}$$

مثال (٥)

في أحد الاختبارات نال أحد الطلاب درجة ١٦ من ٢٠ في مادة الرياضيات حيث المتوسط الحسابي ١٣ والانحراف المعياري ٥ ونال أيضًا ١٦ من ٢٠ في مادة الكيمياء حيث المتوسط الحسابي ١٤ والانحراف المعياري ٤.

ما القيمة المعيارية للدرجة ١٦ مقارنة مع درجات كل مادة؟ أيهما أفضل؟

الحل:

القيمة المعيارية للدرجة ١٦ في مادة الرياضيات: $\text{ن}_1 = \frac{س_1 - \overline{س}_1}{\sigma_1} = \frac{١٦ - ١٣}{٥} = ٠,٦$

القيمة المعيارية للدرجة ١٦ في مادة الكيمياء: $\text{ن}_2 = \frac{س_2 - \overline{س}_2}{\sigma_2} = \frac{١٦ - ١٤}{٤} = ٠,٥$

$٠,٦ > ٠,٥$

∴ القيمة المعيارية للدرجة ١٦ في مادة الرياضيات أكبر من القيمة المعيارية للدرجة ١٦ في مادة الكيمياء.

وبالتالي الدرجة ١٦ في مادة الرياضيات أفضل من الدرجة ١٦ في مادة الكيمياء.

حاول أن تحل

٥ جاءت إحدى درجات طالب في مادة الفيزياء ١٥ حيث المتوسط الحسابي ١٤ والانحراف المعياري ٣,٨ وفي مادة الكيمياء ١٥ حيث المتوسط الحسابي ١٣ والانحراف المعياري ٧,٨

ما القيمة المعيارية للدرجة ١٥ مقارنة مع درجات كل مادة؟ أيهما أفضل؟

من الملاحظ أن درجات مادتي الفلسفة والرياضيات لها المتوسط الحسابي نفسه وأن درجات مادة التاريخ لها متوسط حسابي أصغر من البقية.

(جـ)

المادة	الانحراف المعياري
تاريخ	١,٠٢
جغرافيا	٣,٣١
فلسفة	٤,٩
رياضيات	٠,٦٣

من المعروف أنه كلما كان الانحراف المعياري قريبًا من الصفر كانت قيم البيانات أقل تشتتًا لذا درجات الرياضيات هي الأفضل.

«حاول أن تحل»

١ (أ) ٧، ٨، ٩، ١١، ١٢، ١٣، ١٥، ١٦، ١٧

المدى = ١٧ − ٧ = ١٠

الوسيط = ١٢

الربيع الأدنى = $\frac{٨ + ٩}{٢}$ = ٨,٥

الربيع الأعلى = $\frac{١٥ + ١٦}{٢}$ = ١٥,٥

نصف المدى الربيعي = $\frac{١٥,٥ - ٨,٥}{٢}$ = ٣,٥

(ب) $\overline{س}$ = ١٢

$س_ر$	$س_ر - \overline{س}$	$(س_ر - \overline{س})^٢$
٧	−٥	٢٥
٨	−٤	١٦
٩	−٣	٩
١١	−١	١
١٢	٠	٠
١٣	١	١
١٥	٣	٩
١٦	٤	١٦
١٧	٥	٢٥
	المجموع = ١٠٢	

التباين $ع_ر^٢$ = $\frac{١٠٢}{٩}$

$ع_ر^٢$ = ١١,٣

الانحراف المعياري $ع_ر$ ≈ ٣,٣٧

مثال (٦)

في نتيجة نهاية العام الدراسي حصلت الطالبة موضي على ٦٤ درجة في مادة اللغة العربية حيث المتوسط الحسابي ٦٩ والانحراف المعياري ٨. وحصلت على ٤٨ درجة في مادة الجغرافيا حيث المتوسط الحسابي ٥٦ والانحراف المعياري ١٠.
في أي من المادتين كانت موضي أفضل؟

الحل:

لتحديد المادة التي كانت فيها موضي أكثر تحصيلًا نحول الدرجات الفعلية إلى قيم معيارية:

القيمة المعيارية للدرجة ٦٤ في مادة اللغة العربية: $ن_١ = \frac{س_١ - \overline{س}}{\sigma_١} = \frac{٦٤ - ٦٩}{٨} = -٠,٦٢٥$

القيمة المعيارية للدرجة ٤٨ في مادة الجغرافيا: $ن_٢ = \frac{س_٢ - \overline{س}}{\sigma_٢} = \frac{٤٨ - ٥٦}{١٠} = -٠,٨$

$-٠,٦٢٥ > -٠,٨$

∴ القيمة المعيارية للطالبة في مادة اللغة العربية أكبر من القيمة المعيارية في مادة الجغرافيا.

∴ أداء الطالبة موضي في مادة اللغة العربية أفضل من أدائها في مادة الجغرافيا.

حاول أن تحل

٩ يسكن خالد في المدينة (أ) حيث إن طول قامته ١٨٠ سم والمتوسط الحسابي لأطوال قامات الرجال في هذه المدينة ١٧٤ سم مع انحراف معياري ١٢ سم. أما صالح فيسكن في المدينة ب حيث إن طول قامته ١٧٢ سم والمتوسط الحسابي لأطوال قامات الرجال في هذه المدينة ١٦٥ سم مع انحراف معياري ١٥.
أي منهما طول قامته أفضل من الآخر مقارنة مع أطوال الرجال في كل مدينة؟

٣٢

٢ (أ)

الفئة (بالدينار)	٠ −	٥ −	١٠ −	١٥ −	٢٠ −	٢٥ −	المجموع
التكرار	١٩	٣٠	٤٧	٢٨	٢٠	١٦	١٦٠
مركز الفئة	٢,٥	٧,٥	١٢,٥	١٧,٥	٢٢,٥	٢٧,٥	

المتوسط الحسابي = $\frac{٢٢٤٠}{١٦٠}$ = ١٤

(ب) $\overline{س}$ = ١٤

مركز الفئة $س_ر$	التكرار $(ت_ر)$	$س_ر - \overline{س}$	$(س_ر - \overline{س})^٢$	$ت_ر (س_ر - \overline{س})^٢$
٢,٥	١٩	−١١,٥	١٣٢,٢٥	٢٥١٢,٧٥
٧,٥	٣٠	−٦,٥	٤٢,٢٥	١٢٦٧,٥
١٢,٥	٤٧	−١,٥	٢,٢٥	١٠٥,٧٥
١٧,٥	٢٨	٣,٥	١٢,٢٥	٣٤٣
٢٢,٥	٢٠	٨,٥	٧٢,٢٥	١٤٤٥
٢٧,٥	١٦	١٣,٥	١٨٢,٢٥	٢٩١٦
				المجموع = ٨٥٩٠

التباين = $\frac{٨٥٩٠}{١٦٠}$ = ٥٣,٦٨٧٥

الانحراف المعياري ≈ ٧,٣٣

KuwaitMath.com

(٣) يعلن مصنع لإنتاج الأسلاك المعدنية إن متوسط تحمل السلك هو ١٤٠٠ كجم بانحراف معياري ٢٠٠ كجم على افتراض أن المنحنى الممثل لتوزيع تحمل الأسلاك المعدنية يقترب كثيرًا من التوزيع الطبيعي.

(أ) طبق القاعدة التجريبية.

(ب) أوجد النسبة المئوية للأسلاك المعدنية التي يزيد تحملها عن ١٠٠٠ كجم.

(٤) في المدينة أ يزن أحد الرجال ٧٥ كجم حيث المتوسط الحسابي لأوزان الرجال هو ٧٠ كجم مع انحراف معياري ٥ كجم للرجال، وفي المدينة ب يزن أحد الرجال ٨٠ كجم حيث المتوسط الحسابي للأوزان هو ٧٦ كجم للرجال مع انحراف معياري ٨ كجم.

