مقدمة الوحدة

يتعرف الطلاب في هذه الوحدة مشتقة الدالة من الرتبة الأولى والمشتقات ذات الرتب العليا، كما أنهم يتعرفون مشتقات الدوال المثلثية وقاعدة السلسلة والمشتقة من جهة واحدة أو من الجهتين والاشتقاق الضمني.

تبدأ الوحدة بدراسة متوسط التغير والسرعة المتوسطة والسرعة اللحظية، ثم يوجد الطلاب ميل مستقيم ومنه يستنتجون ميل خط المماس وهو نهاية ميل القاطع عندما $h \to 0$.

تُعرّف مشتقة دالة عند نقطة إحداثيها السيني a على أنها $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ في حال وجودها.

ومن مشتقة دالة عند نقطة تعمم الفكرة للوصول إلى دالة المشتقة التي يرمز إليها بـ f'.

يدرس الطلاب قابلية الاشتقاق والحالات الأربع التي لا تكون فيها النهاية موجودة، ثم يتعرفون العلاقة بين الاشتقاق والاتصال، ويتعرفون أيضًا قواعد الاشتقاق التي تعد من المواضيع المهمة في الوحدة نظرًا لكثرة استخدامها لاحقًا في الدروس التطبيقية وفي حل المسائل، ونشير هنا إلى دراسة مشتقات الدوال المثلثية والتي يحتاج إليها الطالب في الدراسات الجامعية وفي بقية الفروع العلمية (الفيزياء مثلًا).

في نهاية الوحدة يطبّق الطالب قاعدة السلسلة التي تسمح بإيجاد مشتقات دوال مركبة.

اهتم اليونانيون القدماء (الإغريق) بإيجاد مماسات الدوال واقترح أرخيمدس (Archmides) (212– ,287–) طريقة لإنشاء مماس في نقطة على منحنى لولبي.

بقي الأمر هكذا حتى القرن السابع عشر فتمّ وضع طرق علمية لإنشاء المماسات.

وقد طور كل من لايبنتز (Leinmiz) ونيوتن (Newton) هذه الطرق وصولًا إلى حساب التفاضل.


الوحدة الثانية

الاشتقاق

The Derivatives

مشروع الوحدة: تأثير الضغط على الغطّاس

1 مقدمة المشروع: يساعد جهاز التنفّس الذي يستخدم في الغطس، علماء البحار على استكشاف أعماق المياه إلى أبعد حدود ممكنة، بالإضافة إلى كون الغطس أيضًا رياضة شعبيّة. ولكن، للغطس بأمان، يتوجّب على الغطّاسين فهم ضغط الماء في الأعماق لأنّه يصبح خطيرًا إذا تخطّى 12 m.

تسمح أجهزة التنفس الحديثة للغطّاسين بالبقاء لأوقات طويلة تحت الماء. ولكن عمق الغطس ومدّته يبقيان محدودين ويتأثّران في الضغط الذي يسمح جسم الإنسان بتحمّله. سوف تستخدم الرياضيّات لاكتشاف الأمان في كيفيّة استخدام أجهزة التنفّس للغطس ثمّ سوف تصمّم ملصقًا عن هذا الجهاز.

2 الهدف: إيجاد العلاقة بين معدّل الهواء الذي يستخدمه الغطّاس وعدّة عوامل مثل: العمق، سعة رئتيه، عمر الغطّاس...

3 اللوازم: ورق رسم بياني – آلة حاسبة – حاسوب.

4 أسئلة حول التطبيق:

تعطيك أجهزة التنفّس للغطس كمّيّة الضغط تحت الماء. عند سطح الماء يكون ضغط الهواء واحدًا (ضغط جوّيّ) $(P = 1\,\text{atm})$. يتزايد الضغط كلّما غطسنا أكثر تحت الماء.

وحدة قياس الضغط $P(\text{atm})$ تتغيّر مع العمق d (بالمتر) بحسب المعادلة: $P = \frac{d}{13} + 1$. ومن المعروف، بحسب قانون بويل، أنّ حجم الهواء V يتغيّر عكسيًّا مع الضغط P أي أنّ $V = \frac{12}{P}$ حيث V تقاس بالكوارت (qt).

a أوجد الضغط على سطح الماء.

b أوجد الضغط على عمق 5 m، من ثمّ أوجد حجم الهواء في رئتيه.

c ارسم جدولًا تبيّن فيه تغيّر الضغط وحجم الهواء نسبة للضغط $(d < 20\text{ m})$.

d اصنع رسمًا بيانيًّا تبيّن فيه تغيّر حجم الرئة نسبة إلى العمق.

5 التقرير: أجر بحثًا عن متوسط حجم الرئة لعدة أعمار، من ثمّ اكتب تقريرًا مفصّلًا تبيّن فيه متوسط العمق الذي يستطيع النزول إليه كل غطاس بحسب عمره.

دروس الوحدة

معدلات التغير وخطوط المماس	المشتقة	قواعد الاشتقاق	مشتقات الدوال المثلثية	قاعدة السلسلة	المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني
2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6

72

في القرن الثامن عشر، طرح دالمبير (D'Alembert) التحديد العلمي لمشتقة دالة عند نقطة على أنها نهاية متوسط معدل التغيّر.

وقد تطوّر هذا المفهوم وتركز في أواسط القرن التاسع عشر، وكان لاغرانج (Lagrange) أول من استخدم الرمز $f'(x)$ للدلالة على مشتقة دالة عند نقطة.

مشروع الوحدة

اسأل الطلاب إذا كانت لديهم معلومات عن الغطس والأدوات المستخدمة في الغطس. اشرح لهم أن حجم الهواء في الرئتين يتزايد عندما يصعد الغطاس إلى سطح الماء. إذا صعد الغطاس بسرعة كبيرة فإن الفقاقيع الغازية حول الجسم تحدث تصلبًا في العضلات.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

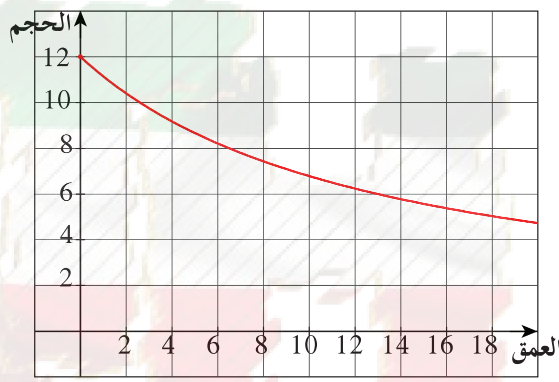
(a) $P = 1$

(b) $P = 1.385$ atm

(c)

d(m) العمق	P(atm) الضغط	V(qt) الحجم
1	1.077	11.142
4	1.308	9.174
7	1.539	7.797
10	1.77	6.780
13	2	6
16	2.231	5.379
19	2.642	4.542

(d)



التقرير

راجع مع رفاقك الملصق الذي وضعته. واسألهم عن مقترحاتهم. تحقق من أن بياناتك وأمثلتك ورسومك البيانية دقيقة وواضحة. قارن عملك مع عمل المجموعات الأخرى.

الوحدة الثانية

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت نهاية دالة عند نقطة معينة.
- تعلمت اللانهاية لدالة.
- تعلمت الاتصال لدالة عند نقطة وعلى فترة.
- تعرفت نقاط عدم الاتصال (الانفصال) لدالة.
- تعلمت كيفية التخلص من نقاط الانفصال إذا أمكن ذلك.

ماذا سوف تتعلم؟

- إدراك مفهوم التغيّر في الدالة، ومعدّل التغيّر، ومتوسّط معدّل التغيّر.
- حساب السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية.
- إيجاد معادلات خط المماس والخط العمودي على المماس عند نقطة معطاة على منحنى الدالة.
- إيجاد الميل والمشتقات باستخدام تعريف المشتقّة.
- إيجاد المشتقة من جهة واحدة.
- التعرف على العلاقة بين الاتصال عند نقطة وقابلية الاشتقاق.
- التمييز بين الركن والناب والمماس الرأسي وعدم الاتصال.
- التعرف على العلاقة بين الاشتقاق والاتصال.
- إيجاد مشتقات الدوال ومن ضمنها مشتقات الرتب العليا.
- استخدام قواعد الاشتقاق للدوال المثلثيّة.
- إيجاد مشتقة دالة الدالة باستخدام قاعدة السلسلة.
- إيجاد الاشتقاق الضمني وتطبيقه.

المصطلحات الأساسية

مشتقة دالة – رمز المشتقة f'، $\frac{dy}{dx}$ – $\frac{d}{dx}(f(x))$ – معدل التغيّر – متوسط معدل التغير – السرعة المتوسطة – السرعة اللحظية – ميل المماس – معادلة المماس – معادلة الخط العمودي (الناظم) – رسم بياني – قابلية الاشتقاق – الاشتقاق – ركن – ناب – مماس رأسي – قواعد الاشتقاق – قاعدة السلسلة – اشتقاق الدوال المثلثية – اشتقاق من رتب عليا – اشتقاق ضمني.

أضف إلى معلوماتك

يعتبر التفاضل Differentiation أحد الفروع المهمة في الرياضيات حيث هو مفاضلة دالة عند نقطة معينة أي مقياس لمقدار تغير متغير بالنسبة إلى متغير آخر. من المتعارف عليه أن اكتشاف علم التفاضل يعود إلى نيوتن Newton (1642–1727) ولايبنتز Leibniz (1646–1716) حيث أصدرا بشكل منفصل حوالى سنة 1685 منشورات مفصلة عن هذا العلم.

اسحق نيوتن Isaac Newton (1642–1727)

ساهم نيوتن في دراسة متسلسلات القوى ونظرية ذات الحدين ووضع طريقة نيوتن لتقريب جذور الدوال إضافة إلى تأسيسه لحساب التفاضل والتكامل.

لايبنتز Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

ينسب إليه رمز التفاضل ∂x ورمز التكامل $\int_{t=x_0}^{x} f(t).\partial t$

73

سلّم التقييم

4	الحسابات كلها صحيحة – الرسوم البيانية واضحة ودقيقة وتبيّن العلاقة بين المتغيرات – الشروحات واضحة وكاملة – الملصق واضح ودقيق.
3	الحسابات في معظمها صحيحة – الرسوم البيانية في معظمها واضحة ودقيقة مع بعض الأخطاء الخفيفة – الشروحات غير كاملة – الملصق ينقصه بعض الدقة.
2	الحسابات تحتوي على أخطاء متعدّدة – الرسوم البيانية غير دقيقة – الملصق غير واضح أو ينقصه معلومات.
1	معظم عناصر هذا المشروع غير كاملة أو ناقصة.

2–1: معدلات التغير وخطوط المماس

1 الأهداف

- يدرك مفهوم التغيّر في الدالة ومعدل التغيّر ومتوسط معدل التغيّر.
- يحسب السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية.
- يوجد ميل مماس منحنى الدالة عند نقطة.
- يوجد معدل التغيّر للدالة.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

متوسط معدل التغير – معدل التغيّر – السرعة المتوسطة – السرعة اللحظية – ميل المماس – العمودي (الناظم).

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – منقلة – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلّاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) على افتراض أن سيارة تسير على الطريق السريع بسرعة متوسطها 110 km/h ، ما المسافة التي تجتازها في ساعتين ونصف الساعة؟

(b) (1) أوجد ميل المستقيم d المار بالنقطتين: $A(2,-3); B(4,1)$ اكتب معادلة المستقيم d.

(2) أوجد ميل المستقيم d' المار بالنقطة A وعمودي على المستقيم d . اكتب معادلة المستقيم d'.

5 التدريس

بيان دالة خطية f : $f(x) = ax + b$ هو المستقيم الذي معادلته $y = ax + b$، يمثل الميل $m = a$ المعدل الذي تتغير فيه y وفق تغير x . هذا المعدل ثابت. ولكن للدوال غير الخطية متوسط معدل التغير يختلف بين نقطة وأخرى على منحنى الدالة. لإيجاد متوسط معدل التغير اللحظي نستخدم النهايات التي سبق دراستها. تسمح دراسة متوسط معدل التغير ونهايته بإيجاد السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية لجسم متحرك في فترة زمنية ما.

2–1

معدلات التغير وخطوط المماس
Rates of Change and Tangent Lines

سوف تتعلم
- إدراك مفهوم التغيّر في الدالة ومعدل التغير ومتوسط معدل التغيّر.
- حساب السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية.
- إيجاد ميل مماس منحنى الدالة عند نقطة.
- إيجاد معدل التغير للدالة.

المفردات والمصطلحات:
- معدل التغيير Rate of Change
- السرعة المتوسطة Average Velocity
- السرعة اللحظية Instantaneous Velocity
- الميل Slope
- المماس Tangent
- العمودي Normal

دعنا نفكر ونتناقش

أظهرت التجارب أن المسافة التي يقطعها جسيم سقط سقوطًا حرًّا من السكون نحو سطح الأرض تعطى بالعلاقة: $d(t) = 4.9t^2$ حيث d المسافة بالمتر (m)، t الزمن بالثواني (s) (قانون جاليليو).

فإذا سقط جسيمًا سقوطًا حرًّا من مرتفع، أوجد بعد مرور ثانيتين من السقوط:

a التغير في الزمن.

b التغير في المسافة.

c السرعة المتوسطة $\overline{v}$: $\overline{v} = \dfrac{\text{التغير في المسافة}}{\text{التغير في الزمن}}$

السرعة المتوسّطة والسرعة اللحظية Average and Instantaneous Velocity

نوجد **السرعة المتوسطة** $\overline{v}$ لجسم متحرّك، في فترة زمنيّة ما، بقسمة التغير في المسافة (Δd) على التغير في الزمن (Δt).

وعليه تكون وحدة السرعة المتوسّطة عبارة عن وحدة المسافة مقسومة على وحدة الزمن؛ أي كيلومتر/ساعة (km/h) أو متر/ثانية (m/s) أو أيّ وحدات أخرى موجودة في المسألة قيد الدراسة.

وفي حالات كثيرة سواء أكان في مجال العلوم أم في الحياة اليوميّة لا تمدّنا السرعة المتوسطة لجسم متحرّك بالمعلومات ذات الأهمية القصوى فمثلًا: إذا ارتطمت سيّارة بحائط خرسانيّ فإنّ ما سيحدّد الآثار المترتبة على الحادث ليس مقدار السرعة المتوسطة التي تقاد بها السيّارة من نقطة بدء الحركة حتّى نقطة الارتطام بل مقدار السرعة عند لحظة الارتطام: **السرعة اللحظيّة**. وكذلك بالنسبة إلى «الرادار» فإن السرعة التي تُضبط بها السيّارة هي السرعة اللحظيّة للسيّارة.

معلومة:

$\Delta t = t_2 - t_1$

أي أن $t_2 = t_1 + \Delta t$

بوضع $\Delta t = h$

$\therefore\ t_2 = t_1 + h$

وعليه:

$f(t_2) - f(t_1)$
$= f(t_1 + h) - f(t_1)$

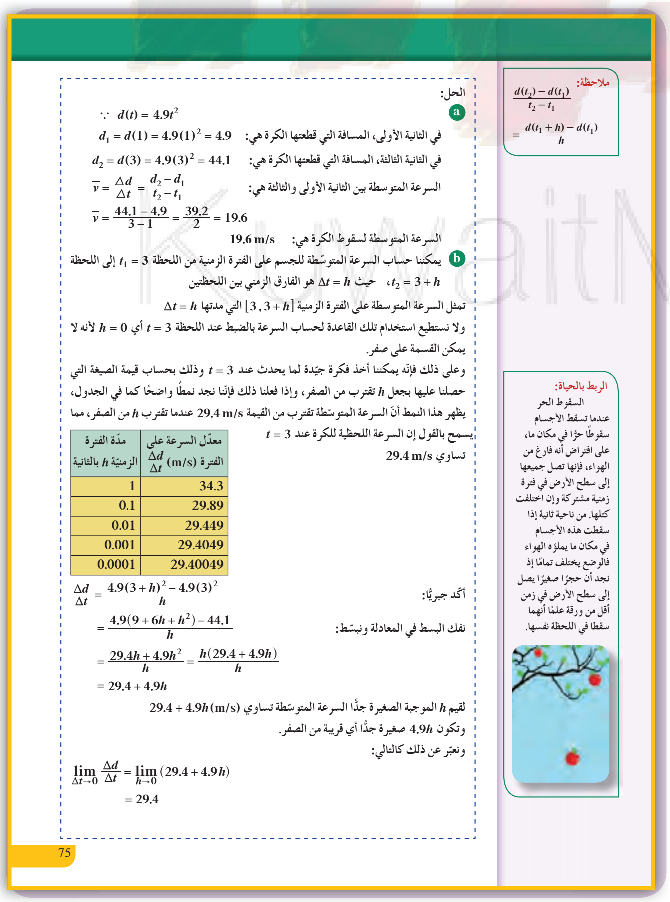
مثال توضيحي

تسقط كرة من علو 50 m، وفق المعادلة $d(t) = 4.9t^2$، حيث d المسافة التي تقطعها الكرة بالأمتار (m)، t الزمن بالثواني (s).

a ما السرعة المتوسطة في الفترة الزمنية من الثانية الأولى إلى الثانية الثالثة؟

b أوجد سرعة الكرة عند اللحظة $t = 3$

74



ملاحظة:

$\dfrac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \dfrac{d(t_1 + h) - d(t_1)}{h}$

الحل:

a $\because\ d(t) = 4.9t^2$

في الثانية الأولى، المسافة التي قطعتها الكرة هي: $d_1 = d(1) = 4.9(1)^2 = 4.9$

في الثانية الثالثة، المسافة التي قطعتها الكرة هي: $d_2 = d(3) = 4.9(3)^2 = 44.1$

السرعة المتوسطة بين الثانية الأولى والثالثة هي: $\overline{v} = \dfrac{\Delta d}{\Delta t} = \dfrac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$

$\overline{v} = \dfrac{44.1 - 4.9}{3 - 1} = \dfrac{39.2}{2} = 19.6$

السرعة المتوسطة لسقوط الكرة هي: 19.6 m/s

b يمكننا حساب السرعة المتوسّطة للجسم على الفترة الزمنية من اللحظة $t_1 = 3$ إلى اللحظة $t_2 = 3 + h$، حيث $\Delta t = h$ هو الفارق الزمني بين اللحظتين

تمثل السرعة المتوسطة على الفترة الزمنية $[3, 3 + h]$ التي مدتها $\Delta t = h$

ولا نستطيع استخدام تلك القاعدة لحساب السرعة بالضبط عند اللحظة $t = 3$ أي $h = 0$ لأنه لا يمكن القسمة على صفر.

