مقدمة الوحدة

ما دور الإحصاء في تقييم الإنتاج؟ الكلفة والبيع والربح.

ما دور الإحصاء في مجالات متعددة من اهتماماتنا اليومية؟

استخدام الأدوية ومفعولها، معالجة الأمراض وحدود نجاحها أو فشلها...

يرتكز دور الإحصاء على ضمانة الدراسة لجهة كونها مفيدة ومقبولة، ويعتمد عليها، ويمكن فهمها.

يجب التمعن جيّدًا بمدلول النتائج التي نحصل عليها لاتخاذ القرار المناسب على سبيل المثال، إذا كان المنتج A أفضل من المنتج B أم لا.

يعتمد الإحصائي في البدء على تحليل البيانات باستخدام طرائق استقصائية عامة ترتكز على تمثيلات بيانية وقياسات عددية.

يستكشف البيانات لأنه لا يعرف مسبقًا النتائج التي يمكن الحصول عليها لذا يستخدم في هذه المرحلة مخططات الانتشار والصندوق ذي العارضتين والمدرج التكراري لعرض ووصف البيانات.

ومن المتعارف عليه أن الإحصائي يتعامل مع عينات المجتمع الإحصائي لذا يوجد أخطاء معيارية خاصة بكل عينة، مثل الخطأ المعياري للمتوسط الحسابي، والخطأ المعياري للانحراف المعياري، والخطأ المعياري لمُعامل الارتباط.

هل يساعد الأسبيرين على تجنب النوبات القلبية الحادة؟

سؤال يطرح دائمًا من ضمن مجموعة أسئلة في الطب الوقائي.

في تجربة أجريت على 22 000 شخص في إحدى الدول حيث تناول نصفهم جرعات من الأسبيرين وتناول النصف الآخر جرعات أدوية وهمية جاءت النتائج كما يلي:

الوحدة الرابعة

الإحصاء

Statistics

مشروع الوحدة: ما هي أفضل طريقة لإيجاد وظيفة؟

1. **مقدمة المشروع:** بعد التخرج يواجه الحاصلون على الإجازات والشهادات الجامعيّة تحدّ جديد هو الانخراط في سوق العمل.
2. **الهدف:** هو البحث عن فرص عمل من خلال القيام بعدة خطوات ومحاولات متنوعة واستخدام العديد من الوسائل.
3. **اللوازم:** حاسوب — شبكة الإنترنت.
4. **أسئلة حول التطبيق:**
   - a كيف ستختار عينة عشوائية من الموظفين للاستفسار عن الوسيلة التي استخدموها في إيجاد وظيفتهم؟
   - b ما الخيارات التي اكتشفتها؟ نظّمها في استمارة.

   (إرشاد):
   - من خلال الأصدقاء والمعارف.
   - من خلال الإعلانات في الصحف والمجلات.
   - من خلال الوكالات المختصة في الربط بين سوق العمل وطالبي الوظائف.
   - من خلال البحث عبر شبكة الإنترنت.
   - من خلال التقدم مباشرة لطلب وظيفة من الشركة المختصة أو اعتماد وسيلة أخرى (اذكرها ...).
   - c حدّد النسب المئوية لكل خيار ممّا سبق.
5. **التقرير:** اكتب تقريرًا مفصلًا يحدّد النسب التي حصلت عليها من خلال العينة العشوائيّة التي اعتمدتها مكوّنًا جدولًا بالنسب المئوية عن كل وسيلة تمّ استخدامها لإيجاد وظيفة.

القرار: ضمّن تقريرك بعض الاقتراحات والنصائح والاستنتاجات التي نتجت عن تلك الدراسة.

دروس الوحدة

التقدير	اختبارات الفروض الإحصائية	الارتباط والانحدار
4–1	4–2	4–3

166

- 104 أشخاص من أصل 11 000 تناولوا جرعات الأسبيرين أصيبوا بنوبات قلبية حادة.
- 189 شخصًا من أصل 11 000 تناولوا جرعات وهمية أصيبوا بنوبات قلبية حادة.

هل يمكن أن تبيّن هذه النتائج مدلولًا إحصائيًّا تناقصيًّا للإصابة بنوبات قلبية حادة بين أفراد العينة الذين يتناولون جرعات الأسبيرين؟

يمكن استخدام دروس هذه الوحدة للإجابة عن هذا السؤال خاصة أنه مهم بالنسبة إلى أعمار عدد كبير من الأشخاص.

مشروع الوحدة

إن الهم الأساسي للمتخرجين من المعاهد والجامعات هو إيجاد فرصة عمل وهنا تكمن المشكلة في الوسيلة الأفضل والأنجح لإيجاد فرصة العمل.

من هنا يعالج مشروع الوحدة بعض الوسائل المتبعة للدخول في سوق العمل.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

(a) قد تختلف الإجابات بحسب كل طالب.

(b) تتنوّع الاستمارات بحسب كل طالب.

(c) تتنوّع الإجابة بحسب كل طالب لأنه ربما قد يجد وسيلة غير تلك المذكورة سابقًا.

التقرير

اِعرض تقريرك أمام الصف ليتم مناقشته وذلك من خلال مقارنة الأرقام والنسب المئوية المرتبطة بكل وسيلة، ثم استخدام هذه الأرقام والنسب في عملية البحث عن فرصة عمل ومقارنتها مع الأرقام المشابهة في تقارير زملائك في الصف ليعمل على اعتمادها أو تصحيحها أو حتى رفضها في حال كان هناك فوارق كبيرة في ما بينها.

الوحدة الرابعة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت مقاييس النزعة المركزية: المتوسط الحسابي – الوسيط – المنوال.
- تعلمت المجتمع الإحصائي.
- تعلمت العينة العشوائية وأنواعها واستخداماتها.

ماذا سوف تتعلم؟

- يُعرّف المعلمة والإحصاءة.
- إيجاد التقدير بنقطة.
- إيجاد التقدير بفترة ثقة.
- استكشاف الفروض الإحصائية.
- يُعرّف الاختبارات الإحصائية ويجريها.
- اتخاذ القرار المناسب.
- يتعرف الارتباط والانحدار.
- يوجد مُعامل ارتباط بيرسون.
- يكتب معادلة خط الانحدار ويتنبأ.

أضف إلى معلوماتك

في الوسائل الإعلامية المرئية والمسموعة والمكتوبة تطالعك نتائج إحصائية تتحدث عن توقعات أحداث معينة تتناول انتخابات نيابية أو رئاسية أو مبيعات أو مباريات... وأكثر ما يستوقفك هو نسبة مئوية معينة مع هامش خطأ محدد والسؤال المهم هو: كيف يتم التقدير وكيف يحتسب هامش الخطأ؟ توفر دروس هذه الوحدة فرصة أمام الطلاب للتعرّف على التقدير وهامش الخطأ والفروض الإحصائية وكيفية احتسابها.

كما يتعرف الطلاب على مفهوم الارتباط والانحدار ويحتسبوا معامل ارتباط بيرسون ثم يكتبوا معادلة خط الانحدار ويتنبؤا نتائج معينة.

المصطلحات الأساسية

المعلمة – الإحصاءة – التقدير – التقدير بنقطة – فترة الثقة – التقدير بفترة الثقة – درجة الثقة – التوزيع الطبيعي – القيمة الحرجة – هامش الخطأ – الخطأ المعياري – خواص التوزيع t – الفروض الإحصائية – المقياس الإحصائي – فرض العدم – الفرض البديل – القرار – الانحدار – المخطط الانتشاري – الارتباط – مُعامل الارتباط الخطي – خواص مُعامل الارتباط – مُعامل ارتباط بيرسون – التنبؤ.

167

سلّم التقييم

4	جدول النسب المئوية صحيح بالكامل – الاقتراحات والاستنتاجات ممتازة ومفيدة – التقرير منظم وواضح ويعكس نتائج بحث مميز.
3	بعض الأخطاء في الجدول – الاقتراحات والاستنتاجات جيدة ومفيدة – التقرير منظم وواضح ولكن ينقصه الدقة في بعض النقاط.
2	أخطاء كثيرة في الجدول – الاقتراحات والاستنتاجات مقبولة – التقرير غير منظم وينقصه الوضوح في التفاصيل.
1	معظم عناصر المشروع بحاجة إلى إعادة لأنها ناقصة.

4-1: التقدير

1 الأهداف

- التعرف على التقدير بنقطة.
- إيجاد التقدير بفترة ثقة.
- إيجاد هامش الخطأ.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

المعلمة – الإحصاءة – تقدير المعلمة – التقدير – التقدير بنقطة – التقدير بفترة الثقة – درجة الثقة (مستوى الثقة) – نسبة الخطأ (مستوى المعنوية) – القيمة الحرجة – هامش الخطأ.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) أوجد المتوسط الحسابي للأعداد التالية:

(1) 1, 1, 1, 1, 1

(2) $-3, -2, -1, 3, 2, 1$

(b) أوجد الوسيط للأعداد التالية:

(1) 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1

(2) 6, 6, 6, 6, 6

(c) أوجد المنوال للأعداد التالية:

8, 16, 7, 9, 10

5 التدريس

التأكيد على أهمية التقديرات في علم الإحصاء وكيفية التعامل معها يحتاج إلى الكثير من الدقة والانتباه خاصة عند إجراء الحسابات اللازمة، ومعرفة الفرق بين مستوى الثقة، وفترة الثقة، والقيمة الحرجة.

4-1

التقدير

Estimation

سوف تتعلم

- التقدير بنقطة.
- التقدير بفترة الثقة.
- هامش الخطأ.

المفردات والمصطلحات:

- المعلمة Parameter
- الإحصاءة Statistic Function
- تقدير المعلمة Parameter Estimate
- تقدير Estimation
- تقدير بنقطة Point Estimate
- تقدير بفترة الثقة Confidence Interval Estimation
- درجة الثقة (مستوى الثقة) (Level of Confidence) Degree of Confidence
- نسبة الخطأ (مستوى المعنوية) Percentage of error (Significance Level)
- القيمة الحرجة Critical Value
- هامش الخطأ Margin of Error

دعنا نفكر ونتناقش

متوسط عدد الرحلات الجويّة المغادرة يوميًا خلال شهر يونيو من أحد المطارات هو 75 رحلة.

هل يمكن استخدام هذه العيّنة لتقدير متوسّط عدد الرحلات μ خلال أشهر السنة؟ لماذا؟

وما هي أفضل وسيلة للتقدير لنقترب من الحقيقة؟

سبق لنا في الصف الحادي عشر تعريف المجتمع الإحصائي والعينة العشوائية والأسباب التي تؤدي إلى أخذ العينات لدراسة المجتمع بدلًا من الحصر الشامل، وذلك لتقدير المتوسط (الوسط) الحسابي للمجتمع μ أو الانحراف المعياري له σ.

ويعتبر الوسط الحسابي للمجتمع μ والانحراف المعياري للمجتمع σ من معالم المجتمع، وعادة ما تكون هذه المعالم مجهولة.

ولتقدير هذه المعالم نلجأ إلى سحب عينة عشوائية منه، ثم نحسب المتوسط الحسابي للعينة $\overline{x}$ أو الانحراف المعياري S والذي يعتمد على قيم العينة ولا يعتمد على معالم المجتمع.

المعلمة (Parameter): هي ثابت يصف المجتمع أو يصف توزيع المجتمع كالمتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ.

الإحصاءة (Statistic Function): هو اقتران تتعين قيمته من العينة كالمتوسط الحسابي $\overline{x}$ أو الانحراف المعياري S.

تقدير المعلمة (Parameter Estimate): هو إحصاءة تعتمد على قيم العينة وتعكس قيمة قريبة لمعلمة المجتمع ككلّ وتوزيعه.

في هذا الدرس سوف تتعرف طريقتين تساعدان على إيجاد قيم تقديرية لبعض معالم مجتمع معين:

- **طريقة أولى:** التقدير بنقطة.
- **طريقة ثانية:** التقدير بفترة الثقة.

تذكر:

الاقتران هو قيمة تربط مفردات معينة وتنتج منها.

168

التقدير بنقطة Point Estimate

التقدير بنقطة هي قيمة وحيدة محسوبة من العينة تستخدم لتقدير معلمة مجهولة من معالم المجتمع.

فمثلًا المتوسط الحسابي للعينة العشوائية $\overline{x}$ يستخدم كتقدير بنقطة للمتوسط الحسابي للمجتمع μ، وكذلك الانحراف المعياري للعينة S يستخدم كتقدير بنقطة للانحراف المعياري للمجتمع σ.

التقدير بفترة الثقة Confidence Interval Estimation

علمنا مما سبق أن لكل مجتمع معالم منها المتوسط الحسابي μ والانحراف المعياري σ، ودرسنا كيفية إيجاد التقدير بنقطة لتلك المعالم. وعلمنا أن التقدير بنقطة لإحدى معالم المجتمع هو قيمة وحيدة محسوبة من العينة، ولذلك فإن احتمال الخطأ في التقدير بنقطة يكون كبيرًا.

وبناء عليه فإنه من الأفضل إيجاد فترة معينة يتوقع أن تقع معلمة المجتمع داخلها بنسبة معينة أو باحتمال معين. إن مثل هذه الفترة تسمى فترة الثقة.

فترة الثقة Confidence Interval

هي فترة طرفاها متغيران عشوائيان (أي أنها فترة عشوائية) تحوي إحدى معالم المجتمع بنسبة معينة تسمى درجة الثقة (مستوى الثقة).

التقدير بفترة الثقة

هو إيجاد فترة معينة يتوقع أن تقع معلمة المجتمع داخلها بنسبة معينة أو احتمال معيّن.

درجة الثقة (مستوى الثقة)

Degree of Confidence (Level of Confidence)

إن درجة الثقة أو مستوى الثقة هو احتمال $(1-\alpha)$ أن تكون فترة الثقة تحوي القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع قيد الدراسة، وعادة يعبّر عنها كنسبة مئوية.

أما α فهي نسبة الخطأ في التقدير وتسمى **مستوى المعنوية** أو مستوى الدلالة.

فمثلًا:

- إذا كانت $\alpha = 0.05$ حينها تكون درجة الثقة $1-\alpha = 0.95$ أي 95%
- إذا كان مستوى الثقة 90% فإن مستوى المعنوية $\alpha = 10\%$
- أيضًا إذا كان مستوى الثقة 99% فإن مستوى المعنوية $\alpha = 1\%$

ومن هذه الخيارات الثلاثة، يعتبر مستوى الثقة 95% هو الأكثر انتشارًا لأنه يؤمن التوازن الأنسب بين الدقة الموضحة من خلال طول فترة الثقة والدقة الموضحة من خلال مستوى الثقة.

تذكر:

المتوسط الحسابي لعينة = مجموع قيم البيانات / عدد البيانات

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

الانحراف المعياري لعينة:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}}$$

تذكر:

المتوسط الحسابي للمجتمع

$$\mu = \frac{\Sigma x_i}{N}$$

الانحراف المعياري للمجتمع:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\overline{x})^2}{N}}$$

169

في المثال (1)

يستخدم الطالب جدول التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى ثقة 95%.

أرشد الطلاب في البحث عن العدد 0.4750 لإيجاد قيمة $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ وليتعرفوا كيفية التعامل مع الجدول.

ملاحظة: في حالة عدم وجود العدد في الجدول نأخذ أقرب قيمتين له وتكون القيمة الحرجة هي المتوسط الحسابي للقيمة المناظرة لهاتين القيمتين.

