الوحدة الأولى: الأعداد الحقيقية

Real Numbers

١ – ١: الجذور والتعبيرات الجذرية والعمليات عليها

- الجذور والتعبيرات الجذرية.
- تبسيط التعبيرات الجذرية.
- جمع وطرح التعبيرات الجذرية.
- ضرب وقسمة التعبيرات الجذرية.
- المرافق واستخدامه.

١ – ٢: الأسس النسبية وخواصها

- الأسس النسبية.
- خواص الأسس النسبية.

مقدمة الوحدة

عند دراسة الأعداد الحقيقية لا بد من التطرق إلى دور علماء العرب في هذا المجال، إذ كانت مؤلفاتهم زاخرة بالقواعد التي تستخدم في استخراج الجذور وجمع المربعات المتوالية والمكعبات. وقد برهنوا صحتها وتوصلوا إلى نتائج مفيدة في هذا المجال.

كان الخوارزمي أول من استخدم كلمة «أصم» للإشارة إلى العدد الذي لا جذر له كعدد صحيح؛ وقد أوجد العرب طرقًا لحساب قيم تقريبية للأعداد التي ليس لها جذور على شكل أعداد صحيحة، فمثلًا يقول بهاء الدين العاملي في كتابه «خلاصة الحساب»:

«... وإن كان أصم فأسقط منه أقرب المجذورات إليه، وأنسب الباقي إلى ضعف (مثلي) جذر المسقط مع الواحد فجذر المسقط مع حاصل النسبة هو جذر الأصم بالتقريب. فلو افترضنا أن العدد الأصم هو م وكان أقرب عدد له جذر تربيعي هو $ب^٢$ وكان الفرق يساوي هـ، نكتب:

$م - ب^٢ = هـ$ ومنه $م = ب^٢ + هـ$،

وبالتالي $\sqrt{م} = ب + \frac{هـ}{١ + ٢ب}$».

ويمكن عرض أمثلة عن قاعدة بهاء الدين العاملي.

مثال (١)

أوجد $\sqrt{١٧}$.

أقرب عدد أصغر من ١٧ له جذر تربيعي هو ١٦،

حيث $\sqrt{١٦} = ٤$ ، ثم $١٧ - ١٦ = ١$.

لذا: $\sqrt{١٧} = ٤ + \frac{١}{١ + ٢ \times ٤} = ٤ + \frac{١}{٩} \simeq ٤,١١$

أي أن الجذر التربيعي للعدد ١٧ هو تقريبًا ٤,١١

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد: $\sqrt{١٧} \simeq ٤,١٢٣١١$.

الوحدة الأولى

الأعداد الحقيقية

Real Numbers

مشروع الوحدة: العلاقة بين الهندسة والأعداد الحقيقية

١ مقدمة المشروع: أثناء العمل على هذا المشروع سوف ترسم مثلثات قائمة الزاوية بمعلومية طول كل من ضلعي الزاوية القائمة، ثم تطبق قانون فيثاغورث لإيجاد طول الوتر.

٢ الهدف: إيجاد قيمة $\sqrt{٢}$، $\sqrt{٣}$، $\sqrt{٥}$ دون استخدام الآلة الحاسبة.

٣ اللوازم: مسطرة، فرجار، زاوية قائمة.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ ارسم مثلثًا قائم الزاوية، متطابق الضلعين، طول كل من ضلعي زاويته القائمة ١ سم.

- أوجد طول الوتر بتطبيق قانون فيثاغورث، ثم باستخدام المسطرة ماذا تستنتج؟
- $\sqrt{٢} \simeq ...$

ب ارسم مثلثًا قائم الزاوية، طول ضلعي الزاوية القائمة ١ سم، $\sqrt{٢}$ سم.

- أوجد طول الوتر بتطبيق قانون فيثاغورث، ثم باستخدام المسطرة ماذا تستنتج؟
- $\sqrt{٣} \simeq ...$

جـ بالطريقة نفسها أوجد قيمة $\sqrt{٤}$ ، $\sqrt{٥}$، ...

٥ التقرير: ضع تقريرًا مفصلًا تبين فيه كيف استخدمت الهندسة لإيجاد قيمة تقريبية لـ $\sqrt{٢}$ و $\sqrt{٣}$ ، ... ثم ضع ملصقًا يبيّن الأشكال التي رسمتها.

دروس الوحدة

١-١ الجذور والتعبيرات الجذرية والعمليات عليها	١-٢ الأسس النسبية وخواصها
(١-١-أ) الجذور والتعبيرات الجذرية	(١-٢-أ) الأسس النسبية
(١-١-ب) تبسيط التعبيرات الجذرية	(١-٢-ب) خواص الأسس النسبية
(١-١-جـ) جمع وطرح التعبيرات الجذرية	
(١-١-د) ضرب وقسمة التعبيرات الجذرية	
(١-١-هـ) المرافق واستخدامه	

١٠

مثال (٢)

أوجد $\sqrt{٣٤}$

أقرب عدد أصغر من ٣٤ له جذر تربيعي هو ٢٥،

حيث $\sqrt{٢٥} = ٥$، ثم $٣٤ - ٢٥ = ٩$.

لذا: $\sqrt{٣٤} = ٥ + \frac{٩}{١ + ٢ \times ٥} = ٥ + \frac{٩}{١١} \simeq ٥,٨٢$

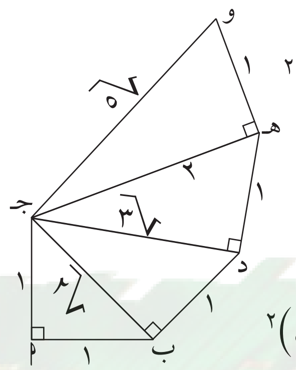
أي أن الجذر التربيعي للعدد ٣٤ هو تقريبًا ٥,٨٢.

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد: $\sqrt{٣٤} \simeq ٥,٨٣١$ تقريبًا.

مشروع الوحدة

يقدم هذا المشروع فرصة للطلاب لمعالجة الجذر التربيعي للأعداد ٢، ٣، ٥ وذلك دون استخدام الآلة الحاسبة من خلال التقريب واستخدام نظرية فيثاغورث على الأعداد الصماء من مجموعة الأعداد الكلية ويبيّن أنها أعداد غير نسبية.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»



(أ) $(ب\,جـ)^{٢} = (م\,ب)^{٢} + (م\,جـ)^{٢}$

$(ب\,جـ)^{٢} = ١^{٢} + ١^{٢} = ٢$

$ب\,جـ = \sqrt{٢}$

$\sqrt{٢} \simeq ١,٤١٤$

(ب) $(د\,جـ)^{٢} = (ب\,جـ)^{٢} + (د\,ب)^{٢}$

$(د\,جـ)^{٢} = (\sqrt{٢})^{٢} + ١^{٢} = ٢ + ١ = ٣$

$د\,جـ = \sqrt{٣}$

$\sqrt{٣} \simeq ١,٧٣٢$

(جـ) وبالطريقة نفسها ومن خلال رسم مثلثين قائمي الزاوية على التوالي بحيث تكون أضلاع الزاوية القائمة تساوي ١، $\sqrt{٣}$ في المثلث الثالث، وبذلك يكون:

$هـ\,جـ = \sqrt{٤} = ٢$

وأضلاع الزاوية القائمة في المثلث الرابع هي ١، ٢

وبذلك يكون: $و\,جـ = \sqrt{٥}$

التقرير

نلاحظ أن كل المثلثات في المشروع قائمة الزاوية، وأن طول أحد ضلعي الزاوية القائمة ثابت ويساوي ١ بينما طول الضلع الثاني يساوي ١، $\sqrt{٢}$، $\sqrt{٣}$، $\sqrt{٤}$، ...

يسمح هذا المشروع بإنشاء قطع مستقيمة تتدرج أطوالها من $\sqrt{٢}$ إلى $\sqrt{٣}$، $\sqrt{٤}$، $\sqrt{٥}$ ... بشكل دقيق وهذا ما لا تمكننا منه المسطرة المرقمة.

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)
- تعرّفت الأعداد الحقيقية.
- تعرّفت الجذور التربيعية.
- استخدمت الآلة الحاسبة لإيجاد الجذور التربيعية.

ماذا سوف تتعلم؟
- الجذور والتعبيرات الجذرية.
- تبسيط التعبيرات الجذرية.
- جمع وطرح التعبيرات الجذرية.
- ضرب وقسمة التعبيرات الجذرية.
- إيجاد المرافق واستخدامه.
- كتابة عدد حقيقي بالصورة الجذرية.
- كتابة عدد حقيقي بالصورة الأسية.

المصطلحات الأساسية

الجذر التربيعي – الجذر التكعيبي – الجذر النوني – المرافق – دليل الجذر – الصورة الجذرية – المجذور – الصورة الأسية.

أضف إلى معلوماتك

المعكوس الضربي لكل عدد حقيقي موجب أكبر من واحد هو عدد حقيقي موجب أصغر من واحد.
إذًا يوجد أعداد حقيقية موجبة أصغر من واحد بقدر ما يوجد أعداد حقيقية موجبة أكبر من واحد.

١١

سلّم التقييم

٤.	الحسابات دقيقة – العرض ممتاز وواضح – النتائج والتحليلات سليمة – التقرير مفصل ومعبّر.
٣.	معظم الحسابات دقيقة – العرض جيد جدًّا – النتائج والتحليلات لا بأس بها – معظم التقرير مفصل ومعبّر.
٢.	بعض الحسابات دقيقة – العرض جيد – النتائج والتحليلات مقبولة – التقرير بحاجة إلى إعادة نظر.
١.	معظم عناصر المشروع غير كافية وناقصة.

١-١: الجذور والتعبيرات الجذرية والعمليات عليها

١ الأهداف

- يوجد الجذور التربيعية والتكعيبية.
- يجمع التعبيرات الجذرية ويطرحها.
- يضرب التعبيرات الجذرية ويقسمها.
- يستخدم المرافق لكتابة كسر بصورة كسر مقامه عدد نسبي.

٢ المفردات الأساسية والمفاهيم الجديدة

الجذور – تعبيرات جذرية – جذر تربيعي – جذر تكعيبي – المرافق – دليل الجذر – المجذور.

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – جهاز إسقاط (Data Show) – حاسوب.

٤ التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(أ) أوجد الجذر التربيعي لكل عدد مما يلي:

$\sqrt{٤٩}$، $\sqrt{٨١}$، $-\sqrt{١٦٩}$، $\sqrt{٢٢٥}$.

(ب) أوجد الجذر التربيعي إلى أقرب جزء من مئة لكل عدد مما يلي: $\sqrt{٢٩}$، $\sqrt{١٧٥}$ ، $-\sqrt{٣٢٧}$.

(جـ) بسّط ما يلي: $\sqrt{٣} \times \sqrt{٢٧}$، $\sqrt{٥} \times \sqrt{١٢٥}$، $\dfrac{\sqrt{٢٤٣}}{\sqrt{٢٧}}$، $\dfrac{\sqrt{١٤٧}}{\sqrt{٣}}$، $(٦)^٢$، $(-٧)^٣$، $(٤)^٣$.

٥ التدريس

يوفر هذا الدرس فرصة أمام طلاب المرحلة الثانوية – الفرع الأدبي – لمتابعة بناء معارفهم عن الجذور والتعبيرات الجذرية والتي سبق أن تعرفوا إلى جزء منها في مرحلة سابقة.

ركّز أولًا على فكرة الجذر التربيعي من خلال إعادة تذكيرهم بأن: $\sqrt{س^٢} = |س|$، أي أن:

$\sqrt{٣٦} = \sqrt{(٦)^٢} = \sqrt{(-٦)^٢} = |٦| = |-٦| = ٦$، ولكن:

$-\sqrt{٣٦} = -٦$

١-١

الجذور والتعبيرات الجذرية والعمليات عليها

Roots and Radical Expressions and Operations

دعنا نفكر ونتناقش

١ مساحة مربّع طول ضلعه ٤ أمتار هي ٤ × ٤ = ١٦ مترًا مربعًا.

٢ أ مساحة مربع هي ٦٤ مترًا مربعًا. أوجد طول ضلعه.

ب استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد طول ضلع مربع مساحته ٧٢ مترًا مربعًا.

٣ ما حجم مكعب إذا كان طول ضلعه ٥ أمتار؟

٤ ما طول ضلع مكعب إذا كان حجمه يساوي ٢٧ مترًا مكعبًا؟

سوف تتعلم

- الجذور التربيعية والتكعيبية.
- جمع وطرح التعبيرات الجذرية.
- ضرب التعبيرات الجذرية.
- قسمة التعبيرات الجذرية.
- استخدام المرافق لكتابة كسر بصورة كسر مقامه عدد نسبي.

(١-١-أ) الجذور والتعبيرات الجذرية Roots and Radical Expressions

بما أن $٥^٢ = (-٥)^٢ = ٢٥$ ، فإن العددين ٥ و-٥ هما الجذران التربيعيان للعدد ٢٥.

بما أن $(+٥)^٣ = +١٢٥$، فإن العدد (+٥) هو الجذر التكعيبي للعدد (+١٢٥).

وأيضًا $(-٥)^٣ = -١٢٥$، فإن العدد (-٥) هو الجذر التكعيبي للعدد (-١٢٥).

وبالتالي:

- لكل عدد حقيقي موجب جذران تربيعيان أحدهما موجب والآخر سالب.
- لكل عدد حقيقي جذر تكعيبي واحد.

ملخص عدد الجذور لعدد حقيقي

العدد الحقيقي	عدد الجذور التربيعية	عدد الجذور التكعيبية
موجب	٢	١
صفر	١	١
سالب	٠	١

الجذور التكعيبية Cubic Roots

إذا كان $أ^٣ = ب$ فإن $أ = \sqrt[٣]{ب}$ هو **الجذر التكعيبي** للعدد ب، ٣ هو **دليل الجذر**، ب هو **المجذور**.