أوجد القيمة المعيارية $ن_{أ}$ لوزن ٧٥ كجم في المدينة أ والقيمة المعيارية $ن_{ب}$ لوزن ٨٠ كجم في المدينة ب.

١٩

٣ (أ) $\overline{س} = ٤٧٥$ ، $\sigma = ١١٥$

بتطبيق القاعدة التجريبية نحصل على التالي:

- حوالى ٦٨٪ من الأرباح تقع على الفترة:

$[\overline{س} - \sigma ، \overline{س} + \sigma]$

$= [٤٧٥ - ١١٥ ، ٤٧٥ + ١١٥] = [٣٦٠ ، ٥٩٠]$

- حوالى ٩٥٪ من الأرباح تقع على الفترة:

$[\overline{س} - ٢\sigma ، \overline{س} + ٢\sigma]$

$= [٤٧٥ - ٢٣٠ ، ٤٧٥ + ٢٣٠] = [٢٤٥ ، ٧٠٥]$

- حوالى ٩٩,٧٪ من الأرباح تقع على الفترة:

$[\overline{س} - ٣\sigma ، \overline{س} + ٣\sigma]$

$= [٤٧٥ - ٣٤٥ ، ٤٧٥ + ٣٤٥] = [١٣٠ ، ٨٢٠]$.

(ب) نلاحظ أن ٧٥٠ تقع على الفترة $[١٣٠ ، ٨٢٠]$

لذا حققت هذه الشركة ربحًا يصل إلى ٧٥٠ دينارًا.

٤ (أ) $\overline{س} = ٧٠٠$ ، $\sigma = ١٠٠$

القاعدة التجريبية:

- حوالى ٦٨٪ من العمر بالساعات تقع على الفترة:

$[\overline{س} - \sigma ، \overline{س} + \sigma]$

$= [٧٠٠ - ١٠٠ ، ٧٠٠ + ١٠٠] = [٦٠٠ ، ٨٠٠]$

- حوالى ٩٥٪ من العمر بالساعات تقع على الفترة:

$[\overline{س} - ٢\sigma ، \overline{س} + ٢\sigma]$

$= [٧٠٠ - ٢٠٠ ، ٧٠٠ + ٢٠٠] = [٥٠٠ ، ٩٠٠]$

- حوالى ٩٩,٧٪ من العمر بالساعات تقع على الفترة:

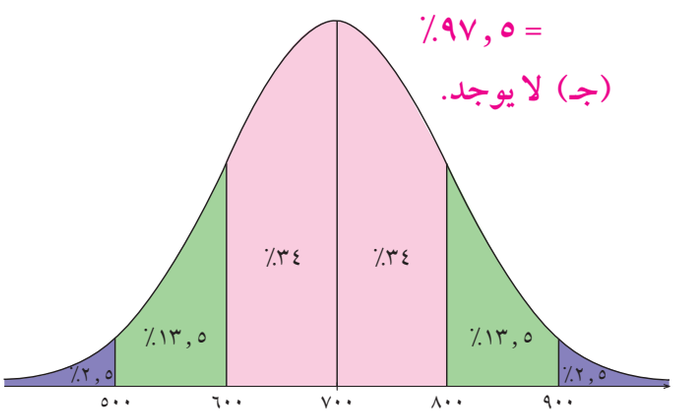
$[\overline{س} - ٣\sigma ، \overline{س} + ٣\sigma]$

$= [٧٠٠ - ٣٠٠ ، ٧٠٠ + ٣٠٠] = [٤٠٠ ، ١٠٠٠]$.

(ب) ١٣,٥٪ + ٣٤٪ + ٣٤٪ + ١٣,٥٪ + ٢,٥٪

$= ٩٧,٥٪$

(جـ) لا يوجد.



٥ القيمة المعيارية في مادة الفيزياء:

$ن_{١} = \frac{١٥ - ١٤}{٣,٨} \simeq ٠,٢٦٣$

القيمة المعيارية في مادة الكيمياء:

$ن_{٢} = \frac{١٥ - ١٣}{٧,٨} \simeq ٠,٢٥٦$

$٠,٢٦٣ > ٠,٢٥٦$ لذا: الدرجة ١٥ في مادة الفيزياء هي أفضل من الدرجة ١٥ في مادة الكيمياء مقارنة بدرجات الطالب في كل مادة.

٦ $ن_{أ} = \frac{١٨٠ - ١٧٤}{١٢} = ٠,٥$

$ن_{ب} = \frac{١٦٥ - ١٧٢}{١٥} = ٠,٤\overline{٦}$

$٠,٥ > ٠,٤\overline{٦}$ لذا $ن_{أ} > ن_{ب}$

وطول خالد في المدينة أ أفضل من طول صالح في المدينة ب.

KuwaitMath.com

٤ـ٤: تطبيقات إحصائية

١ الأهداف

يستخدم الطالب برنامج Excel لإيجاد ما يلي:

- المتوسط الحسابي.
- الوسيط.
- التباين.
- الانحراف المعياري.

٢ المفردات الأساسية والمفاهيم الجديدة

برنامج Excel.

٣ الأدوات والوسائل

حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

٤ التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

في اختبار اللغة الإنجليزية لطلاب الصف الحادي عشر حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة، جاءت النتائج كما يلي:

١٨، ١٢، ١٥، ١٤، ١٧، ١٣، ١٦، ١٢، ١٠، ٩، ١٤، ٨، ٧، ١٠، ١١، ٦، ١٥، ١٢، ١٦، ١٣، ٩، ١٢، ١٤، ١٠، ٧.

(أ) أوجد المتوسط الحسابي $\overline{س}$ لقيم هذه البيانات.

(ب) رتِّب هذه البيانات تصاعديًّا.

(جـ) استخدم فئات حيث طول الفئة ٢ درجة، ثم كوّن جدولًا يبيّن الفئات وعلامات التكرار والتكرار ومركز كل فئة.

(د) استخدم الآلة الحاسبة لتوجد الانحراف المعياري والتباين لقيم هذه البيانات، اعتبر الانحراف المعياري σ.

(هـ) أوجد النسبة المئوية لعدد الطلاب حيث درجاتهم على الفترة $[\overline{س} - \sigma]$ ، $[\overline{س} + \sigma]$.

٤-٤

تطبيقات إحصائية

Statistical Applications

دعنا نفكر ونتناقش

ليس من الضروري أن يحتاج المرء إلى البرمجيات الإحصائية الخاصة لأداء التحليلات الإحصائية. يمكن استخدام برنامج Microsoft Office Excel لتشغيل الإجراءات الإحصائية.

فكما قد سبق أن استخدمنا هذا البرنامج في دروس سابقة لحساب كافة أنواع العينات العشوائية وتحديدها، نجد أنه يتضمن عدة تطبيقات تسهل علينا حساب وإيجاد كل من المتوسط الحسابي، الوسيط، التباين، الانحراف المعياري لمجموعة من البيانات وذلك عن طريق اتباع خطوات محددة والالتزام بها للوصول إلى النتائج المطلوبة والصحيحة.

سوف تتعلم

- استخدام برنامج Excel عن طريق تطبيق الدوال التالية لحساب: المتوسط الحسابي Average، الوسيط Median، التباين VARP، الانحراف المعياري STDEVP.

(٤–٤–أ) مقاييس النزعة المركزية Measures of Central Tendency

مثال (١)

عند إجراء الدراسة التالية على الفصل الحادي عشر في إحدى المدارس، تمّ تسجيل النتائج الواردة في الجدول المقابل حول الأوزان، الأطوال، عدد الإخوة والأخوات.

أوجد المتوسط الحسابي لكل من الأوزان، الأطوال، عدد الإخوة والأخوات.

الحل:

قم بتشغيل برنامج «EXCEL».

- في الخلية A_1 نكتب الأوزان، في الخلية B_1 نكتب الأطوال، في الخلية C_1 نكتب عدد الإخوة والأخوات ونقوم بإدخال المعطيات التي تمّ جمعها من الطلاب في الأعمدة المخصصة لها كما يظهر الشكل (١).

