الوحدة الخامسة: الاحتمال

Probability

قُسمت الدروس في هذه الوحدة إلى أجزاء.

٥ – ١ : مبدأ العد والتباديل والتوافيق

- العد عن طريق القوائم.
- المبدأ الأساسي للعد.
- مضروب العدد.
- التباديل.
- التوافيق.

٥ – ٢ : نظرية ذات الحدين

- مثلث باسكال.
- نظرية ذات الحدين.

٥ – ٣: الاحتمال

- التجربة العشوائية وفضاء العينة.
- تعيين احتمالات الأحداث.
- الأحداث المتنافية
- متمم الحدث
- الحدثان المستقلان.

مقدمة الوحدة

الوحدة الخامسة

الاحتمال

Probability

مشروع الوحدة: تعرف معالم بلدك.

١ مقدمة المشروع: هل سبق أن زرت محمية في بلدك؟ إذا أردت القيام بزيارة لإحدى المحميات، فكيف يتمّ اختيارها؟

٢ الهدف: تقوم مؤسّسات كويتية بحملات إعلامية ومشاريع تهدف إلى حماية بعض الحيوانات وبعض أنواع النباتات المهدّدة بالانقراض. ضع ملصقًا لمحميّة طبيعيّة في بلدك تبرز فيه بعض الحيوانات والنباتات التي تعيش في هذه المحميّة.

٣ اللوازم: أوراق ملونة، مقص، مسطرة، حاسوب، جهاز إسقاط، بطاقات متماثلة لصور نباتات وحيوانات تعيش في الكويت.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ اختر بطاقات متماثلة لصور نباتات وحيوانات تعيش في دولة الكويت (عدد كل منها ١٠).

ب إذا وضعت البطاقات في علبة، ثم سحبت منها بطاقة عشوائيًّا، فما احتمال الحصول على صورة نبات؟ وما احتمال الحصول على صورة حيوان؟

جـ اخلط البطاقات جيّدًا. اسحب بطاقة، دوّن اسمها (نبات، حيوان)، ثم أعد السحب خمسين مرة متتالية.
قارن بين $\frac{\text{عدد صور النبات}}{٥٠}$، واحتمال الحصول على صورة نبات.
أعد العملية نفسها مع صور الحيوانات.

د أعد الفقرة جـ. ولكن هذه المرة قم بالخطوات مئة مرة متتالية.

هـ كوّن جدولًا يتضمن نتائج سحوباتك واحتمالي الحدثين.

٥ التقرير: ضع تقريرًا يتضمن أسباب اختيارك للمحمية.
أرفق تقريرك بعرض على الحاسوب أو على جهاز الإسقاط لهذه المواقع ولبعض الحيوانات التي تعيش في الصحراء الكويتية.

دروس الوحدة

٥-١ مبدأ العد والتباديل والتوافيق	٥-٢ نظرية ذات الحدين	٥-٣ الاحتمال
(٥-١-أ) العد عن الطريق القوائم	(٥-٢-أ) مثلث باسكال	(٥-٣-أ) التجربة العشوائية وفضاء العينة
(٥-١-ب) المبدأ الأساسي للعد	(٥-٢-ب) نظرية ذات الحدين	(٥-٣-ب) تعيين احتمالات الأحداث
(٥-١-جـ) مضروب العدد		(٥-٣-جـ) الأحداث المتنافية
(٥-١-د) التباديل		(٥-٣-د) متمم الحدث
(٥-١-هـ) التوافيق		(٥-٣-هـ) الحدثان المستقلان

٥٠

من المعروف أن الأبحاث الأولية في علم الاحتمال كانت قد بدأت في أواخر القرن الخامس عشر وتحديدًا عام ١٤٩٤ مع عالم الرياضيات الإيطالي «لوكا باتشولي» (Luca Pacioli) الذي ناقش نواتج ألعاب الحظ.

ثم جاء في ما بعد الفيزيائي والفلكي الإيطالي المشهور «جاليليو جاليلي» ليقدم مساهمة كبيرة في حل مشاكل ألعاب الحظ.

في أوائل القرن السابع عشر كان الفيلسوف الإنجليزي «فرانسيس بيكون» أول من نادى باستخدام المنهج الاستقرائي لدراسة مسائل تتعلق بنواتج الحظ.

ولكن هذه الإسهامات بقيت في حدودها الأولى حتى منتصف القرن السابع عشر عندما ساهم العالم الفرنسي «باسكال» في الإجابة عن «مشكلة النقاط» التي تتضمن السؤالين التاليين:

(١) ما هو أصغر عدد من الرميات يستطيع المرء بعدّها أن يتوقع ظهور الرقم ٦ أثناء رمي حجري نرد معًا؟

(٢) إذا أوقف اللاعبان لعبتهما بإرادتهما قبل نهاية الدورة المحددة وأرادا تقاسم ما جاء به الحظ بشكل عادل، فماذا سينال كل منهما؟

المهم أن «باسكال» أثناء محاولته حل «مشكلة النقاط» اكتشف أداة لحساب التوافيق عرفت في ما بعد باسم «مثلث باسكال»، الذي ساعد لاحقًا في تحقيق قفزة مهمة لصالح نظرية الاحتمال.

في عام ١٦٦٦ اكتشف العالم الإنجليزي «نيوتن» نظام العد الذي تمّ نشره في ما بعد عام ١٦٨٧، بعد ذلك أصدر «أبراهام دي موافر» كتابه تحت عنوان «مبدأ الفرص» الذي ساهم في تعميق علم الاحتمال.

ثم كان للعالم الألماني «غاوس» دور أساسيّ وبارز في تحديد أساسيات توزيع الاحتمال ولا يزال حتى اليوم المنحنى البياني للاحتمال يحمل اسمه.

وساهم «لابلاس» في إثراء نظرية تكرار الأحداث، لذلك اعتبرت أعماله أساسية في بلورة نظرية الاحتمال.

مشروع الوحدة

يتناول مشروع الوحدة في العنوان العريض التعرف على معالم دولة الكويت، ولكن في الممارسة العملية يتوجه إلى الناحية الحسابية وهي إيجاد احتمال لحدث معين، وهذا هو الهدف الأساس من الاحتمال أي التعامل مع المواقف الحياتية.

حفزّ الطلاب للقيام بزيارات إلى مواقع ومحميات تختارها لهم.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

(تتنوع الإجابات – تحقق من عمل الطلاب).

التقرير

يجب أن يتضمن التقرير الخطوات كافة المطلوب تحقيقها من حيث التنفيذ والنتائج. اعرض محتوى التقرير على زملائك في غرفة الصف. ناقش معهم كل ما ورد في هذا التقرير، أعد النظر ببعضها إذا كان ذلك ضروريًّا.

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت رسم مخطط الشجرة البيانية واستخدامه في مبدأ العد.
- تعرفت طرائق العد مثل الجداول ومخططات فن والتباديل والتوافيق.
- استخدمت طرق العد في حل بعض المسائل.

ماذا سوف تتعلم؟

- حل مسائل باستخدام مبدأ العد والتباديل والتوافيق.
- استخدام مثلث باسكال.
- استخدام نظرية ذات الحدين.
- تعرف التجربة العشوائية وفضاء العينة العشوائية.
- تعيين احتمالات الأحداث والأحداث المتنافية والحدث المتمم والأحداث المستقلة.

المصطلحات الأساسية

القوائم – مبدأ العد الأساسي – مضروب العدد – التباديل – التوافيق – مثلث باسكال – نظرية ذات الحدين – التجربة العشوائية – فضاء العينة – الحدث – احتمال الحدث – الأحداث المتنافية – متمم الحدث – الأحداث المستقلة.

أضف إلى معلوماتك

قام الرياضي السويسري جاك برنولي (١٦٥٤ – ١٧٣٤) بدراسة التجارب العشوائية المستقلة لأول مرة وذلك في كتابه «فن الحدس» الذي نشره ابن أخيه نقولا برنولي بعد وفاته بثماني سنوات.

يبيّن برنولي في كتابه النتيجة التالية: «إن تكرار ظهور ناتج في جملة تجارب يقترب كثيرًا من احتمال حدوث هذا الحدث».

على سبيل المثال، إذا ألقي حجر نرد منتظم فإن احتمال ظهور العدد ٢ هو $\frac{١}{٦}$. إذا كررنا إلقاء حجر النرد عددًا كبيرًا من المرات (ن) فإنه من شبه المؤكد أن عدد مرات ظهور العدد ٢، وليكن م، يحقق $\frac{م}{ن} = \frac{١}{٦}$.

ويُسمى هذا التعبير الرياضي بقانون الأعداد الكبيرة.

حاليًّا نستخدم المحاكاة على الحاسوب للتحقق مما جاء في كتاب برنولي.

٥١

سلّم التقييم

٤	الحسابات صحيحة ودقيقة – الجدول بكامله منظم ودقيق – التقرير مفصل وواضح ويعكس اقتراحات ممتازة.
٣	معظم الحسابات صحيحة – الجدول منظم مع بعض النواقص – التقرير مفصل وواضح مع بعض الثغرات.
٢	بعض الحسابات صحيح – أخطاء متعددة في الجدول – التقرير بحاجة إلى صياغة أوضح وإلى تفصيل أكثر.
١	معظم عناصر المشروع بحاجة إلى إعادة حل لأنها ناقصة.

٥ـ١: مبدأ العد والتباديل والتوافيق

١ الأهداف

- يتعرف بعض طرق العد.
- يتعرف المبدأ الأساسي للعد ويستخدمه.
- يستخدم قانون التباديل.
- يستخدم قانون التوافيق.

٢ المفردات الأساسية والمفاهيم الجديدة

العد – المبدأ الأساسي للعد – العد عن طريق القوائم – مضروب العدد – التباديل – قانون التباديل – التوافيق – قانون التوافيق.

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

٤ التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(أ) إذا رميت حجر نرد، فما هي النتائج الممكنة؟ اشرح.

(ب) إذا رميت قطعة نقود معدنية، فما هي النتائج الممكنة؟ اشرح.

(جـ) هل الزوج المرتب (٣، ٥) والزوج المرتب (٥، ٣) يمثلان النقطة نفسها على المستوى الإحداثي؟ اشرح.

٥ التدريس

يعتبر المبدأ الأساسي للعد إلى جانب التباديل والتوافيق مدخلًا مهمًا للتعامل مع علم الاحتمال.

١–٥

مبدأ العد والتباديل والتوافيق

Counting Principle, Permutations and Combinations

عمل تعاوني

تتكون شيفرة من حرفين مختلفين يليهما عدد من رقم واحد غير صفري. نريد تحديد عدد الطرق المختلفة التي يمكن بها تكوين هذه الشيفرة؟

١ هل ترتيب الحرفين مهم في الشيفرة؟

٢ إذا ابتدأت الشيفرة بالحرف أ، بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار الحرف الثاني؟

٣ إذا اختير الحرفان أ، ب بالترتيب، بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار العدد؟

٤ بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار الحرفين؟

٥ بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار الشيفرة؟

سوف تتعلم

- بعض طرق العد.
- استخدام مبدأ العد في حل المسائل.
- استخدام التباديل والتوافيق في حل المسائل.

(٥–١–أ) العد عن طريق القوائم — Counting by Using lists

بعض الأشياء سهلة العد مثل عدد الطلاب في الصف أو عدد بطاقات الطلاب عند المسؤول الصحي في المدرسة.

بعض الأشياء يصعب عدها مثل عدد سكان مجمع أو عدد الحضور في مسرح.

لذا تستخدم تقنيات العد لتوفير الجهد والوقت والمال.

يمكن أن نحل بعض مسائل العد عن طريق ترتيب المجموعة التي سوف نقوم بعدّها أي بوضع قائمة مرتبة.

مثال (١)

استعدادًا لحفل نهاية العام الدراسي كلّف مدير المدرسة صالح وخالد وسالم وأحمد الاهتمام بالتقاط الصور وتوزيع البطاقات على المدعوين واستقبال الأهل وتوزيع المرطبات.

بكم طريقة مختلفة يمكن توزيع المهام على الطلاب الأربعة؟

الحل:

نظّم قائمة مرتّبة.

مثال: صالح يلتقط الصور، خالد يوزّع البطاقات، سالم يستقبل الأهل، أحمد يوزّع المرطبات.

وسنستخدم لذلك الترميز التالي:

صالح – خالد – سالم – أحمد، تصبح القائمة كما يلي:

٥٢

صالح – خالد – سالم – أحمد	خالد – صالح – سالم – أحمد
صالح – خالد – أحمد – سالم	خالد – صالح – أحمد – سالم
صالح – سالم – خالد – أحمد	خالد – سالم – صالح – أحمد
صالح – سالم – أحمد – خالد	خالد – سالم – أحمد – صالح
صالح – أحمد – خالد – سالم	خالد – أحمد – صالح – سالم
صالح – أحمد – سالم – خالد	خالد – أحمد – سالم – صالح
سالم – صالح – خالد – أحمد	أحمد – صالح – خالد – سالم
سالم – صالح – أحمد – خالد	أحمد – صالح – سالم – خالد
سالم – خالد – صالح – أحمد	أحمد – خالد – صالح – سالم
سالم – خالد – أحمد – صالح	أحمد – خالد – سالم – صالح
سالم – أحمد – صالح – خالد	أحمد – سالم – صالح – خالد
سالم – أحمد – خالد – صالح	أحمد – سالم – خالد – صالح

∴ يوجد ٤ × ٦ = ٢٤ طريقة مختلفة لتوزيع المهام على الطلاب الأربعة.

حاول أن تحل

١ باستخدام ثلاثة أحرف من كلمة ناصر ودون تكرار أي حرف منها، كم كلمة مختلفة يمكن الحصول عليها؟ (لها معنى أو بدون معنى).

(٥–١–ب) المبدأ الأساسي للعد — Fundamental Counting Principle

تريد تنفيذ عمل على ٣ مراحل متتابعة. هناك ٣ طرائق مختلفة لتنفيذ المرحلة الأولى و٤ طرائق مختلفة لتنفيذ المرحلة الثانية وطريقة واحدة لتنفيذ المرحلة الثالثة.

ما عدد الطرائق الممكنة لتنفيذ هذا العمل؟

عدد الطرائق الممكنة: ٣ × ٤ × ١ = ١٢ طريقة

مفتاح حل المسائل باستخدام المبدأ الأساسي للعد باتباع الخطوات التالية:

- تحديد عدد المراحل (م)
- تحديد عدد طرائق كل مرحلة: $ن_١$ ، $ن_٢$ ، $ن_٣$ ، ... ، $ن_م$
- عدد طرائق إجراء العملية هو $ن_١ \times ن_٢ \times ن_٣ \times ... \times ن_م$

٥٣

في المثال (١)

شجّع الطلاب على تنظيم قوائم كمرحلة أولى لترتيب عناصر ضمن شروط محددة. مثال على ذلك في كلمة «دعم». إذا كان المطلوب تنظيم قائمة من حرفين على ألا يتكرر الحرف نحصل على ما يلي:

دع دم عد عم مد مع

لاحظ أنه من المستحسن أن تكمل الترتيب مع كل حرف تبدأ به. شدّد للطلاب على هذه الفكرة حيث يبدو ذلك جليًّا في المثال (١)، إذ تظهر الحلول مقسمة إلى ٤ مجموعات:

المجموعة الأولى: البادئة فيه هي صالح.

المجموعة الثانية: البادئة فيه هي خالد.

المجموعة الثالثة: البادئة فيه هي سالم.

المجموعة الرابعة: البادئة فيه هي أحمد.

في المثال (٢)

نبّه الطلاب إلى أنه في ترقيم السيارات ترتيب الأرقام مهم. يمكن اعتماد الشكل □□□ : في الخانة إلى اليمين (المرحلة الأولى) نختار حرفًا من ٢٨. في الخانة الوسط (المرحلة الثانية) نختار رقمًا من ٦ وفي الخانة إلى اليسار (المرحلة الثالثة) نختار رقمًا من ٥ (الأرقام الباقية).

في المثال (٣)

يشبه قليلًا المثال (٢) ولكن على المعلم مناقشة فكرة السماح بالتكرار أو عدمه وتأثير ذلك على عمليّة العد.

في الجزء (جـ) أرشد الطلاب إلى أن رقم الآحاد هو ثابت، وبالتالي لا اختيارات لذلك. يبقى إذًا اختيار ٣ أرقام دون تكرار.

المبدأ الأساسي للعد

لإجراء عملية على م مرحلة متتابعة، وقد أجريت المرحلة الأولى بـ ن$_1$ طريقة مختلفة، والمرحلة الثانية بـ ن$_2$ طريقة مختلفة، وهكذا حتى المرحلة الأخيرة م بـ ن$_م$ طريقة مختلفة، فإن عدد طرائق إجراء هذه العملية هو: ن$_1$ × ن$_2$ × ... × ن$_م$.

مثال (٢)

لوحات السيارات في إحدى القرى السياحية تبدأ من اليمين بحرف من حروف الأبجدية يتبعه رقمان يتم اختيارهما من المجموعة {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}.