وبالتالي:

لكل عدد حقيقي س:

$(\sqrt[٣]{س})^٣ = س$

$\sqrt[٣]{س^٣} = س$

الجذر التكعيبي للعدد ب

دليل الجذر

$أ = \sqrt[٣]{ب}$ ← المجذور

١٢

مثال (١)

أوجد الجذر التكعيبي لكل عدد مما يلي:

أ -٨ ب ١٢٥

الحل:

أ الجذر التكعيبي للعدد (-٨) هو $\sqrt[٣]{-٨}$

$\sqrt[٣]{-٨} = \sqrt[٣]{(-٢)^٣}$ اكتب (-٨) على صورة مكعب كامل

$= -٢$ $\sqrt[٣]{س^٣} = س$ لكل س عدد حقيقي

$\therefore \sqrt[٣]{-٨} = -٢$

ب الجذر التكعيبي للعدد ١٢٥ هو $\sqrt[٣]{١٢٥}$

$\sqrt[٣]{١٢٥} = \sqrt[٣]{٥^٣}$ اكتب (١٢٥) على صورة مكعب كامل

$= ٥$ $\sqrt[٣]{س^٣} = س$ لكل س عدد حقيقي

حاول أن تحل

١ أوجد الجذر التكعيبي لكل عدد مما يلي:

أ -٢٧ ب ٦٤

(١-١-ب) تبسيط التعبيرات الجذرية Simplifying Radical Expressions

متى يكون التعبير الجذري في أبسط صورة؟

يكون التعبير الجذري في أبسط صورة عندما:

- لا يكون للمجذور عوامل مرفوعة لقوة أكبر من أو تساوي دليل الجذر مثل: $\sqrt[٣]{س^٥ ص^٧}$
- لا يوجد جذر في المقام مثل $\dfrac{٣}{\sqrt{٢}}$ أو $\dfrac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٥}}$
- لا يكون المجذور كسرًا مثل $\sqrt{\dfrac{٣}{٥}}$.
- يكون دليل الجذر **أصغر** عدد صحيح موجب ممكن مثل $\sqrt[١٢]{٦٤}$ ليس في أبسط صورة.

لأن: $\sqrt[١٢]{٦٤} = \sqrt[١٢]{٢^٦} = ٢^{\frac{٦}{١٢}} = ٢^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٢}$.

معلومة:

- كل مقدار يتضمن جذورًا يسمى تعبيرًا جذريًا.
- عندما يكون دليل الجذر يساوي ٢ فلا يكتب.
- الجذر التربيعي ل س يكتب $\sqrt{س}$ حيث س ≥ ٠.
- $\sqrt{س^٢} = |س|$ لكل س عدد حقيقي.

١٣

مثال (٢)

بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

أ $\sqrt{٤س^٦}$ ب $\sqrt[٣]{٨س^٣}$ ج $\sqrt{١٦س^٤ص^٦}$

الحل:

أ $\sqrt{٤س^٦} = \sqrt{٢^٢ \times (س^٣)^٢}$ اكتب ٤س^٦ على صورة مربعات كاملة

$= \sqrt{(٢ \times س^٣)^٢}$ س^ن × ص^ن = (س × ص)^ن

$= |٢ \times س^٣|$ $\sqrt{س^٢} = |س|$

$= ٢|س^٣| = ٢س^٢|س|$

ب $\sqrt[٣]{٨س^٣} = \sqrt[٣]{٢^٣ س^٣}$ اكتب ٨س^٣ على صورة مكعبات كاملة

$= \sqrt[٣]{(٢س)^٣}$ س^ن × ص^ن = (س × ص)^ن

$= ٢س$ $\sqrt[٣]{س^٣} = س$

ج $\sqrt{١٦س^٤ص^٦} = \sqrt{(٤)^٢(س^٢)^٢(ص^٣)^٢}$ اكتب ١٦س^{٤}ص^٦ على صورة مكعبات كاملة

$= \sqrt{(٤س^٢ص^٣)^٢}$ س^ن × ص^ن = (س × ص)^ن

$= |٤س^٢ص^٣|$ $\sqrt{س^٢} = |س|$

$= ٤س^٢|ص^٣|$

$= ٤س^٢ص^٢|ص|$

حاول أن تحل

٢ بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

أ $\sqrt{٩س^٢ص^٤}$ ب $\sqrt[٣]{-٢٧س^٦}$ ج $\sqrt{س^٨ص^٦}$

(١-١-جـ) جمع وطرح التعبيرات الجذرية

Addition and Subtraction of Radical Expressions

لجمع وطرح التعبيرات الجذرية يجب أن تكون متشابهة.

يكون التعبيران الجذريان متشابهين عندما يكون لهما دليل الجذر نفسه والمجذور نفسه.

يجب وضع التعبيرات الجذرية في أبسط صورة مما يسمح لنا بمعرفة ما إذا كانت متشابهة أم لا.

لاحظ أن:

$٥\sqrt{٣}$ ، $٢\sqrt{٣}$ تعبيران جذريان متشابهان

$٨\sqrt{س}$ ، $-٣\sqrt{س}$ (س ⩾ ٠) تعبيران جذريان متشابهان

$\sqrt{٢٧}$ ، $\sqrt{١٢}$ تعبيران جذريان متشابهان (لماذا؟)

١٤

في حين أن:

$٥\sqrt{٣}$ ، $٣\sqrt{٥}$ تعبيران جذريان غير متشابهين

$٨\sqrt{س}$ ، $-٣\sqrt{ص}$ (س ⩾ ٠، ص ⩾ ٠) تعبيران جذريان غير متشابهين

تذكر: نتعامل مع التعبيرات الجذرية المتشابهة مثل تعاملنا مع الحدود الجبرية المتشابهة.

مثال (٣)

أوجد الناتج في أبسط صورة في كل مما يلي:

أ $٣\sqrt{٥} + ٤\sqrt{٥}$ ب $\sqrt{٢٧} + ٣\sqrt{١٢} - \sqrt{٧٥}$

الحل:

أ $٣\sqrt{٥} + ٤\sqrt{٥} = (٣ + ٤)\sqrt{٥}$ اجمع

$= ٧\sqrt{٥}$

ب $\sqrt{٢٧} + ٣\sqrt{١٢} - \sqrt{٧٥} = \sqrt{٣^٢ \times ٣} + ٣\sqrt{٢^٢ \times ٣} - \sqrt{٥^٢ \times ٣}$ اكتب على صورة مربعات كاملة

$= ٣\sqrt{٣} + ٣ \times ٢\sqrt{٣} - ٥\sqrt{٣}$ $\sqrt{س^٢} = س$ ، س ⩾ ٠

$= ٣\sqrt{٣} + ٦\sqrt{٣} - ٥\sqrt{٣}$ اجمع

$= ٤\sqrt{٣}$

حاول أن تحل

٣ أوجد ناتج كل مما يلي في أبسط صورة:

أ $\sqrt{٥} + \sqrt{٢٠}$ ب $\sqrt{٤٨} - \sqrt{٥٠} - \sqrt{٨}$

مثال (٤)

أوجد الناتج في أبسط صورة:

أ $٢\sqrt[٣]{٣} + ٥\sqrt[٣]{٣٧٥}$ ب $٣\sqrt{٣٢} - \sqrt{٩٨}$

ج $\sqrt{١٨} + \sqrt{٥٠} - \sqrt{٧٢}$ د $\sqrt[٣]{١٢٨} + \sqrt[٣]{٥٤} - ٢\sqrt[٣]{٢٥٠}$

١٥

من جهة ثانية، اشرح لهم جيدًا الاختلاف بين الجذر التربيعي والجذر التكعيبي. أخبرهم أن المجذور يجب أن يكون عددًا موجبًا أو يساوي الصفر كي نجد له جذرًا تربيعيًّا، ولكن هذا الشرط غير ضروري إذا أردنا إيجاد جذر تكعيبي. أعطِ الطلاب عدة أمثلة لترسيخ هذه الفكرة لديهم.

مثال:

$\sqrt{٤٩} = ٧$ ولكن $\sqrt{-٤٩}$ غير موجود في الأعداد الحقيقية.

$\sqrt[٣]{٦٤} = ٤$ ، $\sqrt[٣]{-٦٤} = -٤$

وبالتالي، الجذر التكعيبي لعدد موجب موجود والجذر التكعيبي لعدد سالب موجود أيضًا.

في المثال (١)

ذكر الطلاب أن لكل عدد (موجب أو سالب) جذرًا تكعيبيًّا واحدًا له الإشارة نفسها.

في المثال (٢)

أعد تنبيه الطلاب إلى الجذر التربيعي عندما يكون المجذور على صورة تعبير جذري.

اشرح لهم الفرق بين نتيجة $\sqrt{س^٦}$ و $\sqrt{س^٨}$، حيث إن $\sqrt{س^٦} = |س^٣|$ ولكن $\sqrt{س^٨} = س^٤$.

في المثال (٣)

يتعلّم الطالب كيفية جمع الجذور التربيعية وطرحها.

في المثال (٤)

عند التعامل مع الجذر التكعيبي لا نحتاج إلى استخدام القيمة المطلقة، وذلك عندما يكون المجذور عددًا ثابتًا أو تعبيرًا جبريًّا، لذا $\sqrt[٣]{س^٣} = س$ لكل قيم س ∈ ح.

في الأمثلة (٥)، (٦)، (٧)

تساعد الطالب على تبسيط الجذور باستخدام خاصية الضرب إذا كان للمجذور الدليل نفسه وباستخدام خاصية القسمة إذا كان للمجذور أيضًا الدليل نفسه.

في المثال (٨)

يستخدم الطالب خواص ضرب وجمع وطرح الكسور لتبسيط التعبيرات الجذرية.


الحل:

أ $٢\sqrt[3]{٣}+٥\sqrt[3]{٣٧٥}=٢\sqrt[3]{٣}+٥\sqrt[3]{١٢٥\times٣}$ — اكتب ١٢٥ على صورة مكعب كامل $\sqrt[3]{س^{٣}}=س$

$=٢\sqrt[3]{٣}+٥\sqrt[3]{٥^{٣}\times٣}$

$=٢\sqrt[3]{٣}+٥\times٥\sqrt[3]{٣}$

$=٢\sqrt[3]{٣}+٢٥\sqrt[3]{٣}$ — بسّط

$=٢٧\sqrt[3]{٣}$

ب $٣\sqrt{٣٢}-\sqrt{٩٨}=٣\sqrt{١٦\times٢}-\sqrt{٤٩\times٢}$ — اكتب ١٦، ٤٩ على صورة مربعات كاملة $\sqrt{س^{٢}}=س$ ، س ≤ ٠ .

$=٣\sqrt{٤^{٢}\times٢}-\sqrt{٧^{٢}\times٢}$

$=٣\times٤\sqrt{٢}-٧\sqrt{٢}$

$=١٢\sqrt{٢}-٧\sqrt{٢}$ — بسّط

$=٥\sqrt{٢}$

جـ $\sqrt{١٨}+\sqrt{٥٠}-\sqrt{٧٢}=\sqrt{٩\times٢}+\sqrt{٢٥\times٢}-\sqrt{٣٦\times٢}$ — اكتب ٩، ٢٥، ٣٦ على صورة مربعات كاملة $\sqrt{س^{٢}}=س$ ، س ≤ ٠ .

$=\sqrt{٣^{٢}\times٢}+\sqrt{٥^{٢}\times٢}-\sqrt{٦^{٢}\times٢}$

$=٣\sqrt{٢}+٥\sqrt{٢}-٦\sqrt{٢}$

$=٢\sqrt{٢}$ — بسّط

د $\sqrt[3]{١٢٨}+\sqrt[3]{٥٤}-٢\sqrt[3]{٢٥٠}=\sqrt[3]{٦٤\times٢}-\sqrt[3]{٢٧\times٢}-٢\sqrt[3]{١٢٥\times٢}$ — اكتب ٦٤، ٢٧، ١٢٥ على صورة مربعات كاملة $\sqrt[3]{س^{٣}}=س$

$=\sqrt[3]{٤^{٣}\times٢}+\sqrt[3]{٣^{٣}\times٢}-٢\sqrt[3]{٥^{٣}\times٢}$

$=٤\sqrt[3]{٢}+٣\sqrt[3]{٢}-٢\times٥\sqrt[3]{٢}$

$=-٣\sqrt[3]{٢}$ — بسّط

حاول أن تحل

٤ أوجد الناتج في أبسط صورة.

أ $٤\sqrt[3]{٨}+٢\sqrt[3]{٦٤}$ ب $٢\sqrt{٧٥}-\sqrt{٢٧}$

جـ $\sqrt{١٢}+\sqrt{١٤٧}-\sqrt{١٠٨}$ د $\sqrt[3]{٣٢٠}-\sqrt[3]{٤٠}-\sqrt[3]{١٣٥}$

١٦


(١-١-د) ضرب وقسمة التعبيرات الجذرية

Multiplication and Division of Radical Expressions

الجذور التربيعية	الجذور التكعيبية
س، ص عددان حقيقيان غير سالبين	س، ص عددان حقيقيان
$\sqrt{س^{٢}}=\|س\|=س$	$\sqrt[3]{س^{٣}}=س$
$(\sqrt{س})^{٢}=س$	$(\sqrt[3]{س})^{٣}=س$
$\sqrt{س}\times\sqrt{ص}=\sqrt{س\times ص}$	$\sqrt[3]{س}\times\sqrt[3]{ص}=\sqrt[3]{س\times ص}$
$\frac{\sqrt{س}}{\sqrt{ص}}=\sqrt{\frac{س}{ص}}$ ، ص ≠ ٠	$\frac{\sqrt[3]{س}}{\sqrt[3]{ص}}=\sqrt[3]{\frac{س}{ص}}$ ، ص ≠ ٠

مثال (٥)

بسّط كلًّا من التعبيرين الجذريين التاليين:

أ $\sqrt{٧٢ س^{٣}}$ حيث س ≥ ٠ ب $\sqrt[3]{٨٠ن^{٥}}$

الحل:

أ $\sqrt{٧٢س^{٣}}=\sqrt{٦^{٢}\times٢\times س^{٢}\times س}$ — اكتب ٧٢، س^{٣} على صورة مربعات كاملة

$=\sqrt{٦^{٢}\times س^{٢}}\times\sqrt{٢\times س}$ — $\sqrt{س\times ص}=\sqrt{س}\times\sqrt{ص}$ حيث س ≥ ٠، ص ≥ ٠

$=٦\|س\|\times\sqrt{٢س}$ — $\sqrt{س^{٢}}=\|س\|$

$=٦س\sqrt{٢س}$ — $\|س\|=س$ لأن س ≥ ٠

ب $\sqrt[3]{٨٠ن^{٥}}=\sqrt[3]{٢^{٣}\times١٠\times ن^{٣}\times ن^{٢}}$ — اكتب ٨٠، ن^{٥} على صورة مكعبات كاملة

$=\sqrt[3]{٢^{٣}\times ن^{٣}}\times\sqrt[3]{١٠ن^{٢}}$ — $\sqrt[3]{س\times ص}=\sqrt[3]{س}\times\sqrt[3]{ص}$ لكل س، ص أعداد حقيقية

$=٢ن\sqrt[3]{١٠ن^{٢}}$ — $\sqrt[3]{س^{٣}}=س$ لكل عدد حقيقي س

حاول أن تحل

٥ بسّط كلًّا من التعبيرين الجذريين التاليين:

أ $\sqrt{٥٠س^{٤}}$ ب $\sqrt[3]{١٨س^{٣}}$

١٧

في المثال (٩)

كتابة مقام الكسر على صورة عدد نسبي هي عملية إجرائية نستخدم فيها العدد المرافق للمقام أو التعبير الجبري المرافق للمقام، وهذه العملية الإجرائية تساعد في معظم الأحيان على تبسيط الكسر.