الأوزان	الأطوال	عدد الإخوة والأخوات
٧٠	١٦٥	١
٨٤	١٧٢	٣
٩٠	١٨١	٢
٧٨	١٧٥	٥
٨٠	١٨٤	٤
٦٥	١٦٣	٢
٧٢	١٧١	٠
٧٨	١٧٤	١
٨٥	١٧٨	٤
٨٢	١٧٢	٧
٦٩	١٦٨	٣
٦٤	١٥٦	٤
٧٩	١٧٧	٣
٧١	١٦٩	١
٧٦	١٧١	٥
٨٥	١٧٨	٤
٦٠	١٥٩	٣
٨٧	١٧٩	٢

٣٣

	A	B	C
1	الأوزان	الأطوال	عدد الإخوة والأخوات
2	70	165	1
3	84	172	3
4	90	181	2
5	78	175	5
6	80	184	4
7	65	163	2
8	72	171	0
9	78	174	1
10	85	178	4
11	82	172	7
12	69	168	3
13	64	156	4
14	79	177	3
15	71	169	1
16	76	171	5
17	85	178	4
18	60	159	3
19	87	179	2

شكل (١)

- نكتب في الخلية D_2 «متوسط الأوزان»، في الخلية E_1 «متوسط الأطوال»، وفي الخلية F_1 «متوسط عدد الإخوة والأخوات»، ومن ثم نحدد الخلية D_2.
- نضغط بواسطة الفأرة على fx كما يبيّن الشكل (٢).

D	E	F
متوسط الأوزان	متوسط الأطوال	متوسط عدد الإخوة والأخوات

شكل (٢)

٣٤

٥ التدريس

بعد أن دخل الحاسوب إلى المجالات كافة وأصبح استخدامه ضرورة ملحة في حياتنا اليومية كان لا بد من إدخاله كوسيلة مهمة في المناهج المدرسية ومن هنا كانت التطبيقات الإحصائية على الحاسوب من الأمور الأساسية لإيجاد مؤشرات النزعة المركزية ومقاييس التشتت وهنا لا بد من لفت نظر المعلم إلى أهمية التأكد من أن طلابه قد تمكنوا من استخدام برنامج Excel وبهذا يمكن التعامل بسهولة مع الأمثلة الواردة في هذا الدرس.

تمرّن ٤-٤

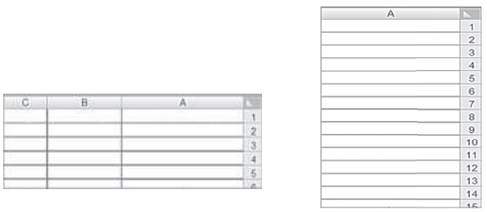
تطبيقات إحصائية
Statistical Applications

المجموعة أ تمارين أساسية

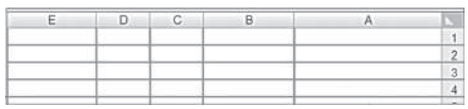
(١) يبيّن الجدول التالي عدد زيارات الأطفال عند الطبيب خلال سنة:

عدد الزيارات عند طبيب الأطفال	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	المجموع
عدد الأطفال	٢	٨	٢٧	٤٥	٣٨	١٥	٤	١	١٤٠

(أ) أوجد المتوسط الحسابي ووسيط هذه البيانات مستخدمًا برنامجًا احصائيًا.



(ب) أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات مستخدمًا برنامجًا إحصائيًا.



• نضع مؤشر الفأرة عند مقبض الخلية (Handel Cell) في الزاوية السفلية اليسرى فيصبح مؤشر الفأرة + كما يظهر في الشكل (٥) ونسحب الفأرة باتجاه السهم وتكون ضاغطًا عليها لتصل إلى الخلية F_2 فيتم بذلك الحصول على متوسط الأطوال في الخلية E_2 ومتوسط عدد الإخوة والأخوات في الخلية F_2 كما تظهر في الشكل (٦) ويعود ذلك إلى مبدأ الخلايا التبادلية (Relative Cell) والذي يعني ارتباط التابع بمكان أصل المعلومة.

شكل (٦)

وبذلك يكون:

متوسط الأوزان = ٧٦,٤ كجم

متوسط الأطوال = ١٧١,٨ سم

متوسط عدد الإخوة والأخوات = ٣

حاول أن تحل

1 في الفصل نفسه تمّ تسجيل علامات الطلاب في مادتي الرياضيات والعلوم كما وردت في الجدول التالي:

الرياضيات	١١	١٨	٩	١٢	٢٠	١٣	١٤	١٦	١٧	١٥	١٠	٧	١٩	١٤	١٢	١٢	١٣	١٨
العلوم	١٢	١٤	٨	١٥	١٣	١٨	١٩	١٤	٦	١٣	١٧	١٤	١١	١٠	١٦	١٣	٧	١٧

أوجد المتوسط الحسابي لدرجات الطلاب في مادتي الرياضيات والعلوم.

(٤-٤-ب) الوسيط Median

مثال (٢)

طلب معلم في مدرسة ثانوية خاصة من طلابه حل مسألتين عبر الشبكة العنكبوتية. بحيث يستخدم الطلاب كلمة مرور للوصول إلى المسائل، ويسجلون للمعلم وقت الدخول والخروج لكل مسألة تلقائيًا. في نهاية الأسبوع، يدرس المعلم مقدار الوقت الذي يستغرقه كل طالب في العمل على حل المسائل. يبيّن الجدول التالي أوقات الطلاب بالدقائق:

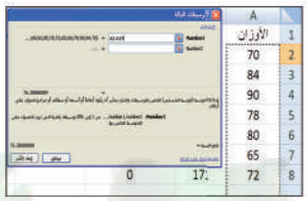
أوقات المسألة الأولى	١٥	٢٨	٢٥	٤٨	٢٢	٤٣	٤٩	٣٤	٢٢	٣٣	٢٧	٢٥	٢٢	٢٠	٣٩
أوقات المسألة الثانية	١٨	٢٧	٢٩	٥٠	٢٣	٣٩	٤٥	٣١	٢٦	٣٧	٣٢	١٩	١٨	٢٦	٤٤

أوجد الوسيط لكل من أوقات المسألة الأولى والثانية.

تظهر النافذة «إدراج دالة» كما يبيّن الشكل (٣) نقوم باختيار «AVERAGE» من قائمة «تحديد دالة».

شكل (٣)

• بعد الضغط على «موافق» تظهر نافذة «وسيطات الدالة» نضع مؤشر الفأرة على «Number 1» ونقوم بتحديد العمود A من الخلية A_2 إلى الخلية A_{19} كما يظهره الشكل (٤) ونضغط على خانة موافق.



شكل (٤)

شكل (٥)

في المثال (١)

يتمكن الطالب من إيجاد المتوسط الحسابي لبيانات تتضمن في الوقت نفسه أكثر من متغير مثل الوزن والطول...
يتميّز هذا المثال بالخطوات المتتابعة والشرح المرافق لكل جدول والصور المأخوذة مباشرة عن شاشة الحاسوب.

في المثال (٢)

يتمكن الطالب من إيجاد الوسيط لقيم بيانات تتضمن أيضًا أكثر من متغير ويتدرج العمل فيه بالطريقة نفسها التي استخدمت في المثال (١).

في المثال (٣)

نستخدم أيضًا في هذا المثال برنامج Excel لإيجاد التباين والانحراف المعياري، والخطوات المتبعة توضّح كيفية استخدام البرنامج كما يبدو في الجداول المصورة كما وردت على شاشة الحاسوب.