في المثال (2)

يوجد الطالب هامش الخطأ ثم فترة الثقة ويفسرها باستخدام مستوى الثقة 95% لعينة مكونة من 40 شخصًا حيث الانحراف المعياري 12.5 و $\overline{x} = 76.3$ علمًا أن الانحراف المعياري للمجتمع الإحصائي معلوم.

ذكّر الطلاب بأن فترة الثقة هي $(\overline{x} - E\ ,\ \overline{x} + E)$.

تأكد من أن الطلاب قادرين على تفسير فترة الثقة. اطلب إلى بعضهم إعادة صياغة التفسير الموجودة في كتاب الطالب ص 172.

في المثال (3)

تطبيق مباشر لمفهوم هامش الخطأ وفترة الثقة بمعلومية حجم العينة ومتوسطها الحسابي وتباينها علمًا أن تباين المجتمع الإحصائي غير معلوم.

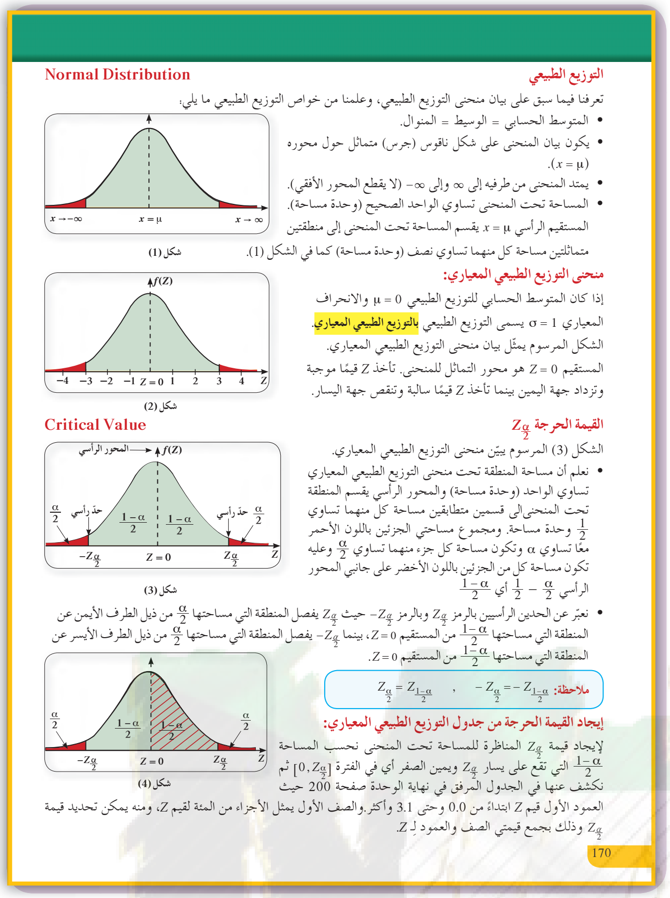
ناقش مع الطلاب تفسير فترة الثقة.

في المثال (4)

ألفت انتباه الطلاب إلى أن حجم العينة $n = 25 < 30$ وأن التباين للمجتمع الإحصائي غير معلوم لذا يجب استخدام توزيع t ودرجة الحرية 24 لحساب هامش الخطأ وفترة الثقة. لاحظ أن $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{0.025} = 2.064$

اطلب إلى الطلاب العمل على أمثلة بديلة لإيجاد $t_{\frac{\alpha}{2}}$ على جدول التوزيع t.

شدّد على الحالات التي يتم فيها استخدام $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ $(n > 30)$ وأيضاً على الحالات التي يتم فيها استخدام $t_{\frac{\alpha}{2}}$ $(n \leq 30)$.



التوزيع الطبيعي Normal Distribution

تعرفنا فيما سبق على بيان منحنى التوزيع الطبيعي، وعلمنا من خواص التوزيع الطبيعي ما يلي:

- المتوسط الحسابي = الوسيط = المنوال.
- يكون بيان المنحنى على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول محوره $(x = \mu)$.
- يمتد المنحنى من طرفيه إلى ∞ وإلى $-\infty$ (لا يقطع المحور الأفقي).
- المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح (وحدة مساحة).

المستقيم الرأسي $x = \mu$ يقسم المساحة تحت المنحنى إلى منطقتين متماثلتين مساحة كل منهما تساوي نصف (وحدة مساحة) كما في الشكل (1).

شكل (1)

منحنى التوزيع الطبيعي المعياري:

إذا كان المتوسط الحسابي للتوزيع الطبيعي $\mu = 0$ والانحراف المعياري $\sigma = 1$ يسمى التوزيع الطبيعي **بالتوزيع الطبيعي المعياري**.

الشكل المرسوم يمثّل بيان منحنى التوزيع الطبيعي المعياري.

المستقيم $Z = 0$ هو محور التماثل للمنحنى. تأخذ Z قيمًا موجبة وتزداد جهة اليمين بينما تأخذ Z قيمًا سالبة وتنقص جهة اليسار.

شكل (2)

القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ Critical Value

الشكل (3) المرسوم يبيّن منحنى التوزيع الطبيعي المعياري.

- نعلم أن مساحة المنطقة تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري تساوي الواحد (وحدة مساحة) والمحور الرأسي يقسم المنطقة تحت المنحنى إلى قسمين متطابقين مساحة كل منهما تساوي $\frac{1}{2}$ وحدة مساحة. ومجموع مساحتي الجزئين باللون الأحمر معًا تساوي α وتكون مساحة كل جزء منهما تساوي $\frac{\alpha}{2}$ وعليه تكون مساحة كل من الجزئين باللون الأخضر على جانبي المحور الرأسي $\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}$ أي $\frac{1-\alpha}{2}$
- نعبّر عن الحدين الرأسيين بالرمز $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ وبالرمز $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ حيث $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ يفصل المنطقة التي مساحتها $\frac{\alpha}{2}$ من ذيل الطرف الأيمن عن المنطقة التي مساحتها $\frac{1-\alpha}{2}$ من المستقيم $Z = 0$، بينما $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ يفصل المنطقة التي مساحتها $\frac{\alpha}{2}$ من ذيل الطرف الأيسر عن المنطقة التي مساحتها $\frac{1-\alpha}{2}$ من المستقيم $Z = 0$.

شكل (3)

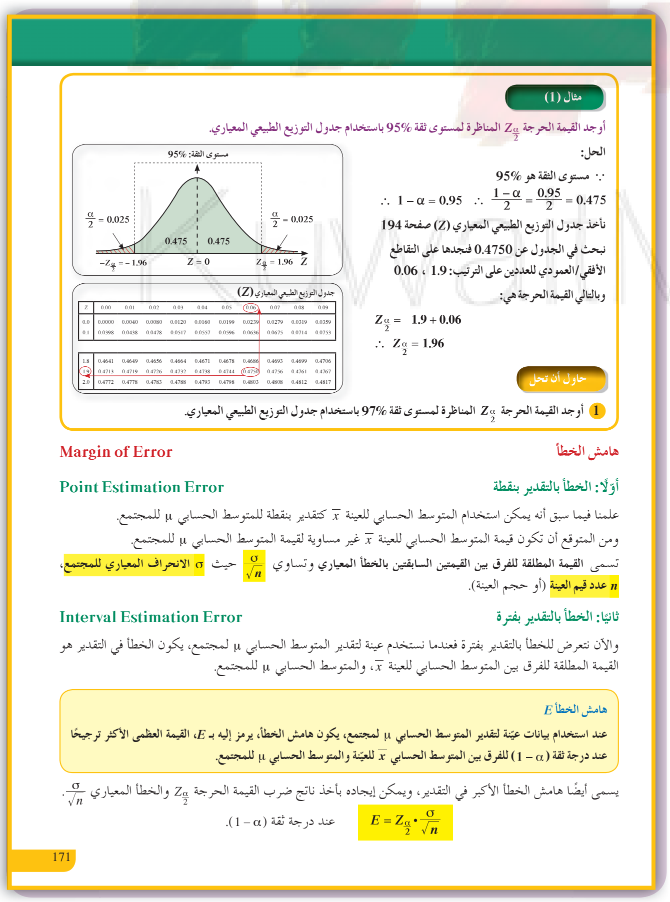
ملاحظة: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$ ، $-Z_{\frac{\alpha}{2}} = -Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$

إيجاد القيمة الحرجة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

لإيجاد قيمة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة للمساحة تحت المنحنى نحسب المساحة $\frac{1-\alpha}{2}$ التي تقع على يسار $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ ويمين الصفر أي في الفترة $[0, Z_{\frac{\alpha}{2}}]$ ثم نكشف عنها في الجدول المرفق في نهاية الوحدة صفحة 200 حيث العمود الأول قيم Z ابتداءً من 0.0 وحتى 3.1 وأكثر. والصف الأول يمثل الأجزاء من المئة لقيم Z، ومنه يمكن تحديد قيمة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ وذلك بجمع قيمتي الصف والعمود لـِ Z.

شكل (4)

170



مثال (1)

أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى ثقة 95% باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

الحل:

$\because$ مستوى الثقة هو 95%

$\therefore\ 1 - \alpha = 0.95 \quad \therefore\ \frac{1-\alpha}{2} = \frac{0.95}{2} = 0.475$

نأخذ جدول التوزيع الطبيعي المعياري (Z) صفحة 194

نبحث في الجدول عن 0.4750 فنجدها على التقاطع الأفقي/العمودي للعددين على الترتيب: 1.9 ، 0.06

وبالتالي القيمة الحرجة هي:

$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.9 + 0.06$

$\therefore\ Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

جدول التوزيع الطبيعي المعياري (Z)

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817

حاول أن تحل

1. أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى ثقة 97% باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

هامش الخطأ Margin of Error

أوّلًا: الخطأ بالتقدير بنقطة Point Estimation Error

علمنا فيما سبق أنه يمكن استخدام المتوسط الحسابي للعينة $\overline{x}$ كتقدير بنقطة للمتوسط الحسابي μ للمجتمع.

ومن المتوقع أن تكون قيمة المتوسط الحسابي للعينة $\overline{x}$ غير مساوية لقيمة المتوسط الحسابي μ للمجتمع.

تسمى **القيمة المطلقة للفرق بين القيمتين السابقتين بالخطأ المعياري** وتساوي $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ حيث σ **الانحراف المعياري للمجتمع**، n **عدد قيم العينة** (أو حجم العينة).

ثانيًا: الخطأ بالتقدير بفترة Interval Estimation Error

والآن نتعرض للخطأ بالتقدير بفترة فعندما نستخدم عينة لتقدير المتوسط الحسابي μ لمجتمع، يكون الخطأ في التقدير هو القيمة المطلقة للفرق بين المتوسط الحسابي للعينة $\overline{x}$، والمتوسط الحسابي μ للمجتمع.

هامش الخطأ E

عند استخدام بيانات عيّنة لتقدير المتوسط الحسابي μ لمجتمع، يكون هامش الخطأ، يرمز إليه بـ E، القيمة العظمى الأكثر ترجيحًا عند درجة ثقة $(1 - \alpha)$ للفرق بين المتوسط الحسابي $\overline{x}$ للعيّنة والمتوسط الحسابي μ للمجتمع.

يسمى أيضًا هامش الخطأ الأكبر في التقدير، ويمكن إيجاده بأخذ ناتج ضرب القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ والخطأ المعياري $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ عند درجة ثقة $(1 - \alpha)$.

171

6 الربط

يوفّر المثالان (2)، (3) فرصة للطلاب للتعرف على كيفية استخدام فترة الثقة في مواقف حياتية.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في استخدام جدول التوزيع الطبيعي، وجدول التوزيع t لإيجاد القيم الحرجة، لهذا أعطهم أمثلة أخرى لتخطئ هذه المشكلة.

8 التقييم

من المهم جدًّا متابعة عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لمعرفة مدى قدرتهم على فهم واستيعاب المطلوب منهم وحلّه.

اختبار سريع

1 عينة عشوائية حجمها 40 متوسطها الحسابي $\overline{x} = 15$ وتباينها 20 باستخدام مستوى ثقة 95%.

(a) أوجد هامش الخطأ. $E \approx 1.386$

(b) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ. $(13.614 , 16.386)$

(c) فسّر فترة الثقة.

عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه $(n = 40)$ وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي.

2 عينة عشوائية حجمها $n = 21$ متوسطها الحسابي: $\overline{x} = 25$ وتباينها $S^2 = 16$. استخدم مستوى معنوية 5% لإيجاد:

(a) هامش الخطأ.

σ غير معلوم، $n = 21 < 30$: نستخدم توزيع t، $S = 4$

درجات الحرية: $n - 1 = 21 - 1 = 20$

مستوى الثقة: $1 - \alpha = 1 - 0.05 = 0.95$

نوجد: $\frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025$

من جدول التوزيع t تكون قيمة $t_{0.0250} = 2.086$

هامش الخطأ: $E = 2.086 \times \frac{4}{5} = 1.6688$

(b) فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي.

فترة الثقة: $(\overline{x} - E \ , \ \overline{x} + E)$

$= (23.3312 \ , \ 26.6688)$

وحتى يكون الخطأ في التقدير أقل ما يمكن يجب أن تتحقق المتباينة:

$$|\overline{x} - \mu| < E$$

أي أن: $|\mu - \overline{x}| < E$

$$-E < \mu - \overline{x} < E$$

$$\overline{x} - E < \mu < \overline{x} + E$$

وعليه تكون فترة الثقة هي: $(\overline{x} - E \ , \ \overline{x} + E)$

التقدير بفترة الثقة للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي

Confidence Interval Estimation for the Mean Value μ of Statistical Population

أوّلًا: إذا كان التباين σ^2 للمجتمع معلوم

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي (μ , σ^2) حيث تباينه σ^2 معلوم وحجم العينة $n > 30$ أو $n \leq 30$ فإن تقدير فترة الثقة $(1 - \alpha)$ للمتوسط الحسابي μ هو:

$$(\overline{x} - E \ , \ \overline{x} + E)$$

حيث $\overline{x}$ المتوسط الحسابي للعينة، E هامش الخطأ.

وتسمى القيمتان $\overline{x} - E \ , \ \overline{x} + E$ **طرفي فترة الثقة**.

ملاحظة: عند إيجاد فترة الثقة $(1 - \alpha)$ سنكتفي بدرجة الثقة 95% والتي تناظرها القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ (من جدول التوزيع الطبيعي المعياري).

الخطوات المتبعة لإيجاد فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ

إذا كانت σ^2 معلومة و $n > 30$ أو $n \leq 30$.

1. نوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لدرجة ثقة 95% وهي 1.96
2. نوجد هامش الخطأ $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$، حيث σ هي الانحراف المعياري للمجتمع.
3. نوجد فترة الثقة $(\overline{x} - E \ , \ \overline{x} + E)$.

تفسير فترة الثقة

عند اختيار عينات عشوائية مختلفة متساوية في الحجم (n) وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95% من فترات الثقة هذه تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع (μ).

فمثلًا عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه (n) وفي كل مرة نحسب $\overline{x}$ وفترة الثقة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحوي μ الحقيقية و5 فترات لا تحويها.