أخبر الطلاب أن $\sqrt{أ}$ يسمى مرافقًا لـ $\sqrt{أ}$

حيث $\sqrt{أ}\times\sqrt{أ}=(\sqrt{أ})^{٢}=أ$ (عدد نسبي).

وأن $\sqrt[3]{أ}$ يسمى مرافقًا لـ $\sqrt[3]{أ^{٢}}$، لأن $\sqrt[3]{أ}\times\sqrt[3]{أ^{٢}}=\sqrt[3]{أ^{٣}}=أ$.

وأيضًا $(أ+\sqrt{ب})$، $(أ-\sqrt{ب})$ مقداران مترافقان، لأن $(أ-\sqrt{ب})(أ+\sqrt{ب})=أ^{٢}-ب$ (عدد نسبي).

ملاحظة للمعلم: المرافق ليس وحيدًا مثلًا: $\sqrt{٥}$، $\sqrt{٥}$ عددان مترافقان وأيضًا $\sqrt{٥}$، $-\sqrt{٥}$ عددان مترافقان.

في المثال (١١)

يكون الطالب قد تعلم استخدام كل العمليّات الحسابية لإيجاد قيمة التعبيرات الجبرية التي تتضمّن جذورًا تربيعيّة. وبالتالي يتم تطبيقها في سبيل إيجاد إجابات مبسطة.

مثال:

$(\sqrt{٦}-\sqrt{٢})$، $(\sqrt{٦}+\sqrt{٢})$ مترافقان حيث

$(\sqrt{٦}-\sqrt{٢})(\sqrt{٦}+\sqrt{٢})=(\sqrt{٦})^{٢}-(\sqrt{٢})^{٢}$

$=٦-٢$

$=٤$

٦ الربط

في المثال (١٠) يوفر قانون أينشتاين: ط = ك × س^{٢} فرصة أمام الطلاب للتعامل مع الجذر التربيعي، حيث $س^{٢}=\frac{ط}{ك}$

أي $س=\sqrt{\frac{ط}{ك}}$ (س > ٠).

كما أن القاعدة التي تعطي حجم كرة بدلالة نصف قطرها توفر فرصة ثانية أمام الطلاب للتعامل مع الجذر التكعيبي

$ح=\frac{٤}{٣}\pi نق^{٣}$ ومنه $نق=\sqrt[3]{\frac{٣ح}{٤\pi}}$

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في جمع وطرح التعابير الجبرية التي تتضمن جذورًا، فيكتبون مثلًا:

$$\sqrt{س \pm ص} = \sqrt{س} \pm \sqrt{ص}.$$

أخبرهم أن ذلك غير صحيح من خلال استخدام أمثلة متعددة.

على سبيل المثال، لنأخذ:

$$\sqrt{١٦٩ - ٢٥} \neq \sqrt{١٦٩} - \sqrt{٢٥}$$

$$\sqrt{١٤٤} \neq ١٣ - ٥$$

$$١٢ \neq ٨$$

٨ التقييم

تابع مع الطلاب النتائج التي توصلوا إليها في فقرات «حاول أن تحل»، للتأكد من فهمهم لما ورد في هذا الدرس عن الجذور.

ب) $\frac{\sqrt[3]{١٦٢س^٥}}{\sqrt[3]{٣س^٢}} = \sqrt[3]{\frac{١٦٢س^٥}{٣س^٢}}$ — $\frac{\sqrt[3]{س}}{\sqrt[3]{ص}} = \sqrt[3]{\frac{س}{ص}}$ حيث ص ≠ ٠

$= \sqrt[3]{٥٤س^٣}$ — اقسم

$= \sqrt[3]{٢ \times ٣^٣ \times س^٣}$ — اكتب ٥٤ على صورة مكعب كامل

$= \sqrt[3]{٢} \times \sqrt[3]{٣^٣س^٣}$ — $\sqrt[3]{س \times ص} = \sqrt[3]{س} \times \sqrt[3]{ص}$

$= ٣س\sqrt[3]{٢}$ — $\sqrt[3]{س^٣} = س$

ج) $\frac{\sqrt{٢٥٦س^٣}}{\sqrt{٣٢س}} = \sqrt{\frac{٢٥٦س^٣}{٣٢س}}$ — $\frac{\sqrt{س}}{\sqrt{ص}} = \sqrt{\frac{س}{ص}}$ حيث ص ≠ ٠

$= \sqrt{٨س^٢}$ — اقسم

$= \sqrt{٢(٢س)^٢}$ — اكتب $٨س^٢$ على صورة مربعات كاملة

$= |٢س|\sqrt{٢}$ — $\sqrt{س^٢} = |س|$

$= ٢\sqrt{٢}\,|س|$

$= ٢\sqrt{٢}\,س$ — حيث س > ٠

حاول أن تحل

٧ اقسم ثم بسط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

أ) $\frac{\sqrt{٢٤٣}}{\sqrt{٢٧}}$ ب) $\frac{\sqrt{١٢س^٤}}{\sqrt{٣س}}$ حيث س > ٠ ج) $\frac{\sqrt[3]{١٢٨س^{١٥}}}{\sqrt[3]{٢س^٢}}$ حيث س ≠ ٠

١٩

مثال (٦)

اضرب ثم بسّط كلًّا مما يلي:

أ) $\sqrt{٢} \times \sqrt{٨}$ ب) $\sqrt[3]{٥س^٣ص^٤} \times \sqrt[3]{٥٤س^٢ص^٣}$

الحل:

أ) $\sqrt{٢} \times \sqrt{٨} = \sqrt{٢ \times ٨}$ — $\sqrt{س} \times \sqrt{ص} = \sqrt{س \times ص}$ حيث س ≥ ٠، ص ≥ ٠

$= \sqrt{١٦}$ — اضرب

$= ٤$ — بسّط

ب) $\sqrt[3]{٥س^٣ص^٤} \times \sqrt[3]{٥٤س^٢ص^٣} = \sqrt[3]{٥س^٣ص^٤ \times ٥٤س^٢ص^٣}$ — $\sqrt[3]{س} \times \sqrt[3]{ص} = \sqrt[3]{س \times ص}$

$= \sqrt[3]{٥س^٣ص^٣ص \times ٢ \times ٣^٣ \times س^٢ \times ص^٣}$ — اكتب على صورة مكعبات كاملة

$= \sqrt[3]{١٠ \times ٣^٣ \times س^٣ \times ص^٣ \times ص^٣ \times س^٢ \times ص}$

$= \sqrt[3]{٣^٣س^٣(ص^٢)^٣} \times \sqrt[3]{١٠س^٢ص}$ — $\sqrt[3]{س \times ص} = \sqrt[3]{س} \times \sqrt[3]{ص}$

$= ٣س ص^٢\sqrt[3]{١٠س^٢ص}$ — $\sqrt[3]{س^٣} = س$

حاول أن تحل

٦ اضرب ثم بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

أ) $٣\sqrt{٧س^٣} \times ٢\sqrt{س^٣ص^٢}$ حيث س ≥ ٠ ب) $٤\sqrt[3]{س^٤ص} \times ٥\sqrt[3]{س^٢ص}$

مثال (٧)

اقسم ثم بسّط كلًّا مما يلي:

أ) $\frac{\sqrt[3]{٣٢}}{\sqrt[3]{-٤}}$ ب) $\frac{\sqrt[3]{١٦٢س^٥}}{\sqrt[3]{٣س^٢}}$ حيث س ≠ ٠ ج) $\frac{\sqrt{٢٥٦س^٣}}{\sqrt{٣٢س}}$ حيث س > ٠

الحل:

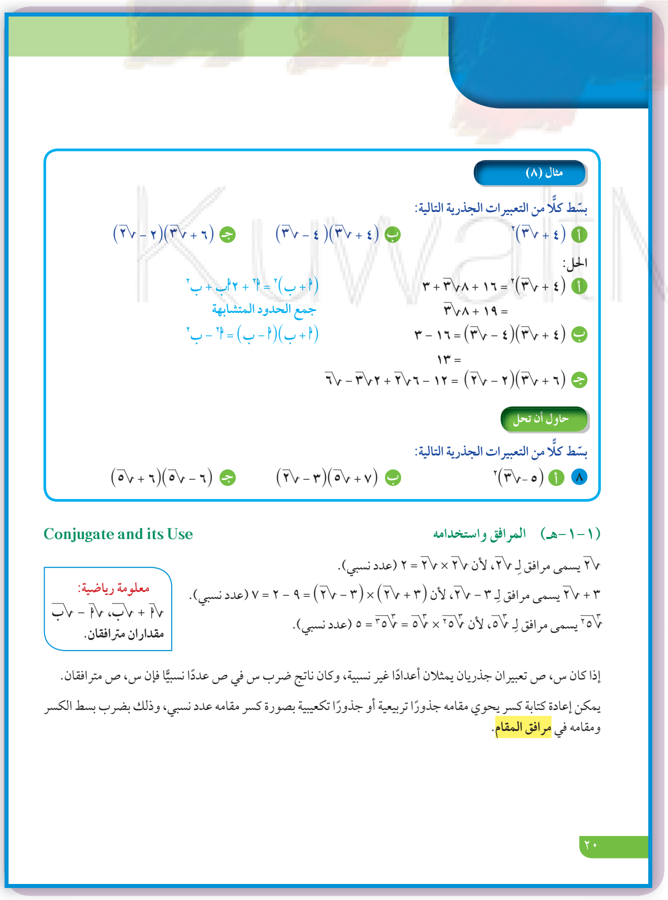
أ) $\frac{\sqrt[3]{٣٢}}{\sqrt[3]{-٤}} = \sqrt[3]{\frac{٣٢}{-٤}}$ — $\frac{\sqrt[3]{س}}{\sqrt[3]{ص}} = \sqrt[3]{\frac{س}{ص}}$ حيث ص ≠ ٠

$= \sqrt[3]{-٨}$ — اقسم

$= \sqrt[3]{(-٢)^٣}$ — اكتب −٨ على صورة مكعب كامل

$= -٢$ — $\sqrt[3]{س^٣} = س$

١٨



مثال (٨)

بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

أ) $(٤ + \sqrt{٣})^٢$ ب) $(٤ + \sqrt{٣})(٤ - \sqrt{٣})$ ج) $(٦ + \sqrt{٣})(٢ - \sqrt{٢})$

الحل:

أ) $(٤ + \sqrt{٣})^٢ = ١٦ + ٨\sqrt{٣} + ٣$ — $(أ + ب)^٢ = أ^٢ + ٢أب + ب^٢$

$= ١٩ + ٨\sqrt{٣}$ — جمع الحدود المتشابهة

ب) $(٤ + \sqrt{٣})(٤ - \sqrt{٣}) = ١٦ - ٣$ — $(أ + ب)(أ - ب) = أ^٢ - ب^٢$

$= ١٣$

ج) $(٦ + \sqrt{٣})(٢ - \sqrt{٢}) = ١٢ - ٦\sqrt{٢} + ٢\sqrt{٣} - \sqrt{٦}$

حاول أن تحل

بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

٨ أ) $(٥ - \sqrt{٣})^٢$ ب) $(٧ + \sqrt{٥})(٣ - \sqrt{٢})$ ج) $(٦ - \sqrt{٥})(٦ + \sqrt{٥})$

(١-١-هـ) المرافق واستخدامه — Conjugate and its Use

$\sqrt{٢}$ يسمى مرافق لِـ $\sqrt{٢}$، لأن $\sqrt{٢} \times \sqrt{٢} = ٢$ (عدد نسبي).

$٣ + \sqrt{٢}$ يسمى مرافق لِـ $٣ - \sqrt{٢}$، لأن $(٣ + \sqrt{٢}) \times (٣ - \sqrt{٢}) = ٩ - ٢ = ٧$ (عدد نسبي).

$\sqrt[3]{٥^٢}$ يسمى مرافق لِـ $\sqrt[3]{٥}$، لأن $\sqrt[3]{٥^٢} \times \sqrt[3]{٥} = \sqrt[3]{٥^٣} = ٥$ (عدد نسبي).

معلومة رياضية:
$\sqrt{أ} + \sqrt{ب}$، $\sqrt{أ} - \sqrt{ب}$ مقداران مترافقان.

إذا كان س، ص تعبيران جذريان يمثلان أعدادًا غير نسبية، وكان ناتج ضرب س في ص عددًا نسبيًّا فإن س، ص مترافقان.

يمكن إعادة كتابة كسر يحوي مقامه جذورًا تربيعية أو جذورًا تكعيبية بصورة كسر مقامه عدد نسبي، وذلك بضرب بسط الكسر ومقامه في **مرافق المقام**.

٢٠

اختبار سريع

١ أوجد الجذر لكل مما يلي:

$\sqrt{١٩٦}$ ١٤ $\sqrt{٢٢٥}$ ١٥

$\sqrt[٣]{٢١٦}$ ٦ $\sqrt[٣]{-٥١٢}$ -٨

٢ بسّط ما يلي:

(أ) $\sqrt{٤ س^{٥} ص^{٧}}$ $٢ س^{٢} |ص^{٣}| \sqrt{س ص}$

(ب) $\sqrt[٣]{-٢٧ س^{٦} ص^{١٠}}$ $-٣ س^{٢} ص^{٣} \sqrt[٣]{ص}$

(جـ) $\sqrt{٢} \times \sqrt{٢٠٠}$ ٢٠

(د) $\dfrac{\sqrt[٣]{٢٤٠١}}{\sqrt[٣]{٧}}$ ٧

مثال (١٠) ربط بالحياة

قانون أينشتاين ط = ك × س^{٢} يربط بين الطاقة ط والكتلة ك وسرعة الضوء س.

أ أوجد قيمة س بدلالة ط، ك.

ب أعد كتابة إجابتك في أ بحيث يكون المقام خاليًا من الجذور.

الحل:

أ $ط = ك \times س^{٢}$ اكتب القانون

$س^{٢} = \dfrac{ط}{ك}$ اقسم طرفي المعادلة على ك؛ ك ≠ ٠

$س = \sqrt{\dfrac{ط}{ك}}$ ، س > ٠

ب $س = \sqrt{\dfrac{ط}{ك}}$

$س = \dfrac{\sqrt{ط}}{\sqrt{ك}}$ $\sqrt{\dfrac{أ}{ب}} = \dfrac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$ حيث أ > ٠، ب > ٠

$س = \dfrac{\sqrt{ط}}{\sqrt{ك}} \times \dfrac{\sqrt{ك}}{\sqrt{ك}}$ اضرب بسط الكسر ومقامه في مرافق المقام

$س = \dfrac{\sqrt{ط \times ك}}{ك}$

حاول أن تحل

١٠ القانون ع = $\dfrac{٢ \times ف}{ن^{٢}}$ يربط بين العجلة ع، والمسافة ف، والوقت ن لجسم متحرك بعجلة منتظمة.