٦ الربط

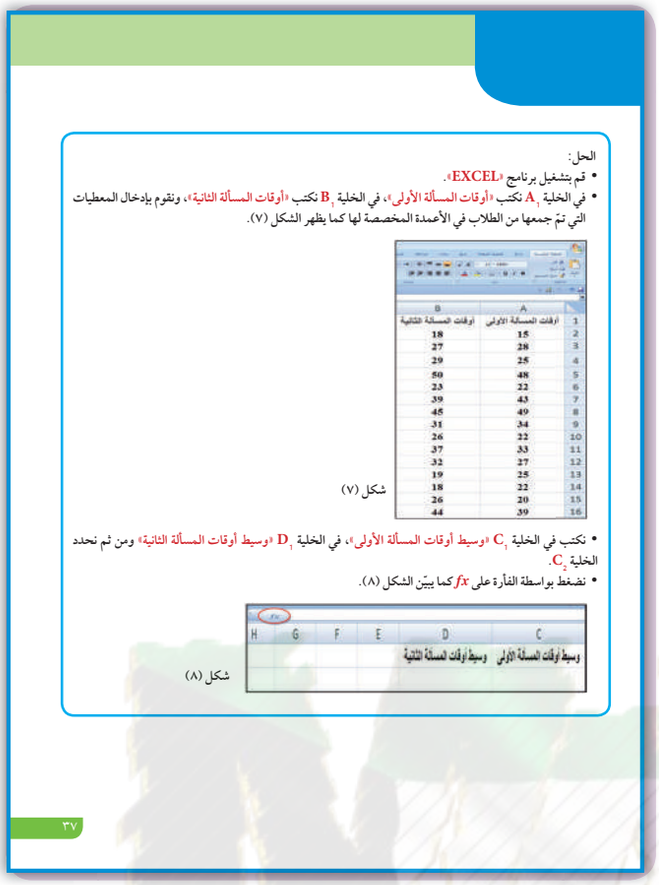
الأمثلة الواردة في هذا الدرس توفر الربط المباشر مع مواقف حياتية غالبًا ما يراها الطالب ويتعامل معها.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطىء الطلاب في استخدام برنامج Excel على الحاسوب. تأكد منذ البداية بأن الطلاب قادرون على استخدام هذا البرنامج.

٨ التقييم

من المهم جدًّا متابعة الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» للتأكد من أنهم استطاعوا تطبيق برنامج Excel في إيجاد مؤشرات النزعة المركزية ومقاييس التشتت المطلوبة.



الحل:

- قم بتشغيل برنامج «EXCEL».
- في الخلية A_1 نكتب «أوقات المسألة الأولى»، في الخلية B_1 نكتب «أوقات المسألة الثانية»، ونقوم بإدخال المعطيات التي تمّ جمعها من الطلاب في الأعمدة المخصصة لها كما يظهر الشكل (٧).

	A	B
1	أوقات المسألة الأولى	أوقات المسألة الثانية
2	15	18
3	28	27
4	25	29
5	48	50
6	22	23
7	43	39
8	49	45
9	34	31
10	22	26
11	33	37
12	27	32
13	25	19
14	22	18
15	20	26
16	39	44

شكل (٧)

- نكتب في الخلية C_1 «وسيط أوقات المسألة الأولى»، في الخلية D_1 «وسيط أوقات المسألة الثانية» ومن ثم نحدد الخلية C_2.
- نضغط بواسطة الفأرة على fx كما يبيّن الشكل (٨).

شكل (٨)

٣٧

- تظهر النافذة «إدراج دالة» كما يبيّن الشكل (٩)، ثم نقوم باختيار «إحصاء» من قائمة «أو تحديد فئة».

شكل (٩)

- ومن ثم نختار «MEDIAN» من قائمة «تحديد دالة» كما في الشكل (١٠).

شكل (١٠)

٣٨

KuwaitMath.com

اختبار سريع

يتضمن الجدول التكراري التالي الرواتب الشهرية لـ ٢٠ موظفًا.

الراتب الشهري بالدينار الكويتي	التكرار
١٧٥٠	٥
٢٠٠٠	٨
٢١٠٠	٥
٢١٥٠	٢

(أ) أوجد المتوسط الحسابي ووسيط الراتب الشهري للموظفين.

إذًا المتوسط الحسابي للرواتب الشهرية يساوي ١٩٧٧,٥ دينارًا والوسيط يساوي ٢٠٠٠ دينار.

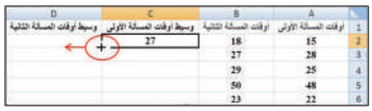
(ب) أوجد الانحراف المعياري.

الانحراف المعياري للرواتب الشهرية يساوي حوالى ١٤١.

- بعد الضغط على «موافق» تظهر نافذة «وسيطات الدالة» نضع مؤشر الفأرة على «Number 1» ونقوم بتحديد العمود A من الخلية A_2 إلى الخلية A_{16} كما يظهره الشكل (١١).

شكل (١١)

- نضغط على «موافق» فيظهر «وسيط أوقات المسألة الأولى» في الخانة C_2 كما في الشكل (١٢).



شكل (١٢)

- نضع مؤشر الفأرة عند مقبض الخلية (Handel Cell) في الزاوية السفلية اليسرى فيصبح مؤشر الفأرة +، نسحب الفأرة باتجاه السهم ونطلب ضاغطين عليها لنصل إلى الخلية D_2 فيتم بذلك الحصول على «وسيط أوقات المسألة الثانية» في الخلية D_2 كما في الشكل (١٣)، ويعود ذلك إلى مبدأ الخلايا التبادلية (Relative Cell) الذي يعني ارتباط التابع بمكان أصل المعلومة.

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) قرر أحد أطباء التخدير قياس معدل الألم لدى سبعة مرضى وذلك باستخدام مؤشر قياس من ١٠٠ ملم، فكانت النتائج كما في الجدول التالي:

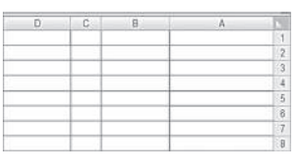
معدل الألم بمقياس ١٠٠ ملم	١	١	٢	٣	٣	٦	٥٦

(أ) أوجد كل من المتوسط الحسابي، الوسيط، الانحراف المعياري مستخدمًا برنامجًا إحصائيًا.

ماذا تلاحظ؟

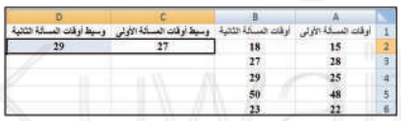
(ب) حوّل هذا الطبيب المعطيات من المقياس الأصلي بالملم إلى مقياس جديد مستخدمًا دالة ln في الآلة الحاسبة فيصبح الجدول كما يلي:

معدل الألم بعد تطبيق ln
٠
٠
٠,٦٩٣١٤٧١٨١
١,٠٩٨٦١٢٢٨٩
١,٠٩٨٦١٢٢٨٩
١,٧٩١٧٥٩٤٦٩
٤,٠٢٥٣٥١٦٩١



أوجد كلًّا من المتوسط الحسابي، الوسيط، الانحراف المعياري مستخدمًا برنامجًا إحصائيًا.

ماذا تلاحظ مقارنة مع نتائج (أ)؟



شكل (١٣)

وبذلك يكون:

وسيط أوقات المسألة الأولى = ٢٧ دقيقة.

وسيط أوقات المسألة الثانية = ٢٩ دقيقة.

حاول أن تحل

٢ قامت مجموعة متخصصة بتحديد جودة البرامج الحوارية ونوعيتها من خلال مراقبتها وإحصاء عدد الكلمات البذيئة والألفاظ النابية التي يجب حذفها وكذلك المشادات البدنية التي يمكن استخدامها مع المعنيين لعدم ملاءمتها العرض، وخصوصًا في النهار وجاءت نتائج مراقبة تلك البرامج لمدة أسبوعين كما يلي:

٣٤٢	٢٦٧	٣٢١	١٥٧	٣٣	٣٤٩	٢٥٤	١٦٦	١٣٢	٢٨٩	٢٩٦	٣٠١	٣٣٣	٣٢٦	٢٨٥	٢٩٨	٣٢٧	٣١٦	٢٨٧	٣١٤

أوجد مستخدمًا برنامجًا إحصائيًا الوسيط لعدد الكلمات البذيئة والمشادات البدنية في البرنامج الحواري التي يجب حذفها أو عدم عرضها.