172

تمرَّنْ 4−1

التقدير

Estimation

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ لكل من درجات الثقة التالية، وذلك باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

(a) 97% **(b)** 99.2%

(2) قامت شركة عالميّة بدراسة لمعرفة مدى أداء سياراتها، فأخذت عينة من 1 000 سيارة. استنتجت أن المتوسط الحسابي لبقاء السيارة في حالة جيدة هو 5 سنوات. أوجد فترة الثقة للمعلمة μ عند درجة ثقة 95%، علمًا أن التباين σ^2 معلوم ويساوي 0.25 وآخذًا بالاعتبار أن المجتمع يتبع توزيعًا طبيعيًّا.

(3) عينة عشوائية حجمها $n = 13$، أعطت $\overline{x} = 30$، $\sigma = 3.5$. أوجد فترة الثقة عند درجة ثقة 95% لمعلمة المجتمع μ المجهولة علمًا أن المجتمع يتبع توزيعًا طبيعيًّا. هل تتضمن هذه الفترة المتوسط الحسابي μ؟

(4) إذا كان المتوسط الحسابي لعينة من 40 شخصًا هو $\overline{x} = 172.5$ والانحراف المعياري $\sigma = 119.5$.

فأوجد تقديرًا لفترة ثقة عند درجة ثقة 95% للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي.

(5) في دراسة للمدّة الزمنيّة المطلوبة من طلاب جامعيين لإنهاء دراستهم، اختير عشوائيًّا 80 طالبًا، فكان متوسط السنوات لهذه العينة (سنوات) $\overline{x} = 4.8$، والانحراف المعياري لهذه العينة $S = 2.2$.

أوجد فترة الثقة عند درجة ثقة 95% لمعلمة المجتمع μ.

(6) عينة عشوائية حجمها $n = 16$ أُخذت من مجتمع إحصائي حيث التباين $S^2 = 15$، وعلم أن المتوسط الحسابي $\overline{x} = 13$.

أوجد فترة الثقة للمعلمة المجهولة μ عند درجة ثقة 95%.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمرينين (1−2)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة و (b) إذا كانت الإجابة خاطئة.

(1) إن القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ لدرجة الثقة 96% هي 2.054 (a) (b)

(2) إذا أخذنا عينة من 225 هاتفًا، ووجدنا أنّ متوسط صلاحية استخدامها $\overline{x}$ هو 1.7 سنة، والانحراف المعياري $S = 0.5$، ودرجة الثقة 95% فنجد أن فترة الثقة هي: $2.63 < \mu < 2.76$ (a) (b)

71

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

كلا، ليس من الضرورة أن يكون المتوسط الحسابي مشتركًا بين كل أشهر السنة بعدد الرحلات الجوية من مطار الكويت.

أفضل وسيلة هي التقدير بفترة.

«حاول أن تحل»

1 $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17$

2 (1) $E = 1.4112$

(2) $(16.9888 \ , \ 19.8112)$

(3) عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه $n = 25$ وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي.

مثال (3)

عينة عشوائية حجمها 36، فإذا كان المتوسط الحسابي للعينة 60 وتباينها 16، باستخدام مستوى ثقة 95%:

1 أوجد هامش الخطأ.

2 أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

3 فسّر فترة الثقة.

الحل:

حجم العينة: $n = 36$, المتوسط الحسابي: $\bar{x} = 60$

التباين: $S^2 = 16$ ، الانحراف المعياري: $S = 4$

1 $\because$ مستوى الثقة 95%

$$\therefore \ Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

$\because$ σ^2 غير معلوم ، $n > 30$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{36}} = 1.3066$$

$\therefore$ هامش الخطأ ≈ 1.3067

2 فترة الثقة هي:

$$(\bar{x}-E \ , \ \bar{x}+E) = (60 - 1.3067 \ , \ 60 + 1.3067) = (58.6933 \ , \ 61.3067)$$

3 عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه $(n = 36)$ وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقّع أن 95 فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع μ.

حاول أن تحل

3 أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 81$ ومتوسطها الحسابي $\bar{x} = 50$، وانحرافها المعياري $S = 9$، باستخدام مستوى ثقة 95%.

1 أوجد هامش الخطأ.

2 أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

3 فسّر فترة الثقة.

ثالثًا: إذا كان التباين σ^2 للمجتمع غير معلوم وحجم العينة $n \leqslant 30$

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي تباينه σ^2 غير معلوم وحجم العينة $n \leqslant 30$ فإن توزيع العينة لا يؤول إلى التوزيع الطبيعي وفي هذه الحالة يلزمنا استخدام توزيع آخر هو توزيع t **للعينات الصغيرة** التي حجمها $n \leqslant 30$ ويكون تقدير فترة الثقة $(1 - \alpha)$ للمتوسط الحسابي μ هو $(\bar{x} - E \ , \ \bar{x} + E)$.

حيث $\bar{x}$ المتوسط الحسابي للعينة، E هامش الخطأ.

174

مثال (2)

أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل النبض لديهن فإذا كان حجم عينة الإناث $n = 40$ والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 12.5$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 76.3$. باستخدام مستوى ثقة 95%

1 أوجد هامش الخطأ.

2 أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

3 فسّر فترة الثقة.

الحل:

1 $\because$ مستوى الثقة 95%

$\therefore$ القيمة الحرجة: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

نلاحظ أن σ معلومة $\quad \therefore \ E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\bar{x} = 76.3 \quad , \quad \sigma = 12.5 \quad , \quad n = 40 \ \because$

هامش الخطأ: $\quad E = 1.96 \times \frac{12.5}{\sqrt{40}}$

$E \approx 3.87379$

$\therefore$ هامش الخطأ ≈ 3.8738

2 فترة الثقة هي:

$$(\bar{x}-E \ , \ \bar{x}+E) = (76.3 - 3.8738 \ , \ 76.3 + 3.8738) = (72.4262 \ , \ 80.1738)$$

3 عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه $(n = 40)$ وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقّع أن 95 فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع μ.

حاول أن تحل

2 من المثال (2) إذا أجريت الدراسة على عينة أخرى من الإناث حجمها 25 والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 3.6$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 18.4$

باستخدام مستوى ثقة 95%

1 أوجد هامش الخطأ.

2 أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

3 فسّر فترة الثقة.

ثانيًا: إذا كان التباين σ^2 للمجتمع غير معلوم وحجم العينة $n > 30$

الخطوات المتبعة لإيجاد فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ

1 نوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لدرجة ثقة 95% وهي 1.96

2 نوجد هامش الخطأ $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ ، حيث S هي الانحراف المعياري للعينة.

3 نوجد فترة الثقة $(\bar{x} - E \ , \ \bar{x} + E)$.

173

في التمارين (9–3)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(3) إنّ القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ لدرجة الثقة 96.6% هي:

ⓐ 2.12 ⓑ 2.17 ⓒ 21.2 ⓓ 21%

(4) أخذت عينة عشوائية من مجتمع توزيعه طبيعي وكانت فترة الثقة للمعلمة μ هي $(10.932 \ , \ 14.068)$ فإن قيمة μ ممكن أن تكون:

ⓐ 9.15 ⓑ 15.1 ⓒ 11.23 ⓓ 16.078

(5) المتوسط الحسابي لدرجات 9 طلاب هو $\bar{x} = 2.76$ حيث النهاية العظمى 4 درجات والانحراف المعياري $S = 0.87$. إنّ فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي عند درجة ثقة 95% هي:

ⓐ (2.1916 , 3.3284) ⓑ (1.6232 , 3.8968)

ⓒ (2.1916 , 3.8968) ⓓ (1.6232 , 3.3284)

(6) لنفترض أن متوسط مجتمع إحصائي يقع ضمن الفترة $62.84 < \mu < 69.46$ مع انحراف معياري 6.50

إذا تمّ استخدام عينة من 100 فرد فمتوسط هذه العينة يساوي:

ⓐ 56.34 ⓑ 62.96 ⓒ 6.62 ⓓ 66.15

(7) إن حجم العينة المطلوبة لتقدير المتوسط الحسابي للمجتمع مع هامش خطأ وحدتين، ومستوى ثقة 95%، وانحراف معياري للمجتمع $\sigma = 8$ يساوي:

ⓐ 65 ⓑ 62 ⓒ 8 ⓓ 26

(8) أنجز 16 طالبًا في كلية الطب قياس ضغط الدم لدى الشخص نفسه فحصلوا على النتائج التالية:

134، 138، 130، 135، 120، 125، 120، 130، 135، 144، 143، 140، 130، 150، 140، 130

على افتراض أن الانحراف المعياري للمجتمع الإحصائي $\sigma = 10 \text{ mm Hg}$ فإن فترة الثقة عند درجة ثقة 95% للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي هي:

ⓐ (129.1 , 131.55) ⓑ (129.1 , 138.9)

ⓒ (131.55 , 136.45) ⓓ (136.45 , 138.9)

(9) تتقارب قيمتي Z , t المتناظرة في جدول التوزيع الطبيعي المعياري إذا زادت درجات الحرية عن:

ⓐ 29 ⓑ 28 ⓒ 27 ⓓ 26

72

3 **(1)** $E = 1.96$

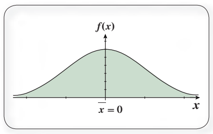
(2) $(48.04\ ,\ 51.96)$

(3) عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه $n = 81$ وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي.

4 $(8.2187\ ,\ 8.5813)$

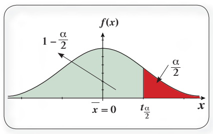
خواص التوزيع t — Properties of t Distribution

1. توزيع متماثل حول متوسطه الحسابي والذي يساوي صفرًا، ويمتد إلى ∞ من جهة اليمين وإلى $-\infty$ من جهة اليسار ويزداد قربًا من الصفر في الجهتين.



2. انحرافه المعياري أكبر من الواحد.
3. يعتمد هذا التوزيع على درجات الحرية والتي تساوي (حجم العينة $- 1$) أي $(n - 1)$.
4. التوزيع t يشبه التوزيع الطبيعي إلّا أن قمته أكثر انخفاضًا من التوزيع الطبيعي.
5. كلما زادت درجات الحرية اقترب هذا التوزيع من التوزيع الطبيعي ويقترب انحرافه المعياري إلى الواحد الصحيح.

إيجاد القيمة الحرجة من جدول توزيع t



لإيجاد القيمة الحرجة من جدول توزيع t حيث يبيّن العمود الأول قيم درجات الحرية $(n - 1)$ وتبدأ من 1 إلى 30 وأكثر والصف الأول يمثّل قيم $\frac{\alpha}{2}$ ومنه يمكن تحديد $t_{\frac{\alpha}{2}}$. لاحظ أن:

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

هامش الخطأ للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي (في حالة σ^2 غير معلوم، $n \le 30$)

Margin of Error for Mean Value of Statistical Population where σ^2 is not known and $n \le 30$

$$E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

حيث S الانحراف المعياري للعينة

فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي (في حالة σ^2 غير معلوم، $n \le 30$)

Confidence Interval for Mean Value of Statistical Population where σ^2 is not known and and $n \le 30$

$$(\overline{x} - E\ ,\ \overline{x} + E)$$

الخطوات المتبعة لإيجاد فترة الثقة للمتوسط الحساب μ إذا كانت σ^2 غير معلومة، $n \le 30$:

1. نوجد درجات الحرية $(n - 1)$.
2. نوجد القيمة الحرجة $t_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لدرجة ثقة 95% من جدول توزيع t.
3. نوجد هامش الخطأ $E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$
4. نوجد فترة الثقة $(\overline{x} - E\ ,\ \overline{x} + E)$.

175

مثال (4)

أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 25$، فإذا كان الانحراف المعياري للعينة (S) يساوي 10 ومتوسطها الحسابي $(\overline{x})$ يساوي 15، استخدم مستوى ثقة 95% لإيجاد:

1. هامش الخطأ.
2. فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

الحل:

1. $\because$ σ^2 غير معلوم ، $n \le 30$

$\therefore$ نستخدم توزيع t.

$\because\ n = 25$

$\therefore$ درجات الحرية: $n - 1 = 25 - 1 = 24$

$\because$ مستوى الثقة: $1 - \alpha = 95\%$

$\therefore\ 1 - \alpha = 0.95 \Longrightarrow \alpha = 0.050$

$\therefore\ \frac{\alpha}{2} = 0.025$

من جدول توزيع t تكون قيمة $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{0.025}$ مناظرة للعدد 2.064

هامش الخطأ $E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$

$= 2.064 \times \frac{10}{\sqrt{25}}$

$\therefore$ هامش الخطأ $= 4.128$

2. فترة الثقة: $(\overline{x} - E\ ,\ \overline{x} + E)$

$= (15 - 4.128\ ,\ 15 + 4.128)$

$= (10.872\ ,\ 19.128)$

حاول أن تحل

4. أوجد فترة ثقة 95% للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ علمًا أن العينة أخذت من مجتمع طبيعي.

إذا كان لدينا $n = 13$ ، $S = 0.3$ ، $\overline{x} = 8.4$

176

4-2: اختبارات الفروض الإحصائية

1 الأهداف

- إيجاد القيمة الحرجة.
- إيجاد مستوى المعنوية.
- إيجاد درجة المعنوية.
- طرح الفروض الإحصائية (فرض العدم – الفرض البديل).
- اختبار الفروض الإحصائية.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

الفرض الإحصائي – المقياس الإحصائي – اختبارات الفروض الإحصائية – فرض العدم – الفرض البديل.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) ما القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ لمستويات الثقة: 80% , 90% , 95%؟

(b) ما الفرق بين مستوى الثقة ومستوى المعنوية؟

(c) متى يستخدم التوزيع t؟ ومتى يستخدم التوزيع الطبيعي؟

(d) ما درجات الحرّية؟

5 التدريس

في هذا الدرس يتعلّم الطالب كيفية وضع فروض واتخاذ القرارات المناسبة على ضوء نتائج الحسابات الّتي سيقوم بها.

وضّح أنّ الفرض هو ادّعاء أو تصريح حول خاصيّة ما للمجتمع ولاختبار صحّة هذا الادّعاء علينا القيام بعدّة خطوات متسلسلة:

(a) وضع الفروض H_0 ، H_1 المناسبة.

(b) احتساب القيمة Z أو t (الاختبار الإحصائي).

(c) إيجاد الفترة المناسبة.

(d) اتخاذ قرار :
- رفض فرض العدم
- عدم رفض فرض العدم

4-2

اختبارات الفروض الإحصائية

Statistical Hypotheses Testing

سوف تتعلم
- القيمة الحرجة.
- مستوى المعنوية.
- درجة المعنوية.
- الفروض.
- اختبار الفروض.
- فرض العدم.
- الفرض البديل.

المفردات والمصطلحات:
- الفرض الإحصائي Statistic Hypothesis
- المقياس الإحصائي Statistical Scale
- اختبارات الفروض الإحصائية Statistical Hypotheses Testing
- فرض العدم Null Hypothesis
- الفرض البديل Alternative Hypothesis

دعنا نفكر ونتناقش

ينتج مصنع نوعًا معينًا من المعلبات مسجّل على العلبة أن الوزن الصافي 200 g. فإذا تمّ أخذ عينة حجمها 100 علبة وتمّ حساب المتوسط الحسابي لأوزان هذه العينة فوجد أنه 197.3 g ، فهل يمكن الحكم على هذا المصنع بأنه يقوم بغش تجاري؟ ما هي حيثيات هذا الحكم؟

نحن نعلم أنه في كثير من الأحيان وفي مواقف معينة نحتاج إلى اتخاذ قرار بناء على معلومات محددة وحيثيات معقولة لها مبررها، لذلك دعت الضرورة إلى دراسة ما يسمى بالفرض الإحصائي واختبارات الفروض الإحصائية.