أ أوجد ن بدلالة ع، ف.

ب أعد كتابة إجابتك في أ بحيث يكون المقام خاليًا من الجذور.

٢٢

مثال (٩)

اختصر كلًّا مما يلي بحيث يكون المقام عددًا نسبيًا.

أ $\dfrac{١ + \sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}$ ب $\dfrac{\sqrt{٢} - ١}{٣ - \sqrt{٢}}$

الحل:

أ $\dfrac{١ + \sqrt{٢}}{\sqrt{٣}} = \dfrac{١ + \sqrt{٢}}{\sqrt{٣}} \times \dfrac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$ اضرب بسط الكسر ومقامه في مرافق المقام

$= \dfrac{\sqrt{٣} + \sqrt{٣} \times \sqrt{٢}}{(\sqrt{٣})^{٢}}$ خاصية التوزيع

$= \dfrac{\sqrt{٣} + \sqrt{٦}}{٣}$ بسّط

∴ $\dfrac{١ + \sqrt{٢}}{\sqrt{٣}} = \dfrac{\sqrt{٣} + \sqrt{٦}}{٣}$ المقام عدد صحيح

ب $\dfrac{\sqrt{٢} - ١}{٣ - \sqrt{٢}} = \dfrac{(\sqrt{٢} - ١)}{(٣ - \sqrt{٢})} \times \dfrac{(٣ + \sqrt{٢})}{(٣ + \sqrt{٢})}$ اضرب بسط الكسر ومقامه في مرافق المقام

$= \dfrac{٣\sqrt{٢} + \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} - ٣ - \sqrt{٢}}{٣^{٢} - (\sqrt{٢})^{٢}}$ $(أ - ب)(أ + ب) = أ^{٢} - ب^{٢}$

$= \dfrac{٣\sqrt{٢} + ٢ - ٣ - \sqrt{٢}}{٩ - ٢}$ بسّط

$= \dfrac{٢\sqrt{٢} - ١}{٧}$

حاول أن تحل

٩ اختصر كلًّا مما يلي بحيث يكون المقام عددًا نسبيًا.

أ $\dfrac{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}$ ب $\dfrac{٣ - \sqrt{٢}}{٢ - \sqrt{٢}}$

٢١

مثال (١١)

أوجد قيمة التعبير: $\dfrac{(س + ١)^{٢}(٣س - ٢)}{٧س - ٤}$ حيث   س = $\sqrt{٢} - ١$. ثم بسّط الناتج

الحل:

$\dfrac{(س + ١)^{٢}(٣س - ٢)}{٧س - ٤} = \dfrac{(\sqrt{٢} - ١ + ١)^{٢}\,(٣\,(\sqrt{٢} - ١) - ٢)}{٧(\sqrt{٢} - ١) - ٤}$ عوّض س بقيمتها

$= \dfrac{(\sqrt{٢})^{٢}(٣\sqrt{٢} - ٥)}{٧\sqrt{٢} - ١١}$ بسّط

$= \dfrac{٢(٣\sqrt{٢} - ٥)(٧\sqrt{٢} + ١١)}{(٧\sqrt{٢} - ١١)(٧\sqrt{٢} + ١١)}$ اضرب بسط الكسر ومقامه في مرافق المقام

$= \dfrac{٢(٤٢ + ٣٣\sqrt{٢} - ٣٥\sqrt{٢} - ٥٥)}{(٧\sqrt{٢})^{٢} - (١١)^{٢}}$ خاصية التوزيع

$= \dfrac{٢(-١٣ - ٢\sqrt{٢})}{٩٨ - ١٢١}$ جمع الحدود المتشابهة

$= \dfrac{-٢(١٣ + ٢\sqrt{٢})}{-٢٣}$

$= \dfrac{٢٦ + ٤\sqrt{٢}}{٢٣}$ بسّط

حاول أن تحل

١١ أوجد قيمة التعبير: $\dfrac{(س - ٢)^{٣}}{س + ١}$ حيث   س = ٢ − $\sqrt{٣}$. ثم بسّط الناتج

٢٣

٩ إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

٢ (أ) ٨ أمتار (ب) $\approx$ ٨,٤٨٥ أمتار

٣ ١٢٥ مترًا مكعبًا.

٤ ٣ أمتار.

«حاول أن تحل»

١ (أ) $\sqrt[٣]{-٢٧} = -٣$ (ب) $\sqrt[٣]{٦٤} = ٤$

٢ (أ) $٣|\text{س}|\text{ص}^٢$ (ب) $-٣\text{س}^٢$

(جـ) $\text{س}^٤|\text{ص}^٣|$

٣ (أ) $٣\sqrt{٥}$ (ب) $٤\sqrt{٣} - ٧\sqrt{٢}$

٤ (أ) $٨ + ٨ = ١٦$ (ب) $٧\sqrt{٣}$

(جـ) $٣\sqrt{٣}$ (د) $-\sqrt[٣]{٥}$

٥ (أ) $٥\text{س}^٢\sqrt{٢}$ (ب) $\text{س}\sqrt[٣]{١٨}$

تمرّن ١-١

الجذور والتعبيرات الجذرية والعمليات عليها

Roots and Radical Expressions and Operations

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) أوجد إن أمكن الجذور التربيعية الحقيقية لكل من الأعداد التالية:

(أ) ٨١

(ب) ‎-٣٦

(جـ) ٢,٢٥

(د) ١

(هـ) $٨^٢$

(و) $\frac{٣٦}{٢٥}$

(ز) $(-١٠٠)^٢$

(حـ) $\frac{١٨}{٣٢}$

(ط) $٧^٤$

(٢) أوجد الجذر التكعيبي لكل من الأعداد التالية:

(أ) ٨

(ب) ٠

(جـ) ٦٤

(د) ‎-١٠٠٠

(هـ) ٠,٠٢٧

(و) $\frac{١٢٥}{٢١٦}$

(ز) ٢٧ × ٣٤٣

(حـ) $-\frac{١}{٥١٢}$

(ط) ‎-٠,٢١٦

---

(٣) بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

(أ) $\sqrt{٩\text{س}^٢}$

(ب) $\sqrt{٤\text{س}^٦}$

(جـ) $\sqrt{١٦\text{س}^٤}$

(د) $\sqrt{٠,٨١\text{س}^{١٦}}$

(هـ) $\sqrt{\text{س}^٨\text{ص}^{١٤}}$

(و) $\frac{\sqrt{\text{س}^٣\text{ص}^٥}}{\sqrt{٢٥\text{س}}}$ حيث س > ٠، ص ≥ ٠

(ز) $\sqrt{\frac{١٦\text{س}^٧\text{ص}^٩}{\text{س}^٣}}$ حيث س ≠ ٠، ص ≥ ٠

(٤) بسّط كلًّا من التعبيرات التالية:

(أ) $\sqrt{٨} \times \sqrt{٤٠}$

(ب) $(\sqrt{٢} - \sqrt{٣})^٢$

(جـ) $\sqrt{٧} \times (٢\sqrt{٧} - \sqrt{٢٨})$

(د) $\sqrt{٢} \times (\sqrt{٥٠} + ٢)$

(هـ) $(٧ + ٢\sqrt{٣})^٢$

(و) $\frac{\sqrt{١,٦ \times ١٠^٣}}{\sqrt{٤ \times ١٠^٢}}$

(ز) $\sqrt{٧٥} - ٤\sqrt{١٨} + ٢\sqrt{٣٢}$

(حـ) $٣\sqrt[٣]{١٦} - ٤\sqrt[٣]{٥٤} + \sqrt[٣]{١٢٨}$

(ط) $\sqrt{٧^٣ \times ١٢٥ \times ٧٠ \times ١٥}$

(ي) $\frac{\sqrt{\text{س}^٣ \times ١٠^٤ \times ٧٢ \times ١٥}}{\sqrt{\text{س}^٢ \times ٤٠ \times ٢٧}}$ حيث س > ٠

(٥) اختصر كلًّا مما يلي بحيث يكون المقام عددًا نسبيًّا:

(أ) $\frac{\sqrt{٥} - \sqrt{٢}}{\sqrt{٥} + \sqrt{٢}}$

(ب) $\frac{٤}{٣\sqrt{٣} - ٢}$

(جـ) $\sqrt{\frac{٨٤}{١٢}}$

(د) $\frac{٢ - \sqrt{٧}}{٣ + \sqrt{٧}}$

(هـ) $\sqrt{\frac{٢٧}{٨}} \times \sqrt{\frac{٣٢}{٥٤}}$

(و) $\frac{٢\sqrt{٣} + ١}{٥ - ٣\sqrt{٣}}$

(٦) أوجد قيمة التعبير: $\text{س}^٢ + \text{س} - ٣$، إذا كان $\text{س} = \frac{\sqrt{٢} - ١}{٢}$.

٦ (أ) $٦\sqrt{٧}$ س^{٣} |ص| (س ≥ ٠)

(ب) ٢٠ س^{٢} $\sqrt[٣]{\text{ص}^{٢}}$

٧ (أ) ٣

(ب) ٢ س $\sqrt{\text{س}}$

(ج) ٤ س^{٤} $\sqrt[٣]{\text{س}}$

٨ (أ) $٢٨ - ١٠\sqrt{٣}$

(ب) $٢١ - ٧\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٥} - \sqrt{١٠}$

(ج) ٣١

٩ (أ) $\frac{٣ + \sqrt{٦}}{٣}$

(ب) $\frac{٤ + \sqrt{٢}}{٢}$

١٠ (أ) $\text{ن} = \sqrt{\frac{٢ \times \text{ف}}{\text{ع}}} = \frac{\sqrt{٢\text{ف}}}{\sqrt{\text{ع}}}$

(ب) $\text{ن} = \frac{\sqrt{٢\text{فع}}}{\text{ع}}$

١١ $\frac{-٣\sqrt{٣} - ٣}{٢}$

المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

(١) بسّط كلًّا مما يلي:

(أ) $\sqrt{٥٧٦}$ (ب) $\frac{\sqrt{١٨} \times \sqrt{٢}}{\sqrt{١٤٤}}$

(جـ) $٣\sqrt{٢٧} \times ٢\sqrt{٧٥}$ (د) $\sqrt{\frac{٢٥}{٣٢}} \div \sqrt{\frac{٩}{٨}}$

(هـ) $\sqrt{١٦\text{س}^{٢}} + ٣\sqrt{٤٩\text{س}^{٢}}$ حيث س > ٠

(٢) بسّط كلًّا مما يلي:

(أ) $\sqrt[٣]{-٨\text{س}^{٣}}$ (ب) $\sqrt[٣]{٥^{٢}} \times \sqrt[٣]{٥}$

(جـ) $(١ - \sqrt[٣]{٢٧})(١ + \sqrt[٣]{٢٧})$ (د) $\sqrt[٣]{١٦} \times \sqrt[٣]{٤}$

(٣) بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

(أ) $(\sqrt{٥} + ٢)(٣ - ٢\sqrt{٥})$

(ب) $(٢\sqrt{٧٢} - ٣\sqrt{٢})$

(جـ) $(٢\sqrt{٣} - ٣\sqrt{٢})(٢\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٢})$

(د) $\frac{١}{١ - \sqrt{٥}} + \frac{١}{١ + \sqrt{٥}}$

(هـ) $\frac{\sqrt{\text{س}^{٨} \times ٦٤ \times \text{ص}^{١٧}}}{\sqrt{\text{س}^{١٠} \times ١٦٩ \times \text{ص}^{١١}}}$ حيث س > ٠ ، ص > ٠

(و) $\frac{١}{٢\sqrt{٢} - ١} - \frac{٢}{٢\sqrt{٢} + ١}$

(٤) ملعب مستطيل الشكل طوله $١٢\sqrt{١٨}$ م وعرضه $٩\sqrt{٢}$ م.

(أ) أوجد محيط الملعب.

(ب) أوجد مساحة الملعب.

(٥) اختصر كلًّا مما يلي بحيث يكون المقام عددًا نسبيًّا:

(أ) $\frac{٣ - \sqrt{٢}}{٣ + \sqrt{٢}}$ (ب) $\frac{٢\sqrt{٣٢}}{٥\sqrt{٢}}$

(جـ) $\frac{٧ - ٢\sqrt{٢}}{\sqrt{٢} - ١}$ (د) $\frac{٢\sqrt{٨} - ٣}{\sqrt{٢} + ١}$

(هـ) $\frac{\sqrt{٣} - \sqrt{٥}}{٢\sqrt{٣} - \sqrt{٥}}$

(٦) إذا كانت س = $\frac{٢}{\sqrt{٥} + ١}$ فأوجد قيمة س^{٢} − ١.

١-٢: الأسس النسبية وخواصها

١ الأهداف

- يكتب عددًا حقيقيًّا في الصورة الجذرية.
- يكتب عددًا حقيقيًّا في الصورة الأسية.
- يحول من الصورة الجذرية إلى الصورة الأسية.
- يحول من الصورة الأسية إلى الصورة الجذرية.

٢ المفردات الأساسية والمفاهيم الجديدة

الصورة الجذرية – الصورة الأسية – الجذر النوني – تحويل بين الصورة الأسية والصورة الجذرية – خواص الأسس النسبية.

٣ الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – جهاز إسقاط (Data show) – حاسوب.