مثال (٣)

لدينا كتيب مؤلف من ١٢ صفحة يحتوي على أعداد الكلمات التالية:

٢٧١	٣٥٤	٢٩٦	٣٠١	٣٣٣	٣٢٦	٢٨٥	٢٩٨	٣٢٧	٣١٦	٢٨٧	٣١٤

احسب كلًّا من التباين والانحراف المعياري لبيانات أعداد الكلمات في صفحات الكتيب الـ ١٢.

الحل:

- قم بتشغيل برنامج «EXCEL».
- في الخلية A_1 نكتب عدد الكلمات/ الصفحة، ونقوم بإدخال أعداد الكلمات في الصفحات الـ ١٢ للكتيب كما يظهر الشكل (١٤).

KuwaitMath.com

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ المتوسط الحسابي = $\bar{س}$ = ١٣,٨ (رياضيات).

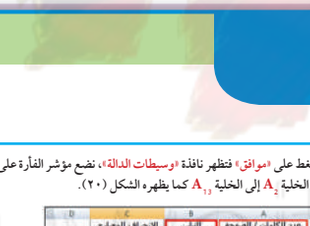
المتوسط الحسابي = $\bar{ع}$ = ١٣,١٦ (علوم).

٢ إذًا وسيط الكلمات البذيئة والمشادات البدنية هو:

٢٦٠,٥

٣ ع = الانحراف المعياري ≃ ٢,٨٧

$ع^{٢}$ = التباين = ٨,٢٥



شكل (١٤)

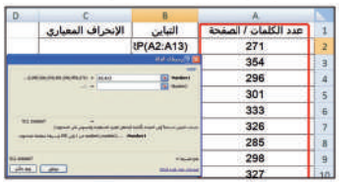
- نقوم بإدخال التباين في الخلية B_1، والانحراف المعياري في الخلية C_1.
- نحدد الخلية B_2، ثم نضغط بواسطة الفأرة على *fx* كما يظهر الشكل (١٥).

شكل (١٥)

- تظهر النافذة «إدراج دالة» كما في الشكل (١٦). فنقوم باختيار «إحصاء» من قائمة «أو تحديد فئة»، ثم نختار من قائمة «تحديد دالة» دالة تباين المجتمع «VARP».

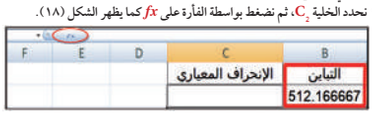
شكل (١٦)

- بعد الضغط على «موافق» تظهر نافذة «وسيطات الدالة» فنضع مؤشر الفأرة على «Number ١» ونقوم بتحديد العمود A من الخلية A_2 إلى الخلية A_{13} كما يظهره الشكل (١٧).



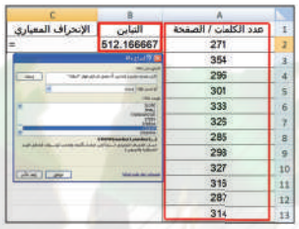
شكل (١٧)

- نضغط على «موافق» فيظهر التباين في المجتمع المؤلف من عدد الكلمات في صفحات الكتيب الـ ١٢ في الخانة B_2 كما في الشكل (١٨).
- نحدد الخلية C_2، ثم نضغط بواسطة الفأرة على *fx* كما يظهر الشكل (١٨).



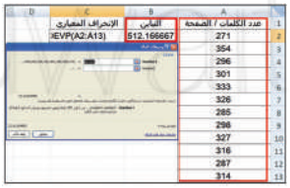
شكل (١٨)

- تظهر النافذة «إدراج دالة» كما يبيّن الشكل (١٩) نقوم باختيار «إحصاء» من قائمة «أو تحديد فئة»، ثم نختار من قائمة «تحديد دالة» دالة الانحراف المعياري «STDEVP».



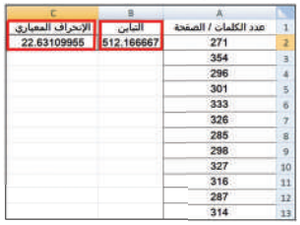
شكل (١٩)

- نضغط على «موافق» فتظهر نافذة «وسيطات الدالة»، نضع مؤشر الفأرة على «Number ١» ونقوم بتحديد العمود A من الخلية A_2 إلى الخلية A_{13} كما يظهره الشكل (٢٠).



شكل (٢٠)

- نضغط على «موافق» فيظهر الانحراف المعياري في المجتمع المؤلف من عدد الكلمات في صفحات الكتيب الـ ١٢ في الخانة C_2 كما في الشكل (٢١).



شكل (٢١)

وبالتالي يكون:

١ التباين في عدد كلمات المجتمع المؤلف من صفحات الكتيب الـ ١٢: ٥١٢,١٦.

٢ الانحراف المعياري في عدد كلمات المجتمع المؤلف من صفحات الكتيب الـ ١٢: ٢٢,٦٣.

حاول أن تحل

٣ أوجد التباين والانحراف المعياري لأول عشرة أعداد كلية من ١ إلى ١٠ مستخدمًا برنامجًا إحصائيًا.

المرشد لحل المسائل

إجابة «مسألة إضافية»

(أ) المتوسط الحسابي للقطر ٤,٩٥ سم. إذًا: الشرط متوفر لأنه يقع بين ٤,٨٨ و٥,١٢

(ب) الانحراف المعياري للقطر يساوي ٠,٢٢ سم تقريبًا، وبالتالي فهذا الشرط متوفر لأنه يقع بين ٠,١٣ و٠,٢٥

(جـ) إن القرار الذي يجب اتخاذه هو الاستمرار في عملية الإنتاج لأن شرطي المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لقطر الكرات المصنعة متوفران في العينة.

تنتج إحدى المؤسسات أكياسًا صغيرة معبأة بالسكر للاستهلاك الشخصي، وقد استخدمت لذلك آلتين على أن يحتوي الكيس الواحد على ٢٦٥ جرامًا فقط.

أخذت عينة عشوائية من ٤٠ كيسًا معبأة من الآلة الأولى وكانت تحوي الكميات التالية:

٢٥٧، ٢٦٠، ٢٦١، ٢٦٢، ٢٦٢، ٢٦٢، ٢٦٢، ٢٦٣، ٢٦٣، ٢٦٣، ٢٦٣، ٢٦٤، ٢٦٤، ٢٦٤، ٢٦٥، ٢٦٥، ٢٦٥، ٢٦٥، ٢٦٦، ٢٦٦، ٢٦٦، ٢٦٦، ٢٦٦، ٢٦٧، ٢٦٧، ٢٦٧، ٢٦٧، ٢٦٧، ٢٦٧، ٢٦٨، ٢٦٨، ٢٦٨، ٢٦٩، ٢٦٩، ٢٦٩، ٢٧٠.

ثم أخذت عينة عشوائية من ٤٠ كيسًا معبأة من الآلة الثانية وكانت تحوي الكميات التالية:

٢٦١، ٢٦٢، ٢٦٢، ٢٦٣، ٢٦٤، ٢٦٤، ٢٦٤، ٢٦٤، ٢٦٥، ٢٦٥، ٢٦٥، ٢٦٥، ٢٦٥، ٢٦٦، ٢٦٦، ٢٦٦، ٢٦٦، ٢٦٧، ٢٦٧، ٢٦٧، ٢٦٧، ٢٦٨، ٢٦٨، ٢٦٨، ٢٦٨، ٢٦٩، ٢٦٩، ٢٦٩، ٢٧٠، ٢٧٠، ٢٧٠، ٢٧١، ٢٧١.

كيف يمكن لهذه المؤسسة أن تتأكد من جودة عمل كل من آلتي التعبئة؟

صالح فكّر

نوجد المتوسط الحسابي لمحتوى الأكياس المعبأة من كل آلة.