تعريف: الفرض الإحصائي Statistic Hypothesis

هو ادعاء معيّن مبني على حيثيات معقولة حول معلمة من معالم المجتمع مثل المتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ.

تعريف: المقياس الإحصائي

هو قيمة وحيدة محسوبة من العينة تحت شروط معينة.

تعريف: اختبارات الفروض الإحصائية (اختبار المعنوية)

هي طريقة معيارية لاختبار ادعاء ما حول معلمة من معالم المجتمع.

ملاحظة: سنكتفي في هذا الموضوع بدراسة معلمة واحدة من معالم المجتمع وهي المتوسط الحسابي μ.

إليك بعض الأمثلة عن الفروض التي يمكن اختبارها من خلال الطرق التي سنطوّرها في هذا الدرس. على سبيل المثال:

- **في إدارة الأعمال:** تدّعي إحدى الصحف في مقال لها أنّ معظم الموظّفين يجدون عملًا عن طريق وكالات التوظيف.
- **في الطب:** يدّعي باحثون في الطبّ أنّ متوسّط درجة حرارة جسم أي بالغ معافى ليست 37°C.

177

- **في سلامة الطيران المدنيّ:** تدّعي إدارة الطيران المدني في الكويت أن متوسط وزن المسافر (مع حقائبه) يتعدّى الوزن المسموح منذ عشرين سنة والبالغ 84 kg

فرض العدم والفرض البديل Null and Alternative Hypothesis

- فرض العدم (H_0): يفيد بأنّ قيمة معلمة المجتمع (مثل المتوسّط الحسابي μ) تساوي قيمة مزعومة.
  نختبر فرض العدم مباشرة أي نفترض بأنّه صحيح ونتوصّل إلى خلاصة برفض أو عدم رفض H_0.
- الفرض البديل (H_1): يفيد بأن للمعلمة قيمة تختلف نوعًا ما عن فرض العدم (H_0).
- يضم الشكل الرمزي للفرض البديل أحد هذه الرموز: $<$ أو $>$ أو $\neq$
  وستقتصر دراستنا على الحالة ($\neq$). فمثلًا: $H_1 : \mu \neq 98.6$, $H_0 : \mu = 98.6$

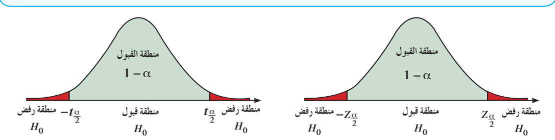
الخطوات المتبعة لإجراء اختبار الفروض الإحصائية:

1. صياغة الفروض الإحصائية (فرض العدم H_0 والفرض البديل H_1).
2. التحقق من الانحراف المعياري σ للمجتمع (معلوم أم غير معلوم) وتحديد حجم العينة (n) ومن ثم إيجاد المقياس الإحصائي للاختبار (Z أو t)، (مسترشدًا بالجدول التالي):

الانحراف المعياري (σ)	المقياس الإحصائي (Z أو t)	حجم العينة (n)
معلوم	$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	لا يشترط حجم معين للعينة
غير معلوم	$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	$n > 30$
	$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	$n \leq 30$

3. تحديد مستوى المعنوية α وحساب القيمة الجدولية $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري أو القيمة الجدولية $t_{\frac{\alpha}{2}}$ من جدول t ذي درجات حرية.
4. تحديد منطقة القبول: $(-Z_{\frac{\alpha}{2}} , Z_{\frac{\alpha}{2}})$ أو $(-t_{\frac{\alpha}{2}} , t_{\frac{\alpha}{2}})$ كما هو موضّح بالشكل.
5. اتخاذ القرار الإحصائي (قبول فرض العدم) أو (رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل).

ملاحظة: ستقتصر دراستنا على مستوى ثقة 95%.



178

في المثال (1)

في هذا المثال يدرك الطالب متى عليه استخدام المقياس الإحصائي Z أو المقياس الإحصائي t (عند معرفة الانحراف المعياري σ نستخدم Z)، وأن القيمة الجدوليّة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ تستخرج من الجدول للتوزيع الطبيعي المعياري كما في الدرس السابق.

شدّد للطلاب على ضرورة الانتباه ما إذا كانت القيمة المعطاة هي تباين أو انحراف معياري.

ذكّرهم بأن الانحراف المعياري $= \sqrt{\text{التباين}}$

في المثالين (2), (3)

يرتكز هذان المثالان على قبول فرض العدم أو الفرض البديل.

يطبّق الطلاب في المثالين الخطوات اللازمة بالتسلسل.

شدّد لهم على ضرورة الانتباه إلى الفرق بين مستوى المعنويّة ومستوى الثقة، وأن حدّي الفترة ما هما إلّا القيمة الجدولية ومعكوسها الجمعي، وأن القيمة Z أو t يمكن أن تكون سالبة، عندما يكون المتوسط الحسابي للعينة أصغر من قيمة الفرض.

6 الربط

الأمثلة (3)، (2)، (1)، تسمح للطالب التعرف على مجالات استخدام اختبارات الفروض الإحصائية في المواقف الحياتية.

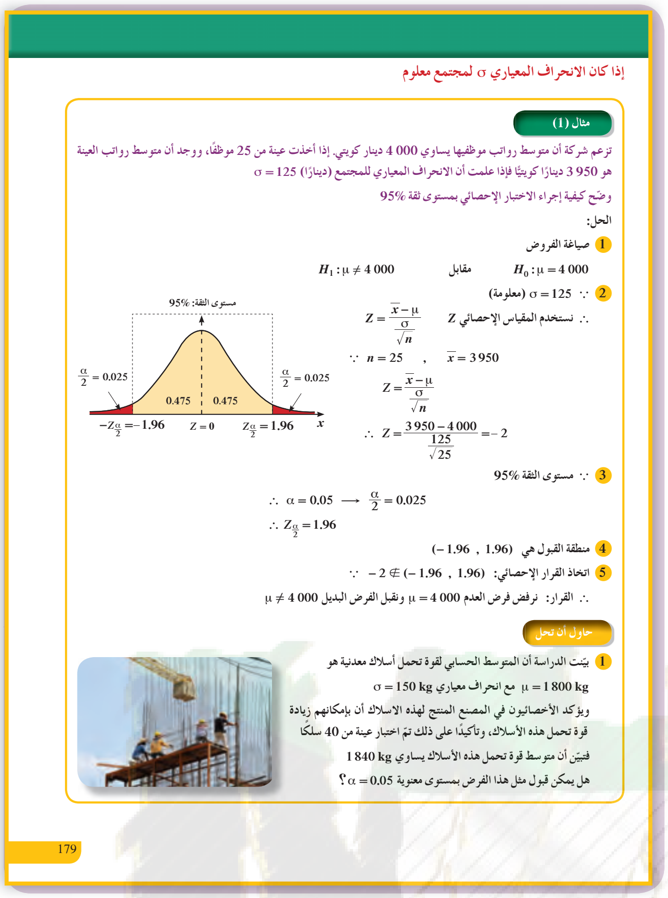
7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

من الأخطاء الشائعة جدًّا التي قد يرتكبها الطلاب تفسير القرار إن كان من جهة رفض أو عدم رفض فرض العدم.

شدّد للطلاب على ضرورة الانتباه دائمًا إلى هذه الفروض والعودة إلى فقرة «فرض العدم والفرض البديل» وفقرة «الخطوات المتبعة لإجراء اختبار الفروض الإحصائية» في كتاب الطالب لتجنب ارتكابها.

8 التقييم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل»، للتأكد من أنّهم يتبعون الخطوات جميعها بالتسلسل الصحيح للوصول إلى النتيجة النهائية.



إذا كان الانحراف المعياري σ لمجتمع معلوم

مثال (1)

تزعم شركة أن متوسط رواتب موظفيها يساوي 4 000 دينار كويتي. إذا أخذت عينة من 25 موظفًا، ووجد أن متوسط رواتب العينة هو 3 950 دينارًا كويتيًّا فإذا علمت أن الانحراف المعياري للمجتمع (دينارًا) $\sigma = 125$

وضّح كيفية إجراء الاختبار الإحصائي بمستوى ثقة 95%

الحل:

1 صياغة الفروض

$H_0 : \mu = 4\,000$ مقابل $H_1 : \mu \neq 4\,000$

2 $\because$ $\sigma = 125$ (معلومة)

$\therefore$ نستخدم المقياس الإحصائي Z $\quad Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

$\because \; n = 25 \quad , \quad \bar{x} = 3\,950$

$$Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\therefore \; Z = \dfrac{3\,950 - 4\,000}{\frac{125}{\sqrt{25}}} = -2$$

3 $\because$ مستوى الثقة 95%

$\therefore \; \alpha = 0.05 \longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

$\therefore \; Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

4 منطقة القبول هي $(-1.96 \; , \; 1.96)$

5 اتخاذ القرار الإحصائي: $(-1.96 \; , \; 1.96) \notin -2 \; \because$

$\therefore$ القرار: نرفض فرض العدم $\mu = 4\,000$ ونقبل الفرض البديل $\mu \neq 4\,000$

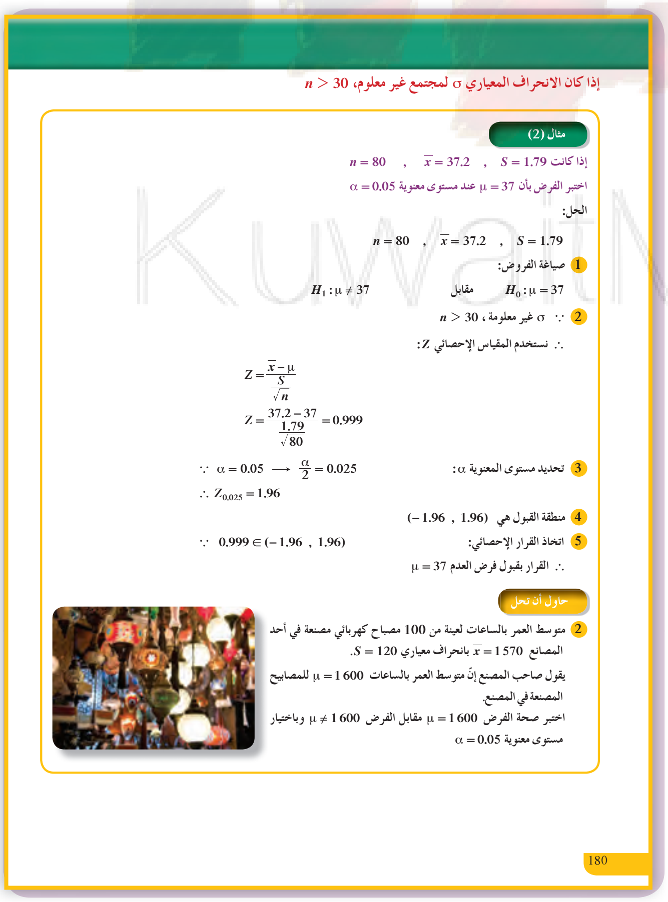
حاول أن تحل

1 بيّنت الدراسة أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل أسلاك معدنية هو $\mu = 1\,800$ kg مع انحراف معياري $\sigma = 150$ kg

ويؤكد الأخصائيون في المصنع المنتج لهذه الاسلاك أن بإمكانهم زيادة قوة تحمل هذه الأسلاك، وتأكيدًا على ذلك تمّ اختبار عينة من 40 سلكًا فتبيّن أن متوسط قوة تحمل هذه الأسلاك يساوي 1 840 kg

هل يمكن قبول مثل هذا الفرض بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$؟

179



إذا كان الانحراف المعياري σ لمجتمع غير معلوم، $n > 30$

مثال (2)

إذا كانت $S = 1.79 \quad , \quad \bar{x} = 37.2 \quad , \quad n = 80$

اختبر الفرض بأن $\mu = 37$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

الحل:

$S = 1.79 \quad , \quad \bar{x} = 37.2 \quad , \quad n = 80$

1 صياغة الفروض:

$H_0 : \mu = 37$ مقابل $H_1 : \mu \neq 37$

2 $\because$ σ غير معلومة ، $n > 30$

$\therefore$ نستخدم المقياس الإحصائي Z:

$$Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$Z = \dfrac{37.2 - 37}{\frac{1.79}{\sqrt{80}}} = 0.999$$

3 تحديد مستوى المعنوية α: $\quad \because \; \alpha = 0.05 \longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

$\therefore \; Z_{0.025} = 1.96$

4 منطقة القبول هي $(-1.96 \; , \; 1.96)$

5 اتخاذ القرار الإحصائي: $\quad \because \; 0.999 \in (-1.96 \; , \; 1.96)$

$\therefore$ القرار بقبول فرض العدم $\mu = 37$

حاول أن تحل

2 متوسط العمر بالساعات لعينة من 100 مصباح كهربائي مصنعة في أحد المصانع $\bar{x} = 1\,570$ بانحراف معياري $S = 120$.

يقول صاحب المصنع إنّ متوسط العمر بالساعات $\mu = 1\,600$ للمصابيح المصنعة في المصنع.

اختبر صحة الفرض $\mu = 1\,600$ مقابل الفرض $\mu \neq 1\,600$ وباختيار مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

180

اختبار سريع

❶ **(a)** لدينا: $n = 400\ ,\ \overline{x} = 18\ ,\ \sigma^2 = 36$

ما قيمة Z إذا $\mu = 16.6$؟

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{18 - 16.6}{\frac{6}{\sqrt{400}}} = 4.\overline{6}$$

(b) لمستوى ثقة 95%، ضع فرض العدم، والفرض البديل، واتخذ القرار المناسب.

$H_0: \mu = 16.6$ مقابل $H_1: \mu \neq 16.6$

$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ و $4.\overline{6}$ لا تقع على الفترة $(-1.96\ ,\ 1.96)$

إذًا نرفض فرض العدم، $\mu \neq 16.6$

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

تتنوّع إجابات الطلاب تحقق منها.

إذا كان الانحراف المعياري σ لمجتمع غير معلوم، $n \leq 30$

مثال (3)

يعتقد مدير شركة دراسات إحصائية أن متوسط الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة يساوي 290 دينارًا كويتيًا.
فإذا أخذت عينة عشوائية من 10 منازل تبيّن أن متوسطها الحسابي (دينارًا) $\overline{x} = 283$ وانحرافها المعياري (دينارًا) $S = 32$.
فهل يمكن الاعتماد على هذه العينة لتأكيد ما افترضه؟
استخدم مستوى ثقة 95% (علمًا بأن المجتمع يتبع توزيعًا طبيعيًا).