٤ التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(أ) أوجد الناتج:

$$-\sqrt[٣]{-١٢٥} \text{ ، } \sqrt{١٩٦} \text{ ، } \sqrt{٢٨٩}.$$

(ب) بسّط التعابير التالية:

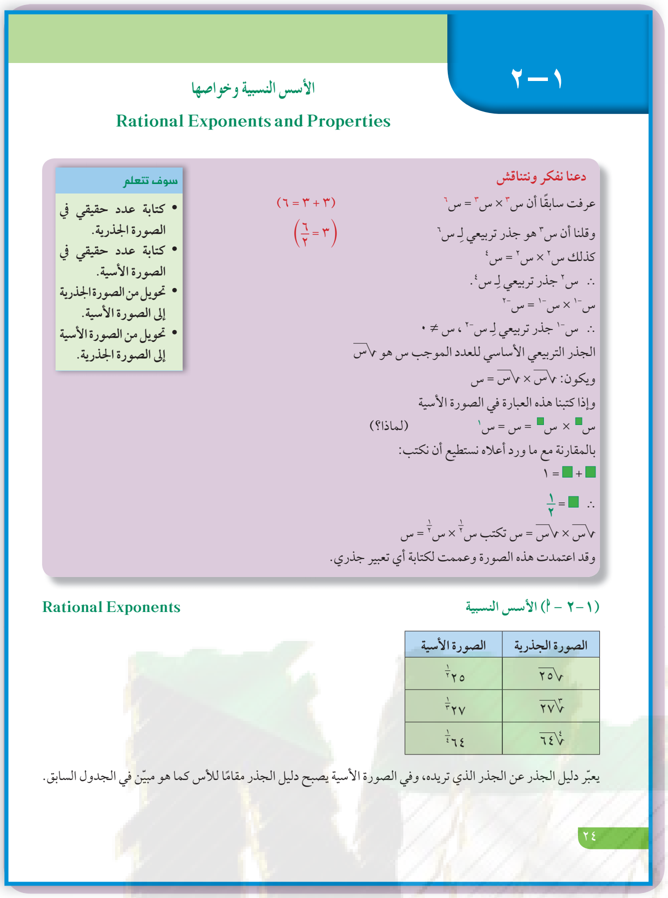
$$\sqrt{٩٨ س^{٥} ص^{٦}} \text{ ، } \sqrt[٣]{-١٦ س^{٧} ص^{١٠}}$$

(جـ) أوجد الناتج، ثم بسّط ما يلي:

- $\sqrt[٣]{٢ س^{٤} ص^{٣}} \times \sqrt[٣]{-٤ س^{٥} ص^{٤}}$
- $\sqrt{٧ س^{٣} ص^{٤}} \times \sqrt{٧ س^{٥} ص^{٧}}$
- $\dfrac{\sqrt[٣]{-٨١ س^{٨} ص^{٩}}}{\sqrt[٣]{٣ س^{٣} ص^{٣}}}$ (س $\neq$ ٠ ، ص $\neq$ ٠)

٥ التدريس

الربط بين الصورة الجذرية والصورة الأسية لأي عدد حقيقي له أهمية كبرى في العمليات الحسابية، وسوف يستكشفها الطالب ويستخدمها عندما تدعو الحاجة إلى ذلك، لذا كان من المهم جدًّا إيضاح كيفية التحويل بين الجذور والأسس.



١ – ٢

الأسس النسبية وخواصها

Rational Exponents and Properties

دعنا نفكر ونتناقش

عرفت سابقًا أن $س^{٣} \times س^{٣} = س^{٦}$ (٣ + ٣ = ٦)

وقلنا أن $س^{٣}$ هو جذر تربيعي لِـ $س^{٦}$ $\left(٣ = \frac{٦}{٢}\right)$

كذلك $س^{٢} \times س^{٢} = س^{٤}$

∴ $س^{٢}$ جذر تربيعي لِـ $س^{٤}$.

$س^{-١} \times س^{-١} = س^{-٢}$

∴ $س^{-١}$ جذر تربيعي لِـ $س^{-٢}$ ، س $\neq$ ٠

الجذر التربيعي الأساسي للعدد الموجب س هو $\sqrt{س}$

ويكون: $\sqrt{س} \times \sqrt{س} = س$

وإذا كتبنا هذه العبارة في الصورة الأسية

$س^{\blacksquare} \times س^{\blacksquare} = س = س^{١}$ (لماذا؟)

بالمقارنة مع ما ورد أعلاه نستطيع أن نكتب:

$\blacksquare + \blacksquare = ١$

∴ $\blacksquare = \frac{١}{٢}$

$\sqrt{س} \times \sqrt{س} = س$ تكتب $س^{\frac{١}{٢}} \times س^{\frac{١}{٢}} = س$

وقد اعتمدت هذه الصورة وعممت لكتابة أي تعبير جذري.

سوف تتعلم

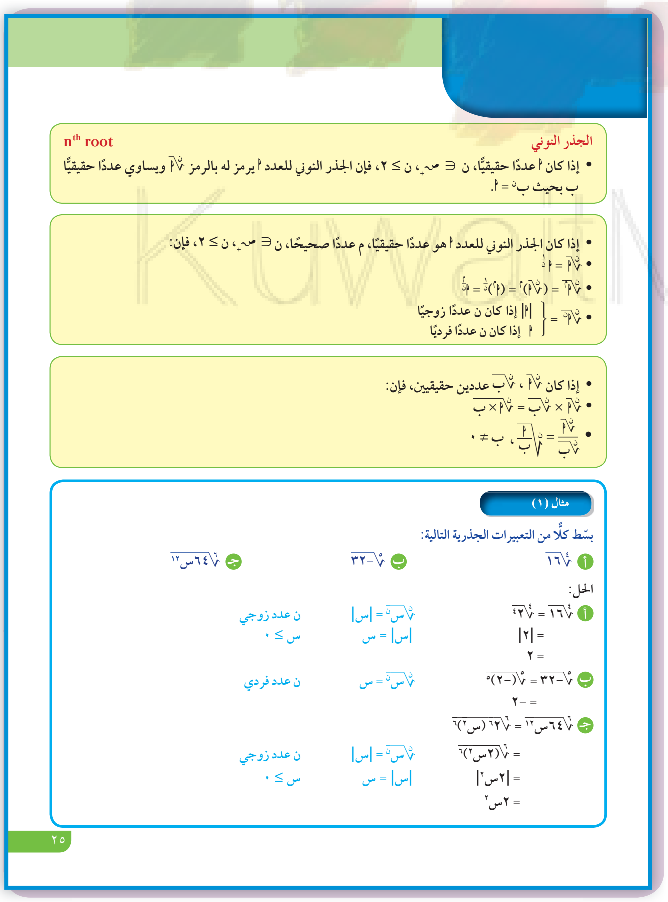
- كتابة عدد حقيقي في الصورة الجذرية.
- كتابة عدد حقيقي في الصورة الأسية.
- تحويل من الصورة الجذرية إلى الصورة الأسية.
- تحويل من الصورة الأسية إلى الصورة الجذرية.

(١ – ٢ – أ) الأسس النسبية Rational Exponents

الصورة الجذرية	الصورة الأسية
$\sqrt{٢٥}$	$٢٥^{\frac{١}{٢}}$
$\sqrt[٣]{٢٧}$	$٢٧^{\frac{١}{٣}}$
$\sqrt[٤]{٦٤}$	$٦٤^{\frac{١}{٤}}$

يعبّر دليل الجذر عن الجذر الذي تريده، وفي الصورة الأسية يصبح دليل الجذر مقامًا للأس كما هو مبيّن في الجدول السابق.

٢٤



الجذر النوني n^{th} root

- إذا كان أ عددًا حقيقيًّا، ن ∈ $ص_{+}$، ن ≥ ٢، فإن الجذر النوني للعدد أ يرمز له بالرمز $\sqrt[ن]{أ}$ ويساوي عددًا حقيقيًّا ب بحيث $ب^{ن} = أ$.

- إذا كان الجذر النوني للعدد أ هو عددًا حقيقيًا، م عددًا صحيحًا، ن ∈ $ص_{+}$، ن ≥ ٢، فإن:
- $\sqrt[ن]{أ} = أ^{\frac{١}{ن}}$
- $\sqrt[ن]{أ^{م}} = (\sqrt[ن]{أ})^{م} = (أ^{م})^{\frac{١}{ن}} = أ^{\frac{م}{ن}}$
- $\sqrt[ن]{أ^{ن}} = \begin{cases} |أ| & \text{إذا كان ن عددًا زوجيًا} \\ أ & \text{إذا كان ن عددًا فرديًا} \end{cases}$

- إذا كان $\sqrt[ن]{أ}$ ، $\sqrt[ن]{ب}$ عددين حقيقيين، فإن:
- $\sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب} = \sqrt[ن]{أ \times ب}$
- $\dfrac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}} = \sqrt[ن]{\dfrac{أ}{ب}}$ ، ب $\neq$ ٠

مثال (١)

بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

أ $\sqrt[٤]{١٦}$ ب $\sqrt[٥]{-٣٢}$ جـ $\sqrt[٦]{٦٤ س^{١٢}}$

الحل:

أ $\sqrt[٤]{١٦} = \sqrt[٤]{٢^{٤}}$ ، $\sqrt[ن]{س^{ن}} = |س|$ ن عدد زوجي

$= |٢|$ ، $|س| = س$ ، س ≥ ٠

$= ٢$

ب $\sqrt[٥]{-٣٢} = \sqrt[٥]{(-٢)^{٥}}$ ، $\sqrt[ن]{س^{ن}} = س$ ن عدد فردي

$= -٢$

جـ $\sqrt[٦]{٦٤ س^{١٢}} = \sqrt[٦]{٢^{٦} (س^{٢})^{٦}}$

$= \sqrt[٦]{(٢ س^{٢})^{٦}}$ ، $\sqrt[ن]{س^{ن}} = |س|$ ن عدد زوجي

$= |٢ س^{٢}|$ ، $|س| = س$ ، س ≥ ٠

$= ٢ س^{٢}$

٢٥

حاول أن تحل

١ بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

أ $-\sqrt[٥]{٢٤٣}$ ب $\sqrt[٤]{٦٢٥}$ ج $\sqrt[٧]{س^{١٤}}$

مثال (٢)

اكتب كل عدد مما يلي في الصورة الجذرية، ثم بسّط:

أ $١٢٥^{\frac{١}{٣}}$ ب $٥^{\frac{١}{٢}} \times ٥^{\frac{١}{٢}}$ ج $١٠^{\frac{١}{٣}} \times ١٠٠^{\frac{١}{٣}}$

الحل:

أ $١٢٥^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{١٢٥}$ — اكتب العدد $١٢٥^{\frac{١}{٣}}$ بالصورة الجذرية

$= \sqrt[٣]{٥^٣}$ — اكتب ١٢٥ على صورة مكعب كامل

$= ٥$ — $\sqrt[٣]{س^٣} = س$

$\therefore ١٢٥^{\frac{١}{٣}} = ٥$

ب $٥^{\frac{١}{٢}} \times ٥^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٥} \times \sqrt{٥}$ — اكتب $٥^{\frac{١}{٢}}$ بالصورة الجذرية

$= ٥$ — $\sqrt{س} \times \sqrt{س} = \left(\sqrt{س}\right)^٢ = س$ لكل $س \geq ٠$

$\therefore ٥^{\frac{١}{٢}} \times ٥^{\frac{١}{٢}} = ٥$

ج $١٠^{\frac{١}{٣}} \times ١٠٠^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{١٠} \times \sqrt[٣]{١٠٠}$ — اكتب $١٠^{\frac{١}{٣}}$ و $١٠٠^{\frac{١}{٣}}$ بالصورة الجذرية

$= \sqrt[٣]{١٠ \times ١٠٠}$ — $\sqrt[٣]{س} \times \sqrt[٣]{ص} = \sqrt[٣]{س \times ص}$

$= \sqrt[٣]{١٠ \times ١٠^٢}$

$= \sqrt[٣]{١٠^٣}$ — $س^م \times س^ن = س^{م+ن}$

$= ١٠$ — $\sqrt[٣]{س^٣} = س$

$\therefore ١٠^{\frac{١}{٣}} \times ١٠٠^{\frac{١}{٣}} = ١٠$

حاول أن تحل

٢ اكتب كل عدد مما يلي في الصورة الجذرية، ثم بسّط:

أ $١٦^{\frac{١}{٤}}$ ب $٣^{\frac{١}{٢}} \times ٣^{\frac{١}{٢}}$ ج $٧^{\frac{١}{٣}} \times ٤٩^{\frac{١}{٣}}$

٢٦

مثال (٣)

اكتب العدد $٢٥^{\frac{٣}{٢}}$ بالصورة الجذرية، ثم بسّط:

الحل:

$٢٥^{\frac{٣}{٢}} = ٢٥^{٣ \times \frac{١}{٢}}$ — $\frac{م}{ن} = م \times \frac{١}{ن}$

$= \left(٢٥^٣\right)^{\frac{١}{٢}}$ — $س^{م ن} = \left(س^م\right)^ن$

$= \sqrt{٢٥^٣}$ — $س^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{س}$ لكل $س \geq ٠$

$= \left(\sqrt{٢٥}\right)^٣ = ٥^٣ = ١٢٥$ — $\sqrt[ن]{س^م} = \left(\sqrt[ن]{س}\right)^م$

$\therefore ٢٥^{\frac{٣}{٢}} = ١٢٥$

حاول أن تحل

٣ اكتب العدد $٦٤^{\frac{٤}{٣}}$ بالصورة الجذرية، ثم بسّط.

مثال (٤)

أ اكتب $س^{\frac{٢}{٥}}$ ، $ص^{\frac{٥}{٢}}$ بالصورة الجذرية لكل $ص > ٠$، ثم بسّط إن أمكن:

ب اكتب $\sqrt[٥]{ص}$، $\sqrt{ب^٣}$، $\left(\sqrt[٣]{س}\right)^٥$ بالصورة الأسية لكل $ب > ٠$.

الحل:

أ $س^{\frac{٢}{٥}} = \left(س^{\frac{١}{٥}}\right)^٢$ — $س^{م\times ن} = \left(س^م\right)^ن$

$= \left(\sqrt[٥]{س}\right)^٢$ — $س^{\frac{١}{٥}} = \sqrt[٥]{س}$

$= \sqrt[٥]{س^٢}$ — $\left(\sqrt[٥]{س}\right)^٢ = \sqrt[٥]{س^٢}$

$\therefore س^{\frac{٢}{٥}} = \sqrt[٥]{س^٢}$

$ص^{\frac{٥}{٢}} = \left(ص^٥\right)^{\frac{١}{٢}}$ — $س^{م\times ن} = \left(س^م\right)^ن$

$= \sqrt{ص^٥} = \sqrt{(ص^٢)^٢ ص}$ — $س^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{س}$ ، لكل $س > ٠$

$= |ص^٢| \times \sqrt{ص}$

$= ص^٢ \sqrt{ص}$ — $|س^٢| = س^٢$

$\therefore ص^{\frac{٥}{٢}} = ص^٢ \sqrt{ص}$

٢٧

في المثال (١)

تابع مع الطلاب كيفية استخدام قواعد الجذور النونية لتبسيط التعبيرات الجذرية النونية.

في الأمثلة (٢)، (٣)، (٤)

اكتب على السبورة ما يذكّر الطلاب بالعلاقة بين الجذور والأسس وخاصة: $\sqrt{أ} = أ^{\frac{١}{٢}}$ ، $\sqrt[٣]{أ} = أ^{\frac{١}{٣}}$.