بالنسبة إلى الآلة الأولى: $\overline{س} = \frac{١٠٦٠٤}{٤٠} = ١,٢٦٥$.

أي أن المتوسط الحسابي لمحتويات الأكياس هو: $\overline{س} = ١,٢٦٥$ جرامًا.

ومن ثم نوجد المتوسط الحسابي لمحتوى الأكياس المعبأة من الآلة الثانية: $\overline{ص} = \frac{١٠٦٥٨}{٤٠} = ٢٦٦,٤٥$.

أي أن المتوسط الحسابي لمحتويات الأكياس من الآلة الثانية هو: $\overline{ص} = ٢٦٦,٤٥$ جرامًا.

وبالتالي يعتبر الجهاز الأول أفضل من الجهاز الثاني لأن المتوسط الحسابي ١,٢٦٥ جرامًا هو الأقرب إلى شرط التعبئة وهو ٢٦٥ جرامًا.

مسألة إضافية

تمت برمجة إحدى الآلات لتنتج كرات حيث طول قطر الكرة الواحدة ٥ سنتيمترات. ولكن لوحظ أنه يوجد تغيرات بسيطة على طول القطر لعدد كبير من الكرات المنتجة.

بيّن الجدول أدناه طول القطر لعينة من ٤٠ كرة:

٤,٩	٥	٥,٢	٤,٦	٤,٩	٥,٢	٤,٦	٥,١
٥	٤,٧	٤,٨	٥,١	٤,٨	٥,٤	٤,٩	٤,٧
٤,٩	٥	٥,٢	٥,٣	٥,٤	٤,٩	٥	٤,٩
٤,٧	٤,٩	٥,٤	٤,٨	٥,٢	٥	٥,٢	٤,٧
٤,٨	٥,١	٥	٤,٨	٤,٧	٤,٨	٤,٨	٤,٦

١ اعتبرت المؤسسة أن هذه الآلة بحالة جيدة وذا جودة مقبولة شرط أن يكون المتوسط الحسابي $\overline{س}$ لهذه القياسات أصغر من ٥,١٢ وأكبر من ٤,٨٨.

هل هذا الشرط متوفر على المتوسط الحسابي $\overline{س}$ لطول قطر ٤٠ قيمة وردت في جدول العينة العشوائية؟

ب فكرت المؤسسة أنه يمكن للمتوسط الحسابي $\overline{س}$، أن يحقق الشرط الموجود في السؤال ١، لذا أرادت وضع شرط جديد وهو أن يكون الانحراف المعياري لطول القطر أصغر من ٠,٢٥ وأكبر من ٠,١٣ وذلك من خلال قيم العينة العشوائية الواردة في الجدول. فهل هذا الشرط متوفر؟ اشرح.

جـ ما القرار الذي سوف تتخذه المؤسسة: تصليح الآلة أم الاستمرار بالإنتاج؟

خالد فكّر

نوجد الوسيط للقيم في البيانات، ثم الربيع الأدنى، الربيع الأعلى، المدى الربيعي ونحسب النسبة المئوية لقيم البيانات في المدى الربيعي ونقارن بعد ذلك.

الآلة الأولى: الوسيط = ٢٦٦

الربيع الأدنى = ٢٦٣

الربيع الأعلى = ٢٦٧

المدى الربيعي = ٢٦٧ − ٢٦٦ = ١

الآلة الثانية: الوسيط = ٢٦٦,٥

الربيع الأدنى = ٢٦٥

الربيع الأعلى = ٢٦٨,٥

المدى الربيعي = ٢٦٨,٥ − ٢٦٥ = ٣,٥

فأستنتج أن الآلة الأولى أفضل من الآلة الثانية، لأن المدى الربيعي للقيم من الآلة الأولى أصغر من المدى الربيعي للقيم من الآلة الثانية. **جاسم فكّر**

نوجد الانحراف المعياري لقيم البيانات الناتجة من التعبئة في الآلتين، ثم نحسب النسبة المئوية للقيم على الفترة $[\overline{س} - \sigma_{س}، \overline{س} + \sigma_{س}]$ وعلى الفترة $[\overline{ص} - \sigma_{ص}، \overline{ص} + \sigma_{ص}]$ حيث $\overline{س}$، $\overline{ص}$ المتوسط الحسابي للقيم على الترتيب للآلة الأولى وللآلة الثانية، $\sigma_{س}$، $\sigma_{ص}$ الانحراف المعياري للقيم على الترتيب للآلة الأولى وللآلة الثانية.

الآلة الأولى: $\overline{س} = ٢٦٥,١$، $\sigma_{س} = ٢,٨$

الفترة $[\overline{س} - \sigma_{س}، \overline{س} + \sigma_{س}] = [٢٦٢,٢٦٨]$.

عدد القيم المعبأة من الآلة الأولى في الفترة $[٢٦٢,٢٦٨]$ هو ٣٢.

النسبة المئوية $= \frac{٣٢}{٤٠} \times ١٠٠٪ = ٨٠٪$.

الآلة الثانية: $\overline{ص} = ٢٦٦,٤٥$؛ $\sigma_{ص} = ٢,٦٤٥$

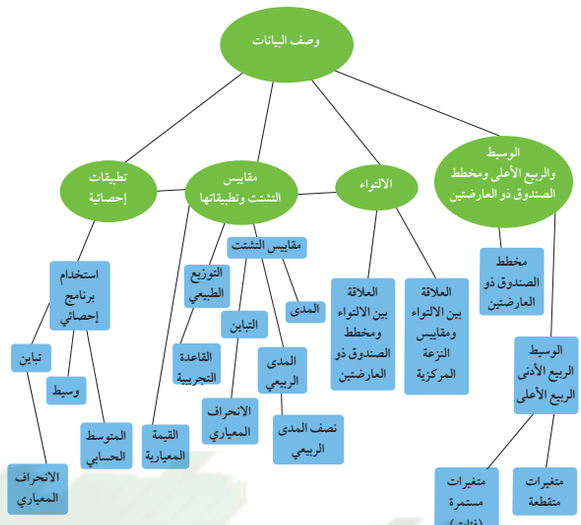
الفترة $[\overline{ص} - \sigma_{ص}، \overline{ص} + \sigma_{ص}] = [٢٦٤,٢٦٩]$.

عدد القيم المعبأة من الآلة الثانية في الفترة $[٢٦٤,٢٦٩]$ هو ٢٩.

النسبة المئوية $= \frac{٢٩}{٤٠} \times ١٠٠٪ = ٧٢,٥٪$

أي أن الآلة الأولى أفضل من الآلة الثانية، لأن النسبة ٨٠٪ هي أكبر من النسبة ٧٢,٥٪.

مخطط تنظيمي للوحدة الرابعة



اختبار الوحدة الرابعة

أسئلة المقال

(١) جاءت نتائج طلاب الفصل الحادي عشر ثانوي في مادة اللغة العربية حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة كما يلي:

١٥، ١٠، ٨، ١٢، ١٦، ١١، ١٣، ١٤، ١٨، ١٧، ١٦، ١٨، ٩، ١٠، ١٢، ١٥، ١٦، ١٧، ١٢، ١٠، ١١، ٩، ٨، ١٤، ١٥، ١٢، ١٠، ١١، ١٤، ١٧

(أ) أوجد وسيط هذه البيانات.

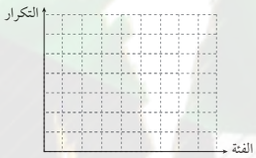
(ب) أوجد الربيع الأدنى والربيع الأعلى.

(جـ) مثّل هذه البيانات بمخطط الصندوق ذي العارضتين.

(٢) جاءت أطوال قامات طلاب الفصل الحادي عشر بالسنتيمتر وفقًا للجدول التالي:

الفئة	١٦٣-	١٦٦-	١٦٩-	١٧٢-	١٧٥-	١٧٨-	المجموع
التكرار	٣	٦	٤	٤	٣	٥	٢٥

(أ) مثّل هذه البيانات بالمدرج التكراري ومنه ارسم المنحنى التكراري.