كم عدد لوحات السيارات الممكنة بحيث أنه لا يوجد تكرار لأي من الحروف أو الأرقام في أي من لوحات السيارات؟

الحل:

طريقة أولى:

تحديد عدد المراحل:

المرحلة الأولى: اختيار الحرف

المرحلة الثانية: اختيار رقم الآحاد

المرحلة الثالثة: اختيار رقم العشرات

عدد طرائق المرحلة الأولى = ٢٨

عدد طرائق المرحلة الثانية = ٦

عدد طرائق المرحلة الثالثة = ٥

عدد الطرائق: ٢٨ × ٦ × ٥ = ٨٤٠ طريقة

طريقة ثانية:

عدد طرائق اختيار الحرف	عدد طرائق اختيار رقم الآحاد	عدد طرائق اختيار رقم العشرات
٢٨	٦	٥

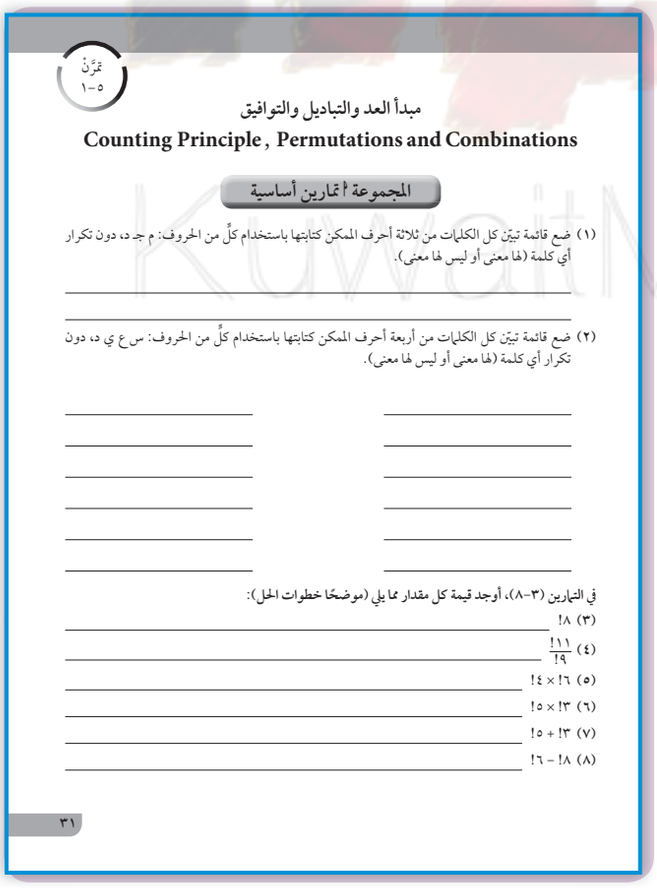
عدد الطرائق = ٢٨ × ٦ × ٥

= ٨٤٠ طريقة

حاول أن تحل

٢ في المثال (٢) كم عدد لوحات السيارات إذا كانت اللوحات تبدأ من اليمين بحرف من حروف الأبجدية يتبعه ثلاثة أرقام يتم اختيارها من المجموعة {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}.

٥٤



تمرَّنْ ٥-١

مبدأ العد والتباديل والتوافيق

Counting Principle , Permutations and Combinations

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) ضع قائمة تبيّن كل الكلمات من ثلاثة أحرف الممكن كتابتها باستخدام كلٍّ من الحروف: م جـ د، دون تكرار أي كلمة (لها معنى أو ليس لها معنى).

(٢) ضع قائمة تبيّن كل الكلمات من أربعة أحرف الممكن كتابتها باستخدام كلٍّ من الحروف: س ع ي د، دون تكرار أي كلمة (لها معنى أو ليس لها معنى).

في التمارين (٣-٨)، أوجد قيمة كل مقدار مما يلي (موضحًا خطوات الحل):

(٣) ٨!

(٤) $\frac{١١!}{٩!}$

(٥) ٦! × ٤!

(٦) ٣! × ٥!

(٧) ٣! + ٥!

(٨) ٨! − ٦!

٣١

في المثال (٤)

توسع في شرح مضروب العدد. أخبرهم أن ذلك لا يستخدم إلّا مع الأعداد الكلية فقط وأنه مصطلح يختصر ضرب أعداد كلية متتابعة انطلاقًا من العدد ١، كما أن ٠! = ١ هو مصطلح له مدلول معيّن سوف يجدون في ما بعد تفسيرًا له.

في المثال (٥)

تطبيق مباشر على مبدأ التباديل لأن ترتيب العناصر مهم ولا تكرار لأي عنصر. أشر إلى أنه يمكن حل المسألة بضرب ٣ أعداد (٣ مراكز) بدءًا بـ ٢٠، ويتناقص العدد كل مرة واحد: ٢٠ × ١٩ × ١٨

في المثال (٦)

يهدف إلى تدريب الطلاب على التعامل بسلاسة ومرونة في احتساب التباديل.

في المثال (٧)

هذا المثال هو تطبيق مباشر لمبدأ التباديل حيث ترتيب اللاعبين مهم ولا تكرار لأي لاعب.

مثال (٣)

كم عدد الأعداد المكون رمز كل منها من أربعة أرقام مأخوذة من عناصر المجموعة {٢، ٥، ٦، ٨} في كل مما يلي:

أ إذا سمح بالتكرار.

ب إذا لم يسمح بالتكرار.

ج إذا كان رقم الآحاد ٢ (لا يسمح بالتكرار)

الحل:

أ إذا سمح بالتكرار

∴ عدد طرائق اختيار رقم الآحاد = ٤

عدد طرائق اختيار رقم العشرات = ٤

عدد طرائق اختيار رقم المئات = ٤

عدد طرائق اختيار رقم الألوف = ٤

عدد الأعداد = ٤ × ٤ × ٤ × ٤ = ٢٥٦

ب إذا لم يسمح بالتكرار

∴ عدد طرائق اختيار رقم الآحاد = ٤

عدد طرائق اختيار رقم العشرات = ٣

عدد طرائق اختيار رقم المئات = ٢

عدد طرائق اختيار رقم الألوف = ١

عدد الأعداد = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤

ج رقم الآحاد ٢ ∴ يبقى ٣ مراحل ∴ عدد الأعداد = ١ × ٣ × ٢ × ١ = ٦

حاول أن تحل

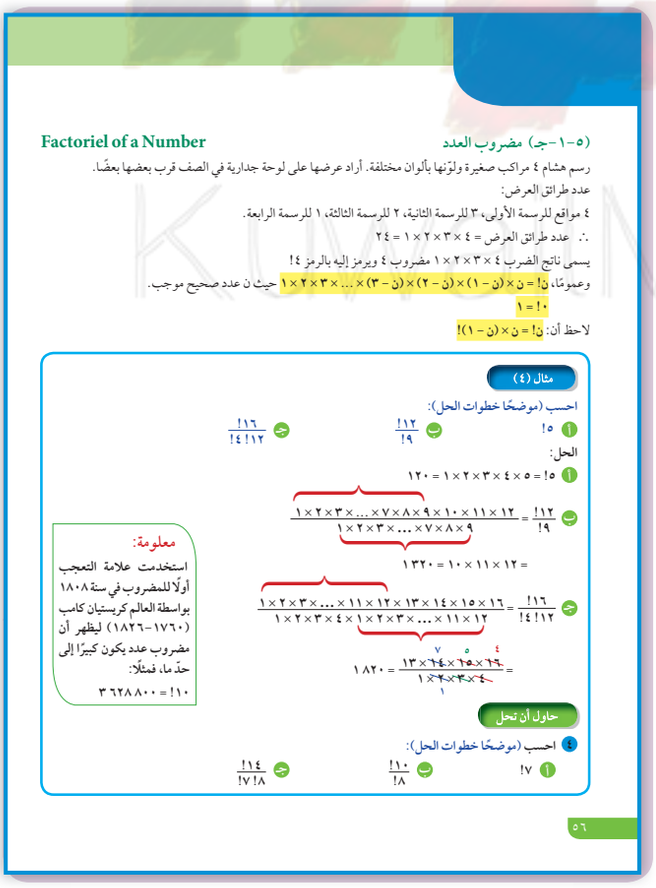
٣ كم عدد الأعداد المكون رمز كل منها من ثلاثة أرقام مأخوذة من عناصر المجموعة {١، ٣، ٦، ٩} في كل مما يلي:

أ إذا سمح بالتكرار.

ب إذا لم يسمح بالتكرار.

ج إذا كان العدد فردي ويسمح بالتكرار.

٥٥



(٥-١-جـ) مضروب العدد — Factoriel of a Number

رسم هشام ٤ مراكب صغيرة ولوّنها بألوان مختلفة. أراد عرضها على لوحة جدارية في الصف قرب بعضها بعضًا.

عدد طرائق العرض:

٤ مواقع للرسمة الأولى، ٣ للرسمة الثانية، ٢ للرسمة الثالثة، ١ للرسمة الرابعة.

∴ عدد طرائق العرض = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤

يسمى ناتج الضرب ٤ × ٣ × ٢ × ١ مضروب ٤ ويرمز إليه بالرمز ٤!

وعمومًا، ن! = ن × (ن − ١) × (ن − ٢) × (ن − ٣) × ... × ٣ × ٢ × ١ حيث ن عدد صحيح موجب.

٠! = ١

لاحظ أن: ن! = ن × (ن − ١)!

مثال (٤)

احسب (موضحًا خطوات الحل):

أ ٥! ب ١٢!/٩! ج ١٦!/(١٢! ٤!)

الحل:

أ ٥! = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠

ب ١٢!/٩! = (١٢ × ١١ × ١٠ × ٩ × ٨ × ٧ × ... × ٣ × ٢ × ١)/(٩ × ٨ × ٧ × ... × ٣ × ٢ × ١) = ١٢ × ١١ × ١٠ = ١٣٢٠

ج ١٦!/(١٢! ٤!) = (١٦ × ١٥ × ١٤ × ١٣ × ١٢ × ١١ × ... × ٣ × ٢ × ١)/(١٢ × ١١ × ... × ٣ × ٢ × ١ × ٤ × ٣ × ٢ × ١) = (١٦ × ١٥ × ١٤ × ١٣)/(٤ × ٣ × ٢ × ١) = ١٣ × ٧ × ٥ × ٤ = ١٨٢٠

معلومة:

استخدمت علامة التعجب أولًا للمضروب في سنة ١٨٠٨ بواسطة العالم كريستيان كامب (١٧٦٠-١٨٢٦) ليظهر أن مضروب عدد يكون كبيرًا إلى حدّ ما، فمثلًا:

١٠! = ٣ ٦٢٨ ٨٠٠

حاول أن تحل

٤ احسب (موضحًا خطوات الحل):

أ ٧! ب ١٠!/٨! ج ١٤!/(٨! ٧!)

٥٦

في المثال (٨)

الهدف في هذا المثال هو تشكيل مجموعات جزئية من ٣ دون استخدام ترتيب معين للعناصر ولا تكرار لأي عنصر. وهذا هو مبدأ التوافيق.

في المثال (٩)

هذا المثال هو تعميم لمبدأ التوافيق حيث يتم تشكيل ٣ مجموعات جزئية. ناقش مع الطلاب لماذا تمّ ضرب التوفيقات الثلاث ولم يتم جمعها.

في المثال (١٠)

يتدرب الطلاب في هذا المثال على التعامل بسهولة مع التوافيق وكيفية احتسابها. ذكرهم بأن الأعداد هي كلية. أشر إلى ضرورة التبسيط أثناء الحل.

٦ الربط

جميع الأمثلة في هذا الدرس هي ربط مباشر بين مفاهيم هذا الدرس ومهاراته ومواقف حياتية معروفة.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام القوانين للتباديل والتوافيق. ساعدهم من خلال أمثلة على إيجاد الفرق بين الحالتين.

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يجيبون عن أسئلة «حاول أن تحل» لتتأكد من قدرتهم على فهم مبدأ العد والفرق بين التباديل والتوافيق، ومتى يستخدمون كل قانون.

(٥-١-د) التباديل Permutations

في المثالين (٢)، (٣)، كان الترتيب مهمًّا ومأخوذًا بعين الاعتبار. فمثلًا في مثال (٢) لوحة السيارة ب ٢١ تختلف عن لوحة السيارة ب ١٢. مثل هذا الترتيب يسمى **تبديلًا**. عامة:

- التبديل هو وضع العناصر وفق ترتيب معين.
- عدد تباديل ن من الأشياء هو ن!.

مثال (٥)

فصل فيه ٢٠ طالبًا. يراد اختيار ثلاثة منهم على أن يكون الأول رئيسًا والثاني نائبًا للرئيس والثالث أمينًا للسر. بكم طريقة يمكن اختيار الطلاب الثلاثة؟

الحل:

توجد ٢٠ طريقة مختلفة لاختيار الرئيس و١٩ طريقة مختلفة لاختيار نائب الرئيس و١٨ طريقة مختلفة لاختيار أمين السر.

∴ عدد الطرائق المختلفة التي يمكن بها اختيار الطلاب الثلاثة هو:

٢٠ × ١٩ × ١٨ = ٦٨٤٠ طريقة.

حاول أن تحل

٥ ما عدد الكلمات المكونة من ٣ أحرف مختلفة التي يمكن تكوينها باستخدام أحرف كلمة «سعود»؟

يمكن أن يعمم، المثال (٥)، لمواقف ذات ترتيب ر من الأشياء والمختارة من بين ن من الأشياء، حيث ن ≥ ر.

قانون التباديل Permutation Formula

عدد تباديل ن من العناصر المختلفة مأخوذة منها ر في كل مرة هو:

$^{ن}ل_{ر}$ = ن × (ن − ١) × (ن − ٢) × ... × (ن − ر + ١) حيث ر، ن ∈ صـ، ر ≤ ن

عندما ر = ٠ يعرّف $^{ن}ل_{ر}$ = ١

لاحظ:

$^{ن}ل_{ر}$ = ن × (ن − ١) × (ن − ٢) × ... × (ن − ر + ١)

= ن × (ن − ١) × (ن − ٢) × ... × (ن − ر + ١) × $\frac{(ن - ر) \times ... \times ٣ \times ٢ \times ١}{(ن - ر) \times ... \times ٣ \times ٢ \times ١}$

= $\frac{ن!}{(ن - ر)!}$

قانون التباديل $^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$: ر ≤ ن ، ر، ن ∈ صـ

٥٧

في التمارين (٩-١٥)، أوجد قيمة كل مقدار مما يلي (موضحًا خطوات الحل):

(٩) $^{١٢}ل_{١١}$ _____

(١٠) $^{١٢}ل_{١٠}$ _____

(١١) $^{١٢}ل_{٥}$ _____

(١٢) $^{١٢}ل_{١}$ _____

(١٣) $^{٨}ل_{٣} + ^{٨}ل_{٤}$ _____

(١٤) $^{٨}ل_{٣} - ^{٨}ل_{٢}$ _____

(١٥) $\frac{^{١٢}ل_{٨}}{^{١٢}ل_{٥}}$ _____

(١٦) اشترك ٨ طلاب في اختبار الحصول على منحة مدرسية. بكم طريقة مختلفة يمكن توقع الفائزين الثلاثة الأوائل بالترتيب؟

_____

(١٧) يمكن لمسافر الاختيار بين ٣ شركات طيران، و٥ فنادق، و٤ شركات لتأجير السيارات. بكم طريقة ممكنة يمكنه اختيار شركة الطيران والفندق وشركة تأجير السيارات؟

_____

(١٨) لدى سلمى ٣ أقلام تلوين (زهري، أزرق، بني). تريد تلوين ٤ دوائر متباعدة (كل دائرة بلون واحد).

(أ) بكم طريقة مختلفة يمكنها تلوين الدوائر؟

_____

(ب) بكم طريقة مختلفة يمكنها تلوين الدوائر إذا لم تستخدم اللون الزهري؟

_____

في التمارين (١٩-٢٥)، أوجد قيمة كل مقدار مما يلي (موضحًا خطوات الحل):

(١٩) $^{١٢}ق_{١١}$ _____

(٢٠) $^{١٢}ق_{١٠}$ _____

(٢١) $^{١٢}ق_{٥}$ _____

(٢٢) $^{١٢}ق_{١}$ _____

(٢٣) $^{١٢}ق_{١٢}$ _____

(٢٤) $^{٥}ق_{٤} + ^{٥}ق_{٣}$ _____

(٢٥) $\frac{^{٥}ق_{٣}}{^{٥}ق_{٢}}$ _____

٣٢

اختبار سريع

١ في تجربة إلقاء حجر نرد ثم قطعة نقود معدنية، أوجد النواتج الممكنة.

النواتج الممكنة هي:

(١، ص)، (١، ك)، (٢، ص)، (٢، ك)

(٣، ص)، (٣، ك)، (٤، ص)، (٤، ك)،

(٥، ص)، (٥، ك)، (٦، ص)، (٦، ك)

أي ٦ × ٢ = ١٢ ناتجًا

٢ في كيس ٤ كرات حمراء اللون و٦ كرات زرقاء اللون. سحب بطريقة عشوائية من الكيس ٣ كرات معًا. ما عدد الطرائق الممكنة لسحب كرتين حمراوي اللون وكرة زرقاء اللون؟

عدد الطرائق: $^{٤}ق_{٢} \times {}^{٦}ق_{١}$ = ٣٦

٩ إجابات وحلول

«عمل تعاوني»

١ نعم الترتيب مهم، لأن «ل م» مثلًا يختلف عن «م ل».

٢ ٢٧ طريقة مختلفة.

٣ ٩ طرائق لاختيار العدد.

٤ ٢٨ × ٢٧ = ٧٥٦ طريقة.

٥ ٧٥٦ × ٩ = ٦٨٠٤ طرائق مختلفة لاختيار الشيفرة.