وعلى ذلك فإنّه يمكننا أخذ فكرة جيّدة لما يحدث عند $t = 3$ وذلك بحساب قيمة الصيغة التي حصلنا عليها بجعل h تقترب من الصفر، وإذا فعلنا ذلك فإنّنا نجد نمطًا واضحًا كما في الجدول، يظهر هذا النمط أنّ السرعة المتوسّطة تقترب من القيمة 29.4 m/s عندما تقترب h من الصفر، مما يسمح بالقول إن السرعة اللحظية للكرة عند $t = 3$ تساوي 29.4 m/s

مدّة الفترة الزمنيّة h بالثانية	معدّل السرعة على الفترة $\frac{\Delta d}{\Delta t}$ (m/s)
1	34.3
0.1	29.89
0.01	29.449
0.001	29.4049
0.0001	29.40049

أكّد جبريًّا: $\dfrac{\Delta d}{\Delta t} = \dfrac{4.9(3 + h)^2 - 4.9(3)^2}{h}$

نفك البسط في المعادلة ونبسّط: $= \dfrac{4.9(9 + 6h + h^2) - 44.1}{h}$

$= \dfrac{29.4h + 4.9h^2}{h} = \dfrac{h(29.4 + 4.9h)}{h}$

$= 29.4 + 4.9h$

لقيم h الموجبة الصغيرة جدًّا السرعة المتوسّطة تساوي $29.4 + 4.9h$ (m/s)

وتكون $4.9h$ صغيرة جدًّا أي قريبة من الصفر.

ونعبّر عن ذلك كالتالي:

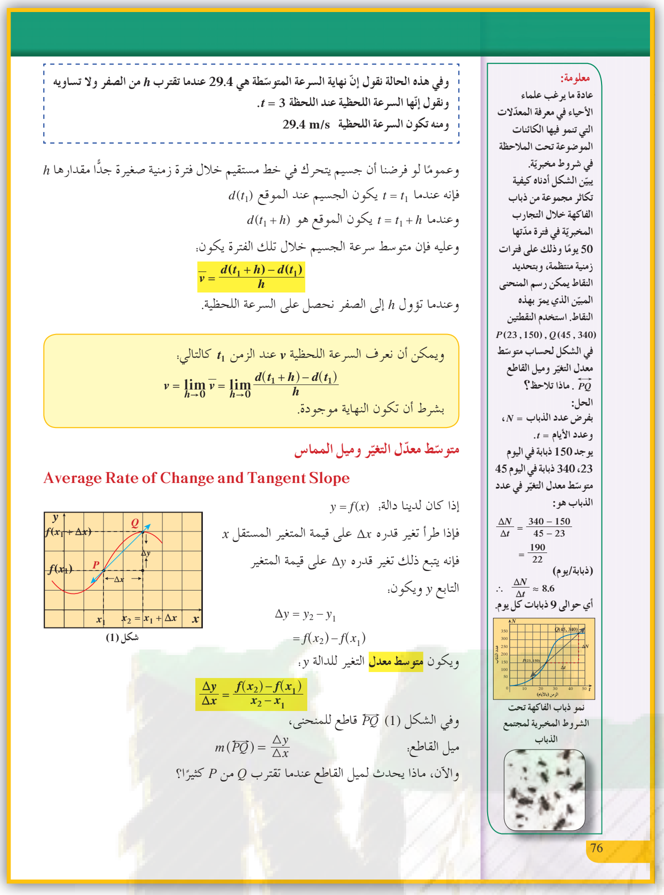
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta d}{\Delta t} = \lim_{h \to 0} (29.4 + 4.9h) = 29.4$$

الربط بالحياة:

السقوط الحر

عندما تسقط الأجسام سقوطًا حرًّا في مكان ما، على افتراض أنه فارغ من الهواء، فإنها تصل جميعها إلى سطح الأرض في فترة زمنية مشتركة وإن اختلفت كتلها. من ناحية ثانية إذا سقطت هذه الأجسام في مكان ما يملؤه الهواء فالوضع يختلف تمامًا إذ نجد أن حجرًا صغيرًا يصل إلى سطح الأرض في زمن أقل من ورقة علمًا أنهما سقطا في اللحظة نفسها.

75



وفي هذه الحالة نقول إنّ نهاية السرعة المتوسّطة هي 29.4 عندما تقترب h من الصفر ولا تساويه ونقول إنها السرعة اللحظية عند اللحظة $t = 3$.
ومنه تكون السرعة اللحظية $29.4\ \text{m/s}$

وعمومًا لو فرضنا أن جسيم يتحرك في خط مستقيم خلال فترة زمنية صغيرة جدًّا مقدارها h
فإنه عندما $t = t_1$ يكون الجسيم عند الموقع $d(t_1)$
وعندما $t = t_1 + h$ يكون الموقع هو $d(t_1 + h)$
وعليه فإن متوسط سرعة الجسيم خلال تلك الفترة يكون:

$$\bar{v} = \frac{d(t_1 + h) - d(t_1)}{h}$$

وعندما تؤول h إلى الصفر نحصل على السرعة اللحظية.

ويمكن أن نعرف السرعة اللحظية v عند الزمن t_1 كالتالي:

$$v = \lim_{h \to 0} \bar{v} = \lim_{h \to 0} \frac{d(t_1 + h) - d(t_1)}{h}$$

بشرط أن تكون النهاية موجودة.

متوسّط معدّل التغيّر وميل المماس

Average Rate of Change and Tangent Slope

إذا كان لدينا دالة: $y = f(x)$
فإذا طرأ تغير قدره Δx على قيمة المتغير المستقل x
فإنه يتبع ذلك تغير قدره Δy على قيمة المتغير التابع y ويكون:

$$\Delta y = y_2 - y_1$$
$$= f(x_2) - f(x_1)$$

ويكون متوسط معدل التغير للدالة y:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

شكل (1)

وفي الشكل (1) $\overleftrightarrow{PQ}$ قاطع للمنحنى،
ميل القاطع: $m(\overleftrightarrow{PQ}) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
والآن، ماذا يحدث لميل القاطع عندما تقترب Q من P كثيرًا؟

معلومة:
عادة ما يرغب علماء الأحياء في معرفة المعدّلات التي تنمو فيها الكائنات الموضوعة تحت الملاحظة في شروط مخبريّة.
يبيّن الشكل أدناه كيفية تكاثر مجموعة من ذباب الفاكهة خلال التجارب المخبريّة في فترة مدّتها 50 يومًا وذلك على فترات زمنية منتظمة، وبتحديد النقاط يمكن رسم المنحنى المبيّن الذي يمرّ بهذه النقاط. استخدم النقطتين $P(23, 150)$, $Q(45, 340)$ في الشكل لحساب متوسّط معدل التغيّر وميل القاطع $\overleftrightarrow{PQ}$. ماذا تلاحظ؟
الحل:
بفرض عدد الذباب $= N$،
وعدد الأيام $= t$.
يوجد 150 ذبابة في اليوم 23، 340 ذبابة في اليوم 45
متوسّط معدل التغيّر في عدد الذباب هو:

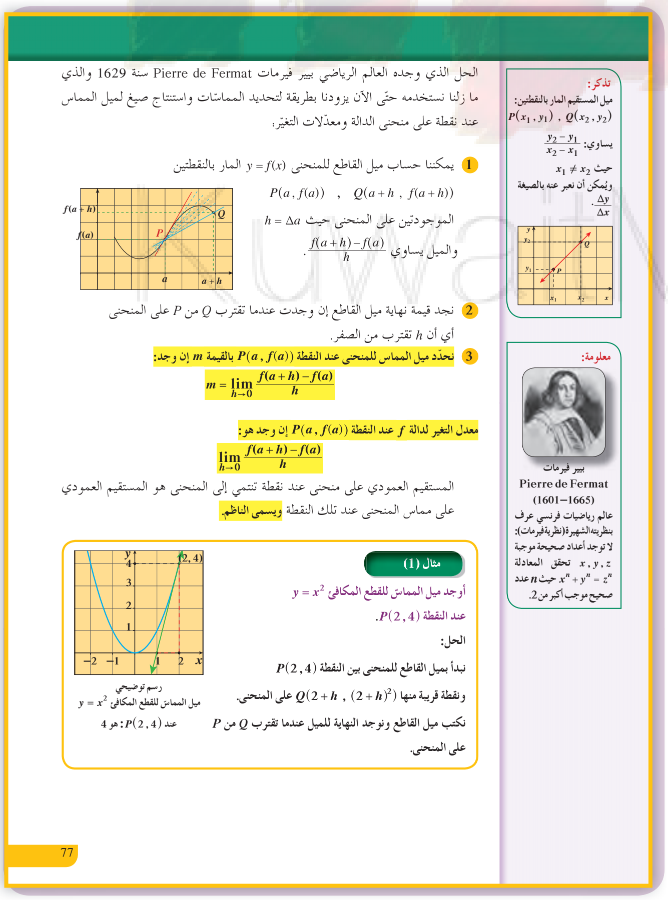
$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{340 - 150}{45 - 23}$$
$$= \frac{190}{22}$$

(ذبابة/يوم)

$$\therefore \quad \frac{\Delta N}{\Delta t} \approx 8.6$$

أي حوالى 9 ذبابات كل يوم.

نمو ذباب الفاكهة تحت الشروط المخبرية لمجتمع الذباب



الحل الذي وجده العالم الرياضي بيير فيرمات Pierre de Fermat سنة 1629 والذي ما زلنا نستخدمه حتّى الآن يزودنا بطريقة لتحديد المماسّات واستنتاج صيغ لميل المماس عند نقطة على منحنى الدالة ومعدّلات التغيّر.

1 يمكننا حساب ميل القاطع للمنحنى $y = f(x)$ المار بالنقطتين
$P(a, f(a))$, $Q(a+h, f(a+h))$
الموجودتين على المنحنى حيث $h = \Delta a$
والميل يساوي $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

2 نجد قيمة نهاية ميل القاطع إن وجدت عندما تقترب Q من P على المنحنى أي أن h تقترب من الصفر.

3 نحدّد ميل المماس للمنحنى عند النقطة $P(a, f(a))$ بالقيمة m إن وجد:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

معدل التغير لدالة f عند النقطة $P(a, f(a))$ إن وجد هو:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

المستقيم العمودي على منحنى عند نقطة تنتمي إلى المنحنى هو المستقيم العمودي على مماس المنحنى عند تلك النقطة ويسمى الناظم.

مثال (1)

أوجد ميل المماسّ للقطع المكافئ $y = x^2$ عند النقطة $P(2, 4)$.

الحل:
نبدأ بميل القاطع للمنحنى بين النقطة $P(2, 4)$ ونقطة قريبة منها $Q(2+h, (2+h)^2)$ على المنحنى.
نكتب ميل القاطع ونوجد النهاية للميل عندما تقترب Q من P على المنحنى.

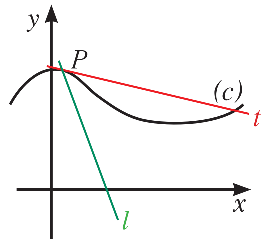
رسم توضيحي
ميل المماسّ للقطع المكافئ $y = x^2$ عند $P(2, 4)$: هو 4

تذكر:
ميل المستقيم المار بالنقطتين: $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$
يساوي: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
حيث $x_1 \neq x_2$
ويُمكن أن نعبر عنه بالصيغة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

معلومة:
بيير فيرمات
Pierre de Fermat
(1601–1665)
عالم رياضيات فرنسي عرف بنظريته الشهيرة (نظرية فيرمات): لا توجد أعداد صحيحة موجبة x, y, z تحقق المعادلة $x^n + y^n = z^n$ حيث n عدد صحيح موجب أكبر من 2.

يعود أصل كلمة مماس (tangent) إلى اللاتينية وتعني ملامس. إذًا المماس لمنحنى دالة هو مستقيم يلامس المنحنى ويكون لهذا المستقيم الاتجاه نفسه مثل منحنى الدالة عند نقطة التماس.

مماس الدائرة هو مستقيم يقطع الدائرة في نقطة واحدة فقط. لكن هذا التحديد لا ينطبق على غالبية المنحنيات الأخرى.



في الشكل المقابل يمثل المنحنى (c) بيان دالة ويمر المستقيمان t و l بالنقطة P من هذا المنحنى.
يقطع المستقيم l المنحنى في نقطة واحدة ولكن لا يمكن اعتباره مماسًا له. في المقابل، المستقيم t مماس للمنحنى (c) عند النقطة P، لكنه يقطع هذا المنحنى في نقطة ثانية.

في المثال التوضيحي

يعطي فكرة واضحة عن السرعة المتوسطة $\bar{v}$ في فترة زمنية ويرتبط مباشرة بالسقوط الحر في الفيزياء. كما يعطي فكرة واضحة عن تطور معدل السرعة عندما $h \to 0$ ويقرّب مفهوم الاشتقاق للطلاب تمهيدًا للدرس التالي.

في المثال (1)

إيجاد متوسط معدل التغير للوصول إلى ميل المماس لقطع مكافئ عند نقطة على المنحنى.

6 الربط

بفرض أن معادلة السقوط الحر لأي جسم على المريخ هي: $s = 1.86\,t^2$، حيث s تقاس بالمتر (m) و t بالثواني (s).

ولنفترض أن صخرة سقطت من ارتفاع 200 m على أرض المريخ. أوجد سرعة الصخرة عند $t = 1\,\text{s}$.

$$V(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(1+h) - s(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1.86(1+h)^2 - 1.86(1)^2}{h} = 3.72$$

فتكون سرعة الصخرة: $3.72\ \text{m/s}$

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

كثير من الطلاب معرّضون لارتكاب الأخطاء عند إيجاد ميل المماس على منحنى. أكّد لهم أن استخدام قاعدة الميل هي لنقطة موجودة على المنحنى وليس لأي نقطة غير موجودة على المنحنى.

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل». تأكّد من أنهم قد فهموا جيّدًا معدل التغيّر وتمكنوا من إيجاد ميل المماس على أنه نهاية لمعدل التغير عندما $h \to 0$.

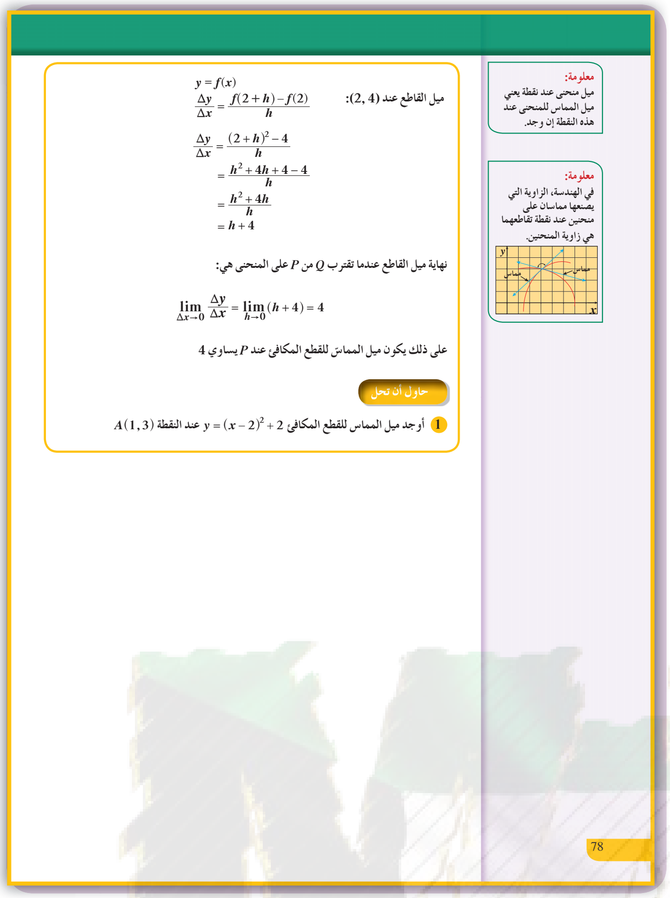
اختبار سريع

أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة f: $f(x) = x^2 - x$ عند النقطة $(1, 0)$

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1+2h+h^2-1-h-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (1+h) = 1$$



معلومة:
ميل منحنى عند نقطة يعني ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة إن وجد.