ملخص

- المتوسط الحسابي هو ناتج قسمة مجموع قيم البيانات على عدد هذه القيم.
- الوسيط هو القيمة التي تقسم مجموعة القيم إلى مجموعتين متساويتين من حيث عدد القيم ويرمز للوسيط بالرمز (م).
- لإيجاد قيمة الوسيط.

أولًا: الوسيط من جدول التكراري

(أ) إذا كان ن (عدد القيم) فردي يكون ترتيب الوسيط على $\frac{ن+1}{2}$ بعد ترتيب البيانات تصاعديًا.

(ب) إذا كان ن (عدد القيم) زوجي يكون ترتيب الوسيط هو المتوسط الحسابي للقيم التي ترتيبها تصاعديًا $\frac{ن}{2}$، $\frac{ن}{2}+1$

ثانيًا: الوسيط والربيع الأدنى والربيع الأعلى من جدول تكراري ذو فئات

(أ) الوسيط (م) = الحد الأدنى لفئة الوسيط + $\frac{\frac{ن}{2} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة الوسيط}}{\text{التكرار الأصلي لفئة الوسيط}}$ × طول الفئة

(ب) الربيع الأدنى ($م_1$)

= الحد الأدنى لفئة الربيع الأدنى + $\frac{\frac{ن}{4} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة الربيع الأدنى}}{\text{التكرار الأصلي لفئة الربيع الأدنى}}$ × طول الفئة

(جـ) الربيع الأعلى ($م_3$)

= الحد الأدنى لفئة الربيع الأعلى + $\frac{\frac{3ن}{4} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة الربيع الأعلى}}{\text{التكرار الأصلي لفئة الربيع الأعلى}}$ × طول الفئة

- فئة الوسيط هي الفئة المقابلة للتكرار المتجمع الصاعد الذي قيمته أكبر من أو يساوي ترتيب الوسيط مباشرة.
- فئة الربيع الأدنى هي الفئة المقابلة للتكرار المتجمع الصاعد الذي قيمته أكبر من أو يساوي ترتيب الربيع الأدنى مباشرة.
- فئة الربيع الأعلى هي الفئة المقابلة للتكرار المتجمع الصاعد الذي قيمته أكبر من أو يساوي ترتيب الربيع الأعلى مباشرة.
- يمكن استخدام برنامج إحصائي لإيجاد مقاييس التشتت (التباين والانحراف المعياري) ولإيجاد مقاييس النزعة المركزية (الوسيط والمتوسط الحسابي).

(ب) هل يوجد التواء؟ حدّد نوعه.

(٣) في دراسة لأوزان عدد من الطلاب بالكيلوجرام جاءت النتائج كما يلي:

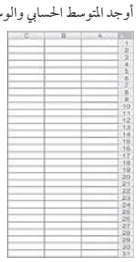
٥٦، ٥٧، ٥٨، ٥٩، ٦٠، ٦١، ٦٢، ٦٣، ٦٤، ٦٥، أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

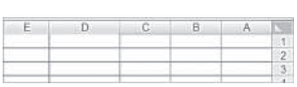
(٤) الدرجة النهائية لأحد طلاب القسم الثانوي في مادة الرياضيات ١٦، المتوسط الحسابي لدرجات الطلاب في مادة الرياضيات ١٣,٥، الانحراف المعياري لهذه الدرجات ١,٧٥، أما الدرجة النهائية لهذا الطالب في مادة العلوم فكانت ١٦ والمتوسط الحسابي لدرجات الطلاب في هذه المادة ١٣ والانحراف المعياري لهذه الدرجات ١,٨، في أي مادة تعتبر درجة هذا الطالب أفضل؟

(٥) لمعرفة جدية الطلاب في أحد الفصول، تم إحصاء عدد الكتب الموجودة مع كل طالب فأتت النتائج على الشكل التالي:

عدد الكتب	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	المجموع
التكرار	٤	١٢	٨	٢	١	٢	١	٣٠

(أ) أوجد المتوسط الحسابي والوسيط مستخدمًا برنامجًا إحصائيًا.





- المنوال هو القيمة الأكثر تكرارًا في البيانات.
- الربيع الأدنى هو وسيط البيانات للقيم ما دون قيمة الوسيط.
- الربيع الأعلى هو وسيط البيانات للقيم أعلى من قيمة الوسيط.
- الصندوق ذي العارضتين هو مخطط يتكون من مستطيل يمثل الربيع الأدنى والربيع الأعلى وبداخله قطعة مستقيمة تمثل الوسيط وله عارضتان يوضع عند نهايتهما القيمة الصغرى والقيمة العظمى.
- الربط بين مقاييس النزعة المركزية والالتواء.
  - إذا كان المنوال < الوسيط < المتوسط الحسابي فإن نوع الالتواء سالب.
  - إذا كان المنوال > الوسيط > المتوسط الحسابي فإن نوع الالتواء موجب.
  - إذا كان المنوال = الوسيط = المتوسط الحسابي فلا يوجد التواء.
- المدى = القيمة العظمى في البيانات − القيمة الصغرى لهذه البيانات.
- نصف المدى الربيعي = $\frac{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{٢}$.
- التباين = $\frac{\sum_{i=1}^{n} ت_i (س_i - \overline{س})^٢}{\sum_{i=1}^{n} ت_i}$
- الانحراف المعياري = $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} ت_i (س_i - \overline{س})^٢}{\sum_{i=1}^{n} ت_i}}$
- القاعدة التجريبية هي واحدة من الفترات التالية: $[\overline{س} - \sigma، \overline{س} + \sigma]$، $[\overline{س} - ٢\sigma، \overline{س} + ٢\sigma]$، $[\overline{س} - ٣\sigma، \overline{س} + ٣\sigma]$، حيث $\overline{س}$ = المتوسط الحسابي لقيم البيانات، σ = الانحراف المعياري لقيم البيانات.
- القيمة المعيارية = $\frac{\text{القيمة} - \text{المتوسط الحسابي}}{\text{الانحراف المعياري}} = \frac{س - \overline{س}}{\sigma}$.

(٦) في التوزيع الطبيعي الفترة $[\overline{س} - \sigma، \overline{س} + \sigma]$ تحتوي على ٩٥٪ من قيم البيانات. ① ب

(٧) في مجموعة بيانات إذا كان المتوسط الحسابي $\overline{س}$ = ١٢ القيمة المعيارية لِ س = ١٥ هي $ن = ٠,٤$ فإن الانحراف المعياري $\sigma = ٧,٥$ ① ب

الاختيار من متعدد: في البنود (٨-١٣)، لكل بند أربعة خيارات واحد فقط منها صحيح، ظلّل رمز الدائرة الدال على الاختيار الصحيح.

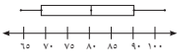
(٨) إذا كانت القيمة المعيارية لِ س = ١٨ من مجموعة بيانات هي $ن = ٠,٧٥$ والانحراف المعياري $\sigma = ٨$ فإن المتوسط الحسابي $\overline{س}$ يساوي:

① ٢٤ ب ١٢ ج −١٢ د −٢٤

(٩) وسيط البيانات التالية: ٥٠، ١، ١٠، ١٥، ٥، ١٠، ١٠، ٢٠، ٢٥، ١٥، هو:

① ١٠ ب ١٢,٥ ج ١٥ د ٢٠

(١٠) من خلال مخطط الصندوق ذي العارضتين التالي، قيمة الربيع الأعلى هي:



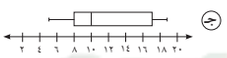
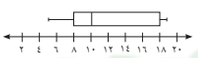
① ٧٠ ب ٨٠ ج ٩٠ د ١٠٠

(١١) البيانات: ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ٩، ٩، ١٠، ١٢، ١٤، ١٧، ١٨، ١٨، ١٩، ١٩ تمثّل عدد ساعات استخدام شبكة الإنترنت من قبل طلاب صف الرياضيات.