حفزهم على استخدام التحويل بين الصورتين بحسب الحاجة. مثال على ذلك:

$١٢٥^{\frac{١}{٣}}$ يمكن كتابته $\left(٥^٣\right)^{\frac{١}{٣}} = ٥^{٣ \times \frac{١}{٣}} = ٥$

ويمكن كتابته أيضًا $١٢٥^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{١٢٥} = \sqrt[٣]{٥^٣}$

$= ٥^{\frac{٣}{٣}} = ٥^١ = ٥$

تابع مع الطلاب بدقة خواص العمليات على الأعداد النسبية. تأكد من فهمهم ذلك، ثم اطرح أسئلة متنوعة لتدرك مدى قدرتهم على الربط بين العمليات على الأعداد بالصورة الجذرية والصورة الأسية.

أخبرهم بما أن: $\sqrt{س \pm ص} \neq \sqrt{س} \pm \sqrt{ص}$ ،

فإن: $(س \pm ص)^{\frac{١}{٢}} \neq (س)^{\frac{١}{٢}} \pm (ص)^{\frac{١}{٢}}$.

في المثال (٦)

تطبيق مباشر لخواص الأسس النسبية. في (د) وضّح للطلاب أن الإشارة السالبة تعني أن المطلوب هو المعكوس الضربي للعدد فمثلًا $٣^{-\frac{١}{٢}}$ هو المعكوس الضربي للعدد $٣^{\frac{١}{٢}}$

في المثال (٧)

وضّح للطلاب الفرق بين $س^م \times س^ن = س^{م+ن}$ وبين $(س^م)^ن = س^{م \times ن}$. ثم أعط أمثلة متنوعة لتبيان ذلك.

مثال: $٢^٣ \times ٢^٤ = ٢^{٣+٤} = ٢^٧ = ١٢٨$

ولكن $\left(٢^٣\right)^٤ = ٢^{٣ \times ٤} = ٢^{١٢} = ٤٠٩٦$

٦ الربط

يوفر المثال (٥) فرصة أمام الطلاب للربط بين الأسس وموقفًا حياتيًّا.

٧ أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطىء الطلاب في تحويل الأسس المعطاة على صورة كسور عشرية أو أعداد عشرية إلى أسس على صورة أعداد نسبية. ساعدهم بتذكيرهم في كتابة الجزء من عشرة والجزء من مئة والجزء من ألف…

$$١,٥ = \frac{١٥}{١٠} = \frac{٣}{٢} \quad ، \quad ٢,٢٥ = \frac{٢٢٥}{١٠٠} = \frac{٩}{٤}$$

٨ التقييم

تابع الطلاب وهم يجيبون عن فقرات «حاول أن تحل» لتدرك أداءهم في التحويل بين الجذور والأسس والعمليات عليها والتبسيط.

الحل:

$ن = \frac{و^{٠,٥}}{٢ \times \pi \times نق^{٠,٥}}$ اكتب المعادلة

$= \frac{(٩,٨)^{٠,٥}}{٢ \times \pi \times (١,٧)^{٠,٥}}$ عوّض

$\simeq ٠,٣٨٢$ استخدم الآلة الحاسبة

∴ سرعة دوران الجهاز تساوي تقريبًا ٠,٣٨٢ دورة في الثانية.

حاول أن تحل

٥ احسب السرعة الدورانية المطلوبة للجهاز في المثال (٥) ليحاكي جاذبية تعادل نصف مقدار الجاذبية الأرضية.

(١-٢-ب) خواص الأسس النسبية — Properties of Rational Exponents

ليكن م، ن عددين نسبيين وأ، ب عددين حقيقيين حيث $أ^م$، $أ^ن$، $ب^م$، $ب^ن$ أعداد حقيقية.

نكتب الخواص التالية:

خواص	أمثلة
$ب^م \times ب^ن = ب^{م+ن}$	$٨^{\frac{١}{٣}} \times ٨^{\frac{٢}{٣}} = ٨^{\frac{٣}{٣}} = ٨^{١} = ٨$
$(ب^م)^ن = ب^{م \times ن}$	$(٥^{\frac{١}{٢}})^{٤} = ٥^{\frac{١}{٢} \times ٤} = ٥^{٢} = ٢٥$
$(أ \times ب)^ن = أ^ن \times ب^ن$	$(٤ \times ٥)^{\frac{١}{٢}} = ٤^{\frac{١}{٢}} \times ٥^{\frac{١}{٢}} = ٢ \times ٥^{\frac{١}{٢}}$
$ب^{-ن} = \frac{١}{ب^ن}$ لكل ب ≠ ٠	$٩^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٩^{\frac{١}{٢}}} = \frac{١}{\sqrt{٩}} = \frac{١}{٣}$
$\frac{ب^م}{ب^ن} = ب^{م-ن}$ لكل ب ≠ ٠	$\frac{٩^{\frac{٣}{٢}}}{٩^{\frac{١}{٢}}} = ٩^{\frac{٣}{٢}-\frac{١}{٢}} = ٩^{١} = ٩$
$(\frac{أ}{ب})^م = \frac{أ^م}{ب^م}$ لكل ب ≠ ٠	$(\frac{٥}{٢٧})^{\frac{١}{٣}} = \frac{٥^{\frac{١}{٣}}}{٢٧^{\frac{١}{٣}}} = \frac{٥^{\frac{١}{٣}}}{٣}$

يقدّر علماء الآثار عمر المحفورات باستخدام الأسس النسبية

٢٩

ب $\sqrt[٥]{ص} = ص^{\frac{١}{٥}}$ — $\sqrt[ن]{س} = س^{\frac{١}{ن}}$ ، لكل س > ٠

$\sqrt{ب^{٣}} = (ب^{٣})^{\frac{١}{٢}}$ — $(س^م)^ن = س^{م \times ن}$

$= ب^{٣ \times \frac{١}{٢}}$ — اضرب

$= ب^{\frac{٣}{٢}}$

∴ $\sqrt{ب^{٣}} = ب^{\frac{٣}{٢}}$

$(\sqrt[٣]{س})^{٥} = (س^{\frac{١}{٣}})^{٥}$ — $\sqrt[٣]{س} = س^{\frac{١}{٣}}$

$= س^{\frac{١}{٣} \times ٥}$ — $(س^م)^ن = س^{م \times ن}$

$= س^{\frac{٥}{٣}}$ — اضرب

∴ $(\sqrt[٣]{س})^{٥} = س^{\frac{٥}{٣}}$

حاول أن تحل

٤ أ اكتب $ص^{\frac{٣}{٨}}$ لكل ص > ٠ بالصورة الجذرية.

ب بسّط $س^{٠,٤}$ لكل س ≥ ٠ ثم اكتب بالصورة الجذرية.

ج اكتب $\sqrt[٣]{س^{٢}}$، $(\sqrt{ص})^{٣}$ لكل ص ≥ ٠ بالصورة الأسية.

مثال (٥) ربط بالحياة

إن عدم شعور رائد الفضاء بانعدام الوزن في رحلة فضائية يعود إلى دوران جهاز يجلس عليه، ويشعره بجاذبية وهمية تحاكي الجاذبيه الأرضية.

يدور الجهاز وفق المعادلة الرياضية:

$ن = \frac{و^{٠,٥}}{٢ \times \pi \times نق^{٠,٥}}$

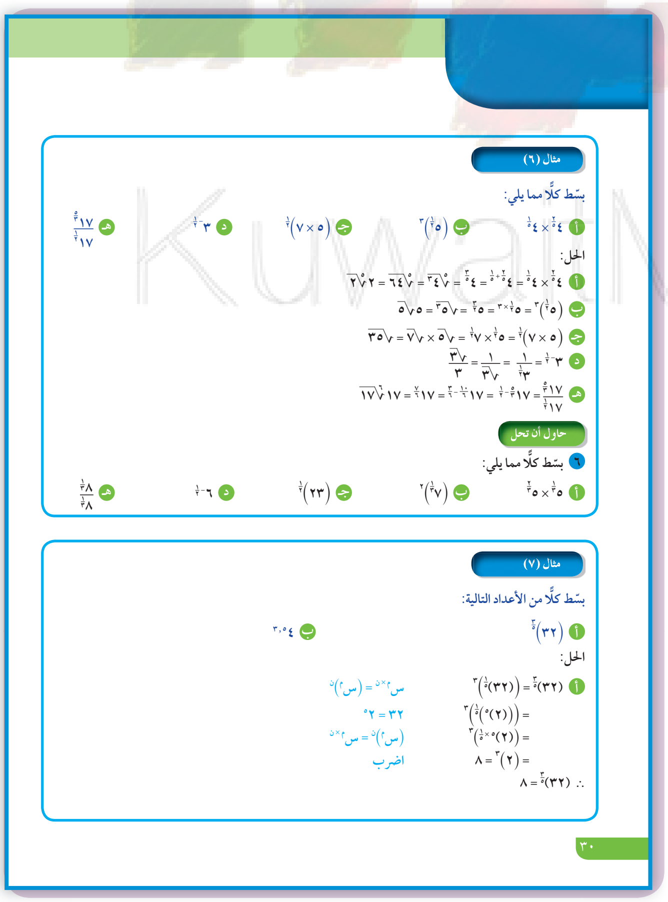
حيث ن: السرعة الدورانية وتقاس بالدورة في الثانية.

نق: نصف قطر جهاز الدوران ويقاس بالمتر.

و: الجاذبية الوهمية التي تحاكي الجاذبية الأرضية.

احسب سرعة دوران جهاز طول نصف قطره ١,٧ متر، يدور ليحاكي الجاذبية الأرضية التي تساوي ٩,٨ م/ ث^{٢}.

٢٨



مثال (٦)

بسّط كلًا مما يلي:

أ $٤^{\frac{٢}{٥}} \times ٤^{\frac{١}{٥}}$ ب $(٥^{\frac{١}{٢}})^{٣}$ ج $(٥ \times ٧)^{\frac{١}{٢}}$ د $٣^{-\frac{١}{٢}}$ هـ $\frac{١٧^{\frac{٥}{٣}}}{١٧^{\frac{١}{٢}}}$

الحل:

أ $٤^{\frac{٢}{٥}} \times ٤^{\frac{١}{٥}} = ٤^{\frac{٢}{٥}+\frac{١}{٥}} = ٤^{\frac{٣}{٥}} = \sqrt[٥]{٤^{٣}} = \sqrt[٥]{٦٤} = ٢\sqrt[٥]{٢}$

ب $(٥^{\frac{١}{٢}})^{٣} = ٥^{\frac{١}{٢} \times ٣} = ٥^{\frac{٣}{٢}} = \sqrt{٥^{٣}} = ٥\sqrt{٥}$

ج $(٥ \times ٧)^{\frac{١}{٢}} = ٥^{\frac{١}{٢}} \times ٧^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٥} \times \sqrt{٧} = \sqrt{٣٥}$

د $٣^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٣^{\frac{١}{٢}}} = \frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

هـ $\frac{١٧^{\frac{٥}{٣}}}{١٧^{\frac{١}{٢}}} = ١٧^{\frac{٥}{٣}-\frac{١}{٢}} = ١٧^{\frac{١٠}{٦}-\frac{٣}{٦}} = ١٧^{\frac{٧}{٦}} = ١٧\sqrt[٦]{١٧}$

حاول أن تحل

٦ بسّط كلًا مما يلي:

أ $٥^{\frac{١}{٣}} \times ٥^{\frac{٢}{٣}}$ ب $(٧^{\frac{١}{٣}})^{٢}$ ج $(٢٣)^{\frac{١}{٢}}$ د $٦^{-\frac{١}{٢}}$ هـ $\frac{٨^{\frac{١}{٣}}}{٨^{\frac{٢}{٣}}}$

مثال (٧)

بسّط كلًا من الأعداد التالية:

أ $(٣٢)^{\frac{٣}{٥}}$ ب $٤^{٣,٥}$

الحل:

أ $(٣٢)^{\frac{٣}{٥}} = ((٣٢)^{\frac{١}{٥}})^{٣}$ — $س^{م \times ن} = (س^م)^ن$

$= ((٢)^{٥})^{\frac{١}{٥}})^{٣}$ — $٣٢ = ٢^{٥}$

$= ((٢)^{٥ \times \frac{١}{٥}})^{٣}$ — $(س^م)^ن = س^{م \times ن}$

$= (٢)^{٣} = ٨$ — اضرب

∴ $(٣٢)^{\frac{٣}{٥}} = ٨$

٣٠

اختبار سريع

١ اكتب في الصورة الجذرية، ثم بسّط ما يلي:

(أ) $(٣٤٣)^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{٧^{٣}} = ٧$ (ب) $(١٦٩)^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{١٦٩} = ١٣$

٢ بسّط ما يلي:

(أ) $(٢٢٥)^{\frac{٣}{٢}} = (٩ \times ٢٥)^{\frac{٣}{٢}} = \sqrt{٩^{٣} \times ٢٥^{٣}}$

$= \sqrt{(٣^{٣})^{٢} \times (٥^{٣})^{٢}}$

$= ٢٧ \times ١٢٥ = ٣\,٣٧٥$

(ب) $س^{\frac{٢}{٣}} \times س^{\frac{٥}{٦}} = س^{\frac{٩}{٦}} = س^{\frac{٣}{٢}} = \sqrt{س^{٣}}$

$= |س|\sqrt{س}$

(ج) $(١٦)^{١,٢٥} = (١٦)^{\frac{٥}{٤}} = \sqrt[٤]{(٢^{٤})^{٥}} = ٢^{٥} = ٣٢$

(د) $\dfrac{\sqrt[٣]{٧٢٩س^{٥}}}{\sqrt[٣]{٣س}} = \sqrt[٣]{٢٤٣س^{٤}} = ٣س\sqrt[٣]{٩س}$

٩ إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

١ (أ) -٣ (ب) ٥ (ج) $س^{٢}$

(ب) $٤^{٣,٥} = ٤^{\frac{٧}{٢}}$ — حوّل ٣,٥ إلى كسر مركب

$= (٢^{٢})^{\frac{٧}{٢}}$ — $٤ = ٢^{٢}$

$= ((٢^{٢})^{\frac{١}{٢}})^{٧}$ — $س^{م \times ن} = (س^{م})^{ن}$

$= (٢^{٢ \times \frac{١}{٢}})^{٧}$ — $(س^{م})^{ن} = س^{م \times ن}$

$= ٢^{٧} = ١٢٨$ — اضرب

$\therefore ٤^{٣,٥} = ١٢٨$

حاول أن تحل

٧ بسّط كل عدد من الأعداد التالية:

(أ) $٥^{\frac{٣}{٢}}$ (ب) $١٦^{\frac{٣}{٤}}$ (ج) $(٣٢)^{\frac{٤}{٥}}$

مثال (٨)