معلومة:
في الهندسة، الزاوية التي يصنعها مماسان على منحنين عند نقطة تقاطعهما هي زاوية المنحنين.

ميل القاطع عند $(2, 4)$:

$y = f(x)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h)^2-4}{h} = \frac{h^2+4h+4-4}{h} = \frac{h^2+4h}{h} = h+4$$

نهاية ميل القاطع عندما تقترب Q من P على المنحنى هي:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}(h+4) = 4$$

على ذلك يكون ميل المماسّ للقطع المكافئ عند P يساوي 4

حاول أن تحل

1 أوجد ميل المماس للقطع المكافئ $y = (x-2)^2 + 2$ عند النقطة $A(1, 3)$

78

تمرَّنْ 2−1

معدلات التغير وخطوط المماس

Rates of Change and Tangent Lines

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1−4)، أوجد ميل المماس في كلّ مما يلي عند النقاط المبينة:

(1) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $x = 2$

(2) $f(x) = x^2 - 4x$, $x = 1$

(3) $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$, $x = 2$

(4) $f(x) = 4 - x^2$, $x = 1$

(5) لتكن الدالة f: $f(x) = \frac{2}{x}$

(a) أوجد ميل المماس لمنحنى f عند $x = a$ حيث $a \neq 0$.

(b) **تفكير ناقد.** صف ماذا يحدث للمماس عند $x = a$ عندما تتغيّر a.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1−5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) ميل مماس منحنى الدالة f عند النقطة $(c\ ,\ f(c))$ هو $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ (a) (b)

(2) السرعة المتوسطة لجسيم متحرك على خط مستقيم هي: $\overline{v} = \frac{d(t_1+h)-d(t_1)}{h}$ (a) (b)

(3) ميل مماس منحنى الدالة f: $f(x) = x^2$ عند $x = -2$ هو 4 (a) (b)

(4) ميل مماس منحنى الدالة f: $f(x) = |x|$ عند $x = -2$ هو 2 (a) (b)

(5) يكون مماس منحنى الدالة f: $f(x) = 4$ عند النقطة $(-1\ ,\ 4)$ موازيًا لمحور السينات. (a) (b)

33

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a) التغير في الزمن: $2 - 0 = 2$

(b) التغير في المسافة: $4.9(2)^2 - 0 = 19.6$

(c) السرعة المتوسطة: $\bar{v} = \dfrac{19.6}{2} = 9.8\ \text{m/s}$

«حاول أن تحل»

1 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = h - 2$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} (h - 2) = -2$$

في التمارين (6–9)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) ميل مماس منحنى الدالة f: $f(x) = \frac{2}{x}$ عند $x = -2$ هو:

ⓐ -1 ⓑ $-\frac{1}{2}$ ⓒ $\frac{1}{2}$ ⓓ 1

(7) ميل مماس منحنى الدالة f: $f(x) = \frac{-1}{x-1}$ عند $x = 0$ هو:

ⓐ -1 ⓑ 0 ⓒ 1 ⓓ 2

(8) ميل مماس منحنى الدالة f: $f(x) = 9 - x^2$ عند $x = 2$ هو:

ⓐ -5 ⓑ -4 ⓒ 4 ⓓ 5

(9) ليكن منحنى الدالة f: $f(x) = x^2 - 4x + 3$ فإن النقطة التي يكون مماس المنحنى عندها أفقيًا هي:

ⓐ $(3, 0)$ ⓑ $(1, 0)$ ⓒ $(2, -1)$ ⓓ $(-1, 2)$

34

2-2: المشتقة

1 الأهداف

- يوجد مشتقة الدالة عند نقطة باستخدام تعريف المشتقة.
- يوجد المشتقة من جهة واحدة.
- يتعرف على حالات عدم وجود المشتقة.
- يميّز بين الأركان والأنياب والمماس الرأسي.
- يتعرف العلاقة بين الاتصال عند نقطة وقابلية الاشتقاق.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

المشتقة عند نقطة – مشتقة دالة – مشتقة من جهة واحدة – التفاضل – نقطة ركن – نقطة ناب – مماس رأسي.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب إيجاد:

(a) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

(c) اطلب إلى الطلّاب رسم الخطوط المستقيمة $f(x) = x+2$ و $f(x) = -x+3$، ثم اسألهم عن قياس الزاوية التي يصنعها كل مستقيم مع الاتجاه الموجب للمحور السيني، ثم اطلب إليهم إيجاد ظل كل زاوية (tan) ومقارنة ظل كل زاوية مع معامل x .

5 التدريس

إن إحدى الطرائق المستخدمة للبدء في هذا الدرس هي تقديم الرسم البياني لدالة، وبيان كيف أن ميل خطوط القاطع يقترب من نهاية تقابل ميل خط المماس.

ينبغي أن يتعلم الطلاب كيف يُوجِدون المشتقات باستخدام التعريف. ويمكن عمل هذا على مرحلتين:

(1) إيجاد المشتقة عند نقطة معينة $x = a$.

(2) تعميم العملية لإيجاد المشتقة عند نقطة عامة x . ينبغي أن تناقش الطرائق المختلفة لكتابة المشتقات. يمكن إنهاء الدرس بمناقشة المشتقات من جهة واحدة. عند مناقشة مشتقات من جهة واحدة لدالة معرفة بأكثر من قاعدة مثل الدالة في مثال (4)، أكّد أنك توجد قيمة المشتقات من جهة اليسار ومن جهة اليمين لدالة واحدة (وليس لدالتين).

2-2

المشتقة

The Derivative

سوف تتعلم
- إيجاد الميل والمشتقات باستخدام تعريف المشتقة.
- إيجاد مشتقة الدالة عند نقطة.
- إيجاد المشتقة من جهة واحدة.
- قابلية الاشتقاق على فترة.
- العلاقة بين الاتصال عند نقطة أو على فترة وقابلية الاشتقاق.
- إيجاد النقاط الحرجة والتمييز بين الأركان والأنياب.

المفردات والمصطلحات:
- المشتقة عند نقطة Derivative at a Point
- مشتقة دالة Derivative of a Function
- مشتقة من جهة واحدة One–Sided Derivative
- التفاضل Differentiability
- نقطة ركن Corner Point
- نقطة ناب Cusp Point
- مماس رأسي Vertical Tangent
- عدم اتصال Discontinuity

دعنا نفكّر ونتناقش

تعلمت فيما سبق أنه إذا كان ℓ مستقيمًا يصنع زاوية θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن ميل المستقيم: $m = \tan\theta$

الشكل (1) يمثّل بيان الدالة f .

ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 مماسات لمنحنى f عند النقاط P_1, P_2, P_3 على الترتيب.

شكل (1)

1. ميل المستقيم ℓ_1 (المماس لمنحنى الدالة f عند P_1) أكبر من الصفر. لماذا؟
2. ميل المماس ℓ_2 لمنحنى f عند P_2 يساوي صفرًا. لماذا؟
3. ميل المماس ℓ_3 لمنحنى f عند P_3 أصغر من الصفر. لماذا؟
4. إذا أمكن رسم مماسات عند نقاط مختلفة على المنحنى، فهل ميل المنحنى عند كل نقطة من هذه النقاط يكون قيمة ثابتة أم متغيرة؟

تعريف المشتقّة Definition of Derivative

تعلّمت أنّ ميل منحنى الدالة f عند نقطة إحداثيها السينيّ $x = a$ هو:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

في حال وجود هذه النهاية فإنّها تسمّى مشتقّة الدّالة f عند a

تعريف: المشتقّة عند نقطة Derivative at a Point

مشتقة الدالة f عند $x = a$ هي $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

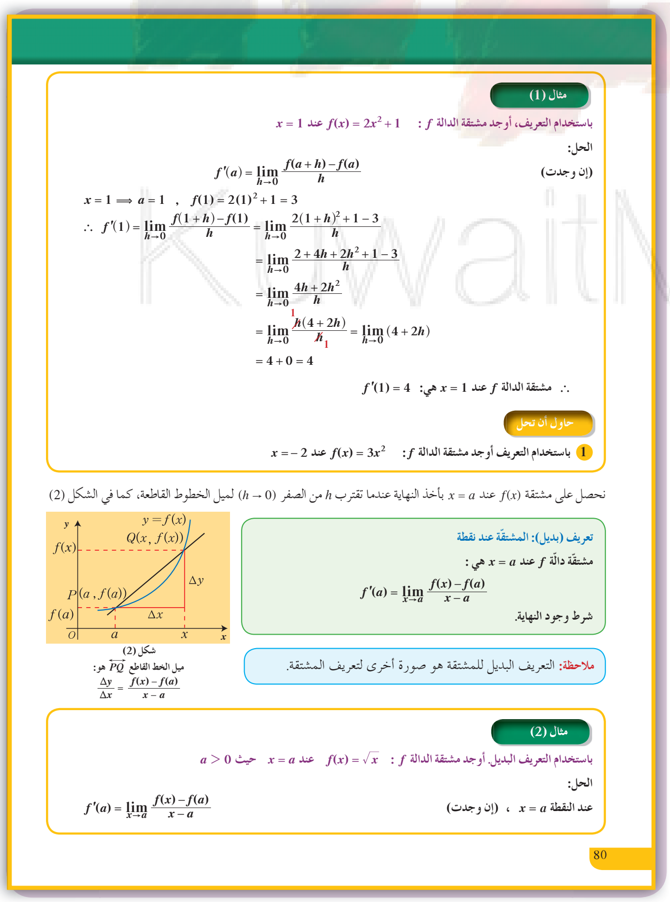
شرط وجود النهاية.

من التعريف السابق يمكننا القول أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x = a$ إذا كانت النهاية موجودة ويرمز لذلك بالرمز:

$f'(a)$ أو $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=a}$

أما إذا كانت النهاية غير موجودة عند $x = a$ نقول إن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x = a$ ($f'(a)$ غير موجودة)

79



مثال (1)

باستخدام التعريف، أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = 2x^2+1$ عند $x = 1$

الحل:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ (إن وجدت)

$x = 1 \Longrightarrow a = 1 \quad , \quad f(1) = 2(1)^2+1 = 3$

$$\begin{aligned}\therefore\ f'(1) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(1+h)^2+1-3}{h}\\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2+4h+2h^2+1-3}{h}\\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4h+2h^2}{h}\\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}^{1}(4+2h)}{\cancel{h}_{1}} = \lim_{h \to 0}(4+2h)\\ &= 4+0 = 4\end{aligned}$$

$\therefore$ مشتقة الدالة f عند $x = 1$ هي: $f'(1) = 4$

حاول أن تحل

1. باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f: $f(x) = 3x^2$ عند $x = -2$

نحصل على مشتقة $f(x)$ عند $x = a$ بأخذ النهاية عندما تقترب h من الصفر $(h \to 0)$ لميل الخطوط القاطعة، كما في الشكل (2)

تعريف (بديل): المشتقّة عند نقطة

مشتقّة دالّة f عند $x = a$ هي :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

شرط وجود النهاية.

شكل (2)

ميل الخط القاطع $\overleftrightarrow{PQ}$ هو: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

ملاحظة: التعريف البديل للمشتقة هو صورة أخرى لتعريف المشتقة.

مثال (2)

باستخدام التعريف البديل. أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = \sqrt{x}$ عند $x = a$ حيث $a > 0$

الحل:

عند النقطة $x = a$ ، (إن وجدت) $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

80

في المثال (1)

استخدام التعريف: $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ، لإيجاد مشتقة الدالة f.

في المثال (2)

يوجد قيمة مشتقة الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ باستخدام التعريف البديل. يتطلب الاشتقاق ضرب البسط والمقام بمرافق البسط ثم إيجاد النهاية.

في المثال (3)

المشتقة من جهة اليسار لا تساوي المشتقة من جهة اليمين إذًا $f'(0)$ غير موجودة، وبالتالي فالدالة ليس لها مشتقة عند $x = 0$ بالرغم من وجود مشتقة لجهة اليمين ومشتقة لجهة اليسار.

في المثال (4)

تطبيق لكيفية إيجاد المشتقة من كل جهة. لاحظ أن بيان الدالة (لا يمثّل ناب أو ركن) عند $x = 1$ وأن المشتقة لجهة اليمين تساوي المشتقة لجهة اليسار.

وأشر أيضًا إلى أنه ليس من الضروري أن تكون المشتقة من جهة اليسار مساوية للمشتقة من جهة اليمين.

في المثال (5)

تطبيق مباشر لكيفية إيجاد دالة المشتقة باستخدام التعريف على دالة حدودية بسيطة.

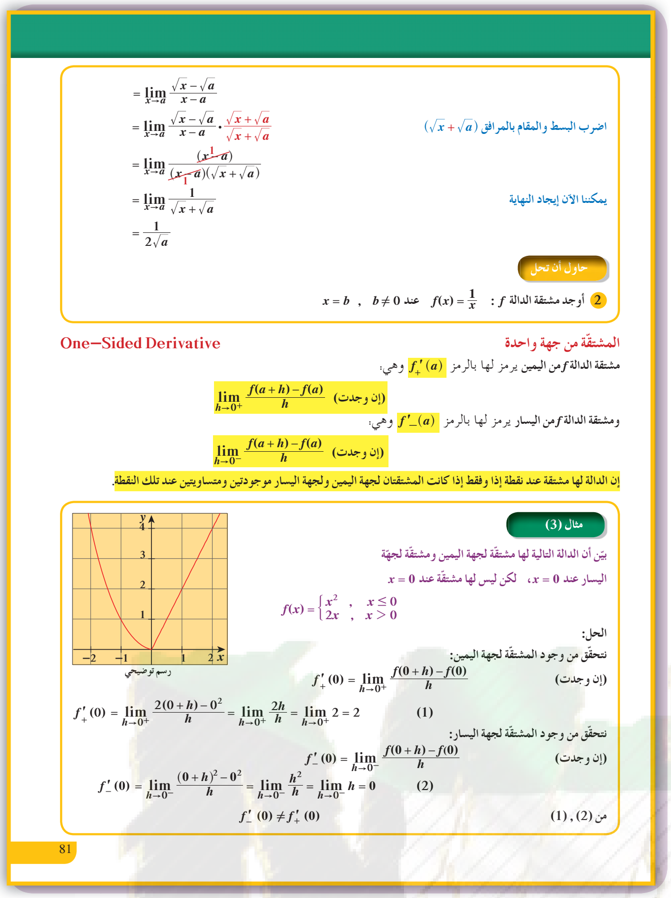
في المثال (6)

يبيّن هذا المثال أنّه إذا كانت الدالة غير متصلة عند نقطة فإنّها تكون غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

أشر إلى أنه في هذه الحالة لا يقوم الطالب بدراسة الاشتقاق عند هذه النقطة.

في المثال (7)

يختلف هذا المثال عن المثال (6) بحيث إن الدالة متصلة عند النقطة $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة: $f'_-\left(\frac{1}{2}\right) \neq f'_+\left(\frac{1}{2}\right)$.



$$= \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$$

اضرب البسط والمقام بالمرافق $(\sqrt{x}+\sqrt{a})$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

يمكننا الآن إيجاد النهاية

$$= \lim_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

حاول أن تحل

2 أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = \frac{1}{x}$ عند $b \neq 0$ ، $x = b$

المشتقّة من جهة واحدة One–Sided Derivative

مشتقة الدالة f من اليمين يرمز لها بالرمز $f'_+(a)$ وهي:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{(إن وجدت)}$$

ومشتقة الدالة f من اليسار يرمز لها بالرمز $f'_-(a)$ وهي:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{(إن وجدت)}$$

إن الدالة لها مشتقة عند نقطة إذا وفقط إذا كانت المشتقتان لجهة اليمين ولجهة اليسار موجودتين ومتساويتين عند تلك النقطة.