«حاول أن تحل»

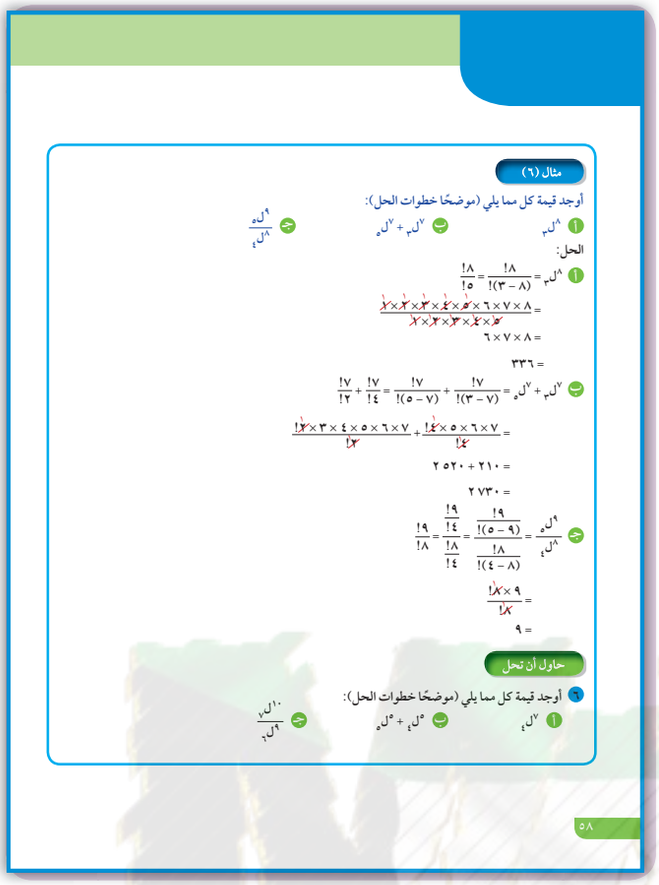
١ ٤ × ٦ = ٢٤ كلمة

٢ ٢٨ × ٦ × ٦ × ٦ = ٦٠٤٨

٣ (أ) ٤ × ٤ × ٤ = ٦٤

(ب) ٤ × ٣ × ٢ = ٢٤

(جـ) ٣ × ٤ × ٤ = ٤٨



مثال (٦)

أوجد قيمة كل مما يلي (موضحًا خطوات الحل):

أ $^{٨}ل_{٣}$ ب $^{٧}ل_{٣} + {}^{٧}ل_{٥}$ جـ $\frac{^{٩}ل_{٥}}{^{٨}ل_{٤}}$

الحل:

أ $^{٨}ل_{٣} = \frac{!٨}{!(٨ - ٣)} = \frac{!٨}{!٥}$

$= \frac{٨ \times ٧ \times ٦ \times \cancel{٥} \times \cancel{٤} \times \cancel{٣} \times \cancel{٢} \times \cancel{١}}{\cancel{٥} \times \cancel{٤} \times \cancel{٣} \times \cancel{٢} \times \cancel{١}}$

$= ٨ \times ٧ \times ٦$

= ٣٣٦

ب $^{٧}ل_{٣} + {}^{٧}ل_{٥} = \frac{!٧}{!(٧ - ٣)} + \frac{!٧}{!(٧ - ٥)} = \frac{!٧}{!٤} + \frac{!٧}{!٢}$

$= \frac{٧ \times ٦ \times ٥ \times \cancel{!٤}}{\cancel{!٤}} + \frac{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times \cancel{٢!}}{\cancel{٢!}}$

= ٢١٠ + ٢٥٢٠

= ٢٧٣٠

جـ $\frac{^{٩}ل_{٥}}{^{٨}ل_{٤}} = \frac{!٩}{!(٩ - ٥)} \div \frac{!٨}{!(٨ - ٤)} = \frac{!٩}{!٤} \div \frac{!٨}{!٤} = \frac{!٩}{!٨}$

$= \frac{٩ \times \cancel{٨!}}{\cancel{٨!}}$

= ٩

حاول أن تحل

٦ أوجد قيمة كل مما يلي (موضحًا خطوات الحل):

أ $^{٧}ل_{٤}$ ب $^{٥}ل_{٤} + {}^{٥}ل_{٥}$ جـ $\frac{^{١٠}ل_{٧}}{^{٩}ل_{٦}}$

٥٨

مثال (٧)

بعد انتهاء مباراة كرة القدم بالتعادل، أراد المدرب اختيار ٥ لاعبين بالترتيب لركلات الترجيح.

بكم طريقة يمكن اختيار اللاعبين الخمسة من بين اللاعبين الأحد عشر؟

الحل:

المطلوب في المسألة إيجاد عدد التباديل المكون من ٥ لاعبين المأخوذين من ١١ لاعبًا.

$^{١١}ل_{٥} = \frac{!١١}{!(١١ - ٥)} = \frac{!١١}{!٦}$

$= ١١ \times ١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧$

= ٥٥٤٤٠

حاول أن تحل

٧ في المثال (٧)، ما عدد الخيارات إذا استثني حارس المرمى؟

(٥-١-هـ) التوافيق **Combinations**

مثال تمهيدي

أراد معلم التربية البدنية اختيار طالبين من بين مجموعة مكونة من أربعة طلاب:

{محمد، أحمد، علي، حسين} للاشتراك في سباق الماراتون.

كل التبديلات الممكنة هي:

(محمد ، أحمد) ؛ (محمد ، علي) ؛ (محمد ، حسين) ؛

(أحمد ، محمد) ؛ (أحمد ، علي) ؛ (أحمد ، حسين) ؛

(علي ، محمد) ؛ (علي ، أحمد) ؛ (علي ، حسين) ؛

(حسين ، محمد) ؛ (حسين ، أحمد) ؛ (حسين ، علي).

وبما أن المدرب يريد اختيار أي طالبين من بين الأربعة طلاب **دون اعتبار للترتيب** فإن اختيار محمد وأحمد لا يختلف عن اختيار أحمد ومحمد. وبالتالي في هذه الحالة تكون الاختيارات الممكنة هي محمد، أحمد أو محمد ، علي أو محمد، حسين أو أحمد ، علي أو أحمد ، حسين أو علي، حسين.

وكل اختيار من هذه الاختيارات يسمى **توفيقة**.

عندما نريد إيجاد المجموعات الجزئية المكوّنة كل منها من ر عنصر، والتي يمكن اختيارها من مجموعة مكوّنة من ن عنصر بصرف النظر عن الترتيب فنحن نحسب **التوافيق** ويرمز له بالرمز $^{ن}ق_{ر}$ ، $^{ن}(ر)$.

٥٩

٤ (أ) $٧! = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٥٠٤٠$

(ب) $\frac{١٠ \times ٩ \times ٨!}{٨!} = ٩٠$

(جـ) $\frac{١٤ \times ١٣ \times ١٢ \times ١١ \times ١٠ \times ٩ \times ٨!}{٨! \times (٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١)} = ٤٢٩$

٥ $٤ \times ٣ \times ٢ = ٢٤$

٦ (أ) $ل^{٧}_{٤} = \frac{٧!}{(٧ - ٤)!} = \frac{٧!}{٣!} = \frac{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣!}{٣!}$

$= ٨٤٠$

(ب) $ل^{٥}_{٤} + ل^{٥}_{٥} = \frac{٥!}{١!} + \frac{٥!}{٠!} = ٥! + ٥! = ٢٤٠$

(جـ) $\frac{\frac{١٠!}{٣!}}{\frac{٩!}{٣!}} = \frac{١٠!}{٩!} = ١٠$

٧ $ل^{١٠}_{٥} = \frac{١٠!}{(١٠ - ٥)!} = \frac{١٠!}{٥!}$

$= \frac{١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥!}{٥!} = ٣٠٢٤٠$

٨ $ق^{١٢}_{٤} = \frac{ل^{١٢}_{٤}}{٤!} = \frac{\frac{١٢!}{(١٢ - ٤)!}}{٤!} = \frac{١٢!}{٨! \, ٤!} = ٤٩٥$

٩ $ق^{٢٠}_{٦} \times ق^{٢٤}_{٥}$

$= \frac{٢٠ \times ١٩ \times ١٨ \times ١٧ \times ١٦ \times ١٥ \times ١٤!}{١٤! \times ٦!}$

$\times \frac{٢٤ \times ٢٣ \times ٢٢ \times ٢١ \times ٢٠ \times ١٩!}{١٩! \times ٥!}$

$= ٣٨٧٦٠ \times ٤٢٥٠٤$

$= ١٦٤٧٤٥٥٠٤٠$

قانون التوافيق — **Combination Formula**

إذا كان ن، ر عددان صحيحان موجبين حيث ن ≥ ر، فإن:

عدد التوافيق المكوّنة كل منها من ر من العناصر والمختارة من بين ن من العناصر في الوقت نفسه هو:

$ق^{ن}_{ر} = \frac{ل^{ن}_{ر}}{ر!}$

$ق^{ن}_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)! \, ر!}$

ملاحظات:

- عندما ر = ٠ يعرّف $ق^{ن}_{٠} = ١$
- $ق^{ن}_{ن} = ١$
- $ق^{ن}_{١} = ن$
- $ق^{ن}_{ر} = ق^{ن}_{ن - ر}$

مثال (٨)

في إحدى محافظات دولة الكويت ٨ صيدليات. يريد المسؤولون اختيار ٣ صيدليات منها لتأمين دوام ليلي. بكم طريقة ممكنة يمكن اختيار الصيدليات الثلاث؟

الحل:

المطلوب اختيار ٣ صيدليات من بين ٨ صيدليات (الترتيب غير مهم)

عدد الطرائق الممكنة لاختيار الصيدليات الثلاثة = $ق^{٨}_{٣}$

$= \frac{ل^{٨}_{٣}}{٣!}$

$= \frac{٨ \times ٧ \times ٦}{٣ \times ٢ \times ١}$

$= ٥٦$

يمكن اختيار الصيدليات الثلاث بـ ٥٦ طريقة مختلفة.

حاول أن تحل

٨ في محافظة أخرى ١٢ صيدلية والمطلوب اختيار ٤ صيدليات منها لتأمين دوام ليلي. بكم طريقة ممكنة يمكن اختيار الصيدليات الأربع؟

٦٠

---

(٢٦) يريد معلّم التربية الفنية اختيار ٤ رسوم من أعمال طلابه لتعليقها في غرفة الصف. بكم طريقة ممكنة يمكنه الاختيار إذا كان في الصف ٢٤ طالبًا؟ _____

(٢٧) حل المعادلات التالية:

(أ) $ل^{ن}_{٢} = ٢٠$ _____

(ب) $ل^{ن}_{٣} = ١٠$ _____

(جـ) $\frac{ن!}{(ن-٢)!} = ١٢$ _____

(٢٨) من بين ٥ معلمين يراد اختيار معلم لتدريب طلبة الأولمبياد في مادة الرياضيات ثم معلم آخر لإعداد الاختيار. أوجد عدد طرق الاختيارات.

_____

(٢٩) من بين ٨ طلاب بكم طريقة يمكن لمعلم التربية البدنية اختيار ثلاث طلاب واحدًا تلو الآخر للاشتراك في كرة الطائرة وكرة السلة وكرة القدم.

_____

(٣٠) بكم طريقة يمكن اختيار أربع طلاب من بين ١٢ طالبًا للذهاب للمركز العلمي.

_____

المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمرينين (١-٢)، ضع قائمة تبيّن كل الكلمات الممكن كتابتها باستخدام كلّ الحروف، دون تكرار أي كلمة (لها معنى أو ليس لها معنى).

(١) ن، جـ، حـ (٢) ش، ك

٣٣

١٠ (أ) $\frac{(ن + ١)ن}{٢ \times ١} = ٢ن$

$ن^٢ + ن = ٤ن$

$ن^٢ - ٣ن = ٠$

$ن(ن - ٣) = ٠$

ن = ٠ مرفوضة أو ن = ٣

(ب) $\frac{ن!}{(ن - ٣)!} = ٢٤$

$ن(ن - ١)(ن - ٢) = ٤ \times ٣ \times ٢$

ن = ٤

(جـ) $\frac{ن(ن - ١)(ن - ٢)}{٦} = ن(ن - ١)$

$ن(ن - ١)(ن - ٢) = ٦ن(ن - ١)$

$ن(ن - ١)(ن - ٢) - ٦ن(ن - ١) = ٠$

$ن(ن - ١)(ن - ٢ - ٦) = ٠$

ن = ٠ مرفوضة أو ن = ١ مرفوضة

أو ن = ٨ مقبولة

مثال (٩)

أراد مدير مدرسة تشكيل لجنة من ٨ طلاب للتحضير لاحتفال نهاية العام الدراسي. عليه اختيار ٤ من بين ١٨ مرشحًا من الصف الثاني عشر، و٣ من بين ١٤ مرشحًا من الصف الحادي عشر، و١ من بين ١١ مرشحًا من الصف العاشر.
بكم طريقة مختلفة يمكن للمدير تكوين اللجنة؟

الحل:

على المدير اختيار ٤ طلاب من بين ١٨ من الصف الثاني عشر، ترتيب العناصر غير مهم، فيكون عدد الطرائق = $^{١٨}ق_{٤}$

كذلك عليه اختيار ٣ طلاب من بين ١٤ من الصف الحادي عشر، عدد الطرائق = $^{١٤}ق_{٣}$

وعليه اختيار طالب واحد من بين ١١ من الصف العاشر، عدد الطرائق = $^{١١}ق_{١}$

عدد طرائق تكوين اللجنة = $^{١٨}ق_{٤} \times {}^{١٤}ق_{٣} \times {}^{١١}ق_{١}$

= ٣٠٦٠ × ٣٦٤ × ١١

= ٢٤٠ ٢٥٢ ١٢

يمكن اختيار اللجنة بـ ٢٤٠ ٢٥٢ ١٢ طريقة مختلفة.

حاول أن تحل

٩ في الصف الحادي عشر ٢٠ طالبًا، وفي الصف العاشر ٢٤ طالبًا. أراد معلم الرياضة اختيار ٦ طلاب من الصف الحادي عشر و٥ طلاب من الصف العاشر لتشكيل فريق كرة القدم. كم عدد الفرق التي بإمكانه تشكيلها؟

مثال (١٠)

حلّ كل معادلة مما يلي حيث ن عدد صحيح موجب أكبر من ٢.

أ $^{ن}ق_{٣} = ١٠$ ب $^{ن}ل_{٢} = ١٢ن$ جـ $^{ن}ق_{٢} = ن$

الحل:

أ $^{ن}ق_{٣} = ١٠$

$\frac{ن!}{(ن - ٢)!٢!} = ١٠$ قانون التوافيق

$\frac{ن(ن-١)(ن-٢)!}{(ن - ٢)!٢!} = ١٠$ خواص مضروب العدد

$\frac{ن(ن - ١)}{٢} = ١٠$

حل آخر

∵ $^{ن}ق_{٣} = ١٠$

$\frac{^{ن}ل_{٢}}{٢!} = ١٠$

في التمارين (٣-٨)، أوجد قيمة كل مقدار مما يلي (موضحًا خطوات الحل):

(٣) ٦!

(٤) ٧! - ٤

(٥) $\frac{٨!}{٥!}$

(٦) ٧! - ٥!

(٧) $\frac{١٥!}{١٢!٣!}$

(٨) ٤! × ٤

(٩) يوجد في كيس ٥ كرات من اللون الأحمر، ٦ كرات من اللون الأخضر. من دون النظر داخل الكيس قام خالد بسحب كرتين معًا.

(أ) بكم طريقة يمكن سحب الكرتين معًا.

(ب) بكم طريقة يمكن أن تكون الكرتين المسحوبتين حمراوين.

(١٠) حل كلًّا من المعادلات التالية:

(أ) $^{ن}ق_{٢} = ٢٨$

(ب) $\frac{(ن+٣)!}{(ن+١)!} = ٤٢$

(جـ) $^{ن}ل_{٢} = ٨ن$

في التمارين (١١-١٦)، أوجد قيمة كل مقدار مما يلي (مع توضيح خطوات الحل)

(١١) $^{٦}ل_{٢}$

(١٢) $^{٥}ل_{٣} + {}^{٥}ل_{٢}$

(١٣) $\frac{^{٧}ل_{٤}}{^{٧}ل_{٤}}$

(١٤) $^{٧}ق_{٢}$

(١٥) $^{٥}ق_{٣} + {}^{٥}ق_{٢}$

(١٦) $\frac{^{٧}ق_{٤}}{^{٦}ق_{٤}}$

(١٧) في اختبار صح - خطأ من ٥ أسئلة. بكم طريقة مختلفة يمكن الإجابة؟

(١٨) وضعت ١٠ نقاط مختلفة على دائرة. ما عدد المثلثات المختلفة الممكن تكوينها باختيار ٣ من هذه النقاط؟

$ن^٢ - ن = ٢٠$ الضرب التقاطعي

$ن^٢ - ن - ٢٠ = ٠$

ن = ٥ أو ن = -٤

ن = -٤ مرفوضة، لأن ن عدد صحيح موجب ∴ ن = ٥

$\frac{ن(ن - ١)}{٢ \times ١} = ١٠$

ن (ن - ١) = ٢٠

ن (ن - ١) = ٥ × ٤

∴ ن = ٥

ب $^{ن}ل_{٢} = ١٢ن$

ن (ن - ١) = ١٢ن

$ن^٢ - ن = ١٢ن$

$ن^٢ - ن - ١٢ن = ٠$

$ن^٢ - ١٣ن = ٠$

ن(ن - ١٣) = ٠

ن = ١٣ أو ن = ٠

ن = ٠ مرفوضة، لأن ن > ٢ ∴ ن = ١٣

جـ $^{ن}ق_{٢} = ن$

$\frac{^{ن}ل_{٢}}{٢!} = ن$

$\frac{ن(ن - ١)}{٢ \times ١} = ن$

$ن^٢ - ن = ٢ن$

$ن^٢ - ن - ٢ن = ٠$

$ن^٢ - ٣ن = ٠$

ن (ن - ٣) = ٠

ن = ٠ (مرفوضة) أو ن = ٣

حاول أن تحل

١٠ حل كل معادلة مما يلي حيث ن عدد صحيح موجب أكبر من ٢.

أ $^{ن+١}ق_{٣} = ٢ن$

ب $^{ن}ل_{٣} = ٢٤$

جـ $^{ن}ق_{٣} = {}^{ن}ل_{٢}$

٥-٢: نظرية ذات الحدين

١ الأهداف

- يتعرف مثلث باسكال.
- يوجد معاملات مفكوك ذات الحدين.
- يتعرف نظرية ذات الحدين.
- يوجد مفكوك ذات الحدين.

٢ المفردات الأساسية والمفاهيم الجديدة

مثلث باسكال – معاملات مفكوك ذات الحدين – نظرية ذات الحدين – مفكوك ذات الحدين.

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

٤ التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

أوجد الناتج:

(أ) $^{٧}ل_{٣}$

(ب) $^{١٢}ل_{٧}$

(جـ) $^{٧}ق_{٥}$

(د) $^{١٠}ق_{٧}$

أوجد مفكوك ما يلي:

(أ) $(٢س - ٤ص)^{٢}$

(ب) $(٣س + ٢ص)^{٢}$

(جـ) $(٤س - ٥ص)^{٣}$

(د) $(٣س + ٢ص)^{٣}$

٥-٢

نظرية ذات الحدين

Binomial Theorem

دعنا نفكر ونتناقش

الكثير من الاكتشافات الرياضية المهمة بدأت بدراسة الأنماط.

نهدف في هذا الدرس إلى تقديم نظرية مهمة لكثيرة حدود تدعى نظرية ذات الحدين.

ولتحقيق ذلك سنبدأ بمراقبة بعض الأنماط.