الحل:

$n = 10 \quad , \quad \overline{x} = 283 \quad , \quad S = 32$

1 صياغة الفروض

$H_0: \mu = 290$ مقابل $H_1: \mu \neq 290$

2 σ غير معلومة، $10 < 30 \quad , \quad n = 10$

∴ نستخدم المقياس الإحصائي t :

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$t = \frac{283 - 290}{\frac{32}{\sqrt{10}}}$$

$$t \approx -0.6917$$

3 $n = 10$ ∵ درجات الحرية: $n - 1 = 10 - 1 = 9$

مستوى الثقة 95% $\quad 1 - \alpha = 0.95$

$\alpha = 0.05 \longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

من جدول توزيع t $\quad \therefore\ t_{0.025} = 2.262$

4 منطقة القبول هي $(-2.262\ ,\ 2.262)$

5 اتخاذ القرار الإحصائي: $\because\ -0.6917 \in (-2.262\ ,\ 2.262)$

∴ القرار بقبول فرض العدم $\mu = 290$

حاول أن تحل

3 في المثال (3)، إذا أجريت دراسة إحصائية أخرى على المدينة ذاتها وتبيّن من خلالها أن $S = 5\ ,\ \overline{x} = 296$ لعينة من 10 منازل مع استخدام درجة الثقة نفسها.
فهل يبقى افتراض المدير عند الشركة صحيحًا أم لا؟ وضّح إجابتك.

181

تمرَّنْ 4-2

اختبارات الفروض الإحصائية
Statistical Hypotheses Testing

المجموعة A تمارين مقالية

(1) يزعم أستاذ مادة الرياضيات أن المتوسط الحسابي لدرجات الطلّاب في مادتّه هو 16 حيث النهاية العظمى 20 درجة. إذا أعطت عيّنة من 25 طالبًا متوسطًا حسابيًا (درجة) $\overline{x} = 15$، والانحراف المعياري (درجة) $\sigma = 1.4$، فاختبر فرضية الأستاذ عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$.

(2) يزعم مسؤول في متجر لبيع الأدوات الكهربائيّة، أنّ متوسّط الأسعار هو 300 دينار. أعطت عينة من 49 آلة (دينارًا) $\overline{x} = 280$ والانحراف المعياري معلوم (دينارًا) $\sigma = 40$. تأكّد من فرضيّة المسؤول عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$.

(3) في عينة من مجتمع إحصائي إذا كانت قيمة $\overline{x} = 40$، والانحراف المعياري $S = 7$، اختبر الفرض إذا $\mu = 35$ مقابل الفرض البديل $\mu \neq 35$ عند مستوى المعنوية 0.05 في الحالات التالية:

(a) حجم العينة $n = 50$.

(b) حجم العينة $n = 20$.

(4) في دراسة لعدد ساعات استخدام الحاسوب، أُخذت عيّنة من 100 شخص يعملون في مختلف المجالات، فوجد أن المتوسط الحسابي لعدد ساعات استخدام الحاسوب هو $\overline{x} = 4.5$، والانحراف المعياري $S = 1$.

اختبر الفرض إذا كان متوسّط عدد الساعات للمجتمع هو $\mu = 5$، مقابل الفرض البديل $\mu \neq 5$ عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$.

(5) أُخذت عيّنة عشوائية من مجتمع قيد الدراسة حجمها $n = 150$، فوجد أن المتوسّط الحسابي للعينة $\overline{x} = 30.3$ مع انحراف معياري $S = 6.5$. اختبر الفرض إذا كان المتوسّط الحسابي للمجتمع هو $\mu = 30$، مقابل الفرض البديل $\mu \neq 30$ عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$.

(6) المتوسط الحسابي للراتب السنوي لموظف حكومي في دولة الكويت هو 9 600 دينار، أما المتوسط الحسابي لعينة من 64 موظفًا حكوميًا في إحدى الدول الخليجية المجاورة (دينارًا) $\overline{x} = 9\,480$ مع انحراف معياري (دينارًا) $S = 640$. اختبر إذا كان بالإمكان اعتبار الراتب السنوي في إحدى الدول الخليجية المجاورة للموظف الحكومي هو الراتب ذاته الذي يحصل عليه الموظف الحكومي في الكويت، مستخدمًا درجة الثقة 95%.

73

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة و (b) إذا كانت الإجابة خاطئة.

(1) في مجتمع إحصائي إذا كان المتوسط الحسابي $\mu = 860$ وعينة من هذا المجتمع حجمها $n = 25$ والمتوسط الحسابي $\overline{x} = 900$ والانحراف المعياري $S = 125$.
فإن المقياس الإحصائي هو: $Z = 1.6$ (a) (b)

(2) متوسط العمر لعينة من 100 مصباح كهربائيّ بالساعات في أحد المصانع هو $\overline{x} = 1600$ بانحراف معياري $S = 125$. يقول صاحب المصنع أن متوسط عمر المصابيح بالساعات هو $\mu = 1640$. إن المقياس الإحصائي هو $Z = 3.2$ (a) (b)

(3) متوسط عمر الإطارات في أحد المصانع $\mu = 25\,000$، في دراسة لعينة عشوائية تبيّن أن المتوسط الحسابي هو $\overline{x} = 27\,000$ مع انحراف معياري $S = 5\,000$.
إذا كان المقياس الإحصائي $Z = 2$ فإنّ حجم العينة: $n = 25$ (a) (b)

(4) أخذت عينة عشوائية من مجتمع إحصائي حجمها $n = 81$ مع متوسط حسابي $\overline{x} = 3.6$ وانحراف معياري $S = 1.8$. إذا كان المقياس الإحصائي $Z = -1.5$ فإن المتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي $\mu = 3.3$ (a) (b)

في التمارين (5–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) إذا كان القرار رفض فرض العدم، وفترة الثقة $(-1.96\ ,\ 1.96)$ فإن قيمة الاختبار Z ممكن أن تكون:

(a) 1.5 (b) −2.5
(c) 1.87 (d) −1.5

(6) إذا كانت قيمة الاختبار الإحصائي $Z = -1.5$ وفترة القبول $(-1.96\ ,\ 1.96)$ فإن القرار يكون:

(a) رفض فرض العدم (b) قبول فرض العدم
(c) قبول الفرض البديل (d) Z لا تنتمي للفترة

(7) في دراسة حول متوسط الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة هو (دينارًا) $\mu = 320$ وقد تبيّن أن المتوسط الحسابي لعينة حجمها $n = 25$ منزلًا من هذه المدينة هو (دينارًا) $\overline{x} = 310$ مع انحراف معياري $S = 40$. إن المقياس الإحصائي هو:

(a) 1.25 (b) −1.25
(c) 0.8 (d) −0.8

74

«حاول أن تحل»

1. $Z = 1.687$

منطقة القبول $(-1.96\ ,\ 1.96)$

$1.687 \in (-1.96\ ,\ 1.96)$

$\therefore$ القرار بقبول فرض العدم، $\mu = 1800$

2. $Z = -2.5 \notin (-1.96 , 1.96)$

$\therefore$ نرفض فرض العدم، $H_0 : \mu = 1600$

3. $t = 3.795 \notin (-2.262\ ,\ 2.262)$

$\therefore$ نرفض فرض العدم، $\mu = 290$

(8) في دراسة على عينة أسلاك معدنية حجمها $n = 64$ تبيّن أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل السلك $\overline{x} = 360\text{ kg}$ مع انحراف معياري $S = 50\text{ kg}$ إذا كان المقياس الإحصائي لقوة تحمل كافة الأسلاك المعدنية المصنعة $Z = -2.4$ فإنّ المتوسط الحسابي μ هو:

(a) 345 (b) 395 (c) 375 (d) 325

(9) هدف إحدى الشركات الكبرى هو ربح صاف متوسطه الحسابي (دينار) $\mu = 200\,000$ في كل فرع من فروعها المنتشرة في عدد من الدول. في دراسة لعينة من عدد لهذه الفروع أعطت متوسطًا حسابيًّا (دينارًا) $\overline{x} = 195\,000$ مع انحراف معياري (دينارًا) $S = 80$ إذا كان المقياس الإحصائي $Z = -0.625$ فإنّ حجم العينة n هو:

(a) 100 (b) 125 (c) 90 (d) 110

(10) في دراسة لمجتمع إحصائي تبيّن أنّ متوسطه الحسابي $\mu = 125$ أخذت عينة من هذا المجتمع حجمها $n = 36$ فتبيّن أن متوسطها الحسابي $\overline{x} = 130$. إذا كان المقياس الإحصائي $Z = 3.125$ فإنّ الانحراف المعياري σ هو:

(a) -9.6 (b) 6.9 (c) 9.6 (d) -6.9

75

4–3: الارتباط والانحدار

1 الأهداف

- تعرف مفهوم الارتباط وأنواعه.
- رسم مخطط الانتشار.
- تعرف مُعامل الارتباط الخطي r.
- إيجاد مُعامل ارتباط بيرسون.
- تعرف الانحدار.
- إيجاد معادلة خط الانحدار.
- التنبؤ.
- التقدير باستخدام معادلة الانحدار.
- إيجاد مقدار الخطأ.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

الارتباط – ارتباط طردي – ارتباط عكسي – مُعامل الارتباط الخطي – الانحدار – معادلة خط الانحدار – التنبؤ – مقدار الخطأ.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

ارسم مخطط الانتشار الذي يوضح البيانات التالية:

(a)

x	3	4	5	6	7	8
y	1.1	1.5	2	2.2	2.3	2.8

(b)

x	15	14	15	13	14	15
y	1	6	4	2	3	5

ماذا تلاحظ في العلاقة بين x ، y وعلى كل مخطط انتشار؟


4–3

الارتباط والانحدار

Correlation and Regression

سوف تتعلم
- مفهوم الارتباط وأنواعه.
- رسم مخطط الانتشار.
- إيجاد مُعامل الارتباط الخطي.
- خواص مُعامل الارتباط.
- إيجاد مُعامل ارتباط بيرسون.
- مفهوم الانحدار.
- إيجاد معادلة خط الانحدار.
- تنبؤ قيمة أحد المتغيرين.
- التقدير باستخدام معادلة خط الانحدار.
- التنبؤ.
- إيجاد مقدار الخطأ.

المفردات والمصطلحات:
- الارتباط Correlation
- ارتباط طردي Positive Correlation
- ارتباط عكسي Negative Correlation
- مُعامل الارتباط الخطي Linear Correlation Coefficient
- الانحدار Regression
- معادلة خط الانحدار Regression Line Equation
- التنبؤ Prediction
- مقدار الخطأ Error Value

دعنا نفكر ونتناقش

هل تساءلت يومًا: كيف تحسب العلاقة بين الطول والوزن؟
ما الذي يربط بين التدخين والإصابة بمرض السرطان؟
كيف نجد رابطًا بين وزن سيارة واستهلاكها للوقود؟
كيف يتغيّر سعر الذهب مع تغير قيمة الدولار الأمريكي؟
وما هي أفضل وسيلة للتقدير لنقترب من الحقيقة؟

أوّلًا: الارتباط Correlation

من دراستنا السابقة تمّ عرض بعض المقاييس الإحصائية مثل مقاييس النزعة المركزية (المتوسط الحسابي – الوسيط – المنوال) ومقاييس التشتت (المدى – التباين – الانحراف المعياري).

نلاحظ أن هذه المقاييس كانت تصف شكل البيانات التي تمّ جمعها من ظاهرة إحصائية واحدة أي من متغير واحد والذي يمكن الحصول عليه من العينة. بينما يقابلنا في حياتنا العملية مواقف كثيرة تتضمن متغيرين (ظاهرتين) أو أكثر ويكون تساؤلنا: هل هناك علاقة بين هذه المتغيرات؟ وما هو شكل هذه العلاقة؟ وأيضًا كيف يمكن التنبؤ بقيمة أحد هذين المتغيرين إذا علم قيمة المتغير الآخر؟ وكثيرًا ما يرى الباحثون ضرورة دراسة العلاقة بين متغيرين (ظاهرتين) كما يتضح من الأمثلة التالية.

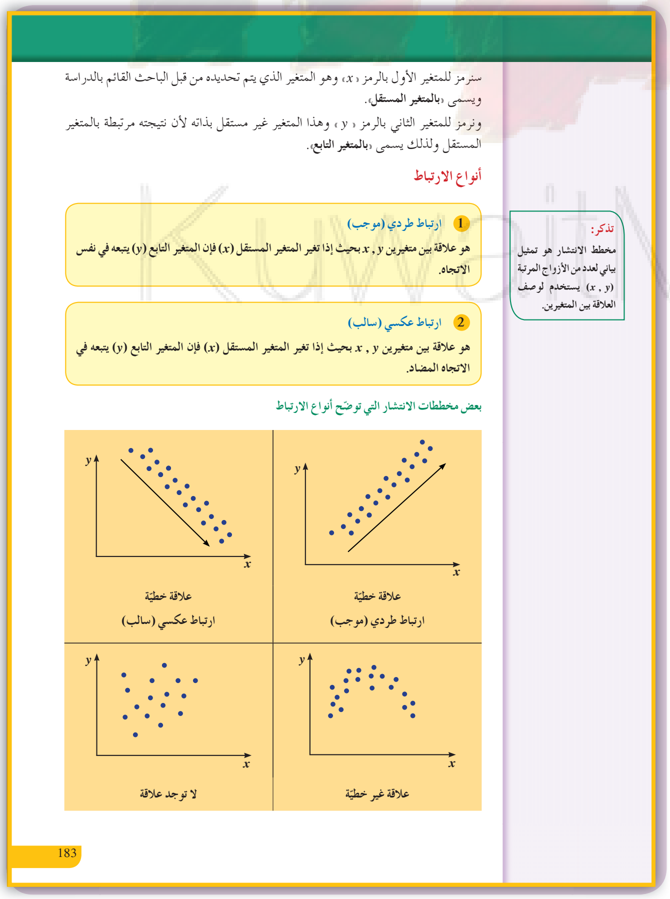
- الطول والوزن.
- التدخين والإصابة بمرض السرطان.
- وزن سيارة واستهلاكها للوقود.
- الإنفاق والدخل.
- سعر السلعة والكمية المعروضة منها.
- العمر وضغط الدم.

والأمثلة في هذا المجال كثيرة ومتعددة ولدراسة العلاقة بين هذه الظواهر ندرس ما يسمى الارتباط.

تعريف

الارتباط هو العلاقة بين متغيرين.

182


سنرمز للمتغير الأول بالرمز «x» وهو المتغير الذي يتم تحديده من قبل الباحث القائم بالدراسة ويسمى «**بالمتغير المستقل**».

ونرمز للمتغير الثاني بالرمز «y» وهذا المتغير غير مستقل بذاته لأن نتيجته مرتبطة بالمتغير المستقل ولذلك يسمى «**بالمتغير التابع**».

أنواع الارتباط

1 ارتباط طردي (موجب)

هو علاقة بين متغيرين y , x بحيث إذا تغير المتغير المستقل (x) فإن المتغير التابع (y) يتبعه في نفس الاتجاه.

2 ارتباط عكسي (سالب)

هو علاقة بين متغيرين y , x بحيث إذا تغير المتغير المستقل (x) فإن المتغير التابع (y) يتبعه في الاتجاه المضاد.

تذكر: مخطط الانتشار هو تمثيل بياني لعدد من الأزواج المرتبة (x , y) يستخدم لوصف العلاقة بين المتغيرين.

بعض مخططات الانتشار التي توضّح أنواع الارتباط

183

5 التدريس

يجب البدء بتعريف الارتباط على أنه نوع العلاقة بين متغيرين والتوضيح للطلاب أنه لا يجب الاكتفاء بالقول أنّه يوجد ارتباط بل يجب قياسه ورؤيته باستخدام قواعد موضحة في هذا الدرس.