مثال (3)

بيّن أن الدالة التالية لها مشتقّة لجهة اليمين ومشتقّة لجهة اليسار عند $x = 0$، لكن ليس لها مشتقّة عند $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \leq 0 \\ 2x & , \quad x > 0 \end{cases}$$

رسم توضيحي

الحل:

نتحقّق من وجود المشتقّة لجهة اليمين:

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \quad \text{(إن وجدت)}$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{2(0+h)-0^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 2 = 2 \qquad (1)$$

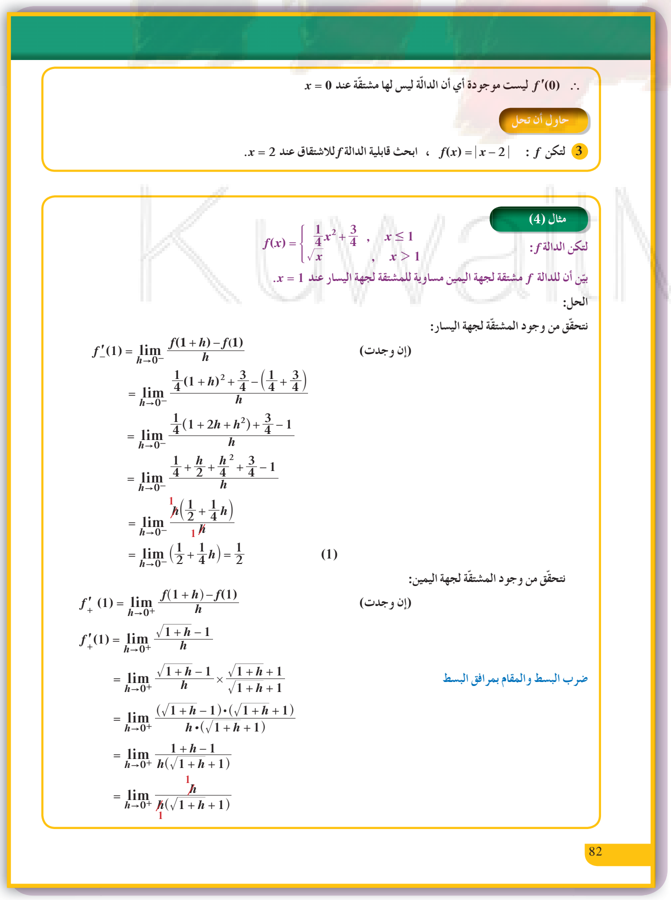
نتحقّق من وجود المشتقّة لجهة اليسار:

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \quad \text{(إن وجدت)}$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{(0+h)^2-0^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} h = 0 \qquad (2)$$

من (1) , (2) $\quad f'_-(0) \neq f'_+(0)$

81



$\therefore$ $f'(0)$ ليست موجودة أي أن الدالّة ليس لها مشتقّة عند $x = 0$

حاول أن تحل

3 لتكن f : $f(x) = |x-2|$ ، ابحث قابلية الدالة f للاشتقاق عند $x = 2$.

مثال (4)

لتكن الدالة f:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} & , \quad x \leq 1 \\ \sqrt{x} & , \quad x > 1 \end{cases}$$

بيّن أن للدالة f مشتقة لجهة اليمين مساوية للمشتقة لجهة اليسار عند $x = 1$.

الحل:

نتحقّق من وجود المشتقّة لجهة اليسار:

$$f'_-(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \quad \text{(إن وجدت)}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{1}{4}(1+h)^2+\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{1}{4}(1+2h+h^2)+\frac{3}{4}-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{1}{4}+\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}+\frac{3}{4}-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{\cancel{h}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}h\right)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}h\right) = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

نتحقّق من وجود المشتقّة لجهة اليمين:

$$f'_+(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \quad \text{(إن وجدت)}$$

$$f'_+(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$$

ضرب البسط والمقام بمرافق البسط

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} \times \frac{\sqrt{1+h}+1}{\sqrt{1+h}+1}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(\sqrt{1+h}-1)\cdot(\sqrt{1+h}+1)}{h\cdot(\sqrt{1+h}+1)}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{1+h}+1)}$$

82

في المثالين (9), (8)

إذا كانت الدالة متصلة عند نقطة فليس من الضروري أن تكون قابلة للاشتقاق عندها وعلى الطلاب دراسة الاشتقاق من الجهتين لاتخاذ القرار خاصة أن كل دالة معرفة بأكثر من قاعدة.

6 الربط

يستخدم علماء الفضاء الاشتقاق في دراسة سرعة دوران الأقمار الاصطناعية على مجالها.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

عند إيجاد مشتقات باستخدام التعريف، غالبًا ما يقع الطلاب في أخطاء عند تحليل البسط إلى عوامل.

عندما تكون f كثيرة حدود أو دالة نسبية، فإن (h) تكون دائمًا عاملًا للبسط.

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل»، تأكد من استيعابهم لمفهوم الاشتقاق.

اختبار سريع

1 لتكن الدالة f: $f(x) = x^3 - x + 2$،

أوجد $f'(0)$. $\quad f'(0) = -1$

2 ادرس اشتقاق الدالة f: $f(x) = \begin{cases} 2x+1 \ , & x \le 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + 3 \ , & x > 2 \end{cases}$

عند $x = 2$. $\quad f'(2) = 2$ من الجهتين

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1 لأن قياس الزاوية θ التي يصنعها ℓ_1 مع محور السينات أكبر من صفر وأصغر من 90°، $\tan\theta > 0$

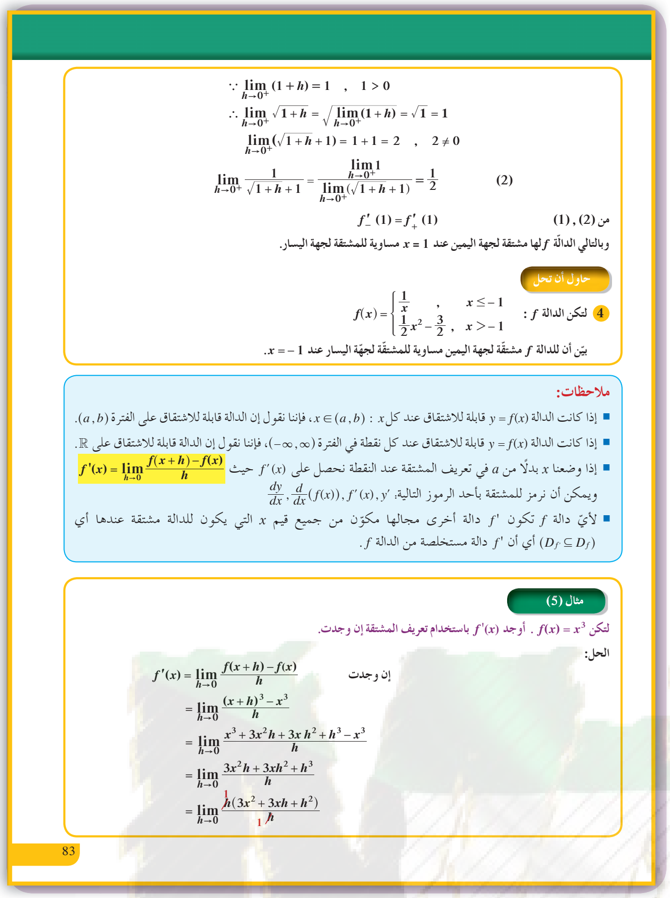
$\therefore$ ميل المستقيم موجب.

2 قياس الزاوية = صفر

3 قياس الزاوية بين 90° و 180°

$\therefore \tan\theta < 0$

4 عند نقطة معينة الميل ثابت لكنه يتغير مع تغير النقطة.



$\because \lim_{h\to 0^+}(1+h) = 1 \quad , \quad 1 > 0$

$\therefore \lim_{h\to 0^+}\sqrt{1+h} = \sqrt{\lim_{h\to 0^+}(1+h)} = \sqrt{1} = 1$

$\lim_{h\to 0^+}(\sqrt{1+h}+1) = 1 + 1 = 2 \quad , \quad 2 \ne 0$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{1+h}+1} = \frac{\lim_{h\to 0^+} 1}{\lim_{h\to 0^+}(\sqrt{1+h}+1)} = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

من (1), (2) $\quad f'_-(1) = f'_+(1)$

وبالتالي الدالّة f لها مشتقة لجهة اليمين عند $x = 1$ مساوية للمشتقة لجهة اليسار.

حاول أن تحل

4 لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \ , & x \le -1 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2} \ , & x > -1 \end{cases}$

بيّن أن للدالة f مشتقّة لجهة اليمين مساوية للمشتقّة لجهّة اليسار عند $x = -1$.

ملاحظات:

- إذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق عند كل x : $x \in (a , b)$، فإننا نقول إن الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (a , b).
- إذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق عند كل نقطة في الفترة $(-\infty , \infty)$، فإننا نقول إن الدالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
- إذا وضعنا x بدلًا من a في تعريف المشتقة عند النقطة نحصل على $f'(x)$ حيث $\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$
  ويمكن أن نرمز للمشتقة بأحد الرموز التالية: $y', f'(x), \frac{d}{dx}(f(x)), \frac{dy}{dx}$
- لأيّ دالة f تكون f' دالة أخرى مجالها مكوّن من جميع قيم x التي يكون للدالة مشتقة عندها أي $(D_{f'} \subseteq D_f)$ أي أن f' دالة مستخلصة من الدالة f.

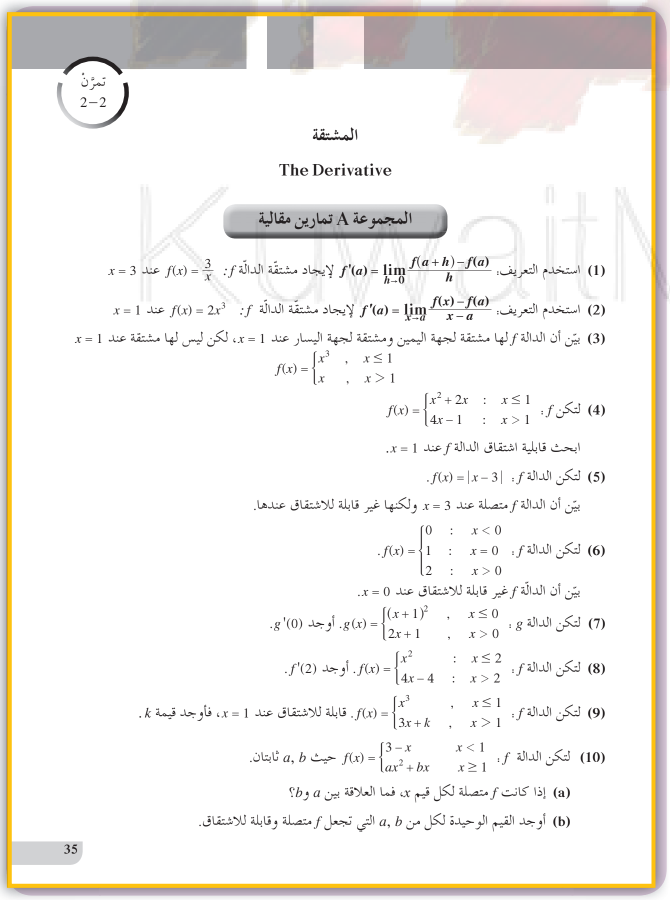
مثال (5)

لتكن $f(x) = x^3$. أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة إن وجدت.

الحل:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{إن وجدت}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^3 + 3x^2h + 3x\,h^2 + h^3 - x^3}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(3x^2 + 3xh + h^2)}{\cancel{h}}$$

83



تمرَّنْ 2-2

المشتقة

The Derivative

المجموعة A تمارين مقالية

(1) استخدم التعريف: $f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ لإيجاد مشتقّة الدالّة f: $f(x) = \frac{3}{x}$ عند $x = 3$

(2) استخدم التعريف: $f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ لإيجاد مشتقّة الدالّة f: $f(x) = 2x^3$ عند $x = 1$

(3) بيّن أن الدالة f لها مشتقة لجهة اليمين ومشتقة لجهة اليسار عند $x = 1$، لكن ليس لها مشتقة عند $x = 1$

$f(x) = \begin{cases} x^3 \ , & x \le 1 \\ x \ , & x > 1 \end{cases}$

(4) لتكن f: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & : x \le 1 \\ 4x - 1 & : x > 1 \end{cases}$

ابحث قابلية اشتقاق الدالة f عند $x = 1$.

(5) لتكن الدالة f: $f(x) = |x - 3|$.

بيّن أن الدالة f متصلة عند $x = 3$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عندها.

(6) لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ 1 & : x = 0 \\ 2 & : x > 0 \end{cases}$.

بيّن أن الدالّة f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$.

(7) لتكن الدالة g: $g(x) = \begin{cases} (x+1)^2 \ , & x \le 0 \\ 2x + 1 \ , & x > 0 \end{cases}$. أوجد $g'(0)$.

(8) لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x^2 & : x \le 2 \\ 4x - 4 & : x > 2 \end{cases}$. أوجد $f'(2)$.

(9) لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x^3 \ , & x \le 1 \\ 3x + k \ , & x > 1 \end{cases}$. قابلة للاشتقاق عند $x = 1$، فأوجد قيمة k.

(10) لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} 3 - x & x < 1 \\ ax^2 + bx & x \ge 1 \end{cases}$ حيث a, b ثابتان.

(a) إذا كانت f متصلة لكل قيم x، فما العلاقة بين a و b؟

(b) أوجد القيم الوحيدة لكل من a, b التي تجعل f متصلة وقابلة للاشتقاق.

35

«حاول أن تحل»

1 $f'(-2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} (3h - 12) = -12 \;;\; f'(-2) = -12$

2 $f'(b) = \lim\limits_{x\to b} \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim\limits_{x\to b} \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{b}}{x - b}$

$= \lim\limits_{x\to b} \dfrac{b - x}{bx(x - b)} = -\dfrac{1}{b^2}$

3 $f'_-(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = -1$

$f'_+(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = 1$

$f'_-(2) \neq f'_+(2)$

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 2$.

4 $f'_-(-1) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\frac{1}{x} + 1}{x + 1} = -1$

$f'_+(-1) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2} + 1}{x + 1} = -1$

$\therefore\; f'_-(-1) = f'_+(-1) = -1$

$\therefore$ f قابلة للاشتقاق عند $x = -1$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

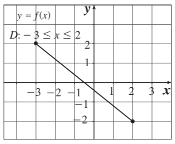
(1) إذا كانت f: $f(x) = 3x - 12$ فإن $f'(x) = 3$. (a) (b)

(2) الدالة f: $f(x) = x|x|$ غير قابلة للاشتقاق $\forall x \in \mathbb{R}$. (a) (b)

(3) إن الدالة f: $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4x - 5}$ غير قابلة للاشتقاق عندما x تساوي -1 فقط. (a) (b)

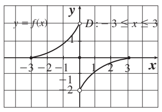
(4) الدالة f: $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & : \; x < 4 \\ x^2 - 9 & : \; x > 4 \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $x = 4$. (a) (b)

(5) إن الدالة f ذات الرسم البياني أدناه قابلة للاشتقاق على الفترة $[-3 , 2]$. (a) (b)



(6) إن الدالة f ذات الرسم البياني أدناه هي متصلة على الفترة $[-3 , 3]$

ولكن غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$ (a) (b)



في التمارين (7–12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) إن الدالة f: $f(x) = x + \sqrt{x^2} + 2$ ليست قابلة للاشتقاق عند $x = 0$ والسبب هو:

(a) ناب

(b) ركن

(c) مماس عمودي

(d) غير متصلة

$\therefore$ f قابلة للاشتقاق عند $x = -1$

$= \lim\limits_{h\to 0} (3x^2 + 3xh + h^2)$

$= 3x^2$

$\therefore\; f'(x) = 3x^2$

حاول أن تحل

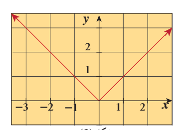
5 لتكن $f(x) = x^2 + 2$. أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة.

متى تكون $f'(a)$ غير موجودة؟

الدالة f لن يكون لها مشتقّة عند نقطة $P(a , f(a))$ إذا كانت $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ غير موجودة.

وتوضّح الأشكال التالية أربع حالات تكون فيها هذه النهاية غير موجودة:

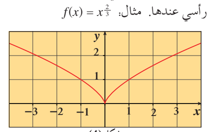
(a) ركنًا (Corner): تكون المشتقّتان من جهة اليمين ومن جهة اليسار عند التقاء الشعاعين غير متساويتين.
مثال: $f(x) = |x|$



شكل (3)

يوجد ركن عند $x = 0$، $f'(0)$ غير موجودة

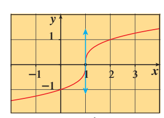
(b) نابًا (Cusp): يكون ميل المماس للمنحنى عند نقطة تقاطع محددة يقترب من ∞ في إحدى الجهات ويقترب من $-\infty$ في الجهة الثانية ويوجد مماس رأسي عندها. مثال: $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$



شكل (4)

يوجد ناب عند $x = 0$، $f'(0)$ غير موجودة ويوجد مماس رأسي عندها

(c) مماسًّا رأسيًّا: يكون المماس للمنحنى عند نقطة محددة رأسيًّا.

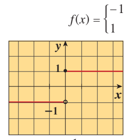


شكل (5)

يوجد مماس رأسي عند $x = 1$، $f'(1)$ غير موجودة

(d) عدم اتصال: تكون المشتقّة من جهة واحدة أو كلّ من الجهتين غير موجودة. مثال:

$f(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases}$



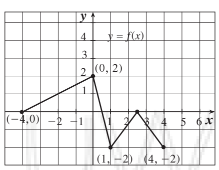
شكل (6)

يوجد عدم اتصال عند $x = 0$، $f'(0)$ غير موجودة

سوف نثبت بعد ذلك، نظرية تقول بأنه ينبغي أن تكون الدالة متصّلة عند $x = a$ كشرط لدراسة قابلية الاشتقاق عند $x = a$.