أوجد ناتج كل مما يلي:

(أ) $\sqrt[٤]{٥} \times \sqrt[٤]{٧}$ (ب) $\dfrac{\sqrt[٣]{١٦}}{\sqrt[٣]{٢}}$

الحل:

طريقة أولى:

(أ) $\sqrt[٤]{٥} \times \sqrt[٤]{٧} = ٥^{\frac{١}{٤}} \times ٧^{\frac{١}{٤}}$ — $\sqrt[ن]{س} = س^{\frac{١}{ن}}$

$= (٥ \times ٧)^{\frac{١}{٤}}$ — $س^{م} \times ص^{م} = (س \times ص)^{م}$

$= (٣٥)^{\frac{١}{٤}}$ — اضرب

$= \sqrt[٤]{٣٥}$ — $س^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{س}$

طريقة ثانية:

$\sqrt[٤]{٥} \times \sqrt[٤]{٧} = \sqrt[٤]{٥ \times ٧}$ — $\sqrt[ن]{س} \times \sqrt[ن]{ص} = \sqrt[ن]{س \times ص}$

$= \sqrt[٤]{٣٥}$ — اضرب

$\therefore \sqrt[٤]{٥} \times \sqrt[٤]{٧} = \sqrt[٤]{٣٥}$

٣١

طريقة أولى:

(ب) $\dfrac{\sqrt[٣]{١٦}}{\sqrt[٣]{٢}} = \dfrac{١٦^{\frac{١}{٣}}}{٢^{\frac{١}{٣}}}$ — $\sqrt[ن]{س} = س^{\frac{١}{ن}}$

$= \left(\dfrac{١٦}{٢}\right)^{\frac{١}{٣}}$ — $\dfrac{س^{ن}}{ص^{ن}} = \left(\dfrac{س}{ص}\right)^{ن}$ لكل ص $\neq ٠$

$= ٨^{\frac{١}{٣}}$ — اقسم

$= \sqrt[٣]{٨}$ — $س^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{س}$

$= ٢$ — بسّط

طريقة ثانية:

$\dfrac{\sqrt[٣]{١٦}}{\sqrt[٣]{٢}} = \sqrt[٣]{\dfrac{١٦}{٢}}$ — $\dfrac{\sqrt[ن]{س}}{\sqrt[ن]{ص}} = \sqrt[ن]{\dfrac{س}{ص}}$ ، حيث ص $\neq ٠$

$= \sqrt[٣]{٨}$ — اقسم

$= \sqrt[٣]{٢^{٣}}$ — اكتب ٨ على صورة مكعب كامل

$= ٢$ — $\sqrt[٣]{س^{٣}} = س$

$\therefore \dfrac{\sqrt[٣]{١٦}}{\sqrt[٣]{٢}} = ٢$

حاول أن تحل

٨ أوجد الناتج في كل مما يلي:

(أ) $\sqrt[٥]{٩} \times \sqrt[٥]{٢٧}$ (ب) $\dfrac{\sqrt[٣]{٢٤٣}}{\sqrt[٣]{٣}}$

٣٢

تمرَّنْ ١-٢

الأسس النسبية وخواصها

Rational Exponents and Properties

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية إن أمكن:

(أ) $\sqrt[٥]{-٣٢}$ ________

(ب) $\sqrt[٤]{٨١}$ ________

(ج) $\sqrt[٤]{-١٦}$ ________

(د) $\sqrt[٥]{٧٢ \times ٢١٦}$ ________

(هـ) $\dfrac{\sqrt[٤]{(١٠)^{٧}}}{\sqrt[٤]{١٠٠٠}}$ ________

(٢) اكتب كل عدد مما يلي بالصورة الجذرية ثمّ بسِّط إن أمكن:

(أ) $س^{\frac{٢}{٣}}$ ________

(ب) $س^{\frac{١}{٤}}$ ، حيث س ≥ ٠ ________

(ج) $(١٧)^{\frac{١}{٦}}$ ________

(د) $٨^{\frac{٢}{٣}}$ ________

(هـ) $س^{\frac{٤}{٩}}$ ________

(و) $س^{١,٥}$ ، حيث س ≥ ٠ ________

(٣) بسّط كل عدد من الأعداد التالية:

(أ) $(٣٢)^{\frac{٤}{٥}}$ ________

(ب) $(-٨)^{\frac{٢}{٣}}$ ________

(ج) $(٨١)^{٠,٢٥}$ ________

(د) $(١٠٠)^{-١,٥}$ ________

(هـ) $(١٦)^{\frac{٣}{٢}}$ ________

١٣

٢ (أ) $\sqrt[٤]{١٦} = ٢$ (ب) $\sqrt{٣} \times \sqrt{٣} = ٣$

(جـ) $\sqrt[٣]{٧} \times \sqrt[٣]{٧^{٢}} = \sqrt[٣]{٧^{٣}} = ٧$

٣ $\sqrt[٣]{٦٤^{٤}} = ٦٤ \times ٤ = ٢٥٦$

٤ (أ) $\sqrt[٨]{\text{ص}^{٣}}$ (ب) $\sqrt[٥]{\text{س}^{٢}}$ $\left(٠,٤ = \frac{٤}{١٠} = \frac{٢}{٥}\right)$

(جـ) $\text{س}^{\frac{٢}{٣}}$ ، $\text{ص}^{\frac{٣}{٢}}$

٥ $\text{ن} = \frac{(٤,٩)^{٠,٥}}{٢ \times \pi \times (١,٧)^{٠,٥}} \simeq ٠,٢٧$

السرعة الدورانية هي ٢٧ , ٠ دورة بالثانية.

٦ (أ) ٥ (ب) $٧^{\frac{٢}{٣}} = \sqrt[٣]{٤٩}$

(جـ) $\sqrt{٢٣}$ (د) $\frac{١}{\sqrt{٦}} = \frac{\sqrt{٦}}{٦}$

(هـ) ١

٧ (أ) $\sqrt{٥^{٣}} = ٥\sqrt{٥}$

(ب) $\sqrt[٤]{١٦^{٣}} = \sqrt[٤]{(٢^{٣})^{٤}} = ٨$

(جـ) $\sqrt[٥]{٣٢^{٤}} = \sqrt[٥]{(٢^{٤})^{٥}} = ١٦$

٨ (أ) ٣ (ب) $٣^{\frac{٤}{٣}} = ٣\sqrt[٣]{٣}$

المجموعة ب تمارين تعزيزيّة

(١) بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

(أ) $\sqrt[٤]{٠,٠٠٨١}$ (ب) $\sqrt[٦]{\text{س}^{٢٤}}$

(جـ) $\sqrt[٤]{٣٢} + \sqrt[٤]{١٦٢}$ (د) $\sqrt[٤]{\frac{١}{١٦}}$

(هـ) $\frac{\sqrt[٣]{٢٧\text{س}^{٣}}}{\sqrt[٣]{٨}}$ (و) $\sqrt[٥]{٣٢ \times ٢٤٣}$

(٢) اكتب كل تعبير أسّي مما يلي بالصورة الجذرية ثمّ بسّط إن أمكن:

(أ) $\text{س}^{\frac{١}{٤}}$ ، حيث س ≥ ٠ (ب) $\text{ص}^{\frac{٣}{٥}}$

(جـ) $\text{س}^{٣,٥}$ ، حيث س ≥ ٠ (د) $\frac{١}{(١٦)^{-\frac{٣}{٤}}}$

(هـ) $\left((٢٧)^{\frac{٢}{٣}}\right)^{-\frac{١}{٤}}$ (و) $(٣٢)^{٠,٢}$

(ز) $(٩)^{٢,٥}$

(٣) اكتب كل تعبير جذري مما يلي بالصورة الأسية:

(أ) $\sqrt{(٥\text{س})^{٧}}$ ، حيث س ≥ ٠ (ب) $\left(\sqrt{٥\text{س}}\right)^{٧}$ ، حيث س ≥ ٠

(جـ) $\sqrt[٥]{(٢٤٣)^{٤}}$ (د) $\sqrt{٠,٠١\text{س}^{١٨}}$

(٤) اكتب كل عدد مما يلي بالصورة الأسية:

(أ) $\sqrt{٣}$ __________

(ب) $\sqrt[٥]{\text{س}^{٢}}$ __________

(جـ) $\sqrt{٧\text{س}^{٣}\text{ص}^{٢}}$ حيث س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ __________

(د) $\sqrt[٣]{٥\text{س}^{٢}}$ __________

(هـ) $\sqrt[٣]{٨١\text{س}^{٣}}$ __________

(٥) بسّط كلًّا مما يلي:

(أ) $\sqrt[٣]{(-٢٧)^{٤}}$ __________

(ب) $\sqrt[٥]{-٢٤٣}$ __________

(جـ) $\left(٥^{\frac{٢}{٣}}\right)^{-٩}$ __________

(د) $٨^{\frac{٣}{٤}} \times ٨^{\frac{١٣}{٤}}$ __________

(هـ) $\text{س}^{\frac{٣}{٥}} \times \text{س}^{\frac{٩}{١٠}}$ حيث س ≥ ٠ __________

(و) $\frac{\text{س}^{\frac{٣}{٢}} \times \text{ص}^{\frac{١}{٢}}}{\text{س}^{\frac{١}{٢}} \times \text{ص}^{\frac{١}{٤}}}$ حيث س > ٠ ، ص > ٠ __________

(ز) $\sqrt[١٠]{١٠٢٤} - ٢\sqrt[٦]{٢^{٦}}$ __________

(حـ) $\frac{٨^{\frac{٧}{٣}} \times (٢٧)^{\frac{١}{٥}}}{(١٦)^{\frac{٥}{٣}} \times ٩^{\frac{٤}{٥}}}$ __________

(٦) **علم الأحياء:** التعبير ٠٣٦ , ٠ $\text{م}^{\frac{٣}{٤}}$ يستخدم لدراسة السوائل.

أوجد قيمة هذا التعبير إذا كان

م = ٠٢٥ , ٠ × $١٠^{٨}$. __________

(٤) بسّط كلًّا من التعبيرات التالية:

(أ) $\frac{\text{س}^{\frac{٢}{٣}} \times \text{ص}}{\text{س}^{\frac{١}{٣}} \times \text{ص}^{\frac{٣}{٤}}}$ حيث س ≠ ٠ ، ص > ٠

(ب) $\left[\left(\text{س}^{-\frac{١}{٣}}\right)^{\frac{١}{٢}}\right]^{٣}$

(جـ) $\frac{٩^{\frac{٣}{٢}} \times \sqrt[٣]{٦٤}}{(٥٤)^{-\frac{١}{٣}}}$

(٥) **تحليل الخطأ:** أوجد الخطأ في الحل التالي: $٣ \times \left(٢ + ٣^{\frac{٣}{٢}}\right) = ٣ \times ٢ + ٣ \times ٣^{\frac{٣}{٢}} = ٦ + ٩^{\frac{٣}{٢}} = ٣٣$.

المرشد لحل المسائل

المرشد لحل المسائل

بهدف تعزيز حب رياضة كرة القدم لدى الناشئة، أقام أحد النوادي ملعبًا لتدريبهم.

استخدم المعادلة:

ع = ٤$\sqrt{\text{س}}$ لمعرفة طول سور الملعب ع، بمعلومية مساحة الملعب س.

أ تبلغ مساحة الملعب الحالية ١٥٠٠ متر مربع.
فما طول السور اللازم لإحاطته؟

ب قررت إدارة النادي زيادة مساحة الملعب لتصبح ٤ أمثال ما كانت عليه محافظة على شكلها.
فما طول السور الإضافي؟

الحل:

أ لمعرفة طول السور، أعوض عن س بـ ١٥٠٠ في المعادلة ع = ٤$\sqrt{\text{س}}$.
ع = ٤$\sqrt{١٥٠٠}$ ≃ ١٥٤,٩٢
يبلغ طول السور حوالى ١٥٥ مترًا.

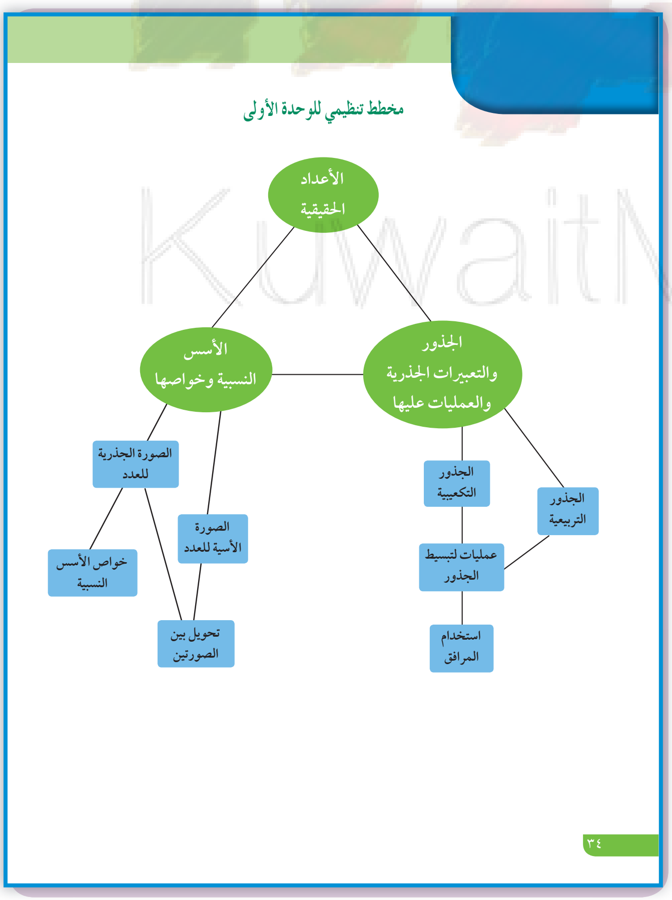
ب مساحة الملعب بعد الزيادة = ١٥٠٠ × ٤ = ٦٠٠٠ متر مربع.
باستخدام المعادلة ع = ٤$\sqrt{\text{س}}$ ، نحصل على:
ع = ٤$\sqrt{٦٠٠٠}$ ≃ ٣٠٩,٨
أي حوالى ٣١٠ أمتار.
طول السور الإضافي: ٣١٠ − ١٥٥ = ١٥٥ مترًا.

ملاحظة: عندما أصبحت مساحة الملعب ٤ أمثال ما كانت عليه في السابق، أصبح طول السور الحالي مثلي طول السور السابق.

مسألة إضافية

أوجد أبعاد قطعة أرض مستطيلة الشكل، يساوي طولها ثلاثة أمثال عرضها، ومساحتها ٢٧٠٠ متر مربع.