إذا فككت $(أ + ب)^{ن}$ حيث ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ إليك ما ستحصل عليه:

$(أ + ب)^{٠} = ١$

$(أ + ب)^{١} = ١ أ^{٠} ب^{١} + ١ أ^{١} ب^{٠}$

$(أ + ب)^{٢} = ١ أ^{٠} ب^{٢} + ٢ أ^{١} ب^{١} + ١ أ^{٢} ب^{٠}$

$(أ + ب)^{٣} = ١ أ^{٠} ب^{٣} + ٣ أ^{١} ب^{٢} + ٣ أ^{٢} ب^{١} + ١ أ^{٣} ب^{٠}$

$(أ + ب)^{٤} = ١ أ^{٠} ب^{٤} + ٤ أ^{١} ب^{٣} + ٦ أ^{٢} ب^{٢} + ٤ أ^{٣} ب^{١} + ١ أ^{٤} ب^{٠}$

$(أ + ب)^{٥} = ١ أ^{٠} ب^{٥} + ٥ أ^{١} ب^{٤} + ١٠ أ^{٢} ب^{٣} + ١٠ أ^{٣} ب^{٢} + ٥ أ^{٤} ب^{١} + ١ أ^{٥} ب^{٠}$

هل يمكنك مراقبة الأنماط وتوقع ما سيكون عليه مفكوك $(أ + ب)^{٦}$؟

قد يمكنك توقع ما يلي:

أ يتقص أس العدد أ من ٦ إلى صفر بمقدار الوحدة على التوالي.

ب يزيد أس العدد ب بمقدار الوحدة من صفر إلى ٦.

جـ سيكون مجموع أسي أ، ب يساوي ٦.

د سيكون المعاملان الأولان ١، ٦.

هـ سيكون المعاملان الأخيران ٦، ١.

لإيجاد باقي المعاملات سوف نتعرف على مثلث باسكال.

سوف تتعلم

- إيجاد مثلث باسكال.
- إيجاد معاملات مفكوك ذات الحدين.
- نظرية ذات الحدين.
- إيجاد مفكوك ذات الحدين.

(٥-٢-أ) مثلث باسكال Pascal's Triangle

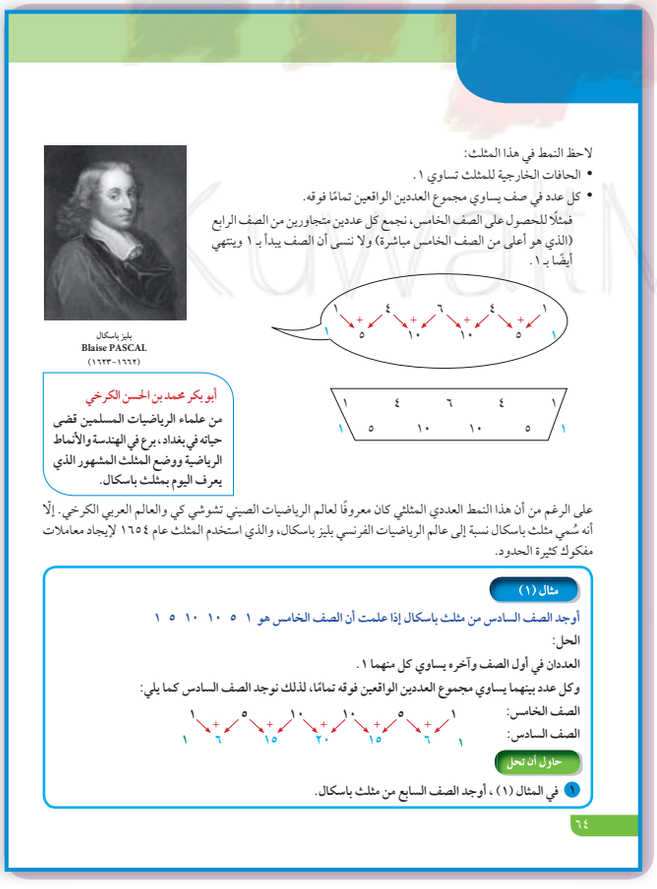
في فقرة «دعنا نفكر ونتناقش»، إذا ألغينا أ، ب وإشارة الجمع من مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ نحصل على:

الصف ٠						١				
الصف ١					١		١			
الصف ٢				١		٢		١		
الصف ٣			١		٣		٣		١	
الصف ٤		١		٤		٦		٤		١
الصف ٥	١		٥		١٠		١٠		٥		١

وهذا ما يسمى بمثلث باسكال.

ملاحظة:
رقم ١ في قمة مثلث باسكال له معنى، لأنه إذا كان:
أ + ب ≠ ٠، فإن $(أ + ب)^{٠} = ١$

٦٣



لاحظ النمط في هذا المثلث:

- الحافات الخارجية للمثلث تساوي ١.
- كل عدد في صف يساوي مجموع العددين الواقعين تمامًا فوقه.

فمثلًا للحصول على الصف الخامس، نجمع كل عددين متجاورين من الصف الرابع (الذي هو أعلى من الصف الخامس مباشرة) ولا ننسى أن الصف يبدأ بـ ١ وينتهي أيضًا بـ ١.

بليز باسكال
Blaise PASCAL
(١٦٢٣-١٦٦٢)

أبو بكر محمد بن الحسن الكرخي
من علماء الرياضيات المسلمين قضى حياته في بغداد، برع في الهندسة والأنماط الرياضية ووضع المثلث المشهور الذي يعرف اليوم بمثلث باسكال.

على الرغم من أن هذا النمط العددي المثلثي كان معروفًا لعالم الرياضيات الصيني تشوشي كي والعالم العربي الكرخي. إلّا أنه سُمي مثلث باسكال نسبة إلى عالم الرياضيات الفرنسي بليز باسكال، والذي استخدم المثلث عام ١٦٥٤ لإيجاد معاملات مفكوك كثيرة الحدود.

مثال (١)

أوجد الصف السادس من مثلث باسكال إذا علمت أن الصف الخامس هو ١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١

الحل:

العددان في أول الصف وآخره يساوي كل منهما ١.

وكل عدد بينهما يساوي مجموع العددين الواقعين فوقه تمامًا، لذلك نوجد الصف السادس كما يلي:

الصف الخامس: ١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١

الصف السادس: ١ ٦ ١٥ ٢٠ ١٥ ٦ ١

حاول أن تحل

١ في المثال (١)، أوجد الصف السابع من مثلث باسكال.

٦٤

٥ التدريس

اشرح للطلاب بشكل واضح كيفية إنشاء مثلث باسكال والعلاقة بين كل صف والصف الذي يليه مباشرة.

أخبرهم أن كل صف يبدأ دائمًا بالعدد ١ وينتهي دائمًا بالعدد ١، وأن العدد الثاني الذي يلي مباشرة العدد ١ في كل صف يؤشر إلى رتبة الصف، وهذا ما ينطبق أيضًا على العدد ما قبل الأخير.

اكتب على السبورة الصفوف الأربعة الأولى:

الصف ٠				١		
الصف ١			١		١	
الصف ٢		١		٢		١
الصف ٣	١		٣		٣		١

في المثال (١)

اسأل بعض المتطوعين من الطلاب عن محاولة إكمال الصف الرابع والخامس والسادس، وكيف ربطوا بين كل صف والصف الذي يليه. مثال: انطلاقًا من الصف الثالث.

الصف الثالث: ١ ٣ ٣ ١ نجد الصف الرابع

الصف الرابع: ١ ٤ ٦ ٤ ١ ثم نجد الصف الخامس

الصف الخامس: ١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١ ثم نجد الصف السادس

الصف السادس: ١ ٦ ١٥ ٢٠ ١٥ ٦ ١

يتدرب الطلاب على كيفية بناء مثلث باسكال للحصول على الصف السادس. أرشد الطلاب إلى أن الصف السادس يعطينا معاملات مفكوك $(أ + ب)^{٦}$.

مثال (٢)

أوجد مفكوك $(أ + ب)^{٦}$ مستخدمًا مثلث باسكال لإيجاد المعاملات إذا علمت أن الصف الخامس هو ١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١

الحل:

علينا أولًا إيجاد معاملات $أ^{٦}$ ، $أ^{٥}ب$ ، $أ^{٤}ب^{٢}$ ، $أ^{٣}ب^{٣}$ ، $أ^{٢}ب^{٤}$ ، $أ ب^{٥}$ ، $ب^{٦}$. لذلك نستعين بالمثال السابق (١).

فنحصل على ١ ، ٦ ، ١٥ ، ٢٠ ، ١٥ ، ٦ ، ١ وهكذا نحصل على مفكوك $(أ + ب)^{٦}$:

$(أ + ب)^{٦} = ١ أ^{٦} + ٦ أ^{٥}ب + ١٥ أ^{٤}ب^{٢} + ٢٠ أ^{٣}ب^{٣} + ١٥ أ^{٢}ب^{٤} + ٦ أ ب^{٥} + ١ ب^{٦}$

أو $(أ + ب)^{٦} = أ^{٦} + ٦ أ^{٥}ب + ١٥ أ^{٤}ب^{٢} + ٢٠ أ^{٣}ب^{٣} + ١٥ أ^{٢}ب^{٤} + ٦ أ ب^{٥} + ب^{٦}$ (عدم ضرورة كتابة ١ قبل $أ^{٦}$، $ب^{٦}$)

حاول أن تحل

٢ في المثال (٢)، أوجد مفكوك $(أ + ب)^{٧}$ مستخدمًا مثلث باسكال.

(٥-٢-ب) نظرية ذات الحدين — The Binomial Theorem

الأعداد في مثلث باسكال هي معاملات مفكوك ذات الحدين ويمكن إيجاد هذه الأعداد عن طريق تكرار صف بعد صف باستخدام الطريقة في المثال (١). يمكن أن نوجد أيضًا معاملات مفكوك ذات الحدين عن طريق استخدام التوافيق.

إذا حسبنا: $^{٣}ق_{٠}$، $^{٣}ق_{١}$، $^{٣}ق_{٢}$، $^{٣}ق_{٣}$ نحصل على ١، ٣، ٣، ١ وهي تتطابق مع قيم الصف الثالث من مثلث باسكال.

كذلك إذا حسبنا $^{٤}ق_{٠}$، $^{٤}ق_{١}$، $^{٤}ق_{٢}$، $^{٤}ق_{٣}$، $^{٤}ق_{٤}$ نحصل على ١ ، ٤ ، ٦ ، ٤ ، ١ وهي تتطابق مع قيم الصف الرابع من مثلث باسكال.

وعليه يكون مفكوك $(أ + ب)^{٤} = {}^{٤}ق_{٠} أ^{٤} + {}^{٤}ق_{١} أ^{٣}ب^{١} + ... + {}^{٤}ق_{٤} ب^{٤}$.

نظرية ذات الحدين

لأي عدد صحيح موجب ن،

$(أ + ب)^{ن} = {}^{ن}ق_{٠} أ^{ن} + {}^{ن}ق_{١} أ^{ن-١}ب + {}^{ن}ق_{٢} أ^{ن-٢}ب^{٢} + ... + {}^{ن}ق_{ن-١} أ ب^{ن-١} + {}^{ن}ق_{ن} ب^{ن}$

خواص نظرية ذات الحدين — Properties of the Binomial Theorem

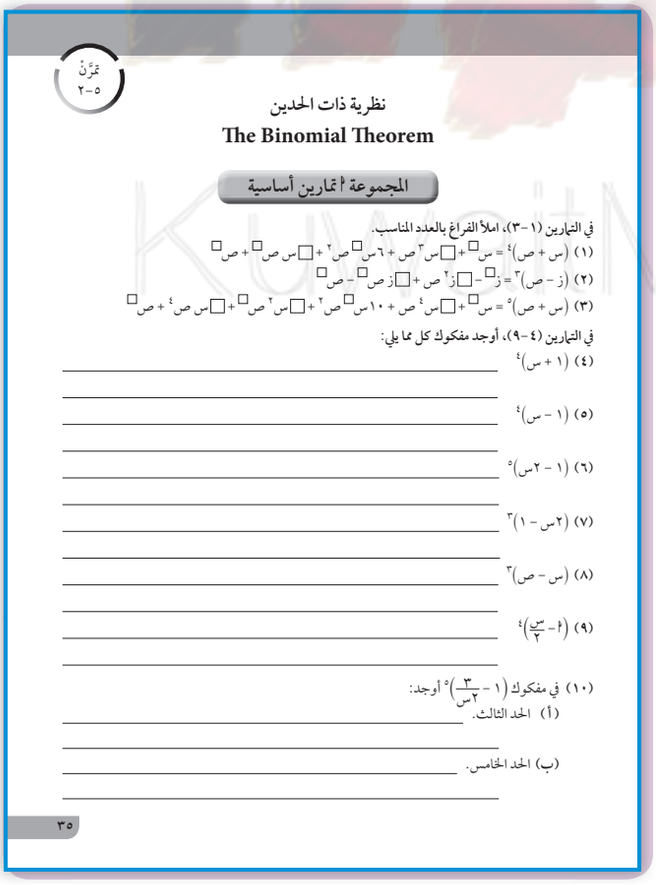
١ مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ يتضمن ن + ١ حدًا.

٢ الحد الأول في المفكوك هو $أ^{ن}$، ثم ينقص أس العدد أ في الحدود التالية بمقدار الوحدة على التوالي.

٣ يبدأ ظهور العدد ب في الحد الثاني، ثم يزيد أس العدد ب بمقدار الوحدة على التوالي حتى نصل إلى الحد الأخير في المفكوك ويكون $ب^{ن}$.

٤ مجموع أسي العدد أ، والعدد ب في أي حد من حدود المفكوك ثابت ويساوي الأس ن.

٦٥



تمرَّنْ ٥-٢

نظرية ذات الحدين

The Binomial Theorem

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمارين (١-٣)، املأ الفراغ بالعدد المناسب.

(١) $(س + ص)^{٤} = س^{\square} + \square س^{٣}ص + ٦ س^{\square}ص^{٢} + \square س ص^{\square} + ص^{\square}$

(٢) $(ز - ص)^{٣} = ز^{\square} - \square ز^{٢}ص + \square ز ص^{\square} - ص^{\square}$

(٣) $(س + ص)^{٥} = س^{\square} + \square س^{٤}ص + ١٠ س^{\square}ص^{٢} + \square س^{٢}ص^{\square} + \square س ص^{٤} + ص^{\square}$

في التمارين (٤-٩)، أوجد مفكوك كل مما يلي:

(٤) $(١ + س)^{٤}$

(٥) $(١ - س)^{٤}$

(٦) $(١ - ٢س)^{٥}$

(٧) $(٢س - ١)^{٣}$

(٨) $(س - ص)^{٣}$

(٩) $(أ - \frac{س}{٢})^{٤}$

(١٠) في مفكوك $(١ - \frac{٣}{٢س})^{٥}$ أوجد:

(أ) الحد الثالث.

(ب) الحد الخامس.

٣٥

في المثال (٢)

شجع الطلاب على كتابة مثلث باسكال للوصول إلى الصف السادس حيث معاملات مفكوك $(أ + ب)^{٦}$. ذكّرهم بطريقة الجمع للربط بين معاملات الصفين الخامس والسادس.

في المثالين (٣)، (٤)

قد يكون من المفيد جدًّا الربط بين مثلث باسكال الذي يوفر معامل الحدود في مفكوك ذات الحدين ومفكوك قانون التوافيق حيث يمكن ملاحظة ما يلي: في مفكوك

$(أ + ب)^{٤} = أ^{٤} + ٤أ^{٣}ب^{١} + ٦أ^{٢}ب^{٢} + ٤أ^{١}ب^{٣} + ب^{٤}$

معامل $أ^{٤} = ١ = {}^{٤}ق_{٠}$ ؛ معامل $أ^{٣}ب = ٤ = {}^{٤}ق_{١}$ ؛ معامل $أ^{٢}ب^{٢} = ٦ = {}^{٤}ق_{٢}$ ؛ معامل $أ^{١}ب^{٣} = ٤ = {}^{٤}ق_{٣}$ ؛ معامل $ب^{٤} = ١ = {}^{٤}ق_{٤}$. وهذا ما يسهل إيجاد مفكوك ذات الحدين، لأن استخدام مثلث باسكال يتطلب تكوين الصفوف كافة للوصول إلى الصف المطلوب ولكن باستخدام قانون التوافيق. يكفي أن نضع أمام كل حد قانون التوافيق المرافق لكل أس.

في المثالين (٥)، (٦)

شجّع الطلاب على الربط بين أس المتغير الثاني ورتبة التوفيقة في مفكوك ذات الحدين، فمثلًا ${}^{٨}ق_{٣}$ الحد الذي يحتوي على $س^{٥}ص^{٣}$ يجب أن تكون رتبة التوفيقة فيه ${}^{٨}ق_{٣}$ والحد الذي يحتوي على $س^{٤}ص^{٧}$ يجب أن تكون رتبة التوفيقة فيه ${}^{١١}ق_{٧}$ علمًا بأن مجموع الأسين على المتغيرين يساوي الأس ن لذات الحدين: ذكرهم بأن: ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$

٦ الربط

أوجد مفكوك $(٣س - ٤ص)^{٤}$.

$(٣س - ٤ص)^{٤} = {}^{٤}ق_{٠}(٣س)^{٤} + {}^{٤}ق_{١}(٣س)^{٣}(-٤ص)$
$+ {}^{٤}ق_{٢}(٣س)^{٢}(-٤ص)^{٢} + {}^{٤}ق_{٣}(٣س)(-٤ص)^{٣}$
$+ {}^{٤}ق_{٤}(-٤ص)^{٤} = ٨١س^{٤} - ٤٣٢س^{٣}ص$
$+ ٨٦٤س^{٢}ص^{٢} - ٧٦٨س ص^{٣} + ٢٥٦ص^{٤}$

٥ يتساوى معاملا كل حدين لهما البعد نفسه عن الحد الأول والحد الأخير:
معامل الحد الأول يساوي معامل الحد الأخير ومعامل الحد الثاني يساوي معامل الحد ما قبل الأخير وهكذا...