وسوف تمدنا هذه النظرية بطريقة سريعة وسهلة للتحقق من أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x = a$

(8) تكون الدالة f ذات الرسم البياني أدناه غير قابلة للاشتقاق عند كل ... $= x$



(a) $0 \; , \; 1 \; , \; 2\frac{1}{2}$ (b) $-2 \; , \; +2$

(c) $-4 \; , \; 0 \; , \; 1 \; , \; 4$ (d) $1 , 4$

(9) الدالة f القابلة للاشتقاق عند $x = 3$ فيما يلي هي:

(a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$ (b) $\sqrt{3 - x}$

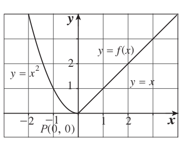
(c) $\begin{cases} 3x - 1 & : \; x \leqslant 3 \\ 1 & : \; x > 3 \end{cases}$ (d) $\sqrt[3]{x + 2}$

(10) إذا كانت $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$ فإن مجال f' هو:

(a) $\mathbb{R} - \{-2 , 2\}$ (b) $\mathbb{R} - \{-2\}$

(c) $\mathbb{R} - \{2\}$ (d) $\mathbb{R} - (-2 , 2)$

(11) في الشكل المقابل، عند النقطة P:



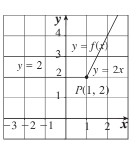
(a) المشتقة جهة اليسار موجبة.

(b) المشتقة جهة اليمين سالبة.

(c) الدالة قابلة للإشتقاق.

(d) ليس أيّ مما سبق.

(12) في الشكل المقابل، عند النقطة P:



(a) $f'_+(1) = 1$

(b) $f'_-(1) = 0$

(c) $f'_-(1) = 2$

(d) f قابلة للاشتقاق

5

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 + 2 - (x^2+2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = 2x$$

6 نبحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

$$f(2) = 4 - 4 = 0$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2 - 4) = 4 - 4 = 0$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (3x - 2) = 6 - 2 = 4$$

$$\because \lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

$\therefore$ f ليست متصلة عند $x = 2$

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 2$

7

$$\lim_{x\to\left(-\frac{1}{3}\right)^-} f(x) = -\frac{2}{3} \quad ; \quad \lim_{x\to\left(-\frac{1}{3}\right)^+} f(x) = -\frac{2}{3}$$

$$f'_-\left(-\frac{1}{3}\right) = 5 \neq f'_+\left(-\frac{1}{3}\right) = -1$$

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x = -\frac{1}{3}$

$f(2) = 2(2) - 1 = 3$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = (2)^2 = 4$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (2x - 1) = 2(2) - 1 = 3$

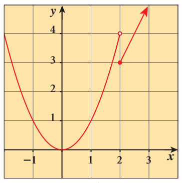
$\because \lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$

$\therefore$ f ليست متصلة عند $x = 2$

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 2$.

حاول أن تحل

6 لتكن f: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 &, x \le 2 \\ 3x - 2 &, x > 2 \end{cases}$ ، ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x = 2$.



شكل (7)

الشكل (7) يمثل بيان الدالة في مثال (6).

وفي الحقيقة أنّ الاتصال شرط جوهري لإمكانيّة وجود المشتقة، والنظرية التالية تبين العلاقة بين الاشتقاق والاتصال.

نظرية الاشتقاق والاتصال

إذا كانت الدالة f لها مشتقّة عند نقطة، فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة.

البرهان:

لتكن النقطة $(a\,,\,f(a))$ تنتمي لبيان الدالة f

علينا أن نبيّن أنّ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ أو مكافئًا لذلك أنّ: $\lim_{x\to a}[f(x) - f(a)] = 0$

باستخدام قاعدة حاصل ضرب النهايات (وملاحظة أنّ $x - a \neq 0$)،

نستطيع أن نكتب:

$$\lim_{x\to a}[f(x) - f(a)] = \lim_{x\to a}\left[(x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]$$

$$= \lim_{x\to a}(x-a) \cdot \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$= 0 \cdot f'(a)$ حيث $f'(a)$ موجودة

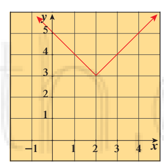
$= 0$

86

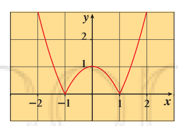
تدريب

أوجد كل النقاط في مجال الدالة حيث تكون الدالة غير قابلة للاشتقاق في كل مما يلي:

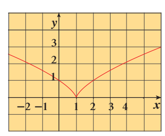
a $f(x) = |x - 2| + 3$



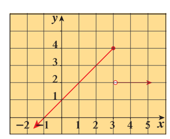
b $f(x) = |x^2 - 1|$



c $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}$



d $f(x) = \begin{cases} 2 : x > 3 \\ x + 1 : x \le 3 \end{cases}$



معلومة:

$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 : & x \le -1 \\ 1 - x^2 : & -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 : & x \ge 1 \end{cases}$

الاشتقاق والاتصال Differentiability and Continuity

نبدأ هذا الجزء بإلقاء نظرة على الطرائق العاديّة التي يمكن أن تفشل في أن تكون فيها للدالة مشتقّة عند نقطة.

كأحد الأمثلة، قد أظهرنا بيانيًّا أنّ عدم اتصال الدالة عند نقطة يسبّب عدم وجود مشتقّة للدالة عند هذه النقطة.

وعليه **إذا كانت الدالة f ليست متصلة عند نقطة $(a\,,\,f(a))$ فإنها غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.**

مثال (6)

لتكن f: $f(x) = \begin{cases} x^2 &, x < 2 \\ 2x - 1 &, x \ge 2 \end{cases}$

ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x = 2$.

الحل:

نبحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

85

معكوس النظرية ليس صحيحًا دائمًا كما رأينا سابقًا:

فالدالّة المتصلة قد يكون لها ركن أو ناب أو مماس رأسيّ، ومن ثم لا تكون قابلة للاشتقاق عند نقطة معيّنة.

مثال (7)

لتكن f: $f(x) = \begin{cases} 6x - 1 &, x > \frac{1}{2} \\ 2x + 1 &, x \le \frac{1}{2} \end{cases}$

بيّن أنّ الدالة f متصلة عند $x = \frac{1}{2}$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عندها.

الحل:

نبحث اتصال الدالة f عند $x = \frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 2$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} (6x - 1) = 6\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 2$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} (2x + 1) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 2$

$\because \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = \frac{1}{2}$

نبحث اشتقاق الدالة f عند $x = \frac{1}{2}$

$f'_+\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}}$ إن وجدت

$f'_+\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{6x - 1 - 2}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{6\cancel{\left(x - \frac{1}{2}\right)}}{\cancel{x - \frac{1}{2}}} = 6$

$f'_-\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}}$ إن وجدت

$f'_-\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{2x + 1 - 2}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{2\cancel{\left(x - \frac{1}{2}\right)}}{\cancel{x - \frac{1}{2}}} = 2$

$\therefore f'_-\left(\frac{1}{2}\right) \neq f'_+\left(\frac{1}{2}\right)$

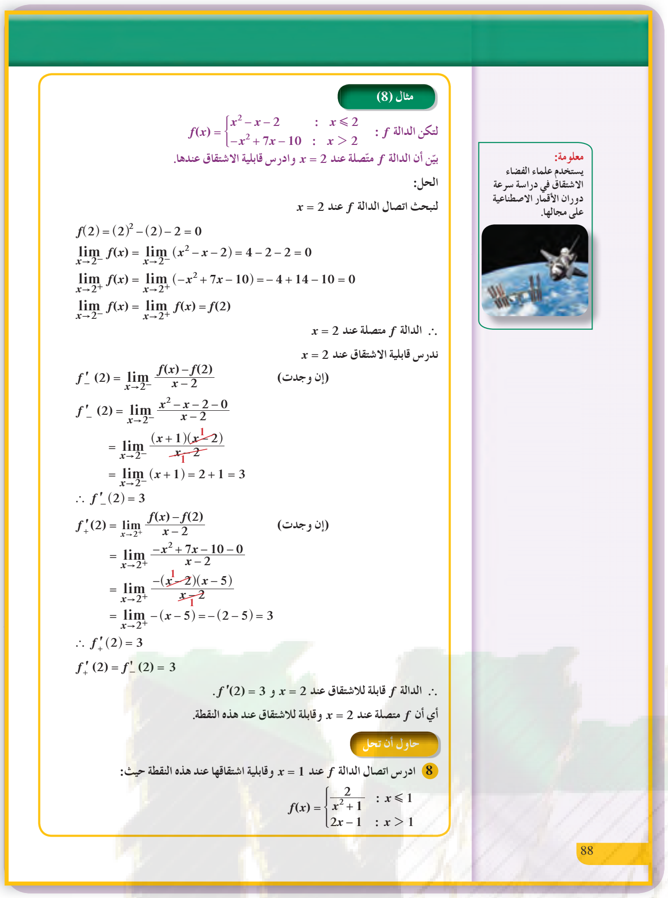
أي أن f متصلة عند $x = \frac{1}{2}$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند $x = \frac{1}{2}$

حاول أن تحل

7 لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} -x - 1 : & x > \frac{-1}{3} \\ 5x + 1 : & x \le \frac{-1}{3} \end{cases}$

بيّن أنّ الدالة f متصلة وغير قابلة للاشتقاق عند $x = -\frac{1}{3}$

87



مثال (8)

لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases} x^2-x-2 & : x\leqslant 2 \\ -x^2+7x-10 & : x>2 \end{cases}$

بيّن أن الدالة f متّصلة عند $x=2$ وادرس قابلية الاشتقاق عندها.

الحل:

لنبحث اتصال الدالة f عند $x=2$

$f(2)=(2)^2-(2)-2=0$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-x-2)=4-2-2=0$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(-x^2+7x-10)=-4+14-10=0$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$

∴ الدالة f متصلة عند $x=2$

ندرس قابلية الاشتقاق عند $x=2$

$f'_-(2)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ (إن وجدت)

$f'_-(2)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x^2-x-2-0}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{(x+1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}$

$=\lim\limits_{x\to 2^-}(x+1)=2+1=3$

$\therefore f'_-(2)=3$

$f'_+(2)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ (إن وجدت)

$=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{-x^2+7x-10-0}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{-\cancel{(x-2)}(x-5)}{\cancel{x-2}}$

$=\lim\limits_{x\to 2^+}-(x-5)=-(2-5)=3$

$\therefore f'_+(2)=3$

$f'_+(2)=f'_-(2)=3$

∴ الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x=2$ و $f'(2)=3$.

أي أن f متصلة عند $x=2$ وقابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

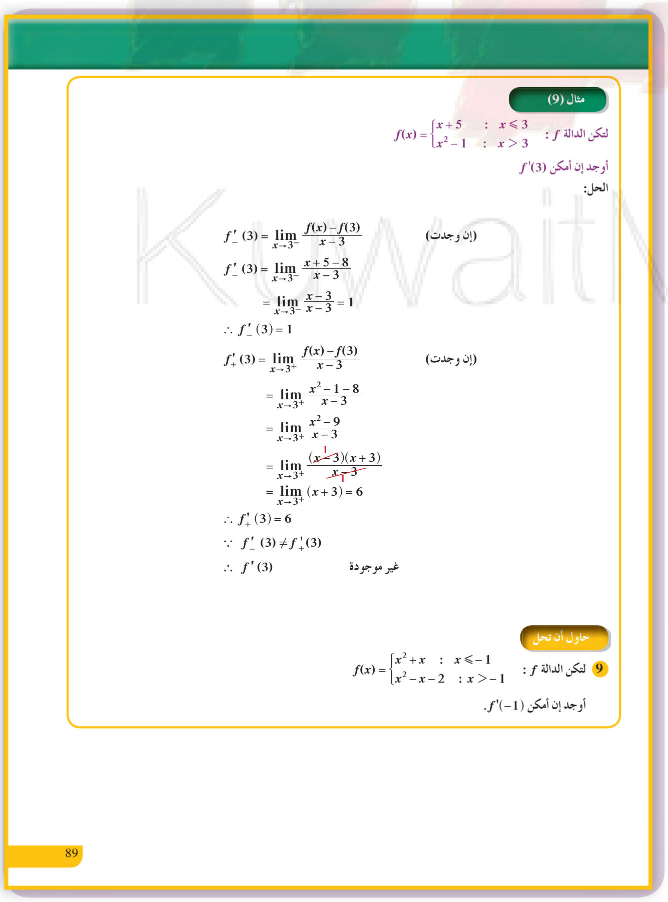
معلومة: يستخدم علماء الفضاء الاشتقاق في دراسة سرعة دوران الأقمار الاصطناعية على مجالها.

حاول أن تحل

8 ادرس اتصال الدالة f عند $x=1$ وقابلية اشتقاقها عند هذه النقطة حيث:

$f(x)=\begin{cases} \frac{2}{x^2+1} & : x\leqslant 1 \\ 2x-1 & : x>1 \end{cases}$

88



مثال (9)

لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases} x+5 & : x\leqslant 3 \\ x^2-1 & : x>3 \end{cases}$

أوجد إن أمكن $f'(3)$

الحل:

$f'_-(3)=\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ (إن وجدت)

$f'_-(3)=\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x+5-8}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x-3}{x-3}=1$

$\therefore f'_-(3)=1$

$f'_+(3)=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ (إن وجدت)

$=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x^2-1-8}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}$

$=\lim\limits_{x\to 3^+}(x+3)=6$

$\therefore f'_+(3)=6$

$\because f'_-(3)\neq f'_+(3)$

$\therefore f'(3)$ غير موجودة

حاول أن تحل

9 لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases} x^2+x & : x\leqslant -1 \\ x^2-x-2 & : x>-1 \end{cases}$

أوجد إن أمكن $f'(-1)$.

89

8 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1=f(1)$

f دالة متصلة عند $x=1$

$f'_-(1)=-1$; $f'_+(1)=2$

$\because f'_-(1)\neq f'_+(1)$

∴ f متصلة عند $x=1$ وغير قابلة للاشتقاق عند $x=1$

9 $f'_-(-1)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{x^2+x-0}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to(-1)^-} x=-1$

$f'_-(-1)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{x^2-x-2-0}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{(x+1)(x-2)}{x+1}=-3$

$\because f'_-(-1)\neq f'_+(-1)$

∴ $f'_-(-1)$ غير موجودة.

«تدريب»

(a) $x=2$

(b) $x=-1$; $x=1$

(c) $x=1$

(d) $x=3$

3–2: قواعد الاشتقاق

1 الأهداف

- يوجد مشتقات دوال:
  – الثابتة.
  – القوى الصحيحة الموجبة.
  – الضرب في عدد ثابت.
  – الجمع والطرح.
  – الضرب والقسمة.
  – القوى الصحيحة السالبة للمتغيّر x .
- يكتب معادلة المماس ومعادلة الناظم عند نقطة على منحنى الدالة.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

قاعدة – مشتقة ثابت – مشتقة قوى صحيحة موجبة – مشتقة قوى صحيحة سالبة – مشتقة الضرب بعدد ثابت – مشتقة الجمع والطرح – مشتقة الضرب والقسمة.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

أوجد مشتقة الدوال التالية بالتعريف.

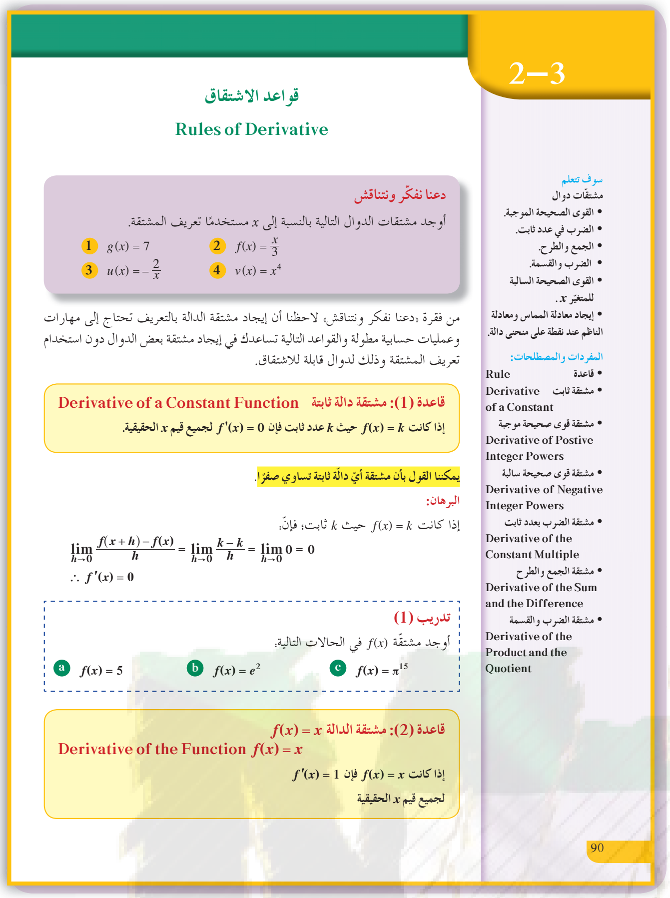
(a) $f(x) = 5$ **(b)** $f(x) = x$

(c) $f(x) = x^2$

5 التدريس

إحدى الطرائق لبدء هذا الدرس هي مناقشة مشتقات دوال خطّية. ينبغي أن يفهم الطلاب بسهولة هذه المناقشة، والنتائج هي أمثلة جيدة لتبيان أن قاعدة الأسس (القوى) صحيحة. في نهاية هذا الدرس، ينبغي أن يكون الطلاب قادرين على اشتقاق كل الدوال كثيرات الحدود والدوال النسبية.

إن تعلُّم قواعد الاشتقاق واستخداماتها الصحيحة أمر مهم وأساسي لما يتبع، بما في ذلك عملية تطبيقات المشتقات.