ذكّر الطلاب بأنهم في هذا الدرس سوف يتعلمون فقط الارتباط الخطي.

وضّح للطلاب أن في الدراسات الإحصائية، لا يكفي تبيان العلاقة بين متغيّر وآخر، لأن الأهم هو إمكانية تنبؤ قيم لا نعرفها لمتغيّر، من خلال البيانات المعطاة.

والمعادلة التي تسمح بتوقّع هذه القيم تسمّى معادلة الانحدار وتتمثّل بـ $\widehat{y} = b_0 + b_1 x$.

تستخدم فقط هذه المعادلة إذا ما كانت العلاقة الخطيّة موجودة بين المتغيرين.

تبيّن مخططات الانتشار المختلفة كيف يكون توزيع البيانات عندما تكون العلاقة خطيّة، طرديّة، غير خطيّة أو غير موجودة.

مثال (1)

البيانات التالية تبيّن العلاقة بين عمر الشخص وعدد ساعات التمرينات الرياضية التي يقوم بها:

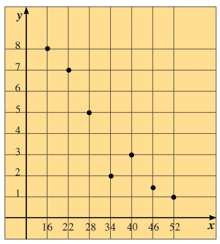
العمر (x)	16	22	28	34	40	46	52
عدد ساعات التمرينات (y)	8	7	5	2	3	$1\frac{1}{2}$	1

a ارسم مخطط الانتشار.

b حدّد نوع العلاقة.

الحل:

a



b العلاقة خطيّة عكسية.

حاول أن تحل

1 ارسم مخطط الانتشار للبيانات التالية وحدّد نوع العلاقة التي تعبر عنها:

x	2	6	5	2	7	3	4	7	5
y	2	3	1	4	1	5	3	4	5

مُعامل الارتباط الخطي Linear Correlation Coefficient

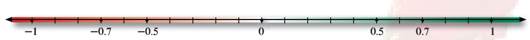
تعلم أن الاستنتاجات المبنيّة على المعاينات البصريّة لمخطط الانتشار هي نسبيّة بامتياز، لذا فنحن بحاجة إلى قياسات أكثر دقة وموضوعية بالتالي نستخدم مُعامل الارتباط الخطّي (r).

تعريف

مُعامل الارتباط الخطّي (r) هو عبارة عن مقياس عددي لقوّة العلاقة بين متغيّرين يمثّلان بيانات كمّية، حيث $-1 \le r \le 1$

184

خواص مُعامل الارتباط (r)



1 $-1 \le r \le 1 \quad , \quad r \in [-1, 1]$

2 إذا كانت $r = 1$ يكون الارتباط طردي (موجب) تام.

3 إذا كانت $r = -1$ يكون الارتباط عكسي (سالب) تام.

4 إذا كانت $r = 0$ ينعدم الارتباط.

5 إذا كانت $r \in [0.7, 1)$ يكون الارتباط طردي (موجب) قوي.

6 إذا كانت $r \in [0.5, 0.7)$ يكون الارتباط طردي (موجب) متوسط.

7 إذا كانت $r \in (0, 0.5)$ يكون الارتباط طردي (موجب) ضعيف .

8 إذا كانت $r \in (-0.5, 0)$ يكون الارتباط عكسي (سالب) ضعيف.

9 إذا كانت $r \in [-0.5, -0.7)$ يكون الارتباط عكسي (سالب) متوسط.

10 إذا كانت $r \in [-0.7, -1)$ يكون الارتباط عكسي (سالب) قوي.

مُعامل ارتباط بيرسون r: Pearson Correlation Coefficient r:

$$r = \frac{\Sigma(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{nS_x \cdot S_y}$$

حيث: (الانحراف المعياري للمتغير x) ...... $= S_x = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\overline{x})^2}{n}}$

(الانحراف المعياري للمتغير y) ...... $= S_y = \sqrt{\frac{\Sigma(y-\overline{y})^2}{n}}$

$$r = \frac{\Sigma(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\overline{x})^2}\,\sqrt{\Sigma(y-\overline{y})^2}}$$

مثال (2)

احسب مُعامل الارتباط الخطي للبيانات التالية وحدّد نوعه وقوة الارتباط.

x	1	2	3	4	5
y	3	5	7	9	11

الحل:

مُعامل الارتباط:

$$r = \frac{\Sigma(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\overline{x})^2}\,\sqrt{\Sigma(y-\overline{y})^2}}$$

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = 3 \quad , \quad \overline{y} = \frac{\Sigma y}{n} = 7$$

185

في المثال (1)

الهدف رسم مخطط الانتشار من خلال بيانات جدول ثم تحديد نوع العلاقة. العلاقة خطية عكسية وتعني أن عدد ساعات التمرينات الرياضية يقل مع ازدياد العمر.

في المثالين (3) ,(2)

حساب مُعامل الارتباط الخطي من خلال بيانات جدول وتحديد نوع الارتباط وقوته. في المثال (2) الارتباط طردي تام ($r = 1$)، وفي المثال (3) الارتباط عكسي ضعيف.

في المثالين (5) ,(4)

يجب استخدام بيانات الجدول لإيجاد معادلة خط الانحدار، ثم إيجاد قيمة y بمعلومية x مع حساب مقدار الخطأ.

$$r = \frac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}\ \sqrt{n(\Sigma y^2) - (\Sigma y)^2}}$$

$$r = \frac{6 \times 109 - 21 \times 32}{\sqrt{6 \times 91 - (21)^2}\ \sqrt{6 \times 188 - (32)^2}}$$

$$r = \frac{-18}{\sqrt{105} \times \sqrt{104}}$$

$r \approx -0.172$ ارتباط عكسي (سالب) ضعيف

حاول أن تحل

3 احسب مُعامل الارتباط الخطي للبيانات التالية وبيّن نوعه وقوته:

x	1	2	3	4	5	6
y	98	99	75	40	100	150

ثانيًا: الانحدار Regression

سوف نتعلّم وصف العلاقة بين متغيّرين بإيجاد معادلة الخط المستقيم الممثّل لهذه العلاقة.
يسمّى هذا الخط المستقيم **بخط الانحدار**، وتسمّى معادلته **بمعادلة خط الانحدار**.

تعريف

الانحدار هو وصف العلاقة بين متغيرين.

تعريف

معادلة خط الانحدار: هي المعادلة الخطية التي يمكن من خلالها التنبؤ بقيم أحد المتغيرين إذا علمت قيمة المتغير الآخر.

سبق لنا دراسة معادلة الخط المستقيم على الصورة: $y = b_1x + b_0$ حيث b_1 ترمز إلى ميل هذا المستقيم، $|b_0|$ ترمز إلى طول الجزء المقطوع من محور الصادات.

في الإحصاء توجد طرق متعددة لإيجاد معادلة خط انحدار مستقيم والتي تساعدنا في التنبؤ بقيمة أحد المتغيرين ومنها الطريقة التالية:

تعريف

$\widehat{y} = b_0 + b_1x$، حيث $|b_0|$ ترمز إلى طول الجزء المقطوع من محور الصادات، b_1 ترمز إلى ميل المستقيم.

حيث: $b_0 = \overline{y} - b_1\overline{x}$, $b_1 = \dfrac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}$

حيث: $\overline{x} = \dfrac{\Sigma x}{n}$, $\overline{y} = \dfrac{\Sigma y}{n}$

187

	x	y	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})^2$	$(y-\overline{y})^2$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
	1	3	−2	−4	4	16	8
	2	5	−1	−2	1	4	2
	3	7	0	0	0	0	0
	4	9	1	2	1	4	2
	5	11	2	4	4	16	8
المجموع	$\Sigma x = 15$	$\Sigma y = 35$			$\Sigma(x-\overline{x})^2 = 10$	$\Sigma(y-\overline{y})^2 = 40$	$\Sigma(x-\overline{x})(y-\overline{y}) = 20$

$$\therefore\ r = \frac{20}{\sqrt{10} \times \sqrt{40}} = 1$$

نوع الارتباط: طردي (موجب) تام.

حاول أن تحل

2 احسب مُعامل الارتباط الخطي للبيانات التالية وحدّد نوعه وقوة الارتباط:

x	1	2	3	4	5
y	1	−1	−4	−6	−5

صيغة أخرى لمعامل ارتباط بيرسون

$$r = \frac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}\ \sqrt{n(\Sigma y^2) - (\Sigma y)^2}}$$

مثال (3)

احسب مُعامل الارتباط الخطي للمتغيرين التاليين وبيّن نوعه وقوته.

x	1	2	3	4	5	6
y	4	7	8	3	5	5

الحل:

$n = 6$

	x	y	$x\,y$	x^2	y^2
	1	4	4	1	16
	2	7	14	4	49
	3	8	24	9	64
	4	3	12	16	9
	5	5	25	25	25
	6	5	30	36	25
المجموع	$\Sigma x = 21$	$\Sigma y = 32$	$\Sigma xy = 109$	$\Sigma x^2 = 91$	$\Sigma y^2 = 188$

186

وهذا ما يسمى **بطريقة المربعات الصغرى** التي تتلخص خطواتها فيما يلي:

1 تعيين قيمة b_1
2 تعيين قيمة b_0
3 نكتب معادلة خط الانحدار: $\widehat{y} = b_0 + b_1x$
4 التنبؤ بقيمة y إذا علمت قيمة x
5 تحديد مقدار الخطأ في التنبؤ

مقدار الخطأ = |القيمة الجدولية − القيمة التي تحقق معادلة الانحدار|
مقدار الخطأ = $|y_x - \widehat{y}_x|$

مثال (4)

باستخدام البيانات التالية لقيم y , x:

x	1	3	5	7	9
y	2	5	9	10	14

أوجد:

a معادلة خط الانحدار.
b قيمة y عندما $x = 10$
c مقدار الخطأ عندما $x = 5$

الحل:

a

	x	y	$x\,y$	x^2
	1	2	2	1
	3	5	15	9
	5	9	45	25
	7	10	70	49
	9	14	126	81
المجموع	$\Sigma x = 25$	$\Sigma y = 40$	$\Sigma xy = 258$	$\Sigma x^2 = 165$

$n = 5$, $\overline{x} = \dfrac{\Sigma x}{n} = \dfrac{25}{5} = 5$, $\overline{y} = \dfrac{\Sigma y}{n} = \dfrac{40}{5} = 8$

$$b_1 = \frac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2} = \frac{5 \times 258 - 25 \times 40}{5 \times 165 - 25 \times 25} = 1.45$$

$b_0 = \overline{y} - b_1\overline{x} = 8 - 1.45 \times 5 = 0.75$

$\therefore$ معادلة خط الانحدار هي: $\widehat{y} = b_0 + b_1x = 0.75 + 1.45x$

b عندما $x = 10$ فإن:

$$y = 0.75 + 1.45 \times 10 = 15.25$$

188

6 الربط

المثالان (5) ,(1)، يبيّنان المواقف الحياتية الّتي يمكن أن يستخدم فيها الارتباط وقياسه.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

من المهم ألا يخلط الطلاب بين Σx^2 و $(\Sigma x)^2$، لذا يجب إعطاء الطلاب أمثلة حسابيّة متعددة لتخطي هذه المشكلة.

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يحلون فقرات «حاول أن تحل»، وركّز على تفسيرهم للإجابات.

اختبار سريع

1 احسب مُعامل الارتباط الخطي للبيانات التالية وبيّن نوعه وقوته:

x	13.5	14	12	11	15	13
y	7	7.5	8	9	10	7

$\Sigma x^2 = 1037.25$, $\Sigma x = 78.5$

$(\Sigma x)^2 = 6162.25$

$\Sigma y^2 = 399.25$, $\Sigma y = 48.5$

$(\Sigma y)^2 = 2352.25$

$\Sigma xy = 635.5$, $n = 6$

$r \approx 0.11$ الارتباط طردي ضعيف

2 من الجدول التالي:

x	12	15	15.5	14	10	9
y	30	33	35	33	25	25

(a) أوجد معادلة خط الانحدار

$\widehat{y} = 1.5719x + 10.3870$

(b) أوجد قيمة $\widehat{y}$ عندما $x = 13$ $\widehat{y} = 30.8217$

(c) أوجد مقدار الخطأ عند $x = 10$

من الجدول: $y_{10} = 25$

من المعادلة الخطية: $\widehat{y}_{10} = 26.1060$

مقدار الخطأ: 1.1060

---

c من الجدول $y = 9$

من المعادلة: $\widehat{y} = 0.75 + 1.45 \times 5 = 8$

∴ مقدار الخطأ: $|y_5 - \widehat{y}_5| = |9 - 8| = 1$

حاول أن تحل

4 من الجدول التالي:

x	4	5	8	9	10	12
y	2	4	5	8	6	11

أوجد:

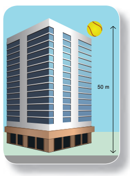
a معادلة خط الانحدار.

b قيمة y عندما $x = 10$

c مقدار الخطأ عندما $x = 10$

مثال (5)

سقطت كرة من ارتفاع 50 m، وتمّ تسجيل المسافات (بالمتر) التي قطعتها هذه الكرة كل 0.5 s لمدة ثلاث ثوان. فأتت النتائج كما يوضح الجدول التالي:



الوقت (x)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
المسافة (y)	0	1.2	4.9	11	19.5	30.5	44

a أوجد معادلة خط الانحدار.

b قدّر قيمة المسافة y عندما $x = 4$

c أوجد مقدار الخطأ في المسافة عندما $x = 2.5\text{ s}$

الحل:

a

	x	y	$x y$	x^2
	0	0	0	0
	0.5	1.2	0.6	0.25
	1	4.9	4.9	1
	1.5	11	16.5	2.25
	2	19.5	39	4
	2.5	30.5	76.25	6.25
	3	44	132	9
المجموع	$\Sigma x = 10.5$	$\Sigma y = 111.1$	$\Sigma xy = 269.25$	$\Sigma x^2 = 22.75$

$n = 7$, $\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{10.5}{7} = 1.5$, $\overline{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{111.1}{7} = 15.87$

$b_1 = \frac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2} = \frac{7 \times 269.25 - 10.5 \times 111.1}{7 \times 22.75 - (10.5)^2} = \frac{718.2}{49}$

$b_1 \approx 14.66$

$b_0 = \overline{y} - b_1\overline{x}$

$= 15.87 - 14.66 \times 1.5$

$= -6.12$

معادلة خط الانحدار هي: $\widehat{y} = b_0 + b_1 x = -6.12 + 14.66x$

b التنبؤ: $\because\ \widehat{y} = -6.12 + 14.66x$

∴ المسافة y عندما $x = 4$ هي:

$\widehat{y}_4 = -6.12 + 14.66 \times 4 = 52.52\text{ m}$

c مقدار الخطأ عند $x = 2.5\text{ s}$

من المعادلة: $\widehat{y} = -6.12 + 14.66x$

نجد أن: $\widehat{y}_{2.5} = -6.12 + 14.66 \times 2.5 = 30.53$

من الجدول عند $x = 2.5\text{ s}$

نجد أن: $y = 30.5\text{ s}$

∴ مقدار الخطأ: $|y_x - \widehat{y}_x|$

$= |30.5 - 30.53|$

$= 0.03$

حاول أن تحل

5 في الجدول التالي، المتغير x هو تكلفة إنتاج فيلم سينمائي (بملايين الدولارات) والمتغيّر y هو مردود هذا الفيلم.