٦ الحد الذي ترتيبه ر + ١ يرمز له بالرمز $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}أ^{ن-ر}ب^{ر}$

مثال (٣)

استخدم نظرية ذات الحدين لإيجاد مفكوك $(س + ٢)^{٦}$

الحل:
في مفكوك $(أ + ب)^{٦} = {}^{٦}ق_{٠}أ^{٦} + {}^{٦}ق_{١}أ^{٥}ب + {}^{٦}ق_{٢}أ^{٤}ب^{٢} + {}^{٦}ق_{٣}أ^{٣}ب^{٣} + {}^{٦}ق_{٤}أ^{٢}ب^{٤} + {}^{٦}ق_{٥}أ^{١}ب^{٥} + {}^{٦}ق_{٦}ب^{٦}$
نعوّض عن أ بـ س، عن ب بـ ٢:
$(س+٢)^{٦} = {}^{٦}ق_{٠}س^{٦} + {}^{٦}ق_{١}س^{٥} \times (٢) + {}^{٦}ق_{٢}س^{٤} \times (٢)^{٢} + {}^{٦}ق_{٣}س^{٣} \times (٢)^{٣} + {}^{٦}ق_{٤}س^{٢} \times (٢)^{٤} + {}^{٦}ق_{٥}س \times (٢)^{٥} + {}^{٦}ق_{٦} \times (٢)^{٦}$
$= س^{٦} + ٦ \times ٢س^{٥} + ١٥ \times ٤س^{٤} + ٢٠ \times ٨س^{٣} + ١٥ \times ١٦س^{٢} + ٦ \times ٣٢س + ٦٤$
$= س^{٦} + ١٢س^{٥} + ٦٠س^{٤} + ١٦٠س^{٣} + ٢٤٠س^{٢} + ١٩٢س + ٦٤$

حاول أن تحل

٣ استخدم نظرية ذات الحدين لإيجاد مفكوك $(س + ٣)^{٥}$

مثال (٤)

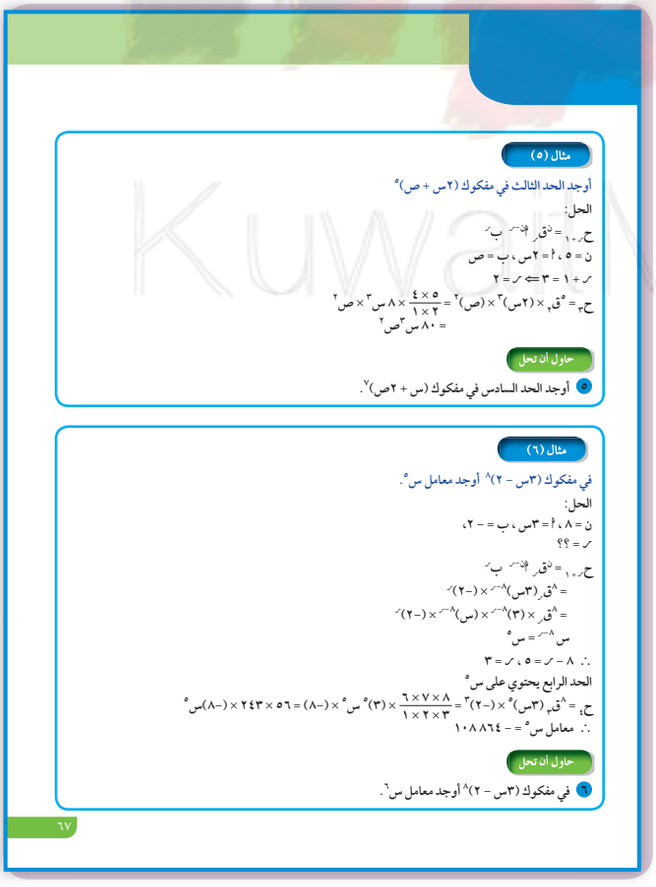
أوجد مفكوك $(٢س - ٣ص)^{٤}$

الحل:
أولًا: $(أ + ب)^{٤} = {}^{٤}ق_{٠}أ^{٤} + {}^{٤}ق_{١}أ^{٣}ب + {}^{٤}ق_{٢}أ^{٢}ب^{٢} + {}^{٤}ق_{٣}أ^{١}ب^{٣} + {}^{٤}ق_{٤}ب^{٤} = أ^{٤} + ٤أ^{٣}ب + ٦أ^{٢}ب^{٢} + ٤أ^{١}ب^{٣} + ب^{٤}$
ثانيًا: يمكن أن تكتب ذات الحدين ٢س - ٣ص على الشكل ٢س + (-٣ص)
ثالثًا: نعوّض في $(أ + ب)^{٤}$ عن أ بـ (٢س) وعن ب بـ (-٣ص) فنحصل على:
$(٢س - ٣ص)^{٤} = (٢س)^{٤} + ٤(٢س)^{٣} \times (-٣ص) + ٦(٢س)^{٢} \times (-٣ص)^{٢} + ٤(٢س) \times (-٣ص)^{٣} + (-٣ص)^{٤}$
$= ١٦س^{٤} + ٤ \times ٨ \times (-٣)س^{٣}ص + ٦ \times ٤ \times (-٣)^{٢}س^{٢}ص^{٢} + ٨ \times (-٣)^{٣}س ص^{٣} + (-٣)^{٤}ص^{٤}$
$= ١٦س^{٤} - ٩٦س^{٣}ص + ٢١٦س^{٢}ص^{٢} - ٢١٦س ص^{٣} + ٨١ص^{٤}$

حاول أن تحل

٤ أوجد مفكوك $(٣س - ٤ص)^{٣}$

٦٦



مثال (٥)

أوجد الحد الثالث في مفكوك $(٢س + ص)^{٥}$

الحل:
$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}أ^{ن-ر}ب^{ر}$
ن = ٥، أ = ٢س، ب = ص
ر + ١ = ٣ ⟸ ر = ٢
$ح_{٣} = {}^{٥}ق_{٢} \times (٢س)^{٣} \times (ص)^{٢} = \frac{٥ \times ٤}{١ \times ٢} \times ٨س^{٣} \times ص^{٢}$
$= ٨٠س^{٣}ص^{٢}$

حاول أن تحل

٥ أوجد الحد السادس في مفكوك $(س + ٢ص)^{٧}$.

مثال (٦)

في مفكوك $(٣س - ٢)^{٨}$ أوجد معامل $س^{٥}$.

الحل:
ن = ٨، أ = ٣س، ب = -٢،
ر = ؟؟
$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}أ^{ن-ر}ب^{ر}$
$= {}^{٨}ق_{ر}(٣س)^{٨-ر} \times (-٢)^{ر}$
$= {}^{٨}ق_{ر} \times (٣)^{٨-ر} \times (س)^{٨-ر} \times (-٢)^{ر}$
$س^{٨-ر} = س^{٥}$
∴ ٨ - ر = ٥، ر = ٣
الحد الرابع يحتوي على $س^{٥}$
$ح_{٤} = {}^{٨}ق_{٣}(٣س)^{٥} \times (-٢)^{٣} = \frac{٨ \times ٧ \times ٦}{٣ \times ٢ \times ١} \times (٣)^{٥}س^{٥} \times (-٨) = ٥٦ \times ٢٤٣ \times (-٨)س^{٥}$
∴ معامل $س^{٥} = -١٠٨٨٦٤$

حاول أن تحل

٦ في مفكوك $(٣س - ٢)^{٨}$ أوجد معامل $س^{٦}$.

٦٧

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطىء الطلاب في كتابة مفكوك ذات الحدين مرفوعًا إلى الأس ن.

أخبرهم أن هذا المفكوك يبدأ مع المتغير الأول مرفوعًا إلى الأس ن، ثم يتناقص تدريجيًّا ليصل إلى الأس صفر أما المتغير الثاني فيبدأ من الأس صفر، ثم يتزايد تدريجيًّا ليصل إلى الأس ن على أن يكون مجموع الأسين على المتغيرين يساوي دائمًا ن

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يتعاملون مع فقرات «حاول أن تحل» لتقف على حسن أدائهم في استخدام مفكوك ذات الحدين والتطبيقات المرافقة له.

اختبار سريع

١ أوجد مفكوك $(٤س - ٢ص)^{٥}$

$(٤س - ٢ص)^{٥} = {}^{٥}ق_{٠} (٤س)^{٥} + {}^{٥}ق_{١} (٤س)^{٤} (-٢ص) + {}^{٥}ق_{٢} (٤س)^{٣} (-٢ص)^{٢} + {}^{٥}ق_{٣} (٤س)^{٢} (-٢ص)^{٣} + {}^{٥}ق_{٤} (٤س)^{١} (-٢ص)^{٤} + {}^{٥}ق_{٥} (-٢ص)^{٥} = ١٠٢٤ س^{٥} - ٢٥٦٠ س^{٤} ص + ٢٥٦٠ س^{٣} ص^{٢} - ١٢٨٠ س^{٢} ص^{٣} + ٣٢٠ س ص^{٤} - ٣٢ ص^{٥}$

٢ في مفكوك $(٣س + ٤ص)^{٧}$ أوجد الحد الذي يحتوي على $س^{٤} ص^{٣}$

يجب أن يكون هذا الحد على الشكل:

${}^{٧}ق_{٣} (٣س)^{٤} (٤ص)^{٣}$

أي: $٣٥ \times ٨١ \times ٦٤ س^{٤} ص^{٣}$

$= ١٨١٤٤٠ س^{٤} ص^{٣}$

(١١) أوجد معامل $س^{٣}$ في مفكوك $(١ - س)^{٤}$. _____

(١٢) أوجد معامل $س^{٣}$ في مفكوك $(س + ص)^{٥}$. _____

(١٣) في مفكوك $(س + ٢)^{٦}$ أوجد معامل $س^{٤}$. _____

(١٤) في مفكوك $(س - \frac{١}{٢})^{٨}$ أوجد معامل $س^{٥}$. _____

(١٥) (أ) بسّط $(٢ + \sqrt{٣})^{٤}$. _____

(ب) أثبت أن: $(٢ + \sqrt{٣})^{٤} + (٢ - \sqrt{٣})^{٤} = ١٩٤$. _____

٣٦

(١٦) أثبت أن: $(س + \frac{١}{س})^{٣} = (س^{٣} + \frac{١}{س^{٣}}) + ٣(س + \frac{١}{س})$. _____

(١٧) أوجد مفكوك: $(٢ + س)^{٥}$. _____

المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمارين (١-٧)، أوجد مفكوك كل مما يلي:

(١) $(س - ٢)^{٣}$ _____

(٢) $(١ - ص)^{٣}$ _____

(٣) $(١ + ص)^{٣}$ _____

(٤) $(\frac{١}{٢} + ب)^{٣}$ _____

٣٧

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١

الصف السادس: ١ ٦ ١٥ ٢٠ ١٥ ٦ ١

الصف السابع: ١ ٧ ٢١ ٣٥ ٣٥ ٢١ ٧ ١

٢ $(\text{أ} + \text{ب})^{٧} = \square\text{أ}^{٧} + \square\text{أ}^{٦}\text{ب}^{١} + \square\text{أ}^{٥}\text{ب}^{٢} + \square\text{أ}^{٤}\text{ب}^{٣}$

$+ \square\text{أ}^{٣}\text{ب}^{٤} + \square\text{أ}^{٢}\text{ب}^{٥} + \square\text{أ}^{١}\text{ب}^{٦} + \square\text{ب}^{٧}$

ثم نضع المعامل من الصف السابع فيكون:

$(\text{أ} + \text{ب})^{٧} = \text{أ}^{٧} + ٧\text{أ}^{٦}\text{ب}^{١} + ٢١\text{أ}^{٥}\text{ب}^{٢} + ٣٥\text{أ}^{٤}\text{ب}^{٣}$

$+ ٣٥\text{أ}^{٣}\text{ب}^{٤} + ٢١\text{أ}^{٢}\text{ب}^{٥} + ٧\text{أ}^{١}\text{ب}^{٦} + \text{ب}^{٧}$

٣ $(\text{س} + ٣)^{٥} = {}^{٥}\text{ق}_{٠}\,\text{س}^{٥} + {}^{٥}\text{ق}_{١}\,\text{س}^{٤}(٣)^{١}$

$+ {}^{٥}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{٣}(٣)^{٢} + {}^{٥}\text{ق}_{٣}\,\text{س}^{٢}(٣)^{٣} + {}^{٥}\text{ق}_{٤}\,\text{س}(٣)^{٤}$

$+ {}^{٥}\text{ق}_{٥}\,(٣)^{٥} = \text{س}^{٥} + ١٥\text{س}^{٤} + ٩٠\text{س}^{٣}$

$+ ٢٧٠\text{س}^{٢} + ٤٠٥\text{س} + ٢٤٣$

٤ $(٣\text{س} - ٤\text{ص})^{٣} = {}^{٣}\text{ق}_{٠}(٣\text{س})^{٣} + {}^{٣}\text{ق}_{١}(٣\text{س})^{٢}(-٤\text{ص})^{١}$

$+ {}^{٣}\text{ق}_{٢}(٣\text{س})^{١}(-٤\text{ص})^{٢} + {}^{٣}\text{ق}_{٣}(-٤\text{ص})^{٣}$

$= ٢٧\text{س}^{٣} - ١٠٨\text{س}^{٢}\text{ص} + ١٤٤\text{س ص}^{٢} - ٦٤\text{ص}^{٣}$

٥ $\text{ح}_{٦} = {}^{٧}\text{ق}_{٥}(\text{س})^{٢}(٢\text{ص})^{٥}$

$= ٢١ \times (\text{س}^{٢}) \times (٢)^{٥} \times (\text{ص}^{٥})$

$= ٦٧٢\text{س}^{٢}\text{ص}^{٥}$

٦ الحد الذي يحتوي على $\text{س}^{٦}$ في مفكوك $(٣\text{س} - ٢)^{٨}$

هو ${}^{٨}\text{ق}_{٢}(٣\text{س})^{٦}(-٢)^{٢} = ٢٨ \times ٧٢٩ \times ٤\text{س}^{٦}$

$\therefore$ معامل $\text{س}^{٦} = ٨١\,٦٤٨$

(٥) $(٢\text{أ} - ٣\text{ب})^{٤}$ _____

(٦) $(\text{س} + \frac{١}{\text{س}})^{٤}$ _____

(٧) $(\text{س}^{٢} + ١)^{٣}$ _____

(٨) في مفكوك $(٢ + \text{س})^{٤}$، أوجد معامل $\text{س}^{٣}$. _____

(٩) أوجد معامل $\text{س}^{٤}$ في مفكوك $(\text{س} + \text{ص})^{٧}$ _____

(١٠) أثبت أن: $(٢ + \sqrt{٣})^{٤} - (٢ - \sqrt{٣})^{٤} = ١١٢\sqrt{٣}$.

(١١) إذا كان: $(\sqrt{٦} + \sqrt{٣})^{٣} - (\sqrt{٦} - \sqrt{٣})^{٣} = \text{أ}\sqrt{٣}$، فأوجد قيمة أ.

(١٢) أثبت أن: $(١ + \text{س})^{٧} = ١ + ٧\text{س} + ٢١\text{س}^{٢} + ٣٥\text{س}^{٣} + ٣٥\text{س}^{٤} + ٢١\text{س}^{٥} + ٧\text{س}^{٦} + \text{س}^{٧}$.

٥-٣: الاحتمال

١ الأهداف

- يتعرف التجربة العشوائية.
- يكتب فضاء العينة.
- يوجد احتمالات الأحداث المطلوبة.
- يوجد احتمالات الأحداث المتنافية.
- يوجد احتمال متمم الحدث.
- يوجد احتمالات الأحداث المستقلة.

٢ المفردات الأساسية والمفاهيم الجديدة

تجربة عشوائية – فضاء العينة – الناتج – الحدث – أحداث متنافية – أحداث مستقلة – متمم الحدث.

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

٤ التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

عند رمي حجري نرد منتظمين معًا يمكن تكوين الجدول التالي:

الأول \ الثاني	١	٢	٣	٤	٥	٦
١						
٢						
٣						
٤						
٥						
٦						

(أ) أكمل الجدول بكتابة الأزواج المرتبة للأعداد الظاهرة على حجري النرد وذلك على كل مربع في الجدول.

(ب) أكمل جدولًا مشابهًا على أن يكون في كل مربع ناتج جمع الأعداد الظاهرة على حجري النرد.

٥-٣

الاحتمال

Probability

دعنا نفكر ونتناقش

التجربة Experiment

تستخدم كلمة «احتمال» كثيرًا في حياتنا اليومية وهي تستخدم للتعبير عن قياس فرصة وقوع حدث معين غير مؤكد.

ما احتمالات وقوع الأحداث التالية:

- هطول المطر اليوم
- نجاحك في اختبار مادة الرياضيات.
- سفرك في العطلة الصيفية.
- الحصول على صورة عند إلقاء قطعة نقود معدنية.

سجّل إجابات زملائك في الصف. ماذا تلاحظ؟

نلاحظ استخدام تعابير قياسية مثل: غالبًا، تقريبًا، متأكد، من غير المحتمل، شبه مستحيل.

سوف تتعلم

- تعرّف التجربة العشوائية وفضاء العينة العشوائية.
- تعيين احتمالات الأحداث.
- تعيين احتمالات الأحداث المتنافية ومتمم الحدث والأحداث المستقلة.

(٥-٣-أ) التجربة العشوائية و فضاء العينة Random Experiment and Sample Space

التجربة العشوائية هي تجربة أو عملية تحقق الشروط التالية:

١ جميع النتائج الممكنة للتجربة تكون معلومة مسبقًا قبل إجراءها.

٢ لا يمكن توقع نتيجة التجربة بشكل مؤكد قبل إجراءها.

٣ يمكن حساب فرصة ظهور كل نتيجة من نتائج التجربة قبل إجراء التجربة.

فضاء العينة لتجربة عشوائية هو المجموعة المكونة من جميع النواتج الممكنة للتجربة. نرمز لفضاء العينة بالرمز (ف) ونرمز لعدد عناصر فضاء العينة بالرمز ن(ف).

الناتج هو أي نتيجة من نتائج التجربة العشوائية أي أنه عنصر واحد من عناصر فضاء العينة.