2–3

قواعد الاشتقاق

Rules of Derivative

سوف تتعلم

مشتقّات دوال

- القوى الصحيحة الموجبة.
- الضرب في عدد ثابت.
- الجمع والطرح.
- الضرب والقسمة.
- القوى الصحيحة السالبة للمتغيّر x.
- إيجاد معادلة المماس ومعادلة الناظم عند نقطة على منحنى دالة.

المفردات والمصطلحات:

- قاعدة Rule
- مشتقة ثابت Derivative of a Constant
- مشتقة قوى صحيحة موجبة Derivative of Postive Integer Powers
- مشتقة قوى صحيحة سالبة Derivative of Negative Integer Powers
- مشتقة الضرب بعدد ثابت Derivative of the Constant Multiple
- مشتقة الجمع والطرح Derivative of the Sum and the Difference
- مشتقة الضرب والقسمة Derivative of the Product and the Quotient

دعنا نفكّر ونتناقش

أوجد مشتقات الدوال التالية بالنسبة إلى x مستخدمًا تعريف المشتقة.

1 $g(x) = 7$ 2 $f(x) = \frac{x}{3}$

3 $u(x) = -\frac{2}{x}$ 4 $v(x) = x^4$

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» لاحظنا أن إيجاد مشتقة الدالة بالتعريف تحتاج إلى مهارات وعمليات حسابية مطولة والقواعد التالية تساعدك في إيجاد مشتقة بعض الدوال دون استخدام تعريف المشتقة وذلك لدوال قابلة للاشتقاق.

قاعدة (1): مشتقة دالة ثابتة Derivative of a Constant Function

إذا كانت $f(x) = k$ حيث k عدد ثابت فإن $f'(x) = 0$ لجميع قيم x الحقيقية.

يمكننا القول بأن مشتقة أيّ دالّة ثابتة تساوي صفرًا.

البرهان:

إذا كانت $f(x) = k$ حيث k ثابت؛ فإنّ:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$\therefore\ f'(x) = 0$$

تدريب (1)

أوجد مشتقّة $f(x)$ في الحالات التالية:

a $f(x) = 5$ b $f(x) = e^2$ c $f(x) = \pi^{15}$

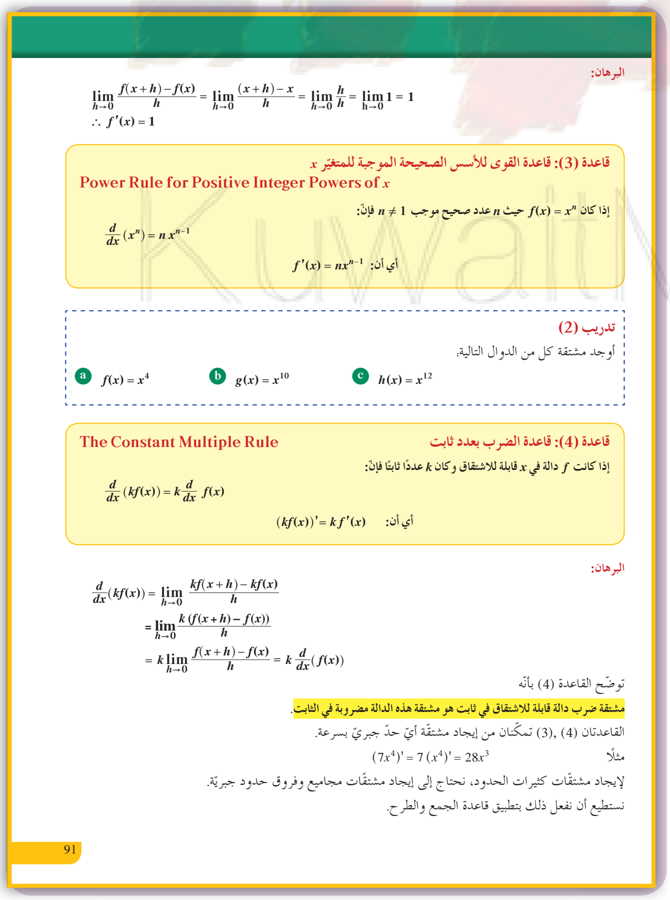
قاعدة (2): مشتقة الدالة $f(x) = x$

Derivative of the Function $f(x) = x$

إذا كانت $f(x) = x$ فإن $f'(x) = 1$

لجميع قيم x الحقيقية

90



البرهان:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

$$\therefore\ f'(x) = 1$$

قاعدة (3): قاعدة القوى للأسس الصحيحة الموجبة للمتغيّر x

Power Rule for Positive Integer Powers of x

إذا كان $f(x) = x^n$ حيث n عدد صحيح موجب $n \neq 1$ فإنّ:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n\,x^{n-1}$$

أي أن: $f'(x) = nx^{n-1}$

تدريب (2)

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a $f(x) = x^4$ b $g(x) = x^{10}$ c $h(x) = x^{12}$

قاعدة (4): قاعدة الضرب بعدد ثابت The Constant Multiple Rule

إذا كانت f دالة في x قابلة للاشتقاق وكان k عددًا ثابتًا فإنّ:

$$\frac{d}{dx}(kf(x)) = k\frac{d}{dx}\,f(x)$$

أي أن: $(kf(x))' = k\,f'(x)$

البرهان:

$$\frac{d}{dx}(kf(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{kf(x+h)-kf(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{k\,(f(x+h)-f(x))}{h}$$

$$= k\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = k\,\frac{d}{dx}(f(x))$$

توضّح القاعدة (4) بأنّه

مشتقة ضرب دالة قابلة للاشتقاق في ثابت هو مشتقة هذه الدالة مضروبة في الثابت.

القاعدتان (4) ,(3) تمكّنان من إيجاد مشتقّة أيّ حدّ جبريّ بسرعة.

مثلًا $(7x^4)' = 7\,(x^4)' = 28x^3$

لإيجاد مشتقّات كثيرات الحدود، نحتاج إلى إيجاد مشتقّات مجاميع وفروق حدود جبريّة.

نستطيع أن نفعل ذلك بتطبيق قاعدة الجمع والطرح.

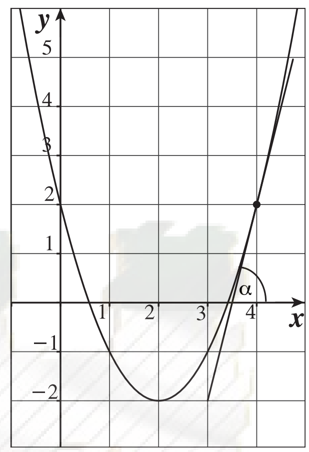
91

قد ترغب في اقتراح تعلم الطلاب القاعدة الآتية كعينة للتذكر:

مشتقة $\left(\frac{\text{البسط}}{\text{المقام}}\right)$ =

$$\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{\text{مربع المقام}}$$

أشر إلى العلاقة بين مشتقة الدالة عند نقطة وميل المماس و $\tan\alpha$، حيث α هو قياس: الزاوية التي يصنعها الاتجاه الموجب لمحور السينات مع خط المماس على منحنى الدالة.



في المثال (1)

تطبيق مباشر على اشتقاق دوال كثيرات الحدود.

في الأمثلة (2), (3), (5)

تطبيق على اشتقاق الضرب والقسمة.

في المثال (4)

تطبيق مباشر ومهم لإيجاد معادلة المماس عند نقطة لمنحنى دالة، ومنه استنتاج معادلة العمودي (الناظم) على المماس.

في المثال (6)

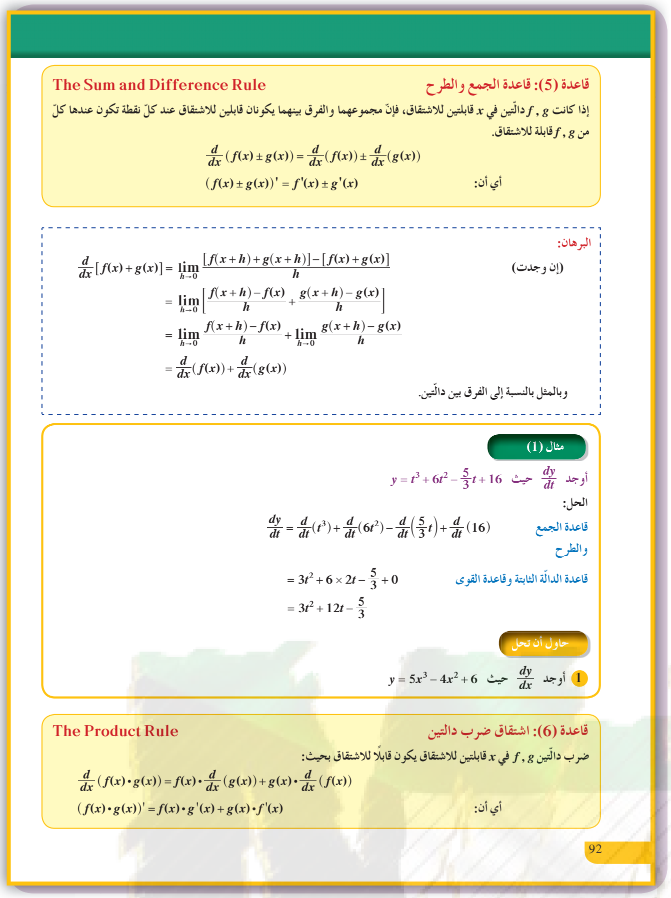
حالة خاصة حيث يمكن استخدام القسمة ثم التبسيط لإيجاد الدالة المشتقة.

في المثال (7)

إيجاد مشتقة دالة f حيث $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ (أس المتغير عدد نسبي).

في المثال (8)

إيجاد مشتقة دالة معرفة بأكثر من قاعدة.



قاعدة (5): قاعدة الجمع والطرح — The Sum and Difference Rule

إذا كانت f , g دالّتين في x قابلتين للاشتقاق، فإنّ مجموعهما والفرق بينهما يكونان قابلين للاشتقاق عند كلّ نقطة تكون عندها كلّ من f , g قابلة للاشتقاق.

$$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) \pm \frac{d}{dx}(g(x))$$

أي أن: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

البرهان:

(إن وجدت)

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$= \frac{d}{dx}(f(x))+\frac{d}{dx}(g(x))$$

وبالمثل بالنسبة إلى الفرق بين دالّتين.

مثال (1)

أوجد $\frac{dy}{dt}$ حيث $y = t^3 + 6t^2 - \frac{5}{3}t + 16$

الحل:

قاعدة الجمع والطرح: $\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3) + \frac{d}{dt}(6t^2) - \frac{d}{dt}\left(\frac{5}{3}t\right) + \frac{d}{dt}(16)$

قاعدة الدالّة الثابتة وقاعدة القوى: $= 3t^2 + 6 \times 2t - \frac{5}{3} + 0$

$= 3t^2 + 12t - \frac{5}{3}$

حاول أن تحل

1 أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y = 5x^3 - 4x^2 + 6$

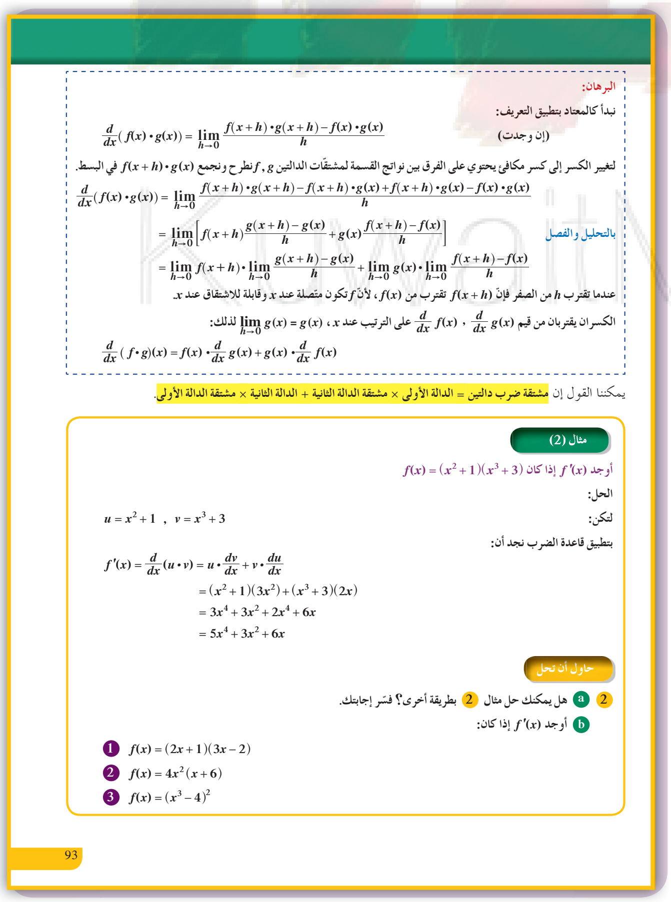
قاعدة (6): اشتقاق ضرب دالتين — The Product Rule

ضرب دالّتين f , g في x قابلتين للاشتقاق يكون قابلًا للاشتقاق بحيث:

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f(x) \cdot \frac{d}{dx}(g(x)) + g(x) \cdot \frac{d}{dx}(f(x))$$

أي أن: $(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$

92



البرهان:

نبدأ كالمعتاد بتطبيق التعريف:

(إن وجدت)

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

لتغيير الكسر إلى كسر مكافئ يحتوي على الفرق بين نواتج القسمة لمشتقّات الدالتين g , f نطرح ونجمع $f(x+h) \cdot g(x)$ في البسط.

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x+h) \cdot g(x) + f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

بالتحليل والفصل:

$$= \lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$
$$= \lim_{h\to 0} f(x+h) \cdot \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x) \cdot \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

عندما تقترب h من الصفر فإنّ $f(x+h)$ تقترب من $f(x)$، لأنّ f تكون متّصلة عند x وقابلة للاشتقاق عند x.

الكسران يقتربان من قيم $\frac{d}{dx}g(x)$ ، $\frac{d}{dx}f(x)$ على الترتيب عند x، $\lim_{h\to 0} g(x) = g(x)$ لذلك:

$$\frac{d}{dx}(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot \frac{d}{dx}g(x) + g(x) \cdot \frac{d}{dx}f(x)$$

يمكننا القول إن **مشتقة ضرب دالتين = الدالة الأولى × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الدالة الأولى.**

مثال (2)

أوجد $f'(x)$ إذا كان $f(x) = (x^2+1)(x^3+3)$

الحل:

لتكن: $u = x^2 + 1 \ , \ v = x^3 + 3$

بتطبيق قاعدة الضرب نجد أن:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(u \cdot v) = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= (x^2+1)(3x^2) + (x^3+3)(2x)$$
$$= 3x^4 + 3x^2 + 2x^4 + 6x$$
$$= 5x^4 + 3x^2 + 6x$$

حاول أن تحل

2 (a) هل يمكنك حل مثال (2) بطريقة أخرى؟ فسّر إجابتك.

(b) أوجد $f'(x)$ إذا كان:

1. $f(x) = (2x+1)(3x-2)$
2. $f(x) = 4x^2(x+6)$
3. $f(x) = (x^3-4)^2$

93

6 الربط

بفرض أن ردة فعل جسم الإنسان على جرعة من الدواء غالبًا ما يعطى بالمعادلة:

$R = M^2\left(\frac{c}{2} - \frac{M}{3}\right)$، حيث $c > 0$ كمية ثابتة وM كمية الدواء الممتصة في الدم. إذا كانت ردة الفعل تغيّرًا في ضغط الدم، فإن R تقاس بالمليمتر زئبق.

أما إذا كانت ردة الفعل تغيّرًا في درجة الحرارة، فإن R تقاس بالدرجات.

وعندما نجد التفاضل $\frac{dR}{dM}$ نكون قد عرفنا حساسية الجسم على دواء معين.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

يرتكب الطلاب الكثير من الأخطاء عندما يستخدمون قواعد الاشتقاق في تطبيق القواعد وفي تبسيط الإجابات وخاصة قواعد الضرب والقسمة. ألفت انتباه الطلاب إلى تطبيق هذه القواعد بشكل صحيح.

8 التقييم

تابع عمل الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل»، تحقق من طريقة تطبيقهم للقواعد دون أخطاء.