٣٣



إجابة «مسألة إضافية»

س: عرض قطعة الأرض.

٣س: طول قطعة الأرض.

(٣س)(س) = ٢٧٠٠

س^{٢} = $\frac{٢٧٠٠}{٣}$

س^{٢} = ٩٠٠

س = ±٣٠

س = −٣٠ مرفوضة

∴ العرض = ٣٠

الطول = ٣ س

= ٣ × ٣٠

= ٩٠

أي عرض قطعة الأرض يساوي ٣٠ مترًا
وطول قطعة الأرض يساوي ٩٠ مترًا.

ملخص

- لكل عدد حقيقي موجب جذران تربيعيان أحدهما موجب والآخر سالب.
- لكل عدد حقيقي جذر تكعيبي واحد.
- خواص الجذور التربيعية (س ≥ ٠، ص ≥ ٠):

$\sqrt{\text{س}^{٢}} = |\text{س}| = \text{س}$

$\left(\sqrt{\text{س}}\right)^{٢} = \text{س}$

$\sqrt{\text{س}} \times \sqrt{\text{ص}} = \sqrt{\text{س} \times \text{ص}}$

$\dfrac{\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{ص}}} = \sqrt{\dfrac{\text{س}}{\text{ص}}}$ ، $\text{ص} \neq ٠$

- خواص الجذور التكعيبية:

$\sqrt[٣]{\text{س}^{٣}} = \text{س}$

$\left(\sqrt[٣]{\text{س}}\right)^{٣} = \text{س}$

$\sqrt[٣]{\text{س}} \times \sqrt[٣]{\text{ص}} = \sqrt[٣]{\text{س} \times \text{ص}}$

$\dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}}}{\sqrt[٣]{\text{ص}}} = \sqrt[٣]{\dfrac{\text{س}}{\text{ص}}}$ ، $\text{ص} \neq ٠$

- $\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{ص}}$ ، $\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}}$ مقداران مترافقان

$\sqrt{\text{س}}$ تكتب $\text{س}^{\frac{١}{٢}}$ ، $\sqrt[٣]{\text{س}}$ تكتب $\text{س}^{\frac{١}{٣}}$ ، $\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{م}}} = \text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$

- خواص الأسس النسبية:

ليكن م، ن عددين نسبيين و أ، ب عددين حقيقيين حيث أ^م، أ^ن، ب^م، ب^ن أعداد حقيقية.

$\text{ب}^{\text{م}} \times \text{ب}^{\text{ن}} = \text{ب}^{\text{م}+\text{ن}}$

$(\text{ب}^{\text{م}})^{\text{ن}} = \text{ب}^{\text{م}\times\text{ن}}$

$(\text{أ} \times \text{ب})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ن}} \times \text{ب}^{\text{ن}}$

$\text{ب}^{-\text{ن}} = \dfrac{١}{\text{ب}^{\text{ن}}}$ ، $\text{ب} \neq ٠$

$\dfrac{\text{ب}^{\text{م}}}{\text{ب}^{\text{ن}}} = \text{ب}^{\text{م}-\text{ن}}$ ، $\text{ب} \neq ٠$

$\left(\dfrac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{م}} = \dfrac{\text{أ}^{\text{م}}}{\text{ب}^{\text{م}}}$ ، $\text{ب} \neq ٠$

(د) $-٥\sqrt{٥} \times ٢\sqrt{٥}$ ____________

(هـ) $٣\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} \times \sqrt[٣]{٤\text{س}}$ ____________

(و) $\sqrt[٣]{٨\text{س}^{٥}} \div ٢\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$ ، حيث س ≠ ٠ ____________

(ز) $\sqrt{٨} \times \sqrt{٢} - ٢\sqrt{٧٥} + ٥\sqrt{١٢}$ ____________

(حـ) $\dfrac{\sqrt{٣}}{١ - \sqrt{٣}} - \dfrac{\sqrt{٣}}{١ + \sqrt{٣}}$ ____________

البنود الموضوعية

في البنود (١–١٣) عبارات، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة، (ب) إذا كانت العبارة خاطئة.		
(١) $(-٨)^{\frac{٢}{٣}} = ٤$	(أ)	(ب)
(٢) $(٠{,}٩)^{\frac{١}{٢}} = ٠{,}٣$	(أ)	(ب)
(٣) $(٢)^{\frac{١}{٢}} \times (٤)^{\frac{١}{٨}} = (٤)^{\frac{٣}{٨}}$	(أ)	(ب)
(٤) $\left(\sqrt[٣]{٨١}\right)^{٥} = ٣^{٧}$	(أ)	(ب)
(٥) $٧^{\frac{١}{٣}} \times ٧^{\frac{٩}{٢}} = ٧^{\frac{٣}{٢}}$	(أ)	(ب)
(٦) $٩^{-\frac{٣}{٢}} \times (٢٧)^{\frac{٢}{٣}} = ٣^{-١}$	(أ)	(ب)
(٧) إذا كانت $\text{س} = ٢^{-\frac{٣}{٢}}$ ، $\text{ص} = (١٦)^{\frac{٣}{٤}}$ فإن $\text{ص} \times \text{س}^{٢} = ١$	(أ)	(ب)
(٨) $\dfrac{\sqrt[٣]{٨١\text{س}^{٤}\text{ص}^{٥}}}{(٣\text{س})^{\frac{١}{٣}} \times (-\text{ص})^{\frac{٢}{٣}}} = ٣\text{س ص}$ حيث س ≠ ٠، ص ≠ ٠	(أ)	(ب)
(٩) العددان $\sqrt[٣]{٣٢}$ ، $\sqrt[٣]{٢}$ مترافقان.	(أ)	(ب)
(١٠) العددان $(٨ - ٢\sqrt{٣})$ ، $(\sqrt{٣} + ٤)$ مترافقان.	(أ)	(ب)
(١١) ناتج $(\text{س}^{٩}\text{ص}^{١٢})^{\frac{١}{٣}} \times \sqrt{(-\text{س})^{٤}\text{ص}^{٢}}$ يساوي $\text{س}^{٥}\text{ص}^{٥}$.	(أ)	(ب)
(١٢) $\sqrt{(-٢)^{٢}} = -٢$	(أ)	(ب)
(١٣) إذا كانت $\text{س} = \sqrt[٣]{٧^{-٢}}$ ، $\text{ص} = (٤٩)^{\frac{١}{٣}}$ فإن $\text{س} = \text{ص}^{-١}$	(أ)	(ب)

اختبار الوحدة الأولى

أسئلة المقال

(١) بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

(أ) $\sqrt{٤٩\text{س}^{٣٢}}$ ____________

(ب) $\sqrt{٠{,}١٦\text{س}^{١٢}}$ ____________

(جـ) $\sqrt[٣]{٨ \times ٢٧}$ ____________

(د) $\dfrac{\sqrt{٧٢}}{\sqrt{١٨}}$ ____________

(هـ) $\sqrt[٣]{٥٤ \times ٤}$ ____________

(و) $\sqrt{٣٢} \times \left(\sqrt{٨} + ٣\sqrt{٢٤}\right)$ ____________

(٢) اختصر كلًّا مما يلي بحيث يكون المقام عددًا نسبيًّا:

(أ) $\dfrac{-٢}{٣\sqrt{٢}}$ ____________

(ب) $\dfrac{٧}{٥\sqrt{٣} - ١}$ ____________

(جـ) $\dfrac{-٢ + \sqrt{٣}}{٣ - ٢\sqrt{٣}}$ ____________

(د) $\dfrac{٣ - ٢\sqrt{٥}}{\left(\sqrt{٥} - ٢\right)\left(\sqrt{٥} + ٢\right)}$ ____________

(٣) بسّط كل تعبير من التعابير التالية:

(أ) $-(٣٢)^{\frac{٤}{٥}}$ ____________

(ب) $(٢٥)^{\frac{١}{٢}} \times ٥^{٢}$ ____________

(جـ) $٨^{\frac{١}{٢}} \times (١٨)^{\frac{١}{٢}}$ ____________

(٤) اكتب كل تعبير مما يلي بالصورة الجذرية ثمّ بسّط إن أمكن:

(أ) $\text{س}^{\frac{٣}{٨}}$ ، حيث س ≥ ٠ ____________

(ب) $\text{ص}^{\frac{٢}{٥}}$ ____________

(جـ) $(٨\text{ص}^{-٦})^{-\frac{٢}{٣}}$ ____________

في البنود (١٤–١٩) لكل بند أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ظلل دائرة الرمز الدال على الاختيار الصحيح

(١٤) العدد $\sqrt[٣]{٤^{٧}}$ مرافق لـ:

(أ) $\sqrt{٤^{٢}}$ (ب) $\sqrt[٣]{٤^{٧}}$ (جـ) $\sqrt[٣]{٢}$ (د) $\sqrt[٣]{٤}$

(١٥) مرافق العدد $(٣ - ٢\sqrt{٣})$ يمكن أن يكون:

(أ) $(٣ + ٢\sqrt{٣})^{٢}$ (ب) $٢١ + ١٢\sqrt{٣}$ (جـ) $٣ + ٢\sqrt{٣}$ (د) $٧ + ٤\sqrt{٣}$

(١٦) ناتج $\sqrt{١٨\text{س}^{٦}\text{ص}^{٨}}$ هو:

(أ) $٣\sqrt{٢}\,|\text{س}^{٣}|\text{ص}^{٤}$ (ب) $-٩\text{س}^{٣}\text{ص}^{٤}$ (جـ) $-٣\text{س}^{٣}\text{ص}^{٤}\sqrt{٢}$ (د) $٦\text{س}^{٣}\text{ص}^{٤}$

(١٧) ناتج $\text{أ ب}^{\frac{٢}{٣}} \times (\text{أ ب})^{\frac{٢}{٣}} \times \text{ب أ}^{\frac{٢}{٣}}$ ، حيث أ > ٠، ب > ٠ هو:

(أ) $(\text{أ ب})^{٢}\sqrt[٣]{\text{ب}}$ (ب) $(\text{أ ب})^{\frac{٧}{٣}}$ (جـ) $\text{أ ب}^{\frac{٧}{٣}}$ (د) $\text{ب}^{٢}\sqrt{\text{أ ب}}$

(١٨) إذا كانت $\text{س} = ٢\sqrt{٢٧}$ ، $\text{ص} = ٩^{\frac{١}{٤}}$ فإن س ص =

(أ) ١٨ (ب) ٦ (جـ) $١٨\sqrt{٣}$ (د) $-٣\sqrt{٣}$

(١٩) ناتج $\left(\dfrac{\text{أ}^{٣}}{\text{ب}}\right)^{\frac{١}{٢}} \times \left(\dfrac{\text{ب}}{\text{جـ}}\right)^{\frac{٥}{٢}} \times (\text{جـ}^{٣} \times \text{أ}^{-١})^{\frac{٣}{٢}}$ ، حيث أ > ٠ ، ب > ٠ ، جـ > ٠ تساوي:

(أ) $\text{ب جـ}^{٢}$ (ب) $\text{أ ب}^{٢}\text{جـ}$ (جـ) $\text{ب}^{٢}\text{جـ}^{\frac{٣}{٢}}$ (د) $(\text{ب جـ})^{٢}$

تمارين إثرائية

(١) بسّط كلًّا مما يلي:

(أ) $\sqrt[٣]{٦٤\,٠٠٠}$

(ب) $\sqrt[٣]{-٨ \times ٣٤٣}$

(جـ) $\sqrt[٤]{٠,٠٠١٦}$

(د) $\sqrt[٤]{٦\,٥٦١}$

(هـ) $\sqrt{٤\left(٣ - \sqrt{٢}\right)^{٢}}$

(و) $\dfrac{٨^{\frac{١}{٢}} \times \left(٢٧\right)^{\frac{١}{٢}}}{\left(٥٤\right)^{\frac{١}{٢}} \times \left(١٠\right)^{-٢}}$

(ز) $\dfrac{\left(١٢\right)^{-٣} \times \left(١٨\right)^{٢}}{٦^{-٢} \times ٣^{٥}}$

(٢) بسّط كلًّا من التعابير التالية:

(أ) $\text{س}^{\frac{١}{٢}} \times \text{س}^{\frac{٣}{٢}}$ ، حيث $\text{س} \geq ٠$

(ب) $\left(\text{س}^{-\frac{٢}{٥}} \times \text{ص}^{\frac{٣}{١٠}}\right)^{-٢٠}$ حيث $\text{س} \neq ٠$ ، $\text{ص} > ٠$

(جـ) $\dfrac{\sqrt[٤]{٦٤\text{ص}^{٧}}}{\sqrt[٤]{٢\text{ص}^{٢}}}$ ، حيث $\text{ص} > ٠$

(د) $\dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}^{٤}} \times \sqrt[٣]{\text{س}}}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}}$ ، حيث $\text{س} \neq ٠$

(٣) اختصر كلًّا مما يلي بحيث يكون المقام عددًا نسبيًّا:

(أ) $\dfrac{١}{\sqrt{٢} + ١}$

(ب) $\dfrac{٢ - \sqrt{٣}}{٣ - \sqrt{٣}}$

(جـ) $\dfrac{٢\sqrt{٦}}{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}}$

(د) $\dfrac{\sqrt{٣} - ٢\sqrt{١٢}}{\sqrt{٣} + ٤}$

(٤) خطأ تحليلي: أوجد الخطأ. $\sqrt{٢٤} = \sqrt{(-٤) \times (-٦)} = \sqrt{-٤} \times \sqrt{-٦} = -٢\sqrt{-٦}$.

(٥) أثبت أن: $\left(٢٧\right)^{-\frac{٢}{٣}} = \left(٨١\right)^{-\frac{١}{٢}}$

(٦) إذا كان $\left(١٦\right)^{٠,٥} \times \text{س} = -١$ فأوجد قيمة س

(٧) إذا كان $\text{س} = \sqrt{٤ - ٢\sqrt{٣}} + \sqrt{٤ + ٢\sqrt{٣}}$

(أ) احسب $\text{س}^{٢}$.

(ب) أثبت أن س تساوي $٢\sqrt{٣}$.

(٨) إذا كان $\text{س} = \dfrac{٣\sqrt{٢}}{\sqrt{٢} - ١}$ ، فأوجد قيمة $\dfrac{(\text{س} - ٤)^{٢}}{٨} \times (\text{س} + ٤)$.

* **(٩)** أوجد قيمة س بحيث يكون $\left[\left(٣ - ٢\sqrt{٧}\right) \times \text{س}\right]$ عددًا نسبيًّا.

(١٠) بسط التعبير التالي: $\left(\sqrt[٣]{\text{س}^{٥}\,\text{ص}^{٦}}\right)^{٢}$