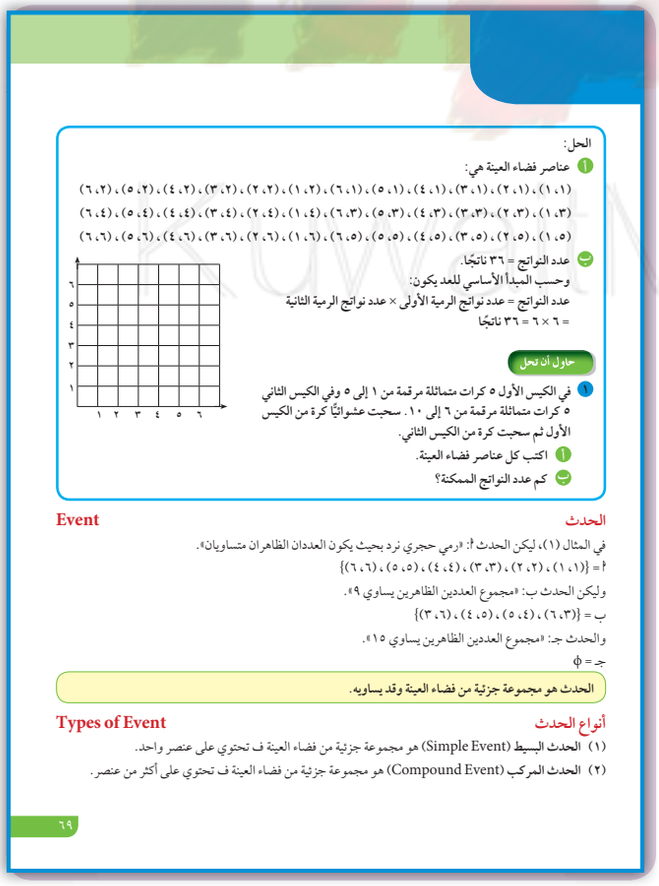
مثال (١)

في تجربة رمي حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين.

١ اكتب عناصر فضاء العينة.

ب كم عدد النواتج الممكنة؟

٦٨



الحل:

١ عناصر فضاء العينة هي:

(١، ١)، (١، ٢)، (١، ٣)، (١، ٤)، (١، ٥)، (١، ٦)، (٢، ١)، (٢، ٢)، (٢، ٣)، (٢، ٤)، (٢، ٥)، (٢، ٦)

(٣، ١)، (٣، ٢)، (٣، ٣)، (٣، ٤)، (٣، ٥)، (٣، ٦)، (٤، ١)، (٤، ٢)، (٤، ٣)، (٤، ٤)، (٤، ٥)، (٤، ٦)

(٥، ١)، (٥، ٢)، (٥، ٣)، (٥، ٤)، (٥، ٥)، (٥، ٦)، (٦، ١)، (٦، ٢)، (٦، ٣)، (٦، ٤)، (٦، ٥)، (٦، ٦)

ب عدد النواتج = ٣٦ ناتجًا.

وحسب المبدأ الأساسي للعد يكون:

عدد النواتج = عدد نواتج الرمية الأولى × عدد نواتج الرمية الثانية

= ٦ × ٦ = ٣٦ ناتجًا

حاول أن تحل

١ في الكيس الأول ٥ كرات متماثلة مرقمة من ١ إلى ٥ وفي الكيس الثاني ٥ كرات متماثلة مرقمة من ٦ إلى ١٠. سحبت عشوائيًا كرة من الكيس الأول ثم سحبت كرة من الكيس الثاني.

١ اكتب كل عناصر فضاء العينة.

ب كم عدد النواتج الممكنة؟

الحدث Event

في المثال (١)، ليكن الحدث أ: «رمي حجري نرد بحيث يكون العددان الظاهران متساويان».

أ = {(١، ١)، (٢، ٢)، (٣، ٣)، (٤، ٤)، (٥، ٥)، (٦، ٦)}

وليكن الحدث ب: «مجموع العددين الظاهرين يساوي ٩».

ب = {(٣، ٦)، (٤، ٥)، (٥، ٤)، (٦، ٣)}

والحدث جـ: «مجموع العددين الظاهرين يساوي ١٥».

جـ = ϕ

الحدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة وقد يساويه.

أنواع الحدث Types of Event

(١) الحدث البسيط (Simple Event) هو مجموعة جزئية من فضاء العينة ف تحتوي على عنصر واحد.

(٢) الحدث المركب (Compound Event) هو مجموعة جزئية من فضاء العينة ف تحتوي على أكثر من عنصر.

٦٩

(جـ) اكتب نواتج الجمع التي تشكل متتالية حسابية حدها الأول ٢ وأساسها ٣

(د) اكتب نواتج الجمع التي تشكل متتالية هندسية حدها الأول ٣ وأساسها ٢

٥ التدريس

من المفيد جدًّا قراءة فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» لأنها مدخل مهمّ كي يفهم الطالب علم الاحتمال. ناقش الطلاب في محتويات هذه الفقرة.

ركّز على معنى الكلمات الواردة ومتى تستخدم وأين. ولماذا أطلقنا على غالبًا، تقريبًا، متأكد، محتمل، من غير المحتمل، شبه مستحيل تعابير قياسية؟

في المثال (١)

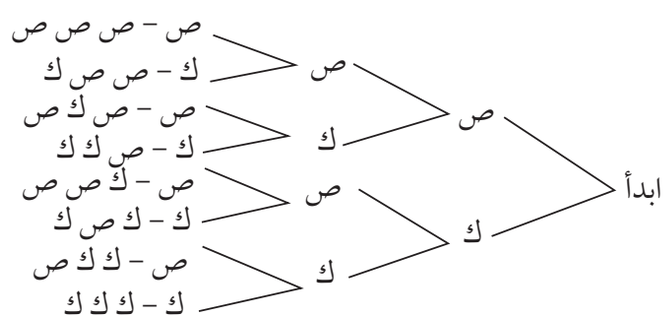
في البدء يجب تعريف «التجربة العشوائية» ومن ثم كتابة «فضاء العينة» إذا رميت حجر النرد أو حجري نرد أو قطعة نقود معدنية أو قطعتين أو أكثر، أو إذا سحبت عددًا من الكرات من كيس يحتوي على كرات من ألوان مختلفة.

هل تستطيع المعرفة مسبقًا ما الناتج الذي سوف تحصل عليه. هنا تأتي التجربة العشوائية في واحدة مما سبق ومن التجربة العشوائية يمكن كتابة فضاء العينة.

في المثال (٢)

بعد كتابة فضاء العينة الذي هو النواتج الممكنة كافة لا بد من تحديد حدث معين ضمن هذا الفضاء وهذا الحدث يمثل مجموعة جزئية من الكل.

أخبر الطلاب أن فضاء العينة يمكن كتابته باستخدام مخطط الشجرة البيانية عند إلقاء قطعة نقود معدنية ثلاث مرات متتالية أو عند إلقاء ثلاث قطع نقود دفعة واحدة.



وبذلك يمكن كتابة فضاء العينة والحدث المطلوب.

(٣) الحدث المستحيل (Impossible Event) هو مجموعة جزئية خالية من فضاء العينة ف ويرمز له بالرمز ϕ أو { }.
(٤) الحدث المؤكد (Certain Event) هو مجموعة جزئية من فضاء العينة ف ويساويه.

مثال (٢)

في تجربة إلقاء قطعة نقود معدنية منتظمة ثلاث مرّات متتالية، أوجد:
(أ) فضاء العيّنة (ف).
(ب) الحدث أ: «ظهور صورتين وكتابة».
(جـ) الحدث ب: «ظهور ثلاث صور».
(د) الحدث جـ: «ظهور صورة واحدة على الأقل».
(هـ) الحدث د: «ظهور صورة واحدة على الأكثر».

الحل:
(أ) ف = {(ص، ص، ص)، (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ص، ك، ك)، (ك، ص، ص)، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص)، (ك، ك، ك)}.
(ب) الحدث أ = {(ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ك، ص، ص)}.
(جـ) الحدث ب = {(ص، ص، ص)}.
(د) الحدث جـ = {(ص، ك، ك)، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص)، (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ك، ص، ص)، (ص، ص، ص)}.
(هـ) الحدث د = {(ك، ك، ك)، (ص، ك، ك)، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص)}.

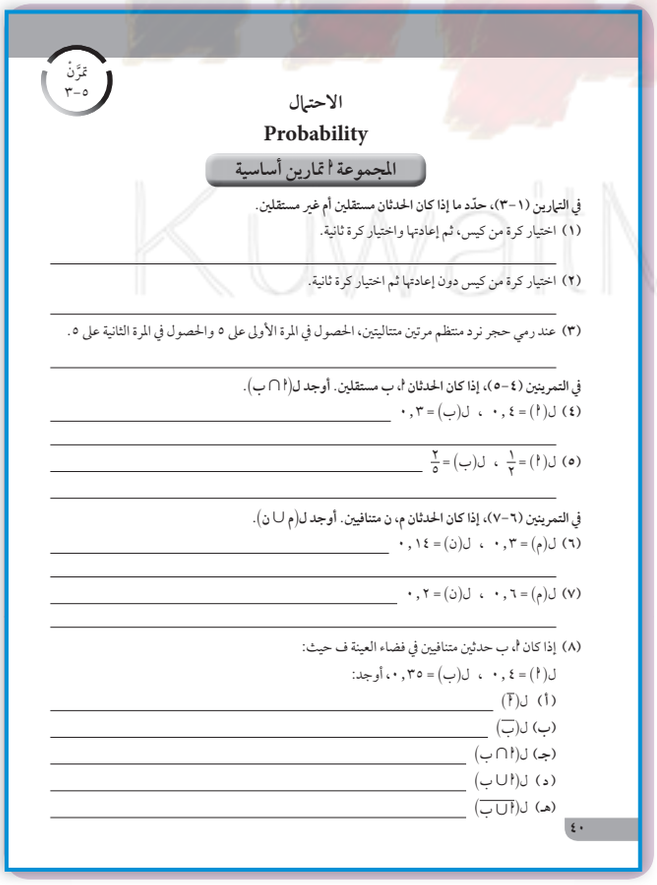
حاول أن تحل

(٢) في المثال (٢)، اكتب كلًّا مما يلي:
(أ) الحدث أ: «ظهور كتابتين وصورة».
(ب) الحدث ب: «ظهور كتابة واحدة على الأقل».

(٥-٣-ب) تعيين احتمالات الأحداث — Precising Probabilities of Events

في التجارب التي تمّ تناولها حتّى الآن، افترضنا أنّ نواتج فضاء العيّنة هي نواتج لها فرص الظهور نفسها. ويمكن إيجاد احتمالات لتجربة ما عن طريق قسمة عدد نواتج الحدث على عدد نواتج فضاء العيّنة.

٧٠



تمرَّنْ ٥-٣

الاحتمال
Probability

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمارين (١-٣)، حدّد ما إذا كان الحدثان مستقلين أم غير مستقلين.
(١) اختيار كرة من كيس، ثم إعادتها واختيار كرة ثانية.
(٢) اختيار كرة من كيس دون إعادتها ثم اختيار كرة ثانية.
(٣) عند رمي حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين، الحصول في المرة الأولى على ٥ والحصول في المرة الثانية على ٥.

في التمرينين (٤-٥)، إذا كان الحدثان أ، ب مستقلين. أوجد ل(أ ∩ ب).
(٤) ل(أ) = ٠,٤ ، ل(ب) = ٠,٣
(٥) ل(أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل(ب) = $\frac{٢}{٥}$

في التمرينين (٦-٧)، إذا كان الحدثان م، ن متنافيين. أوجد ل(م ∪ ن).
(٦) ل(م) = ٠,٣ ، ل(ن) = ٠,١٤
(٧) ل(م) = ٠,٦ ، ل(ن) = ٠,٢

(٨) إذا كان أ، ب حدثين متنافيين في فضاء العينة ف حيث:
ل(أ) = ٠,٤ ، ل(ب) = ٠,٣٥، أوجد:
(أ) ل($\overline{أ}$)
(ب) ل($\overline{ب}$)
(جـ) ل(أ ∩ ب)
(د) ل(أ ∪ ب)
(هـ) ل($\overline{أ \cup ب}$)

٤٠

في المثالين (٣)، (٤)

اشرح للطلاب قاعدة الاحتمال.

أخبرهم أن م هو مجموعة جزئية من فضاء العينة.

وأن ل(م) = $\frac{\text{عدد النواتج في الحدث}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$

من المهم جدًّا معرفة فضاء العينة أولًا لتحديد عدد النواتج فيه، ثم فهم الحدث المطلوب لمعرفة نواتجه، وبعد ذلك استخدام القاعدة.

في المثال (٥)

عند التعامل مع الأحداث المتنافية لا بد من التذكير بالمجموعات وتقاطعها واتحادها. اشرح للطلاب معنى س ∩ ص، س ∪ ص. أعطِ أمثلة عن س ∩ ص = ∅.

أخبرهم أن القاعدة التي تربط عدد العناصر في س ∪ ص تصلح في الاحتمال.

أي ل(س ∪ ص) = ل(س) + ل(ص) − ل (س ∩ ص)

وإذا كانت س ∩ ص = ∅ فإن ل(س ∩ ص) = ل(∅) = ٠

وبالتالي إذا كان س، ص حدثين متنافيين فإن

ل(س ∪ ص) = ل(س) + ل(ص).

في المثال (٦)

اشرح أيضًا للطلاب الحدثين المتممين. أخبرهم أن ذلك يحدث في مجموعة واحدة حيث س مجموعة جزئية من ش فيكون $\overline{\text{س}}$ مجموعة جزئية من ش بحيث س ∪ $\overline{\text{س}}$ = ش، س ∩ $\overline{\text{س}}$ = ∅ ، وبالتالي ل (س ∪ $\overline{\text{س}}$) = ل(ش)

أي ل(س) + ل($\overline{\text{س}}$) = ١

في المثال (٧)

الحدثان المستقلان، يجب التوسع في هذه الحالة لإيضاح الفرق مع الحدثين المتنافيين فأنت تقوم بحدث محدد في فضاء العينة، ثم تقوم بحدث آخر ليس له تأثير على الحدث الأول. إذا كان لديك عدة كرات في كيس وسحبت عشوائيًّا كرة ثم ارجعتها إلى الكيس فإن هذا هو الحدث الأول، وإذا سحبت عشوائيًّا كرة في مرة ثانية فإن هذا الحدث الثاني لا يتأثر بحصول الحدث الأول ولذلك يسمى الحدثان مستقلين، وعند إيجاد احتمال هكذا حدثين نستخدم القاعدة:

ل(س ∩ ص) = ل(س) × ل(ص).

احتمال وقوع الحدث — **Probability of an Event**

إذا كان أ حدثًا في فضاء عيّنة ف (منته وغير خال) لتجربة عشوائية نتائجها لها فرص الظهور نفسها، فإنّ احتمال وقوع الحدث أ هو:

ل(أ) = $\frac{\text{عدد نواتج الحدث (أ)}}{\text{عدد نواتج فضاء العينة (ف)}}$ = $\frac{\text{ن(أ)}}{\text{ن(ف)}}$

ن(أ): عدد عناصر الحدث أ ، ن(ف): عدد عناصر الحدث ف.

ولأن أي حدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة، فإن عدد النواتج في حدث ما دائمًا ما يكون أصغر من أو مساويًا لعدد نواتج فضاء العينة.

خواص الاحتمال لحدث ما — **Properties of the Probability of an Event**

ليكن أ حدث في فضاء عينة ف (منته وغير خال) فإن:

١ ٠ ≤ ل(أ) ≤ ١.

٢ إذا كان أ = { }، فإن ل(أ) = ٠ ويسمى أ بالحدث المستحيل.

٣ إذا كان أ = ف، فإن ل(أ) = ١ ويسمى ف بالحدث المؤكد.

مثال (٣)

يبيّن الجدول أدناه وسيلة النقل التي يستخدمها طلاب الصف الحادي عشر بشعبتيه للمجيء إلى المدرسة.

اختير طالب عشوائيًّا من بين طلاب شعبتي الصف الحادي عشر.

ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الذين يستقلون الحافلة المدرسية للمجيء إلى المدرسة؟

	الشعبة أ	الشعبة ب
الحافلة المدرسية	١٦	١٥
مع الأهل	٦	٨
سيارة نقل عام	٤	٣

الحل:

لنفرض أن الحدث أ: «المجيء بالحافلة المدرسية إلى المدرسة».

عدد نواتج الحدث (أ) : ١٦ + ١٥ = ٣١

عدد نواتج فضاء العينة (ف):

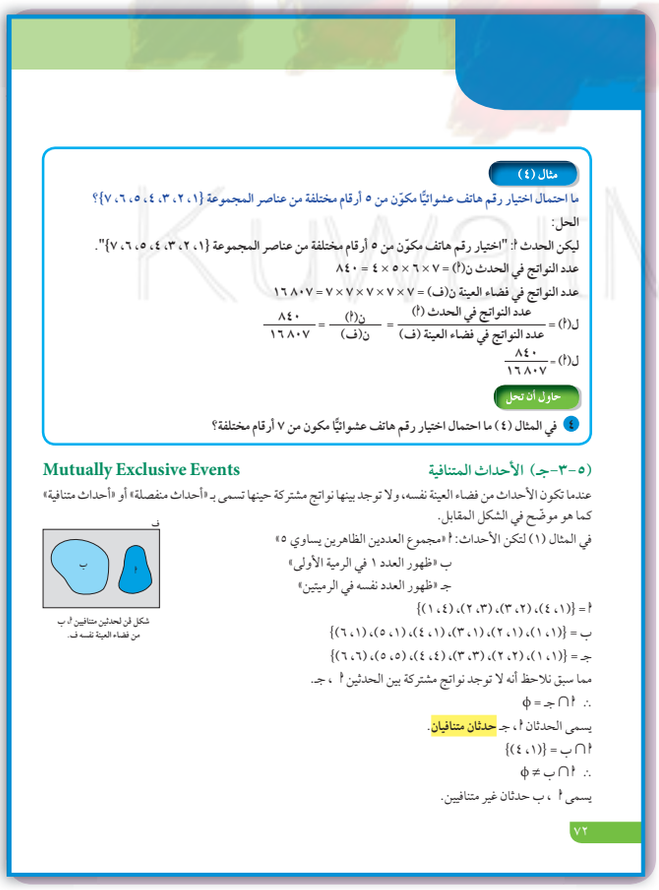
ن(ف) = (١٦ + ٦ + ٤) + (١٥ + ٨ + ٣) = ٥٢

∴ ل(أ) = $\frac{\text{عدد نواتج الحدث (أ)}}{\text{عدد نواتج فضاء العينة (ف)}}$ = $\frac{٣١}{٥٢}$

حاول أن تحل

٣ في المثال (٣)، ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الذين يذهبون للمدرسة مع الأهل؟

٧١



مثال (٤)

ما احتمال اختيار رقم هاتف عشوائيًّا مكوّن من ٥ أرقام مختلفة من عناصر المجموعة {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}؟

الحل:

ليكن الحدث أ: "اختيار رقم هاتف مكوّن من ٥ أرقام مختلفة من عناصر المجموعة {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}".