التكلفة (x)	62	90	50	35	200	100	95
المردود (y)	65	64	48	57	601	146	47

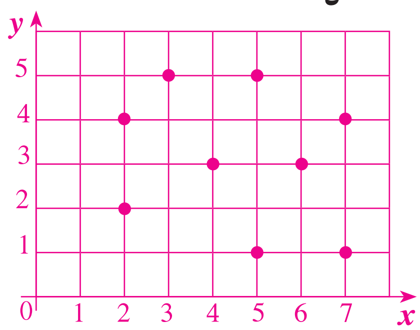
a أوجد معادلة خط الانحدار.

b قدّر مردود فيلم بلغت تكلفته 55 مليون دولار.

c أوجد مقدار الخطأ لفيلم بلغت تكلفته 90 مليون دولار.

«حاول أن تحل»

1



لا علاقة خطية.

2

$$r = \frac{-17}{\sqrt{10} \times \sqrt{34}} \approx -0.92$$

$$\approx -0.92$$

ارتباط عكسي قوي.

تمرَّنْ 4–3

الارتباط والانحدار
Correlation and Regression

المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (2–1)، أجب عن السؤالين التاليين:

(a) استخدم مخطط الانتشار لتوضح ما إذا كان هناك ارتباط خطي واضح بين x و y.

(b) أوجد قيم n، $\sum x$، $\sum x^2$، $(\sum x)^2$، $\sum xy$ ومُعامل الارتباط الخطي r.

(1)

x	2	3	5	5	10
y	6	9	14	16	30

(2)

x	2	3	5	5	10
y	6	0	15	5	2

في التمرينين (4–3)، أجب عن الأسئلة التالية:

(a) اصنع مخطط الانتشار.

(b) أوجد قيمة مُعامل الارتباط الخطي r.

(c) وضّح ما إذا كان هناك ارتباط خطي وثيق بين المتغيرين (استخدم فقط $\alpha = 0.05$).

(3) يوضّح الجدول أدناه وزن البلاستيك المستهلك x بالكيلوجرام (kg) من قبل عدد أفراد أسرة y.

وزن البلاستيك x(kg)	0.12	0.64	1	1.3	1	0.8	0.4	1.4
عدد أفراد الأسرة y	2	3	3	6	4	2	1	5

(4) توضح البيانات المزدوجة في الجدول أدناه وزن الأوراق x بالكيلوجرام (kg) التي تمّ التخلص منها وعدد أفراد الأسرة y.

وزن الأوراق x(kg)	1.1	3.4	4.3	4	3.9	3	3.1	5.2
عدد أفراد الأسرة y	2	3	3	6	4	2	1	5

في التمرينين (6–5)، باستخدام البيانات التالية لقيم x و y أوجد:

(5)

x	1	2	4	5
y	3	5	9	11

(a) معادلة خط الانحدار.

(b) قيم y عندما $x = 7$.

(c) مقدار الخطأ عندما $x = 2$.

76

(6)

x	5	3	2	1	0	2
y	−2	0	1	2	3	1

(a) معادلة خط الانحدار.

(b) قيم y عندما $x = 8$.

(c) مقدار الخطأ عندما $x = 5$.

(7) باستخدام البيانات التالية لقيم x و y أوجد:

وزن البلاستيك x(kg)	0.12	0.64	1	1.3	1	0.8	0.4	1.4
عدد أفراد الأسرة y	2	3	3	6	4	2	1	5

(a) معادلة خط الانحدار.

(b) تنبؤ عدد أفراد الأسرة التي تتخلّص من 0.2 kg من البلاستيك.

(8) باستخدام البيانات التالية لقيم x و y أوجد:

وزن الأوراق x(kg)	1.1	3.4	4.3	4	3.9	3	3.1	5.2
عدد أفراد الأسرة y	2	3	3	6	4	2	1	5

(a) معادلة خط الانحدار.

(b) تنبؤ عدد أفراد الأسرة التي تتخلّص من 4.5 kg من الأوراق.

77

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة و (b) إذا كانت الإجابة خاطئة.

(1) الارتباط هو علاقة بين متغيرين. (a) (b)

(2) إذا كان r مُعامل الارتباط بين متغيرين فإن $-1 < r < 1$ (a) (b)

(3) إذا كان مُعامل الارتباط بين متغيرين $r = -1$ كان الارتباط تامًّا. (a) (b)

(4) الانحدار هو وصف العلاقة بين متغيرين. (a) (b)

(5) إذا كان مُعامل الارتباط $r = 0$ فإن الارتباط منعدم. (a) (b)

في التمارين (15–6)، لكل تمرين 4 خيارات واحد فقط منها صحيح. ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) قيمة مُعامل الارتباط (r) التي تجعل الارتباط طردي (موجب) تام بين المتغيرين x, y هي:

(a) −1 (b) −0.5 (c) 0.5 (d) 1

(7) إذا كانت قيمة مُعامل الارتباط (r) بين متغيرين حيث $r \in (-1, -0.5]$ فإن العلاقة:

(a) عكسية تامة (b) عكسية قوية
(c) طردية تامة (d) طردية قوية

(8) إذا كانت معادلة خط الانحدار للمتغيرين x, y هي $\widehat{y} = 5.5 + 3.4x$ فإن قيمة y المتوقعة عندما $x = 6$ هي:

(a) 0.5 (b) 6.8 (c) 29.98 (d) 25.9

(9) إذا كان مُعامل الارتباط بين متغيرين $r = 0.85$ فإن الارتباط يكون:

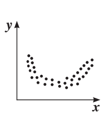
(a) طردي قوي (b) طردي ضعيف
(c) طردي متوسط (d) طردي تام

(10) إذا كانت معادلة خط الانحدار للمتغيرين x, y. هي $\widehat{y} = 1 + 1.4x$ فإن مقدار الخطأ عند $x = 5$ علمًا بأن القيمة الجدولية هي $y = 9$ يساوي:

(a) −1 (b) 1 (c) 17 (d) 8

(11) الشكل أدناه يمثل علاقة بين متغيرين x, y نوع هذه العلاقة هو:

(a) علاقة خطية طردية (b) علاقة خطية عكسية
(c) علاقة غير خطية (d) ليس أيّ مما سبق



78

3 $r \approx 0.3382$

ارتباط طردي ضعيف

4 **(a)** $\widehat{y} = -\,1.6522 + 0.9565x$

(b) $\widehat{y}_{10} = 7.9128$

(c) 1.9128

5 **(a)** $\widehat{y} = -\,163.6084 + 3.4387x$

(b) $\widehat{y}_{55} = 25.52$ (مليون دولار)

(c) 81.8747

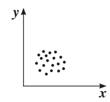
(12) من الجدول التالي:

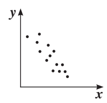
x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	23	18	17	14	10	6	5	1

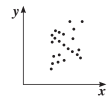
فإذا كانت معادلة خط الانحدار هي $\widehat{y} = -\,3.05x + 25.5$، فإن مقدار الخطأ عندما $x = 5$ يساوي:

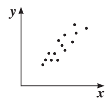
ⓐ 0.25 ⓑ -0.25 ⓒ 20.25 ⓓ 10.25

(13) الشكل الذي يمثل ارتباط عكسي قوي بين متغيرين x, y هو:

ⓐ 

ⓑ 

ⓒ 

ⓓ 

(14) قيمة مُعامل الارتباط لا يمكن أن تساوي:

ⓐ 0 ⓑ 1 ⓒ -0.5 ⓓ 1.5

(15) إذا كان مُعامل الارتباط بين المتغيرين x, y يساوي صفر فإن الارتباط يكون:

ⓐ قوي ⓑ ضعيف ⓒ منعدم ⓓ تام

79

اختبار الوحدة الرابعة

(1) أخذت عينة من 324 موظفًا حكوميًّا فتبيّن أن المتوسط الحسابي للكلفة الشهرية لانتقال الموظف من منزله إلى العمل بسيارته الخاصة ومن ثم العودة بسيارته أيضًا هو (دينارًا) $\overline{x} = 68.5$ والانحراف المعياري (دينارًا) $S = 11$.

(a) أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ لدرجة الثقة 93%.

(b) أوجد بنسبة 95% فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ للكلفة الشهرية لانتقال الموظف من منزله إلى العمل بسيارته ومن ثم العودة في المجتمع الإحصائي الذي أخذت منه هذه العينة.

(c) لقد افترض أحد الخبراء الاقتصاديين أن متوسط الكلفة الشهرية لانتقال الموظف الحكومي من منزله إلى العمل بسيارته الخاصة ومن ثم العودة هو (دينارًا) $\mu = 69.6$. استخدم فترة الثقة التي توصلت إليها في الجزء **(b)** لاختبار رفض أو عدم رفض الفرضية عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.

(d) إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع تحت الدراسة هو (دنانير) $\sigma = 9.5$، أوجد حجم العينة اللازم لإيجاد فترة ثقة بنسبة 95% للمتوسط الحسابي لكلفة النقل الشهري μ للموظف الحكومي بهامش خطأ لا يتجاوز الدينار الواحد.

(2) في مجتمع الزائرين لمجمع تجاري كبير، يعتبر الانحراف المعياري (دنانير) $\sigma = 8.16$ ما ينفقه كل زائر على مشترياته في الزيارة الواحدة.

(a) أوجد عدد القيم لأخذ عينة من مجتمع الزائرين للمجمع التجاري لإيجاد فترة ثقة بنسبة 95% للمتوسط الحسابي لما ينفقه كل زائر على مشترياته في الزيارة الواحدة بهامش خطأ لا يتجاوز 2 دينار.

(b) إذا أعطت العينة الحجم ذاته الذي أعطاه الجزء **(a)** من السؤال والمتوسط الحسابي (دينارًا) $\overline{x} = 25.5$ لما ينفقه كل زائر في الزيارة الواحدة، استنتج فترة الثقة بنسبة 95% للمتوسط الحسابي μ للمجتمع تحت الدراسة.

(3) في الجدول أدناه، المتغير المستقل x يمثّل سنوات الخبرة لموظف في شركة تجارية كبرى في وظيفة معينة، أما المتغير التابع y فيمثّل الأجر الشهري للموظف بمئات الدنانير، وn عدد الموظفين في العينة الذين يقومون بالوظيفة نفسها:

سنوات الخبرة x	2	4	5	7	9	10	4	5
الأجر الشهري y (بمئات الدنانير)	7.5	8.2	8	8.7	10.7	10.5	8.4	8.6

(a) ارسم مخطط الانتشار.

(b) أوجد قيم: $\sum xy\ ,\ (\sum x)^2\ ,\ \sum x^2\ ,\ \sum x\ ,\ n$.

80

المرشد لحل المسائل

إجابة «مسألة إضافية»

الفروض: $H_0 : \mu = 2\,000$ مقابل $H_1 : \mu \neq 2\,000$

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{2100 - 2000}{\frac{800}{\sqrt{100}}} = 1.25$$

فترة الثقة: $(-1.96\ ,\ 1.96)$

1.25 تقع على الفترة

إذًا نقبل فرض العدم

$H_0 : \mu = 2\,000$

إذًا كانت حملة هذه المؤسسة ناجحة.

المرشد لحل المسائل

نظرًا لأهميّة المياه بالنسبة إلى صحة الإنسان وحياته، قررت مؤسسة تعنى بذلك، القيام بحملة تهدف إلى التأكد من أن كل شخص يستهلك متوسط قدره 2 000 ml يوميًا من مياه الشرب.

في دراسة سابقة لعينة من 100 شخص، لاحظت المؤسسة أنّ المتوسط الحسابي للاستهلاك: $\overline{x} = 1850$ ml مع انحراف معياري $S = 900$ ml.

وفي دراسة جديدة لعينة من 100 شخص، وبعد القيام بحملتها، لاحظت أن المتوسط الحسابي للاستهلاك: $\overline{x} = 1900$ ml مع انحراف معياري $S = 300$ ml.

اعتقدت المؤسسة أنّ حملتها قد نجحت بما أنّ المتوسط الحسابي للاستهلاك قد ازداد 50 ml وقد اقترب كثيرًا من هدفها وهو 2 000 ml يوميًا للشخص الواحد.

هل المؤسسة على حق؟ اشرح.

الحل:

وضع يوسف جدولًا ليختبر فرضية الشركة من خلال اختبارات إحصائية مع:

$H_0 : \mu = 2\,000$ مقابل $H_1 : \mu \neq 2\,000$ ، ومستوى الثقة 0.95

	الدراسة السابقة	الدراسة الجديدة
المعايير	$\overline{x} = 1850\ ,\ S = 900\ ,\ n = 100$	$\overline{x} = 1900\ ,\ S = 300\ ,\ n = 100$
القيمة الجدولية	$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$	$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$
قيمة الاختبار الإحصائي	$Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{1850 - 2\,000}{\frac{900}{\sqrt{100}}} = -1.66$	$Z = \frac{1900 - 2\,000}{\frac{300}{\sqrt{100}}} = -3.33$
الفترة	$(-1.96\ ,\ 1.96)$	$(-1.96\ ,\ 1.96)$
القرار	$\because\ -1.66 \in (-1.96\ ,\ 1.96)$ قبول $H_0 : \mu = 2\,000$ ml	$\because\ -3.33 \notin (-1.96\ ,\ 1.96)$ رفض H_0 والأخذ بـ: $H_1 : \mu \neq 2\,000$ ml

الاستنتاج:

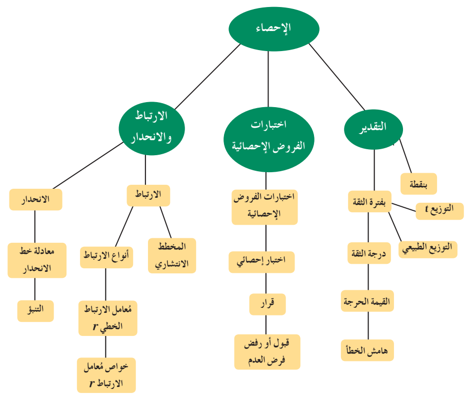
لم تكن الحملة ضرورية، والحصول على قيمة متوسطة أكبر لا يعني الاقتراب من الهدف المنشود.

مسألة إضافية

قامت مؤسسة أخرى بحملة على عينة من 100 شخص تهدف إلى التأكد من أنّ المتوسط الحسابي لاستهلاك كل شخص لمياه الشرب $\mu = 2\,000$ ml يوميًا. فأتت النتائج على الشكل التالي: $S = 800$ ml , $\overline{x} = 2\,100$ ml. برأيك، هل كانت حملة هذه المؤسسة ناجحة؟

191

مخطط تنظيمي للوحدة الرابعة



ملخص

- المعلمة هي ثابت يصف المجتمع أو يصف توزيع المجتمع كالمتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ.
- الإحصاءة هو اقتران تتعيّن قيمته من العينة كالمتوسط الحسابي $\overline{x}$ أو الانحراف المعياري لها S.
- تقدير المعلمة: هو إحصاءة تعتمد على قيم العينة وتعكس قيمة قريبة لمعلمة المجتمع ككل وتوزيعه.
- التقدير بنقطة هي قيمة وحيدة محسوبة من العينة تستخدم لتقدير معلمة مجهولة من معالم المجتمع.
- فترة الثقة هي فترة طرفاها متغيران عشوائيان (أي أنها فترة عشوائية) تحوي إحدى معالم المجتمع بنسبة معينة تسمى درجة الثقة (مستوى الثقة).
- التقدير بفترة الثقة: هو إيجاد فترة معينة يتوقع أن تقع معلمة المجتمع داخلها بنسبة معينة أو احتمال معين.
- α هي نسبة الخطأ في التقدير وتسمى مستوى المعنوية أو مستوى الدلالة.
- $(1-\alpha)$ هي درجة الثقة (مستوى الثقة).
- $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ هي القيمة الحرجة المستخرجة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.
- $\overline{x}$ هو المتوسط الحسابي للعينة.