اختبار سريع

1. لتكن: $f(x) = x^2 + 4x + 3$.
   هل لمنحنى الدالة مماسات أفقية؟ إذا كان كذلك، فأين؟ نعم، $x = -2$

2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3}$
   (a) أوجد $f'(x)$. $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+3)^2}$
   (b) أوجد $f'(1)$. $f'(1) = \dfrac{-1}{8}$

The Quotient Rule — **قاعدة (7): قاعدة القسمة**

لتكن f, g دالتين في x قابلتين للاشتقاق حيث $g(x) \neq 0$ فإن:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}$$

أي أن:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

البرهان:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \quad \text{(إن وجدت)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)\cdot f(x+h) - f(x)\cdot g(x+h)}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)}$$

لتغيير الكسر إلى كسر متكافئ يحتوي على الفرق بين نواتج القسمة لمشتقّات الدالّتين f , g ، نطرح ونجمع $g(x)\cdot f(x)$ في البسط.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x)\cdot f(x+h) - g(x)\cdot f(x) + g(x)\cdot f(x) - f(x)\cdot g(x+h)}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)\cdot g(x)}$$

وبأخذ النهايات في البسط والمقام نحصل على قاعدة ناتج القسمة التالية:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}$$

يمكننا القول إن: مشتقة قسمة دالتين = (دالة المقام × مشتقة دالة البسط − دالة البسط × مشتقة دالة المقام) ÷ مربع دالة المقام

مثال (3)

أوجد مشتقة $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{5x^2 + 1}$

الحل:

بتطبيق قاعدة القسمة حيث: $v = 5x^2 + 1$, $u = x^3 - 1$

$$f(x) = \frac{u}{v}$$

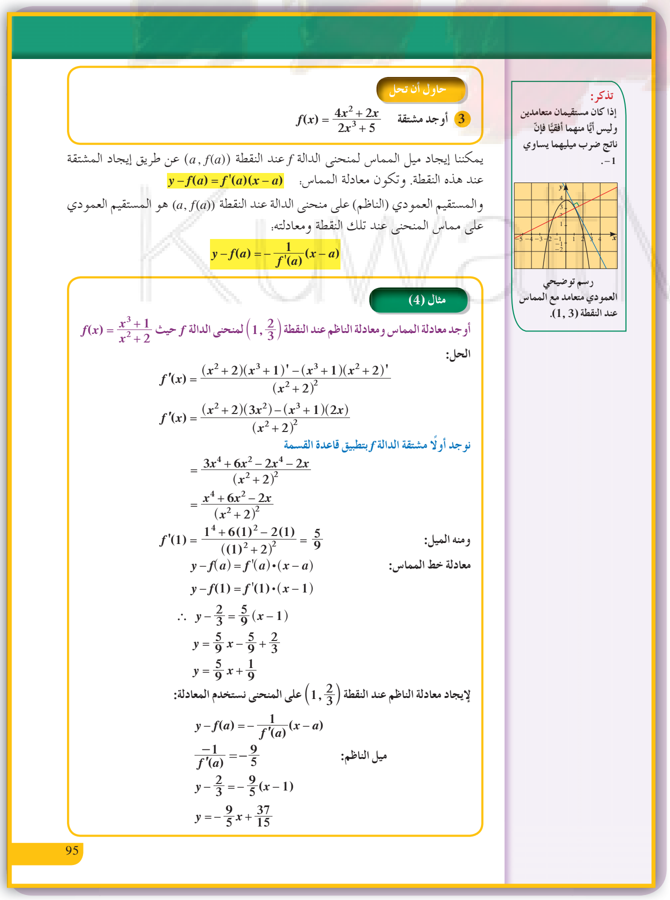
$$f'(x) = \frac{v.u' - u.v'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(5x^2+1)\cdot(3x^2) - (x^3-1)\cdot(10x)}{(5x^2+1)^2}$$

$$= \frac{15x^4 + 3x^2 - 10x^4 + 10x}{(5x^2+1)^2}$$

$$= \frac{5x^4 + 3x^2 + 10x}{(5x^2+1)^2}$$

94



حاول أن تحل

3. أوجد مشتقة $f(x) = \dfrac{4x^2 + 2x}{2x^3 + 5}$

يمكننا إيجاد ميل المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة $(a, f(a))$ عن طريق إيجاد المشتقة عند هذه النقطة. وتكون معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

والمستقيم العمودي (الناظم) على منحنى الدالة عند النقطة $(a, f(a))$ هو المستقيم العمودي على مماس المنحنى عند تلك النقطة ومعادلته:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

تذكر: إذا كان مستقيمان متعامدين وليس أيًّا منهما أفقيًّا فإنّ ناتج ضرب ميليهما يساوي -1.

رسم توضيحي العمودي متعامد مع المماس عند النقطة (1, 3).

مثال (4)

أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم عند النقطة $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ لمنحنى الدالة f حيث $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+2}$

الحل:

$$f'(x) = \frac{(x^2+2)(x^3+1)' - (x^3+1)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+2)(3x^2) - (x^3+1)(2x)}{(x^2+2)^2}$$

نوجد أولًا مشتقة الدالة f بتطبيق قاعدة القسمة

$$= \frac{3x^4 + 6x^2 - 2x^4 - 2x}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{x^4 + 6x^2 - 2x}{(x^2+2)^2}$$

ومنه الميل: $f'(1) = \dfrac{1^4 + 6(1)^2 - 2(1)}{((1)^2+2)^2} = \dfrac{5}{9}$

معادلة خط المماس: $y - f(a) = f'(a)\cdot(x - a)$

$$y - f(1) = f'(1)\cdot(x - 1)$$

$$\therefore\ y - \frac{2}{3} = \frac{5}{9}(x - 1)$$

$$y = \frac{5}{9}x - \frac{5}{9} + \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{5}{9}x + \frac{1}{9}$$

لإيجاد معادلة الناظم عند النقطة $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ على المنحنى نستخدم المعادلة:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

ميل الناظم: $\dfrac{-1}{f'(a)} = -\dfrac{9}{5}$

$$y - \frac{2}{3} = -\frac{9}{5}(x - 1)$$

$$y = -\frac{9}{5}x + \frac{37}{15}$$

95

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1 $g'(x) = 0$

2 $f'(x) = \frac{1}{3}$

3 $u'(x) = \frac{2}{x^2}$

4 $v'(x) = 4x^3$

«تدريب (1)»

(a) $f'(x) = 0$

(b) $f'(x) = 0$

(c) $f'(x) = 0$

«تدريب (2)»

(a) $f'(x) = 4x^3$

(b) $g'(x) = 10x^9$

(c) $h'(x) = 12x^{11}$

«حاول أن تحل»

1 $\frac{dy}{dx} = 15x^2 - 8x$

2 (a) نحوّل f إلى دالة كثيرة الحدود على الصورة:

$f(x) = x^5 + x^3 + 3x^2 + 3$ ثم نوجد $f'(x)$

(b) (1) $f'(x) = 12x - 1$

(2) $f'(x) = 12x^2 + 48x$

(3) $f'(x) = 6x^2(x^3 - 4)$

3 $f'(x) = \frac{-8x^4 - 8x^3 + 40x + 10}{(2x^3+5)^2}$

4 معادلة المماس $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ ،

معادلة الناظم $y = -3x + 3$

5 $f'(x) = \frac{8(x+1)}{(x^2+2x+5)^2}$

6 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = \frac{7}{4}$

7 $f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$

حاول أن تحل

4 أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم على منحنى الدالة f حيث $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ عند النقطة $(1, 0)$

نتيجة

إذا كانت g دالة قابلة للاشتقاق وكانت $g(x) \neq 0$ ، k عددًا ثابتًا فإنّ:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{k}{g(x)}\right) = \frac{-k\frac{d}{dx}(g(x))}{(g(x))^2}$$

أي أن: $\left(\frac{k}{g(x)}\right)' = \frac{-k \cdot (g'(x))}{(g(x))^2}$

البرهان:

$\because \frac{d}{dx}(k) = 0$ مشتقة دالة ثابتة

وبتطبيق قاعدة القسمة

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{k}{g(x)}\right) = \frac{g(x) \times 0 - k \cdot g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{-k \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

مثال (5)

أوجد $f'(x)$ حيث $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$

الحل:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^2+1}\right) = \frac{-3 \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-6x}{(x^2+1)^2}$$

حاول أن تحل

5 أوجد $f'(x)$ حيث $f(x) = \frac{-4}{x^2+2x+5}$

96

تمرَّنْ 2−3

قواعد الاشتقاق

Rules of Differentiation

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1−4)، أوجد: $\frac{dy}{dx}$

(1) $y = \frac{x^3}{3} - x$

(2) $y = 2x + 1$

(3) $y = x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 15$

(4) $y = 4x^{-2} - 8x + 1$

في التمرينين (5−6)، أوجد $f'(x)$:

(5) $f(x) = (x^2 - 5x + 6)(x^3 + 2x^2 + 1)$

(6) $f(x) = (2x^5 + 4)(5 - x^2)$

(7) لتكن $y = \frac{x^2+3}{x}$، أوجد $\frac{dy}{dx}$:

(a) باستخدام قاعدة القسمة.

(b) بقسمة حدود البسط على المقام أوّلًا ثم إجراء الاشتقاق.

في التمرينين (8−9)، أوجد $\frac{dy}{dx}$:

(8) $y = \frac{x^2}{1-x^3}$

(9) $y = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

(10) بفرض أنّ u , v دالّتان في x وقابلتان للاشتقاق عند $x = 0$، وأنّ

$u(0) = 5$, $u'(0) = -3$, $v(0) = -1$, $v'(0) = 2$

أوجد قيم المشتقّات التالية عند $x = 0$

(a) $(uv)'$ (b) $\left(\frac{u}{v}\right)'$ (c) $\left(\frac{v}{u}\right)'$ (d) $(7v - 2u)'$

(11) أوجد معادلة المماس للمنحنى $y = x^3 + x$ عند النقطة $(1 , 2)$.

(12) أوجد الأجزاء المقطوعة من محوري السينات والصادات بواسطة مماس منحنى الدالة $y = x^3$ عند النقطة $(-2, -8)$.

(13) أوجد معادلة المماس ومعادلة العمودي (الناظم) لمنحنى الدالة $y = \frac{8}{4+x^2}$ عند النقطة $(2 , 1)$.

(14) لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x - \frac{4}{x} & : x \geq 2 \\ x^2 - 4 & : x < 2 \end{cases}$. أوجد $f'(x)$ وعيّن مجالها.

38

8 **(a)** مجال الدالة f : $(-\infty,2]\cup(2,\infty)$

f دالة متصلة عند $x = 2$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & : \ x \in (-\infty,2) \\ \text{تبحث} & : \ x = 2 \\ 4 & : \ x \in (2,\infty) \end{cases}$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{4x - 3 - 5}{x - 2} = 4$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 + 1 - 5}{x - 2} = 4$$

$$f'_-(2) = f'_+(2) = 4$$

$$f'(2) = 4$$

$$\therefore \ f'(x) = \begin{cases} 2x & : \ x \in (-\infty,2] \\ 4 & : \ x \in (2,\infty) \end{cases}$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت $y = -x^2 + 3$ فإن $\frac{dy}{dx} = -2$ — (a) (b)

(2) إذا كانت $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{3} + x$ فإن $\frac{dy}{dx} = x^2 + \frac{2}{3}x + 1$ — (a) (b)

(3) إذا كانت $y = \frac{2x+5}{3x-2}$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{12x+11}{(3x-2)^2}$ — (a) (b)

(4) إذا كانت $y = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^3}$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x^4}$ — (a) (b)

في التمارين (5—14)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) إذا كانت $y = 1 - x + x^2 - x^3$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $-1 + 2x - 3x^2$ (b) $2 - 3x$ (c) $-6x + 2$ (d) $1 - x$

(6) إذا كانت $f(x) = 5x^3 - 3x^5$ فإن $f'(x)$ تساوي:

(a) $20x + 60x^3$ (b) $15x^2 - 15x^4$ (c) $30x - 30x^4$ (d) $30x - 60x^3$

(7) إذا كانت $y = \frac{x^2 + 5x - 1}{x^2}$ فإن $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ تساوي:

(a) $\frac{-7}{2}$ (b) -3 (c) 3 (d) $\frac{7}{2}$

(8) ميل مماس منحنى $y = x^2 + 5x$ عند $x = 3$ يساوي:

(a) 24 (b) $-\frac{5}{2}$ (c) 11 (d) 8

(9) للدالة f: $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ مماس رأسي معادلته:

(a) $x = 0$ (b) $y = 0$ (c) $x = 1$ (d) $y = 1$

(10) ميل الناظم لمنحنى الدالة $y = x^3 - 3x + 1$ عند النقطة $(2\ ,\ 3)$ هي:

(a) 9 (b) 3 (c) $-\frac{1}{3}$ (d) $\frac{-1}{9}$

(11) النقاط على منحنى الدالة $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ التي يكون المماس عندها موازيًا لمحور السينات هي:

(a) $(-1\ ,\ 27)$ (b) $(2\ ,\ 0)$
(c) $(2,0)\ ,\ (-1,27)$ (d) $(-1,27)\ ,\ (0,20)$

39

قوى x الصحيحة السالبة (الأسس الصحيحة السالبة) Negative Integer Powers of x

قاعدة اشتقاق قوى x الصحيحة السالبة هي قاعدة الاشتقاق نفسها في حالة القوى الصحيحة الموجبة كما في القاعدة (3). لذلك نستطيع الآن أن نوسّع قاعدة القوى لتشمل القوى الصحيحة السالبة باستخدام قاعدة القسمة.

قاعدة (8): قاعدة القوى للأسس الصحيحة السالبة للمتغيّر x

Power Rule for Negative Integer Powers of x

إذا كان n عددًا صحيحًا موجبًا، $x \neq 0$ فإنّ:

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -n\,x^{-n-1}$$

أي أن $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$

البرهان:

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

$$= \frac{-1 \times \frac{d}{dx}(x^n)}{(x^n)^2} \quad \text{نتيجة}$$

$$= \frac{-1 \times (n\,x^{n-1})}{(x^n)^2} \quad \text{قاعدة (3)}$$

$$= \frac{-n\,x^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$= -n\,x^{n-1-2n}$$

$$= -n\,x^{-n-1}$$

مثال (6)

لتكن: $y = \frac{x^2+3}{2x}$. أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 1$

الحل:

يمكن أن نوجد المشتقّة بقاعدة القسمة، لكن من الأيسر أن نبسّط أولًا كمجموع قوّتين للمتغيّر x :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2x} + \frac{3}{2x}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x^{-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x^{-2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x^{-2}\right]_{x=1} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

97

(12) لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & : \ x \geqslant 1 \\ 4x - 1 & : \ x < 1 \end{cases}$ فإن مجال f' هو:

(a) $\{1\}$ (b) $\mathbb{R} - \{1\}$
(c) $[1\ ,\ \infty)$ (d) $\mathbb{R}$

(13) إن معادلة المماس لمنحنى الدالة f : $f(x) = 2x^2 - 13x + 2$ عند $x = 3$ هي:

(a) $y = x - 16$ (b) $y = -x + 16$
(c) $y = -x - 13$ (d) $y = -x - 16$

(14) إذا كانت $f(2) = 3$ ، $f'(2) = 5$ عند النقطة P من الرسم البياني لدالة f فإن:

(a) معادلة خط المماس: $y = 5x + 7$

(b) معادلة الخط العمودي (الناظم): $y = -\frac{1}{5}x + 7$

(c) معادلة الخط العمودي (الناظم): $y = -\frac{1}{5}x + \frac{17}{5}$

(d) معادلة خط المماس: $y = 5x + 3$

40

(b) مجال الدالة f: $(-\infty,1)\cup[1,\infty)$

f دالة متصلة عند $x=1$

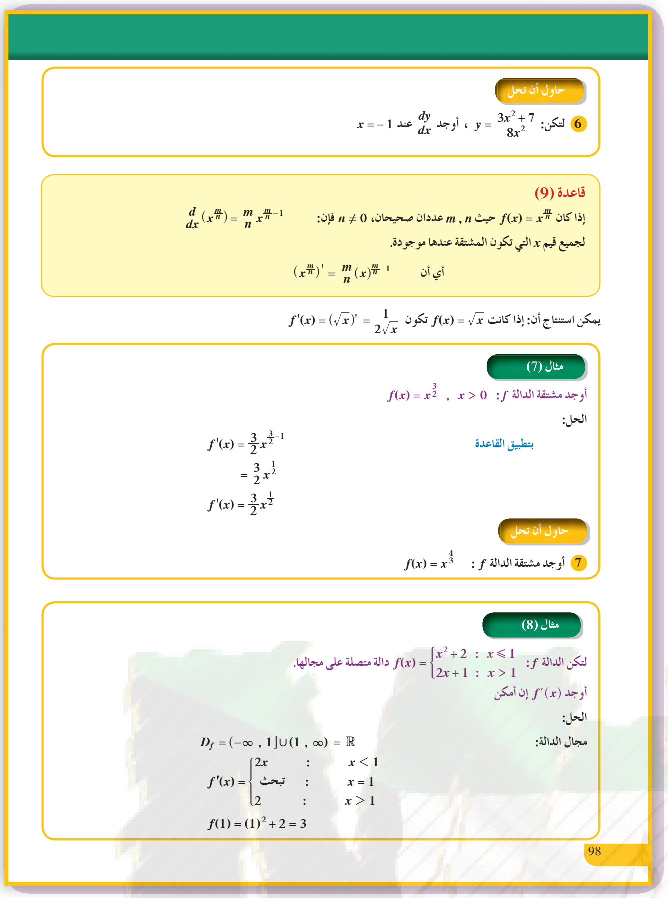
$$f'(x)=\begin{cases}2x & : x\in(-\infty,1)\\ \text{تبحث} & : x=1\\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & : x>1\end{cases}$$

$$f'_{-}(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1}=2$$

$$f'_{+}(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{2\sqrt{x}-2}{x-1}=1$$

$$f'_{-}(1)\neq f'_{+}(1)$$

$$\therefore\ f'(x)=\begin{cases}2x & : x\in(-\infty,1)\\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & : x\in(1,\infty)\end{cases}$$



حاول أن تحل

6 لتكن: $y=\frac{3x^2+7}{8x^2}$ ، أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x=-1$

قاعدة (9)

إذا كان $f(x)=x^{\frac{m}{n}}$ حيث m , n عددان صحيحان، $n\neq 0$ فإن: $\frac{d}{dx}(x^{\frac{m}{n}})=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$

لجميع قيم x التي تكون المشتقة عندها موجودة.