عدد النواتج في الحدث ن(أ) = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٥ = ٨٤٠

عدد النواتج في فضاء العينة ن(ف) = ٧ × ٧ × ٧ × ٧ × ٧ = ١٦٨٠٧

ل(أ) = $\frac{\text{عدد النواتج في الحدث (أ)}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة (ف)}}$ = $\frac{\text{ن(أ)}}{\text{ن(ف)}}$ = $\frac{٨٤٠}{١٦٨٠٧}$

ل(أ) = $\frac{٨٤٠}{١٦٨٠٧}$

حاول أن تحل

٤ في المثال (٤) ما احتمال اختيار رقم هاتف عشوائيًّا مكون من ٧ أرقام مختلفة؟

(٥-٣-جـ) الأحداث المتنافية — **Mutually Exclusive Events**

عندما تكون الأحداث من فضاء العينة نفسه، ولا توجد بينها نواتج مشتركة حينها تسمى بـ «أحداث منفصلة» أو «أحداث متنافية» كما هو موضّح في الشكل المقابل.

في المثال (١) لتكن الأحداث: أ «مجموع العددين الظاهرين يساوي ٥»

ب «ظهور العدد ١ في الرمية الأولى»

جـ «ظهور العدد نفسه في الرميتين»

أ = {(١، ٤)، (٢، ٣)، (٣، ٢)، (٤، ١)}

ب = {(١، ١)، (١، ٢)، (١، ٣)، (١، ٤)، (١، ٥)، (١، ٦)}

جـ = {(١، ١)، (٢، ٢)، (٣، ٣)، (٤، ٤)، (٥، ٥)، (٦، ٦)}

مما سبق نلاحظ أنه لا توجد نواتج مشتركة بين الحدثين أ ، جـ.

∴ أ ∩ جـ = ϕ

يسمى الحدثان أ ، جـ حدثان متنافيان.

أ ∩ ب = {(١، ٤)}

∴ أ ∩ ب ≠ ϕ

يسمى أ ، ب حدثان غير متنافيين.

٧٢

شكل فن لحدثين متنافيين أ، ب من فضاء العينة نفسه ف.

٦ الربط

الأمثلة في هذا الدرس هي ربط مع حالات حياتية يمكن أن نصادفها في مواقف يومية.

٧ التقييم

قد يخطىء الطلاب في تحديد الحدثين المتنافيين والحدثين المستقلين وكيفية إيجاد احتمال كل منهما. أعطِ أمثلة أضافية توضح هذا الفرق.

اختبار سريع

١ في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين:

(أ) اكتب فضاء العينة.

ف = {(١، ١)، (١، ٢)، (١، ٣)، (١، ٤)، (١، ٥)، (١، ٦)، (٢، ١)، (٢، ٢)، (٢، ٣)، (٢، ٤)، (٢، ٥)، (٢، ٦)، (٣، ١)، (٣، ٢)، (٣، ٣)، (٣، ٤)، (٣، ٥)، (٣، ٦)، (٤، ١)، (٤، ٢)، (٤، ٣)، (٤، ٤)، (٤، ٥)، (٤، ٦)، (٥، ١)، (٥، ٢)، (٥، ٣)، (٥، ٤)، (٥، ٥)، (٥، ٦)، (٦، ١)، (٦، ٢)، (٦، ٣)، (٦، ٤)، (٦، ٥)، (٦، ٦)}.

(ب) اكتب المجموعة الجزئية للحدث أ: ناتج جمع العددين الظاهرين أكبر من ٦

أ = {(٣، ٤)، (٣، ٥)، (٣، ٦)، (٤، ٣)، (٤، ٤)، (٤، ٥)، (٤، ٦)، (٥، ٢)، (٥، ٣)، (٥، ٤)، (٥، ٥)، (٥، ٦)، (٦، ١)، (٦، ٢)، (٦، ٣)، (٦، ٤)، (٦، ٥)، (٦، ٦)}.

(جـ) ما احتمال وقوع الحدث أ؟

$$ل(أ) = \frac{\text{عدد النواتج في الحدث}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$$

$$ل(أ) = \frac{٢١}{٣١} \text{ ومنها } ل(أ) \simeq ٠,٥٨$$

قاعدة الإضافة للأحداث المتنافية Addition Rule for Mutually Exclusive Events

- إذا كان أ، ب حدثين في فضاء العينة فإن: ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)
- إذا كان أ، ب حدثين متنافيين، فإنّ: ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) حيث ل(أ ∩ ب) = ٠ والعكس صحيح

مثال (٥)

تختار مها عشوائيًّا عددًا بين الصفر و٩. ما احتمال أن تختار مها عددًا أكبر من ٦ أو عددًا أصغر من ٣؟

الحل:

نفرض أن الحدث جـ: «العدد أكبر من ٦».

جـ = {٧، ٨، ٩}

نفرض أن الحدث م: «العدد أصغر من ٣»

م = {٠، ١، ٢}

المطلوب إيجاد ل(جـ ∪ م).

∴ جـ ∩ م = {٧، ٨، ٩} ∩ {٠، ١، ٢} = ϕ

∴ جـ، م حدثان متنافيان

∴ ل(جـ ∪ م) = ل(جـ) + ل(م) = $\frac{٣}{١٠} + \frac{٣}{١٠} = \frac{٦}{١٠}$ = ٠,٦

حاول أن تحل

٥ في تجربة إلقاء حجر نرد، ما احتمال الحدث «الحصول على عدد أصغر من ٢ أو من مضاعفات العدد٣»؟

(٥-٣-د) متمم الحدث Complement of an Event

متمم الحدث أ ويرمز له بالرمز $\overline{أ}$، هو مجموعة كل نواتج فضاء العينة وغير الموجودة في الحدث أ كما هو موضّح في الشكل المقابل.

ولأن أ، $\overline{أ}$ يشكلان معًا فضاء العينة كاملًا، حيث أ ∪ $\overline{أ}$ = ف و أ ∩ $\overline{أ}$ = ϕ

فإن ل(أ ∪ $\overline{أ}$) = ل(ف) = ١

الحدثان أ، $\overline{أ}$ متتامان

∴ أ، $\overline{أ}$ حدثان منفصلان، لذلك:

ل(أ ∪ $\overline{أ}$) = ل(أ) + ل($\overline{أ}$) = ١

شكل فن لحدثين متممين داخل فضاء العينة نفسه.

٧٣

---

(٩) إذا كان أ، ب حدثين في فضاء العينة ف حيث:

ل(أ) = ٠,٤ ، ل(ب) = ٠,٣ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٢٥، أوجد:

(أ) ل($\overline{أ ∩ ب}$) _____

(ب) ل(أ ∪ ب) _____

(جـ) ل($\overline{أ ∪ ب}$) _____

(١٠) إذا كان م، ن حدثين مستقلين في فضاء العينة ف حيث ل(ن) = $\frac{١}{٢}$ ، ل($\overline{م}$) = $\frac{٣}{٥}$، فأوجد كلًّا مما يلي:

(أ) ل(م) _____

(ب) ل(م ∩ ن) _____

(جـ) ل(م ∪ ن) _____

(١١) إذا كان م، ن حدثين في فضاء العينة ف حيث ل(م ∪ ن) = ٠,٧ ، ل(م) = ٠,٥ ، ل(ن) = ٠,٣، فأوجد: ل(م ∩ ن) _____

(١٢) إذا كان م، ن حدثين في فضاء العينة ف حيث ل($\overline{م}$) = $\frac{١}{٣}$ ، ل($\overline{ن}$) = $\frac{١}{٤}$ ، ل($\overline{م ∪ ن}$) = $\frac{١}{٥}$، فأوجد:

(أ) ل(م ∪ ن) _____

(ب) ل(م ∩ ن) _____

(١٣) إذا كان ل(م ∪ ن) = $\frac{٧}{١٠}$ ، ل(م) = $\frac{١}{٥}$ ، ل(م ∩ ن) = ٠، فأوجد: ل(ن) _____

(١٤) ألقي حجر نرد مرقم من ١ إلى ٦. ليكن:

الحدث أ: الحصول على العدد ٢.

الحدث ب: الحصول على أعداد مربعة.

الحدث جـ: الحصول على عدد زوجي.

أوجد:

(أ) ل(أ ∪ ب) _____

(ب) ل(أ ∪ جـ) _____

(جـ) ل(أ ∩ ب) _____

(د) ل($\overline{ب ∪ جـ}$) _____

(١٥) إذا كان احتمال نجاح راشد في الاختبار = $\frac{٢}{٥}$، واحتمال نجاح سعد في نفس الاختبار = $\frac{١}{٣}$، فما احتمال أن ينجحا معًا في نفس الاختبار؟ _____

٤١

(د) ما احتمال الحدثين:

أ: ناتج جمع العددين الظاهرين أكبر من أو يساوي ٦

ب: ناتج جمع العددين الظاهرين أصغر من أو يساوي ٤؟

أ = {(١، ٥)، (١، ٦)، (٢، ٤)، (٢، ٥)، (٢، ٦)، (٣، ٣)، (٣، ٤)، (٣، ٥)، (٣، ٦)، (٤، ٢)، (٤، ٣)، (٤، ٤)، (٤، ٥)، (٤، ٦)، (٥، ١)، (٥، ٢)، (٥، ٣)، (٥، ٤)، (٥، ٥)، (٥، ٦)، (٦، ١)، (٦، ٢)، (٦، ٣)، (٦، ٤)، (٦، ٥)، (٦، ٦)}

ب = {(١، ١)، (١، ٢)، (١، ٣)، (٢، ١)، (٢، ٢)، (٣، ١)}

أ ∩ ب = ∅

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

$= \frac{٢٦}{٣٦} + \frac{٦}{٣٦} - ٠ = \frac{٨}{٩} \approx ٠,٨٨٩$

٢ في كيس ٥ كرات زرقاء و٤ كرات بيضاء. سحبت عشوائيًّا من الكيس كرة ثم أعيدت إلى الكيس، ثم سحبت عشوائيًّا كرة ثانية. أوجد احتمال أن تكون الكرة الأولى زرقاء والكرة الثانية بيضاء.

الحدثان مستقلان.

ل(زرقاء ثم بيضاء) $= \frac{٥ق_١}{٩ق_١} \times \frac{٤ق_١}{٩ق_١}$

$= \frac{٥}{٩} \times \frac{٤}{٩} = \frac{٢٠}{٨١}$

قاعدة الحدث المتمم — **The Complement Rule**

إذا كانت أ حدثًا، فاحتمال عدم حدوث أ هو:

ل($\bar{أ}$) = ١ − ل(أ)

مثال (٦)

في تجربة رمي حجر نرد منتظم، إذا كان الحدث أ «ظهور عدد أكبر من أو يساوي ٥».

أوجد ما يلي:

١ ل(أ)

ب ل($\bar{أ}$)

معلومة رياضية: الحدث المتمم للحدث أ يرمز إليه بالرمز $\bar{أ}$.

الحل:

ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

أ = {٥، ٦}

١ ل(أ) = $\frac{ن(أ)}{ن(ف)} = \frac{٢}{٦}$

$= \frac{١}{٣}$

ب ل($\bar{أ}$) = ١ − ل(أ) = ١ − $\frac{١}{٣}$

$= \frac{٢}{٣}$

حاول أن تحل

٩ في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين أوجد احتمال الحصول على عددين مختلفين.

(٥-٣-هـ) الحدثان المستقلان — **Independent Events**

يكون الحدثان مستقلين إذا كان وقوع أحدهما ليس له أي تأثير على وقوع الآخر.

أمثلة توضيحية

١ عند إلقاء قطعة نقود معدنية وحجر نرد منتظم مرّة واحدة. فإن الحدثين «الوجه الظاهر لقطعة النقود كتابة»، «الوجه العلوي لحجر النرد العدد ٣» لا يؤثر وقوع أحدهما على وقوع الآخر لذلك الحدثان مستقلان.

٢ يلعب عبدالله وسالم كرة اليد.

الحدثان: «سجّل عبدالله هدفًا من رمية حرّة»، و«سجّل سالم هدفًا من رمية حرّة» هما حدثان مستقلان لأن وقوع أحدهما لا يؤثر على وقوع الحدث الآخر.

٣ لدينا كيسان: في الكيس الأول ٥ كرات حمراء و٣ كرات خضراء وفي الثاني ٤ كرات حمراء و٦ كرات خضراء.

الحدثان: «سحب كرة خضراء من الكيس الأول» و«سحب كرة خضراء من الكيس الثاني». هما حدثان مستقلان.

قاعدة الأحداث المستقلة — **Rule of Independant Two Events**

إذا كان أ، ب حدثين مستقلين، فإن احتمال وقوع الحدثين معًا هو:

ل(أ ∩ ب) = ل(أ) • ل(ب)، والعكس صحيح.

احتمال اتحاد حدثين مستقلين — **Probability of Union for Two Independant Events**

لإيجاد احتمال اتحاد حدثين نستخدم القاعدة:

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

وفي حالة حدثين مستقلين تصبح هذه القاعدة:

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ) • ل(ب)

مثال (٧)

يلعب ابراهيم ويوسف لعبة رمي السهم.

احتمال أن يصيب ابراهيم الهدف يساوي $\frac{٢}{٥}$، واحتمال أن يصيب يوسف الهدف يساوي $\frac{١}{٣}$

رمى كل منهما سهمًا على الهدف.

ما احتمال:

١ أن يصيب كل من ابراهيم ويوسف الهدف؟

ب إصابة الهدف؟

٨ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ (أ)

فضاء العينة

	٦	٧	٨	٩	١٠
١	(١,٦)	(١,٧)	(١,٨)	(١,٩)	(١,١٠)
٢	(٢,٦)	(٢,٧)	(٢,٨)	(٢,٩)	(٢,١٠)
٣	(٣,٦)	(٣,٧)	(٣,٨)	(٣,٩)	(٣,١٠)
٤	(٤,٦)	(٤,٧)	(٤,٨)	(٤,٩)	(٤,١٠)
٥	(٥,٦)	(٥,٧)	(٥,٨)	(٥,٩)	(٥,١٠)

(ب) عدد النواتج الممكنة: ٥ × ٥ = ٢٥

٢ (أ) الحدث أ = {(ك، ك، ص)، (ك، ص، ك)، (ص، ك، ك)}.

(ب) الحدث ب = {(ك، ك، ك)، (ك، ك، ص)، (ك، ص، ك)، (ص، ك، ك)، (ك، ص، ص)، (ص، ك، ص)، (ص، ص، ك)}.

٣ عدد نواتج الحدث = ٦ + ٨ = ١٤

عدد نواتج فضاء العينة = ٥٢

ل(أ) = $\frac{١٤}{٥٢}$ = $\frac{٧}{٢٦}$

الحل:

نفرض أن الحدث جـ: «يصيب ابراهيم الهدف»

ونفرض أن الحدث م: «يصيب يوسف الهدف».

الحدثان جـ، م مستقلان لأن وقوع أحدهما ليس له أي تأثير على وقوع الآخر.

أ يصيب كل من ابراهيم ويوسف الهدف هو الحدث (جـ ∩ م).

∵ جـ، م حدثان مستقلان

∴ ل(جـ ∩ م) = ل(جـ) • ل(م)

= $\frac{٢}{٥} \times \frac{١}{٣}$

= $\frac{٢}{١٥}$

ب الحدث «إصابة الهدف» هو اتحاد الحدثين المستقلين جـ، م.

∴ ل(جـ ∪ م) = ل(جـ) + ل(م) − ل(جـ ∩ م)

= $\frac{٢}{٥} + \frac{١}{٣} - \frac{٢}{١٥}$

= $\frac{٦ + ٥ - ٢}{١٥}$

= $\frac{٩}{١٥} - \frac{٣}{٥}$

حاول أن تحل

٧ في مثال (٧)، ما احتمال عدم إصابة الهدف؟

٧٦

---

(١٦) في إحدى المؤسسات تم تنظيم دورة للموظفين في اللغة الإنجليزية والحاسوب. إذا كان عدد الموظفين في المؤسسة ٢٠٠ موظف وتمّ تنفيذ الدورات على الموظفين وفق الجدول التالي:

دورة اللغة الإنجليزية \ دور الحاسوب	نعم	لا
نعم	٤٥	٣٣
لا	٧٠	٥٢

إذا تم اختيار موظف عشوائيًّا، فأوجد كلًّا من الاحتمالات التالية:

(أ) أن يكون الموظف قد أخذ دورة اللغة الإنجليزية ودورة الحاسوب.

(ب) أن يكون الموظف قد أخذ دورة اللغة الإنجليزية ولم يأخذ دورة الحاسوب.

(جـ) أن يكون الموظف قد أخذ دورة اللغة الإنجليزية أو أخذ دورة الحاسوب.

(١٧) في حوض لتربية سمك السلمون هناك نوعان من الأسماك: السلمون المرقط والسلمون الملوّن.

يبيّن الجدول توزيع هذه الأسماك في الحوض.

الطول بالسنتيمتر	١٦-	١٨-	٢٠-	٢٢-
ملوّن	٣	٢٠	٣٥	١٢
مرقط	٧	١٥	٢٥	٣

أخذت سمكة عشوائيًّا من الحوض. أوجد كلًّا من احتمالات الأحداث التالية:

أ = «سمكة ملوّنة». _____

ب = «طولها أصغر من ٢٠ سم». _____

جـ = «سمكة مرقطة وطولها على الأقل ٢٠ سم». _____

د = «سمكة مرقطة أو طولها على الأقل ٢٢ سم». _____

هـ = «سمكة ملونة وطولها على الأقل ١٨ سم». _____

و = «ألا تكون مرقطة وألا يكون طولها أصغر من ٢٠ سم». _____

٤٢

٤ ل(أ) = $\frac{٧!}{٧^{٧}}$ = $\frac{٧٢٠}{١١٧\,٦٤٩}$

٥ $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

٦ ليكن الحدث أ: «الحصول على عددين متساويين»

ل(أ) = $\frac{٦}{٣٦}$ = $\frac{١}{٦}$

ل($\overline{أ}$) = ١ − $\frac{١}{٦}$ = $\frac{٥}{٦}$

٧ «عدم إصابة الهدف» هو الحدث المتمم لِـ «إصابة الهدف».