192

- S هو الانحراف المعياري للعينة.
- $t_{\frac{\alpha}{2}}$ هي القيمة الحرجة المستخرجة من جدول التوزيع t.
- هامش الخطأ $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ في حالة الانحراف المعياري σ معلوم والتوزيع الطبيعي.
- فترة الثقة هي: $(\overline{x} - E\ ,\ \overline{x} + E)$.
- الفرض الإحصائي: هو ادعاء معين مبني على حيثيات معقولة حول معلمة من معالم المجتمع مثل المتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ.
- المقياس الإحصائي هو قيمة وحيدة محسوبة من العينة تحت شروط معينة.
- اختبارات الفروض الإحصائية (اختبار المعنوية) هي طريقة معيارية لاختبار ادعاء ما حول معلمة من معالم المجتمع.
- الارتباط هو العلاقة بين متغيرين.
- ارتباط طردي (موجب): هو علاقة بين متغيرين y , x بحيث إذا تغير المتغير المستقل (x) فإن المتغير التابع (y) يتبعه في نفس الاتجاه.
- ارتباط عكسي (سالب): هو علاقة بين متغيرين y , x بحيث إذا تغير المتغير المستقل (x) فإن المتغير التابع (y) يتبعه في الاتجاه المضاد.
- مُعامل الارتباط الخطي (r) هو عبارة عن مقياس عددي لقوّة العلاقة بين متغيرين يمثلان بيانات كمية حيث $-1 \leq r \leq 1$

خواص مُعامل الارتباط (r)

1. إذا كانت $r = 1$ يكون الارتباط **طردي (موجب) تام.**
2. إذا كانت $r = -1$ يكون الارتباط **عكسي (سالب) تام.**
3. إذا كانت $r = 0$ ينعدم الارتباط.
4. إذا كانت $r \in [0.7\,,1)$ يكون الارتباط **طردي (موجب) قوي.**
5. إذا كانت $r \in [0.5\,, 0.7)$ يكون الارتباط **طردي (موجب) متوسط.**
6. إذا كانت $r \in (0\,, 0.5)$ يكون الارتباط **طردي (موجب) ضعيف.**
7. إذا كانت $r \in (-0.5\,, 0)$ يكون الارتباط **عكسي (سالب) ضعيف.**
8. إذا كانت $r \in [-0.5\,, -0.7)$ يكون الارتباط **عكسي (سالب) متوسط.**
9. إذا كانت $r \in [-0.7\,, -1)$ يكون الارتباط **عكسي (سالب) قوي.**

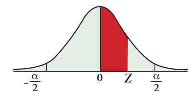
- $r = \frac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}\,\sqrt{n(\Sigma y^2) - (\Sigma y)^2}}$ أو $r = \frac{\Sigma(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\overline{x})^2}\,\sqrt{\Sigma(y-\overline{y})^2}}$
- الانحدار هو وصف العلاقة بين متغيرين.
- معادلة خط الانحدار: هي المعادلة الخطية التي يمكن من خلالها التنبؤ بقيمة أحد المتغيرين إذا علمت قيمة المتغير الآخر.

$$b_1 = \frac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2} \quad \text{حيث} \quad \widehat{y} = b_0 + b_1 x$$

$$b_0 = \overline{y} - b_1\overline{x} \quad \text{حيث} \quad \overline{y} = \frac{\Sigma y}{n} \quad \text{أو} \quad \overline{x} = \frac{\Sigma x}{n}$$

- مقدار الخطأ = |القيمة الجدولية − القيمة من معادلة الانحدار| = $|y_x - \widehat{y}_x|$

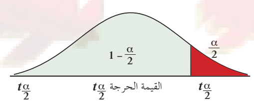
193



جدول التوزيع الطبيعي المعياري (Z)

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.10 وأكثر	0.4999									

ملاحظة: استخدم 0.4999 عندما تزيد قيمة Z عن 3.09



جدول التوزيع t						
	$\frac{\alpha}{2}$					
درجات الحرية $(n-1)$	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.25
1	63.657	31.821	12.706	6.314	3.078	1.000
2	9.925	6.965	4.303	2.920	1.886	0.816
3	5.841	4.541	3.182	2.353	1.638	0.765
4	4.604	3.747	2.776	2.132	1.533	0.741
5	4.032	3.365	2.571	2.015	1.476	0.727
6	3.707	3.143	2.447	1.943	1.440	0.718
7	3.500	2.998	2.365	1.895	1.415	0.711
8	3.355	2.896	2.306	1.860	1.397	0.706
9	3.250	2.821	2.262	1.833	1.383	0.703
10	3.169	2.764	2.228	1.812	1.372	0.700
11	3.106	2.718	2.201	1.796	1.363	0.697
12	3.054	2.681	2.179	1.782	1.356	0.696
13	3.012	2.650	2.160	1.771	1.350	0.694
14	2.977	2.625	2.145	1.761	1.345	0.692
15	2.947	2.602	2.132	1.753	1.341	0.691
16	2.921	2.584	2.120	1.746	1.337	0.690
17	2.898	2.567	2.110	1.740	1.333	0.689
18	2.878	2.552	2.101	1.734	1.330	0.688
19	2.861	2.540	2.093	1.729	1.328	0.688
20	2.845	2.528	2.086	1.725	1.325	0.687
21	2.831	2.518	2.080	1.721	1.323	0.686
22	2.819	2.508	2.074	1.717	1.321	0.686
23	2.807	2.500	2.069	1.714	1.320	0.685
24	2.797	2.492	2.064	1.711	1.318	0.685
25	2.787	2.485	2.060	1.708	1.316	0.684
26	2.779	2.479	2.056	1.706	1.315	0.684
27	2.771	2.473	2.052	1.703	1.314	0.684
28	2.763	2.467	2.048	1.701	1.313	0.683
29	2.756	2.462	2.045	1.699	1.311	0.683
30 وأكثر	2.575	2.327	1.960	1.645	1.282	0.675

ALGEBRA الجبر

$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$
$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$
$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$a > 0$:

$|x| = a \ : \ x = a$ أو $x = -a$

$|x| < a \ : \ -a < x < a$

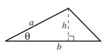
$|x| > a \ : \ x > a$ أو $x < -a$

GEOMETRY الهندسة

Triangle

$A = \frac{1}{2}bh$

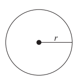
$= \frac{1}{2}ab\sin\theta$



Circle

$A = \pi r^2$

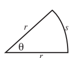
$C = 2\pi r$



Sector of Circle

$A = \frac{1}{2}r^2\theta$

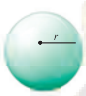
$s = r\theta$ (θ in radians)



Sphere

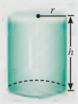
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$A = 4\pi r^2$



Cylinder

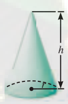
$V = \pi r^2 h$



Cone

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$



TRIGONOMETRY علم المثلثات

$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ $\qquad$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\qquad$ $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ $\qquad$ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

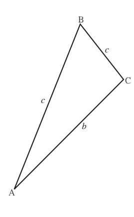
$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ $\qquad$ $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\qquad$ $\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$ $\qquad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$ $\qquad$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$



$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$
$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$
$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$
$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$
$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$

$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ $\qquad$ $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

Statistics — الإحصاء

(القيمة الحرجة) $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$; $-Z_{\frac{\alpha}{2}} = -Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$

(الخطأ المعياري للمجتمع) $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(هامش الخطأ – توزيع طبيعي) $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

فترة الثقة للمتوسط الحسابي $(\overline{x}-E \ , \ \overline{x}+E)$

(التوزيع t) $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{1-\frac{\alpha}{2}}$

(هامش الخطأ – توزيع t الانحراف المعياري σ غير معلوم) $E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$

(المقياس الإحصائي – توزيع طبيعي) $Z = \frac{\overline{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

(المقياس الإحصائي – توزيع طبيعي – الانحراف المعياري σ غير معلوم) $Z = \frac{\overline{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$

(المقياس الاحصائي – توزيع t – الانحراف المعياري σ غير معلوم) $t = \frac{\overline{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$

(مُعامل ارتباط بيرسون) $r = \frac{\sum(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sqrt{\sum(x-\overline{x})^2}\sqrt{\sum(x-\overline{y})^2}} = \frac{n(\sum xy)-(\sum x)(\sum y)}{\sqrt{n(\sum x^2)-(\sum x)^2}\sqrt{n(\sum y^2)-(\sum y)^2}}$

(معادلة خط الانحدار) $\widehat{y} = b_1 x + b_0$

$b_1 = \frac{n(\sum xy)-(\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2)-(\sum x)^2}$, $b_0 = \overline{y} - b_1\overline{x}$

حيث $\overline{x} = \frac{\sum x}{n}$, $\overline{y} = \frac{\sum y}{n}$

مقدار الخطأ $= |y_x - \widehat{y_x}|$

تمارين إثرائية

(1) إذا كانت الدرجة القصوى في امتحان الرياضيات هي 20. أوجد فترة ثقة بنسبة 90% للمتوسط الحسابي μ لعلامة الطالب في امتحان بناءً على نتائج عينة من 36 طالبًا خضعوا للامتحان حيث المتوسط الحسابي للعينة هو $\overline{x} = 11.6$ مع انحراف معياري $S = 2.5$.

(2) أوجد عدد القيم اللازمة لحجم عينة لإيجاد فترة ثقة بدرجة ثقة 99% للمتوسط الحسابي μ لما تنفقه وزارة الصحة سنويًا لدعم مريض مصاب بأحد الأمراض المزمنة. إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع تحت الدراسة هو (دينار) $\sigma = 800$ بهامش خطأ لا يتجاوز 150 دينارًا.

(3) افترض أحد خبراء الاتصالات أن المتوسط الحسابي لعدد زوار إحدى الصفحات على الإنترنت هو $\mu = 4.325$ ألف زائر يوميًا، أما عند أخذ عينة من 64 يومًا تبيّن أن المتوسط الحسابي للعينة $\overline{x} = 4.101$ ألف زائر يوميًا مع انحراف معياري $S = 0.842$ ألف زائر.

اختبر إمكانية رفض أم عدم رفض فرضية الخبير عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.

(4) قرر أصحاب أحد متاجر الأجهزة الكهربائية إقامة تجربة لمدة خمسة أشهر لمعرفة مدى تأثير الإنفاق الإعلاني على حجم المبيعات فكانت النتائج كما في الجدول التالي:

الأشهر	1	2	3	4	5
الإنفاق الإعلاني x بآلاف الدنانير	1	2	3	4	5
حجم المبيعات y بعشرات آلاف الدنانير	1	1	2	2	4

(a) أوجد معادلة خط الانحدار التي تربط حجم المبيعات بالإنفاق الإعلاني في أحد الأشهر.

(b) أنفق المتجر 500 4 دينار على الإعلانات، فما حجم مبيعاته في هذا الشهر؟

(5) أعطت عيّنة عشوائية متوسطًا حسابيًا $\overline{x} = 17$، أوجد التقدير بنقطة للمعلمة المجهولة μ.

(6) أخذت عينة عشوائية من مجتمع إحصائي حجمها $n = 130$، فأعطت متوسط حسابي $\overline{x} = 28$، إذا كان تباينها معلوم وهو $\sigma^2 = 9$، فأوجد فترة الثقة عند درجة ثقة 95% للمعلمة المجهولة μ.

(7) ينتظر زبائن شركة التأمين على السيّارات مدة طويلة قبل التمكن من التواصل مع مندوب خدمة الزبائن حين يتصلّون ليتقدّموا بشكاوى مختلفة. تعطي عيّنة عشوائيّة من 25 اتصالًا مماثلًا متوسطًا حسابيًا $\overline{x} = 22$ min وانحرافًا معياريًا من 6 دقائق.

أوجد فترة الثقة عند درجة ثقة 95% للمتوسط الحسابيّ الإحصائي μ لأوقات الانتظار. افترض أن هذه الأوقات تتبع توزيعًا طبيعيًا.

(c) أوجد قيمة مُعامل الارتباط الخطي. هل هناك ارتباط خطي بين x وy؟ استخدم $\alpha = 0.05$.

(d) أوجد معادلة خط الانحدار.

(e) ما هو أفضل تنبؤ للراتب الشهري بالدينار لموظف في الوظيفة نفسها لديه 8 سنوات خبرة.

(4) يبيّن الجدول أدناه إجمالي وزن النفايات بالكيلوجرام (kg) الذي تتخلّص منه أسرة بحسب عدد أفرادها يوميًا.

وزن النفايات x (kg)	6	2.8	8.2	5	4.1	5.3	8.8	7.1
عدد أفراد الأسرة y	3	4	5	4	6	5	4	2

(a) أوجد معادلة خط الانحدار.

(b) ما هو أفضل تنبؤ لعدد أفراد أسرة تتخلص من 11 kg من النفايات يوميًا؟

(5) في عينة عشوائية حجمها 9 والمتوسط الحسابي $\overline{x} = 20$ min والانحراف المعياري $S = 1.2$ min.

أوجد فترة الثقة عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

(8) تمّ بيع عينة من 1500 منزل مؤخّرًا حيث إن المتوسط الحسابي لسعر المنزل الواحد 000 300 دينار. الانحراف المعياري معلوم وهو 000 70 دينار.

اختبر الفرض القائل إنّ متوسّط الأسعار 000 290 دينار مع مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

(9) تزعم مديرية التعليم العالي أن متوسّط سنوات الخبرة للمعلّمين في كل الجامعات هو 10 سنوات.

تأكّد من هذا الفرض عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$، علمًا أنّ عيّنة من 40 معلّمًا أعطت متوسطًا حسابيًا $\overline{x} = 9$ سنوات مع انحراف معياري $S = 4$.

(10) **(a)** إذا كانت قيمة $\overline{x} = 143$، $\sigma = 10$، $n = 40$، فاختبر الفرض $H_0: \mu = 150$ مقابل الفرض البديل $H_1: \mu \neq 150$ عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

(b) اختبر الفرض نفسه مع عيّنة حجمها $n = 7$ و $S = 8$، عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.

(11) إذا كانت الدرجة العظمى في اختبار الرياضيات هي 20 درجة، فأوجد فترة ثقة عند درجة ثقة 90% للمتوسط الحسابي μ لدرجة طالب في اختبار، بناءً على نتائج عيّنة من 36 طالبًا خضعوا للاختبار حيث المتوسط الحسابي للعيّنة هو $\overline{x} = 11.6$ وانحراف معياري $S = 2.5$.

في التمارين (15–12)، أوجد مُعامل الارتباط r وحدّد نوعه وقوته، إن وجد، للمتغيرين y , x حيث:

(12)

x	8	6	5	10	7	4
y	14	10	6	2	5	8

(13)

x	3	10	9	8	5	4
y	5	8	10	6	4	3

(14)

x	3	10	8	6	5	2	4	7
y	7	12	6	11	9	6	8	10

(15)

x	9	8	6	5	10	7	4
y	11	10	5	9	8	6	7