أي مخطط صندوق ذو العارضتين أدناه يمثل هذه البيانات؟

①

ب

ج

د 

(١٢) أي مما يلي لا يمثل مقاييس النزعة المركزية.

① المتوسط الحسابي ب الوسيط

ج التباين د المنوال

(١٣) في المنحنى التكراري حيث الالتواء لجهة اليمين يكون المتوسط الحسابي:

① أكبر من الوسيط ب أصغر من الوسيط

ج يساوي الوسيط د ليس أي مما سبق صحيحًا

(ب) أوجد التباين والانحراف المعياري مستخدمًا برنامجًا إحصائيًا.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3							

(٦) تبارى ٩ أصدقاء في ما بينهم لمعرفة عدد الكرات الموجودة داخل علبة مقفلة، عندما يتبيّن أن إحدى الإجابات عن عدد الكرات داخل العلبة صحيحة يكون صاحب الإجابة فائزًا.

جاءت إجابات الأصدقاء كالتالي: ١٢، ٩، ٧، ٢، ٠، −١، −٤، −٧، −٩ (علمًا أن الأعداد السالبة تعني تقدير عدد الكرات أنقص من العدد الفعلي والأعداد الموجبة تعني تقدير عدد الكرات أكبر من العدد الفعلي).

أوجد التباين والانحراف المعياري لأخطاء تقدير عدد الكرات مستخدمًا برنامجًا إحصائيًا.

	A	B	C
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

البنود الموضوعية

في البنود (١-٧) عبارات، ظلّل ① إذا كانت العبارة صحيحة، ب إذا كانت العبارة خاطئة.

(١) في البيانات التالية: ٣، ٨، ١٢، ١٥، ٢٠ نصف المدى الربيعي هو ١٧ ① ب

(٢) في البيانات التالية: ٣٠٨، ٣١٤، ٣١٦، ٣١٧، ٣٢١، ٣٢١، ٣٢٤، ٣٢٥، ٣٢٦، ٣٢٦، ٣٢٧، ٣٣٢ الربيع الأدنى هو ٣١٦,٥ ① ب

(٣) إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة من القيم هو ٤ فإن التباين هو ٢ ① ب

(٤) إذا كان المتوسط الحسابي لِعَيّنة ما يساوي ٢٠ والانحراف المعياري يساوي ٢ والمنحنى على شكل جرس فإن ٩٥٪ من القيم تقع في [١٦، ٢٤] ① ب

(٥) في مجموعة بيانات إذا كان المتوسط الحسابي $\overline{س}$ = ١٤، والانحراف المعياري σ = ٤ فإن القيمة المعيارية لِ س = ١٦ هي $ن = \frac{١}{٢}$ ① ب

تمارين إثرائية

(١) في دراسة لأطوال قامات عدد من المراهقين بالسنتيمتر كانت النتائج كما يبيّن الجدول التالي:

الطول	١٥٨	١٥٩	١٦٠	١٦١	١٦٢	١٦٣	١٦٤	١٦٥	١٦٦	١٦٧	١٦٨	١٦٩	١٧٠	١٧١	١٧٢	المجموع
التكرار	٢	٣	٤	٢	١	٥	٣	١	٢	٦	٧	٨	٤	١	١	٥٠

(أ) أوجد الوسيط لهذه البيانات.

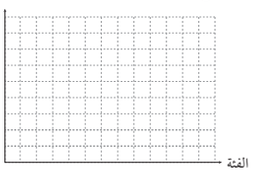
(ب) أوجد الربيع الأدنى والربيع الأعلى.

(جـ) مثّل هذه البيانات على مخطط الصندوق ذي العارضتين.

(٢) في اختبار مادة الكيمياء كانت درجات الطلاب حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة كما يبيّن الجدول التكراري التالي:

الفئة	−٦	−٨	−١٠	−١٢	−١٤	−١٦	−١٨	المجموع
التكرار	٢	٥	٧	٨	٦	٣	١	٣٢

(أ) مثّل هذه البيانات بالمدرج التكراري ومنه ارسم المنحنى التكراري.

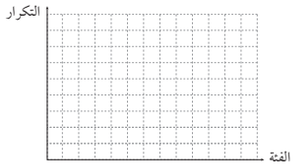


(ب) هل يوجد التواء؟ حدّد نوعه إن وجد.

(٣) لاحظ المدرب أن أطوال قامات لاعبي كرة السلة (بالسنتيمتر) موزعة على الجدول التكراري التالي:

الفئة	١٧٥-	١٨٠-	١٨٥-	١٩٠-	١٩٥-	٢٠٠-	المجموع
التكرار	٢	٣	٥	٦	٨	٣	٢٧

(أ) مثّل هذه البيانات بالمدرج التكراري ومنه ارسم المنحنى التكراري.



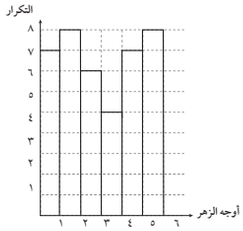
(ب) هل يوجد التواء؟ حدّد نوعه إن وجد.

(٤) في اختبار اللغة العربية جاءت نتائج طلاب الصف الحادي عشر حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة كما يبيّن الجدول التكراري التالي:

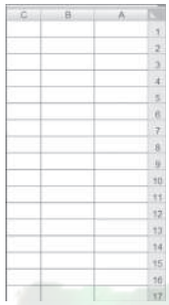
الدرجة	٦-	٨-	١٠-	١٢-	١٤-	المجموع
التكرار	٦	٤	٣	٩	٨	٣٠

أوجد المتوسط الحسابي $\overline{س}$ والانحراف المعياري ع لقيم هذه البيانات.

(٧) سجّل فيصل نتائج رمي حجر النرد عددًا من المرات فكانت النتائج كما في التمثيل البياني التالي:



(أ) كوّن جدولًا تكراريًا لهذه البيانات.



(ب) أوجد المتوسط الحسابي والوسيط لهذه البيانات مستخدمًا برنامجًا إحصائيًا.

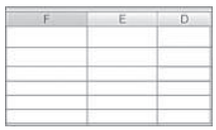
(٥) في العاصمة الكويت كان معدل درجات الحرارة لشهر يونيو من سنة ٢٠١١ حوالى ٤٣° مئوية والانحراف المعياري ٢,٥، وفي السالمية كان معدل درجات الحرارة لشهر يونيو من سنة ٢٠١١ حوالى ٤١° مئوية والانحراف المعياري ٣,٧٥

أوجد القيمة المعيارية لدرجة حرارة ٤٥° مشتركة في أحد أيام شهر يونيو من سنة ٢٠١١

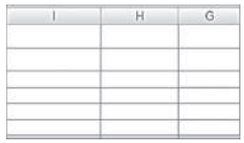
(٦) لدينا مجموعة الأعداد التالية: ٨، ٧، ٣، ٤، ٣.

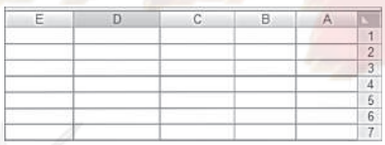
(أ) أوجد المتوسط الحسابي لهذه الأعداد والانحراف المعياري.

(ب) إذا أضفنا ٥ على كل عدد من هذه الأعداد فأوجد متوسطها الحسابي والانحراف المعياري باستخدام برنامج احصائي. ماذا تستنتج؟

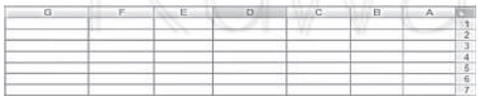


(جـ) إذا ضربنا ٥ على كل عدد من هذه الأعداد فأوجد متوسطها الحسابي والانحراف المعياري. ماذا تستنتج؟





(جـ) أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات مستخدمًا برنامجًا إحصائيًا.



KuwaitMath.com