ل(عدم إصابة الهدف) = ١ − $\frac{٣}{٥}$ = $\frac{٢}{٥}$

المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمرينين (١-٢)، حدّد ما إذا كان الحدثان مستقلين أم لا.

(١) سحب كرة حمراء من كيس والحصول على العدد ٣ عند رمي حجر نرد.

(٢) أن يكون الابن الأول في العائلة ولد والثاني أيضًا ولد.

في التمرينين (٣-٤)، إذا كان الحدثان م، ن مستقلين، أوجد ل(م ∩ ن) حيث:

(٣) ل(م) = $\frac{٣}{٧}$ ، ل(ن) = $\frac{٧}{١٥}$

(٤) ل(م) = ٠,١٢ ، ل(ن) = ٠,٢٤

في التمرينين (٥-٦)، إذا كان الحدثان م، ن متنافيين. أوجد ل(م ∪ ن) حيث:

(٥) ل(م) = ٠,١٤ ، ل(ن) = ٠,١٦

(٦) ل(م) = $\frac{٣}{٥}$ ، ل(ن) = $\frac{٣}{١٠}$

(٧) إذا كان أ، ب حدثين متنافيين في فضاء العينة ف حيث:
ل($\overline{أ}$) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٢٥. أوجد:

(أ) ل(أ) (ب) ل($\overline{ب}$)

(جـ) ل(أ ∩ ب) (د) ل(أ ∪ ب)

(هـ) ل($\overline{أ ∩ ب}$)

(٨) إذا كان أ، ب حدثين في فضاء العينة ف حيث:
ل($\overline{أ}$) = ٠,٤٥ ، ل(ب) = ٠,٣٢ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,١٨. أوجد:

(أ) ل($\overline{ب}$)

(ب) ل(أ ∪ ب)

(جـ) ل($\overline{أ ∪ ب}$)

(٩) إذا كان ن، م حدثين في فضاء العينة ف حيث: ل(م) = ٠,٢٥ ، ل(ن) = ٠,٤٥ ، ل(م ∪ ن) = ٠,٧.
أوجد: ل(م ∩ ن). ماذا تستنتج؟

(١٠) إذا كان م، ن حدثين في فضاء العينة ف حيث: ل(م) = ٠,٧ ، ل(ن) = ٠,٤، فهل يمكن أن يكون هذان الحدثان متنافيين؟

(١١) إذا كان أ، ب حدثين في فضاء العينة ف حيث: ل(أ ∪ ب) = ٠,٢٤٣ ، ل(أ) = ٠,١٥٢ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,١٢٥. فأوجد: ل($\overline{ب}$).

(١٢) تحوي علبة ١٢ قرصًا متشابهًا مرقمًا من ١ إلى ١٢، سحب قرص عشوائيًّا. أوجد احتمال كل من الأحداث التالية:

(أ) الحصول على العدد ٢.

(ب) الحصول على عدد فردي.

(جـ) الحصول على عدد أولي.

(د) الحصول على عدد من مضاعفات العدد ٤.

(١٣) ألقي حجر نرد أرقامه ٣، ٣، ٣، ١، ٤، ٦، فما احتمال الحصول على:

(أ) عدد زوجي.

(ب) عدد من مضاعفات العدد ٣.

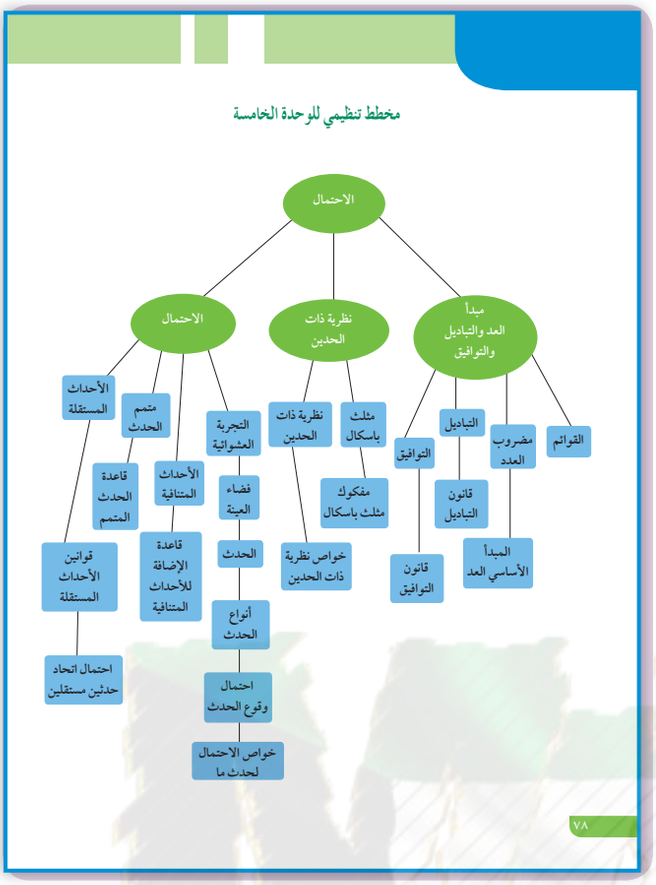
المرشد لحل المسائل

إجابة «مسألة إضافية»

(أ) ل(أن يكون دمه من الفصيلة AB) = $\frac{٦٠ + ١٥}{١٥٠٠} = \frac{١}{٢٠}$

(ب) ل(أن يكون نوع دمه سالبًا) = $\frac{١١٥ + ٤٥ + ١٥ + ١٦٥}{١٥٠٠}$

= $\frac{١٧}{٧٥}$



مخطط تنظيمي للوحدة الخامسة

المرشد لحل المسائل

إذا أراد ٣ أشخاص الإقامة في فندق مكون من خمس طوابق وكان بإمكان أي شخص من الأشخاص الثلاثة الإقامة في أي طابق.

١ ما احتمال أن يقيم الثلاثة معًا في الطابق نفسه؟

٢ ما احتمال أن لا يقيم أي شخص في الطابق الخامس؟

الحل:

يمكن لكل شخص اختيار طابق من بين ٥

∴ لكل شخص ٥ خيارات مستقلة عن الخيارات الأخرى.

∴ عدد النواتج في فضاء العينة = ٥ × ٥ × ٥ = $٥^٣$

١ يمكن للثلاثة أن ينزلوا معًا في أي طابق من الطوابق الخمسة.

∴ عدد النواتج في الحدث = ٥ × ١ × ١

= ٥

ل(ينزل الثلاثة معًا في الطابق نفسه) = $\frac{٥}{١٢٥} = \frac{١}{٢٥}$

٢ الحدث أ: «أن لا يقيم أي شخص في الطابق الخامس».

لكل شخص ٤ طوابق يختار طابقًا منها.

عدد النواتج في الحدث = ٤ × ٤ × ٤ = $٤^٣$

∵ عدد النواتج في فضاء العينة = $٥^٣$

∴ ل(أ) = $\frac{٤^٣}{٥^٣} = \frac{٦٤}{١٢٥}$

حل مسألة إضافية

يبيّن الجدول المقابل فصائل الدم لِـ ١٥٠٠ شخص.

اختير شخص عشوائيًّا من هذه المجموعة.

أ ما احتمال أن يكون دمه من الفصيلة AB؟

ب ما احتمال أن يكون نوع دمه سالبًا؟

الفصيلة / النوع	A	B	AB	O
موجب	٥١٥	٧٥	٦٠	٥١٠
سالب	١١٥	٤٥	١٥	١٦٥

ملخص

- يمكن حل بعض مسائل العد بوضع قائمة مرتبة.
- لإجراء عملية على م مرحلة متتابعة، أجريت المرحلة الأولى بـ $ن_١$ طريقة مختلفة، والمرحلة الثانية بـ $ن_٢$ طريقة مختلفة، وهكذا حتى المرحلة الأخيرة م بـ $ن_م$ طريقة مختلفة، فإن عدد طرائق إجراء هذه العملية هو: $ن_١ \times ن_٢ \times \ldots \times ن_م$
- مضروب العدد: ن! = ن × (ن − ١) × (ن − ٢) × ... × ٣ × ٢ × ١ لكل عدد صحيح موجب ن
- قانون التباديل: $^ن ل_ر = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$ ؛ ر ≤ ن ، ر، ن ∈ ص+
- قانون التوافيق: $^ن ق_ر = \frac{ن!}{ر!\,(ن - ر)!}$
- خواص التوافيق $^ن ق_٠ = ١$، $^ن ق_ن = ١$، $^ن ق_١ = ن$، $^ن ق_ر = {}^ن ق_{ن-ر}$
- مثلث باسكال

١
١ ١
١ ٢ ١
١ ٣ ٣ ١
١ ٤ ٦ ٤ ١
١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١

الحافات الخارجية للمثلث تساوي ١

كل عدد في صف يساوي مجموع العددين الواقعين تمامًا فوقه.

- نظرية ذات الحدين: $(أ + ب)^ن = {}^ن ق_٠ أ^ن + {}^ن ق_١ أ^{ن-١} ب + {}^ن ق_٢ أ^{ن-٢} ب^٢ + \ldots + {}^ن ق_{ن-١} أ ب^{ن-١} + {}^ن ق_ن ب^ن$، حيث ن عدد صحيح موجب.
- مفكوك $(أ + ب)^ن$ يتضمن ن + ١ حدًّا.
- الحد الذي ترتيبه ر + ١ هو $^ن ق_ر \times أ^{ن-ر} \times ب^ر$
- فضاء العينة لتجربة ما هو مجموعة كل النواتج الممكن حدوثها لتجربة ما.
- الحدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة وقد يساويه.
- احتمال الحدث: ل(الحدث) = $\frac{\text{عدد النواتج في الحدث}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}} = \frac{ن(أ)}{ن(ف)}$.
- ٠ ≤ ل(أ) ≤ ١
- إذا كان أ = { } فإن ل(أ) = ٠ ويسمى أ بالحدث المستحيل.
- إذا كان أ = ف فإن ل(أ) = ١ ويسمى ف بالحدث المؤكد.
- إذا كان أ، ب حدثين متنافيين، فإن ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب).
- الحدث المتمم: ل(أ) + ل($أ'$) = ١
- إذا كان أ، ب حدثين مستقلين، فإن ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب)، ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ) × ل(ب).

اختبار الوحدة الخامسة

أسئلة المقال

في التمارين (١-٣)، حدّد ما إذا كانت الحالة تبيّن توفيقة أم تبديلًا، ثم حلّ.

(١) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار ٥ ممثلين من مجموعة مؤلفة من ١١ ممثلًا لتحضير عمل مسرحي؟

(٢) بكم طريقة يمكن اختيار ٣ طلاب من بين ١٥ طالبًا مع مراعاة الترتيب.

(٣) أوجد مفكوك: $(١ - ٢س)^{٤}$

(٤) إذا كان م، ن حدثين مستقلين في فضاء العينة ف حيث: ل(م) = ٠,٣٨ ، ل(ن) = ٠,٢٤.
فأوجد: ل(م ∩ ن).

(٥) إذا كان م، ن حدثين متنافيين في فضاء العينة ف حيث: ل(م) = ٠,٣٣ ، ل(ن) = ٠,٢٠.
فأوجد: ل(م ∪ ن).

(٦) يبيّن الجدول المقابل فصائل الدم لِـ ١٥٠٠ شخص.
اختير شخص عشوائيًّا من هذه المجموعة.

النوع \ الفصيلة	A	B	AB	O
موجب	٥١٥	٧٥	٦٠	٥١٠
سالب	١١٥	٤٥	١٥	١٦٥

(أ) ما احتمال أن يكون دمه من الفصيلة A؟

(ب) ما احتمال أن يكون نوع دمه موجب؟

(١٨) مفكوك $(أ - ب)^{٣}$ هو:

(أ) $أ^{٣} + أ^{٢}ب + أب^{٢} + ب^{٣}$ (ب) $أ^{٣} + ٣أ^{٢}ب + ٣أب^{٢} + ب^{٣}$

(ج) $أ^{٣} - أ^{٢}ب + أب^{٢} - ب^{٣}$ (د) $أ^{٣} - ٣أ^{٢}ب + ٣أب^{٢} - ب^{٣}$

(١٩) الحد الثالث في مفكوك $(أ - ب)^{٧}$ هو:

(أ) $-٢١أ^{٥}ب^{٢}$ (ب) $-٧أ^{٥}ب$

(ج) $٧أ^{٦}ب$ (د) $٢١أ^{٥}ب^{٢}$

(٢٠) معامل $جـ^{٤}$ في مفكوك $(٢جـ - ٤ب)^{٥}$ هو:

(أ) ١٢٨٠ (ب) -٢٥٦٠ (ج) -٣٢٠ (د) ١٢٠ ٥

(٢١) إذا كان الحدثان م، ن مستقلين، حيث ل(م) = $\frac{١}{٣}$ ، ل(ن) = $\frac{٩}{٢٠}$ ، فإن ل(م ∩ ن) تساوي:

(أ) $\frac{٣}{٢٤}$ (ب) $\frac{٢٥}{٤٨}$ (ج) $\frac{٣}{١٠}$ (د) $\frac{١١}{٤٨}$

(٢٢) إذا كان الحدثان ع، ط متنافيين حيث ل(ع) = $\frac{٣}{٥}$ ، ل(ط) = $\frac{١}{٣}$، فإن ل(ع ∪ ط) تساوي:

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{١٤}{١٥}$ (ج) $\frac{٤}{١٥}$ (د) صفر

(٢٣) إذا كان الحدثان ع، ط متنافيين حيث ل(ع) = $\frac{١}{٧}$ ، ل(ط) = ٦٠٪، فإن ل(ع ∪ ط) تساوي:

(أ) $\frac{٦}{٧٠}$ (ب) ٤٢٪ (ج) $\frac{١٦}{٣٥}$ (د) $\frac{٢٦}{٣٥}$

(٢٤) في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال الحصول على عدد زوجي أو عدد أولي يساوي:

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٥}{٦}$ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

البنود الموضوعية

في البنود (١-١٢) عبارات، ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة، (ب) إذا كانت العبارة خاطئة.

(١) قيمة المقدار ١٠! هي ٣٦٢٨٨٠٠ (أ) (ب)

(٢) قيمة المقدار ٤! × ٥! هي ٣٦٠ (أ) (ب)

(٣) قيمة المقدار $ل^{٨}_{٢}$ هي ٣٦٠ (أ) (ب)

(٤) قيمة المقدار $^{٥}ق_{٤}$ × ٣ هي ١٥ (أ) (ب)

(٥) $^{٥}ل_{٢} = ٢ \times {}^{٥}ق_{٢}$ (أ) (ب)

(٦) مفكوك $(جـ + ١)^{٥}$ هو: $جـ^{٥} + ٥جـ^{٤} + ١٠جـ^{٣} + ١٠جـ^{٢} + ٥جـ + ١$ (أ) (ب)

(٧) إذا كان الحد $١٢٦ جـ^{٤} د^{٥}$ أحد حدود مفكوك $(جـ + د)^{ن}$، فإن قيمة ن هي ٥ (أ) (ب)

(٨) إذا كان معامل الحد الثاني في مفكوك $(س + ر)^{ن}$ هو ٧ فإنّ قيمة ن هي ٦ (أ) (ب)

(٩) الحد الثاني من $(س + ٣)^{٩}$ هو $٥٤ س^{٨}$ (أ) (ب)

(١٠) (اختيار لون السيارة عشوائيًّا واختيار نوع الإطارات عشوائيًّا) هما حدثان مستقلان. (أ) (ب)

(١١) بفرض أن الحدثين م، ن مستقلان، ل(م) = $\frac{١٢}{١٧}$ ، ل(ن) = $\frac{٣}{٨}$ إذًا ل(م ∩ ن) = $\frac{٩}{١٧}$ (أ) (ب)

(١٢) في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال الحصول على العدد ٤ أو عدد زوجي يساوي $\frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

في التمارين (١٣-٢٤)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(١٣) قيمة المقدار $\frac{١٠!}{٣!\,٧!}$ هي:

(أ) $\frac{١٠}{٢١}$ (ب) $\frac{١}{١٢٠}$ (ج) ١٢٠ (د) ١

(١٤) قيمة المقدار $^{٦}ل_{٤} \times {}^{١٠}ق_{٢}$ هي:

(أ) ٧٥٦٠٠ (ب) ٧٥٦٠ (ج) ٢,٥ (د) ٢١٠

(١٥) قيمة المقدار $\frac{^{٧}ق_{٤}}{^{٣}ق_{٤}} \times {}^{٩}ق_{٢}$ هي:

(أ) ١٨ (ب) ٥,١٨٤ (ج) ١٠ (د) ٧٣٥

(١٦) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار ٥ لاعبين لفريق كرة السلة من بين ١٢ لاعبًا إذا كان ترتيب المراكز في الفريق مهمًّا؟

(أ) ٩٥٠٤٠ (ب) ٤٧٥٢٠٠ (ج) ٣٩٢ (د) ١١٤٠٤٨٠٠

(١٧) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار ٣ أعلام من مجموعة من ٧ أعلام مختلفة؟

(أ) ٢١٠ (ب) ٣٥ (ج) ٨٤٠ (د) ٢٤

تمارين إثرائية

(١) يوجد في كيس ٣ كرات سوداء، وكرة واحدة بيضاء جميعها لها القياس نفسه. تسحب الكرات الواحدة تلو الأخرى دون إعادة. يتوقف السحب عند الحصول على الكرة البيضاء.
فما احتمال أن يتوقف السحب في المرة الثالثة؟

(٢) تتكوّن الشيفرة السرية لفتح الخزنة من حرف يليه عدد من ٣ أرقام.

(أ) الحرف هو أحد أحرف كلمة «كويت». فما عدد الشيفرات الممكنة؟

(ب) الحرف هو ك لكن لا يوجد رقم متكرر.

(جـ) الحرف هو أحد أحرف كلمة «كويت» وعدد الشيفرة هو عدد زوجي.

(٣) أثبت أن: $\left(س + \frac{١}{س}\right)^{٦} - \left(س + \frac{١}{س}\right)^{٦} = \left(١٢س^{٤} + \frac{١}{س^{٤}} + \frac{١٠}{٣}\right)$