أي أن $(x^{\frac{m}{n}})'=\frac{m}{n}(x)^{\frac{m}{n}-1}$

يمكن استنتاج أن: إذا كانت $f(x)=\sqrt{x}$ تكون $f'(x)=(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

مثال (7)

أوجد مشتقة الدالة f: $x>0$, $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$

الحل:

بتطبيق القاعدة

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

حاول أن تحل

7 أوجد مشتقة الدالة f: $f(x)=x^{\frac{4}{3}}$

مثال (8)

لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & : x\leqslant 1\\ 2x+1 & : x>1\end{cases}$ دالة متصلة على مجالها.

أوجد $f'(x)$ إن أمكن

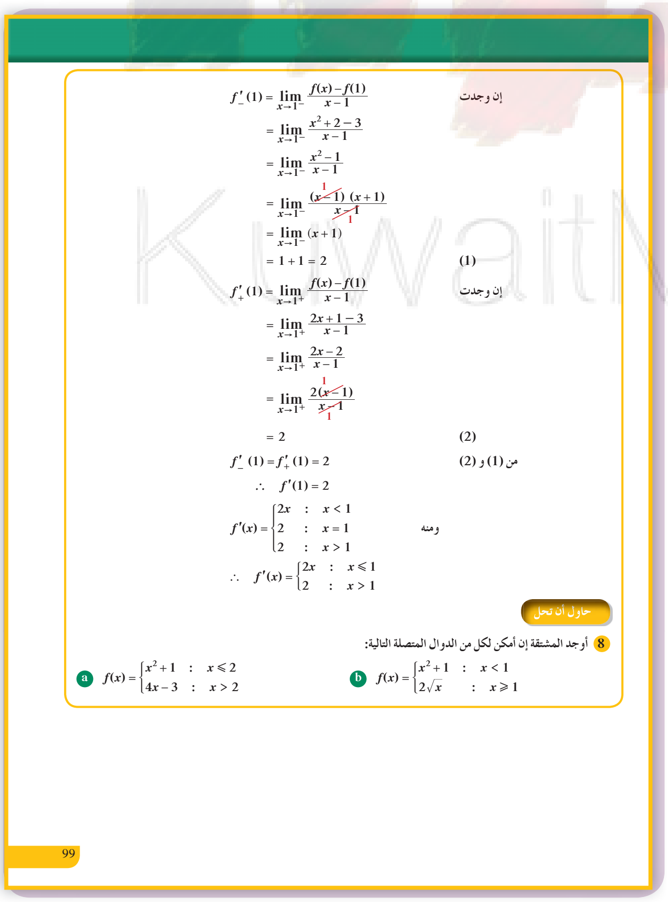
الحل:

مجال الدالة: $D_f=(-\infty , 1]\cup(1 , \infty)=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\begin{cases}2x & : x<1\\ \text{تبحث} & : x=1\\ 2 & : x>1\end{cases}$$

$$f(1)=(1)^2+2=3$$

98



إن وجدت $f'_{-}(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+2-3}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to1^-}(x+1)$$

(1) $=1+1=2$

إن وجدت $f'_{+}(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{2x+1-3}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{2x-2}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$$

(2) $=2$

من (1) و (2) $f'_{-}(1)=f'_{+}(1)=2$

$\therefore\ f'(1)=2$

ومنه $f'(x)=\begin{cases}2x & : x<1\\ 2 & : x=1\\ 2 & : x>1\end{cases}$

$$\therefore\ f'(x)=\begin{cases}2x & : x\leqslant 1\\ 2 & : x>1\end{cases}$$

حاول أن تحل

8 أوجد المشتقة إن أمكن لكل من الدوال المتصلة التالية:

a $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & : x\leqslant 2\\ 4x-3 & : x>2\end{cases}$

b $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & : x<1\\ 2\sqrt{x} & : x\geqslant 1\end{cases}$

99

2–4: مشتقات الدوال المثلثية

1 الأهداف

- يوجد مشتقة دالة الجيب.
- يوجد مشتقة دالة جيب التمام.
- يوجد مشتقات الدوال المثلثية الأخرى.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

مشتقة دالة الجيب – مشتقة دالة جيب التمام – مشتقة دالة الظل – مشتقة دالة ظل التمام – مشتقة دالة القاطع – مشتقة دالة قاطع التمام.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

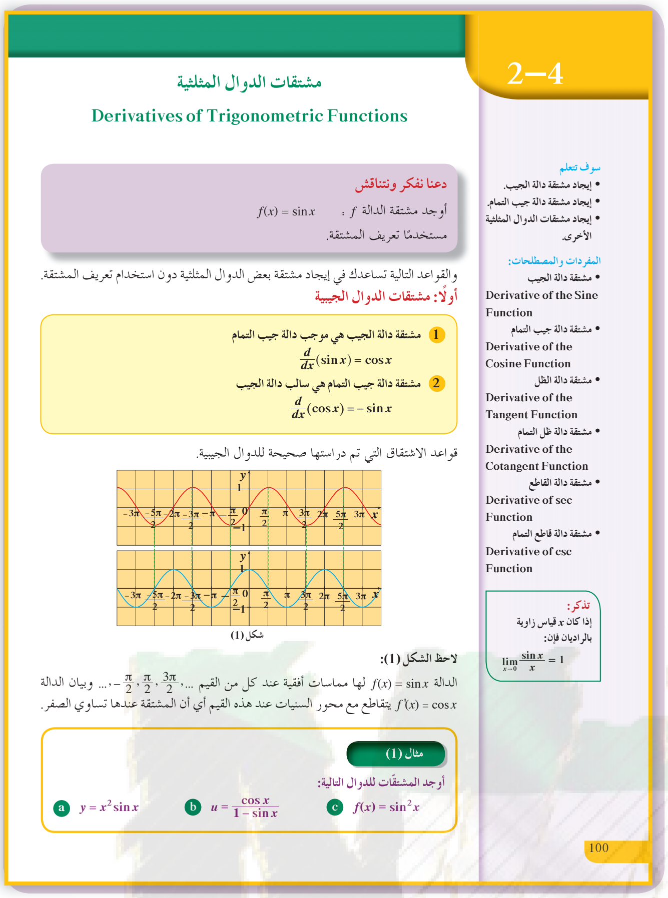
أوجد: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h}$

5 التدريس

يمكنك أن تبدأ هذا الدرس بالطلب إلى الطلاب أن يبحثوا ضمن مجموعات عن مشتقة f : $f(x) = \sin x$ من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش»، ثم أن يوجدوا بالطريقة نفسها

$$\frac{d}{dx} \cos x$$

ارتباطًا بهذا الشرح، قد ترغب في أن يعطي الطلاب قيمًا صغيرة لـ h مثل $h = 0.001$، وقيمًا أخرى أصغر، وأن يرسموا الرسم البياني لناتج قسمة الفرق: $\dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$ باستخدام الآلة الحاسبة أو الحاسوب



2–4

مشتقات الدوال المثلثية

Derivatives of Trigonometric Functions

سوف تتعلم

- إيجاد مشتقة دالة الجيب.
- إيجاد مشتقة دالة جيب التمام.
- إيجاد مشتقات الدوال المثلثية الأخرى.

المفردات والمصطلحات:

- مشتقة دالة الجيب Derivative of the Sine Function
- مشتقة دالة جيب التمام Derivative of the Cosine Function
- مشتقة دالة الظل Derivative of the Tangent Function
- مشتقة دالة ظل التمام Derivative of the Cotangent Function
- مشتقة دالة القاطع Derivative of sec Function
- مشتقة دالة قاطع التمام Derivative of csc Function

دعنا نفكر ونتناقش

أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = \sin x$ مستخدمًا تعريف المشتقة.

والقواعد التالية تساعدك في إيجاد مشتقة بعض الدوال المثلثية دون استخدام تعريف المشتقة.

أولًا: مشتقات الدوال الجيبية

1 مشتقة دالة الجيب هي موجب دالة جيب التمام

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

2 مشتقة دالة جيب التمام هي سالب دالة الجيب

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

قواعد الاشتقاق التي تم دراستها صحيحة للدوال الجيبية.

شكل (1)

تذكر: إذا كان x قياس زاوية بالراديان فإن: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

لاحظ الشكل (1):

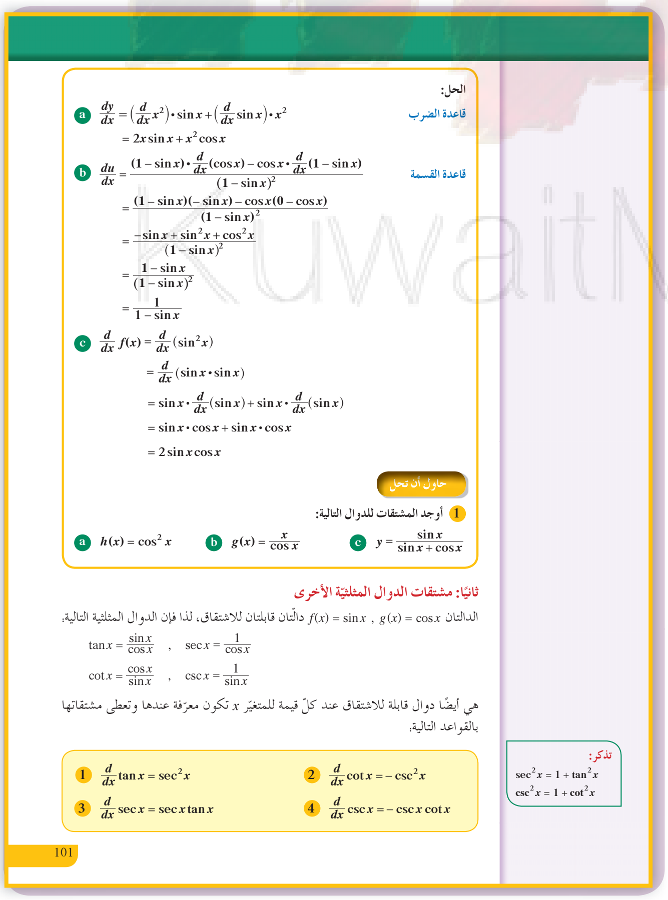
الدالة $f(x) = \sin x$ لها مماسات أفقية عند كل من القيم $\ldots, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \ldots$ وبيان الدالة $f'(x) = \cos x$ يتقاطع مع محور السينات عند هذه القيم أي أن المشتقة عندها تساوي الصفر.

مثال (1)

أوجد المشتقّات للدوال التالية:

a $y = x^2 \sin x$ b $u = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$ c $f(x) = \sin^2 x$

100



الحل:

a قاعدة الضرب

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d}{dx}x^2\right) \cdot \sin x + \left(\frac{d}{dx}\sin x\right) \cdot x^2$$
$$= 2x \sin x + x^2 \cos x$$

b قاعدة القسمة

$$\frac{du}{dx} = \frac{(1 - \sin x) \cdot \frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \cdot \frac{d}{dx}(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)^2}$$
$$= \frac{(1 - \sin x)(-\sin x) - \cos x(0 - \cos x)}{(1 - \sin x)^2}$$
$$= \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1 - \sin x)^2}$$
$$= \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)^2}$$
$$= \frac{1}{1 - \sin x}$$

c

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(\sin^2 x)$$
$$= \frac{d}{dx}(\sin x \cdot \sin x)$$
$$= \sin x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x)$$
$$= \sin x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos x$$
$$= 2 \sin x \cos x$$

حاول أن تحل

1 أوجد المشتقات للدوال التالية:

a $h(x) = \cos^2 x$ b $g(x) = \dfrac{x}{\cos x}$ c $y = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

ثانيًا: مشتقات الدوال المثلثيّة الأخرى

الدالتان $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ دالّتان قابلتان للاشتقاق، لذا فإن الدوال المثلثية التالية:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad , \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

هي أيضًا دوال قابلة للاشتقاق عند كلّ قيمة للمتغيّر x تكون معرّفة عندها وتعطى مشتقاتها بالقواعد التالية:

1 $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$ 2 $\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$

3 $\dfrac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$ 4 $\dfrac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$

تذكر:
$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$
$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

101

ينبغي أن يعرف الطلاب منحنى $y = \cos x$، $y = \sin x$.

يتم برهنة قاعدة اشتقاق $\sin x$ من تعريف المشتقة مباشرة، باستخدام نهايتين أساسيتين هما:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(\cos h) - 1}{h} = 0 \quad ، \quad \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

يمكن الحصول على قاعدة اشتقاق $\cos x$ بطريقة مماثلة.

قد ترغب في أن تبرز الدور المهم لقوانين مجموع زاويتين في حالتي $\sin(a+b)$ و $\cos(a+b)$ في هذه الاشتقاقات.

يمكن أن تعرض قواعد اشتقاق الدوال المثلثية الأربع الأساسية الأخرى بسهولة باستخدام المتطابقات وقواعد اشتقاق دوال الجيب وجيب التمام.

يمكنك أن تلخص الدرس بتقديم جدول يعرض مشتقات الدوال المثلثية الأساسية.

اطلب إلى الطلاب أن يناقشوا طرائق مختلفة لتذكر هذه المشتقات.

6 الربط

لا يوجد.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

ينسى الطلاب أحيانًا أو يطبقون خطأ المتطابقات المثلثية الأساسية وقد ترغب في مراجعة متطابقات فيثاغورث، مجموع الزوايا، نصف الزاوية. عند استخدام حاسبة بيانية أو حاسوب، قد ينسى الطلاب أحيانًا استخدام مقياس الراديان أو إدخال تعبيرات مثل $\cos x^2$ بصورة $(\cos x)^2$.

مثال (2)

أوجد مشتقات الدوال التالية:

a $f(x) = \tan x + \cot x$ b $g(x) = \sec x \cdot (1 + \sin x)$ c $h(x) = \csc x + \sin x \cdot \tan x$

الحل:

a $f(x) = \tan x + \cot x$

$f'(x) = \sec^2 x + (-\csc^2 x) = \sec^2 x - \csc^2 x$

b $g(x) = \sec x \cdot (1 + \sin x)$

$g'(x) = (1 + \sin x)(\sec x \cdot \tan x) + \sec x \cdot \cos x = \sec x \cdot \tan x + \sec x \cdot \tan x \cdot \sin x + 1$

c $h(x) = \csc x + \sin x \cdot \tan x$

$h'(x) = -\csc x \cdot \cot x + \tan x \cdot \cos x + \sec^2 x \cdot \sin x$

حاول أن تحل

2 أوجد مشتقات الدوال التالية:

a $f(x) = \frac{1 + \tan x}{\tan x}$ b $g(x) = \sec + \csc x$ c $h(x) = \frac{\sec x}{\csc x}$

مثال (3)

أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \tan x$ عند النقطة $P\left(\frac{\pi}{4} , 1\right)$

الحل:

نوجد أوّلًا مشتقة الدالة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} = \sec^2 \frac{\pi}{4} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

وعليه ميل المستقيم العمودي للمنحنى عند $P\left(\frac{\pi}{4} , 1\right)$

هو $m_1 = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{2}$

معادلة المستقيم العمودي:

$$y - 1 = \frac{-1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = \frac{-1}{2}x + \frac{\pi}{8} + 1$$

حاول أن تحل

3 أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \sec x$ عند النقطة $F\left(\frac{\pi}{3} , 2\right)$

102

تمرَّنْ 2−4

مشتقّات الدوال المثلّثيّة

Derivatives of Trigonometric Functions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1−4)، أوجد $\frac{dy}{dx}$

(1) $y = 2\sin x - \tan x$ (2) $y = 4 - x^2 \sin x$

(3) $y = \frac{\cot x}{1 + \cot x}$ (4) $y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

(5) أوجد مشتقة الدالة $y = \frac{\tan x}{x}$ عند $x = \frac{\pi}{4}$.

(6) أثبت أن منحنى كل من الدالتين $y = \frac{1}{\cos x}$, $y = \cos x$ له مماس أفقيّ عند $x = 0$

(7) لتكن: $y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sin x} + \cot x$، أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة عند $P\left(\frac{\pi}{4} , 4\right)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1−4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت $y = 1 + x - \cos x$ فإن $\frac{dy}{dx} = 1 + \sin x$ (a) (b)

(2) إذا كانت $y = \frac{4}{\cos x}$ فإن $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{\cos^2 x}$ (a) (b)

(3) ميل المماس لمنحنى الدالة $y = \sin x + 3$ عند $x = \pi$ هو 1 (a) (b)

(4) إن منحنى الدالة $y = \tan x$ ومنحنى الدالة $y = \cot x$ ليست لهما مماسات أفقية. (a) (b)

في التمارين (5−9)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) إذا كانت $y = \frac{1}{x} + 5\sin x$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $-\frac{1}{x^2} - 5\cos x$ (b) $\frac{1}{x^2} + 5\cos x$

(c) $-\frac{1}{x^2} + 5\cos x$ (d) $\frac{1}{x^2} - 5\cos x$

(6) إذا كانت $f(x) = 3x + x\tan x$ فإن $f'(0)$ يساوي:

(a) -3 (b) 0 (c) 1 (d) 3

41

8 التقييم

تابع عمل الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل» للتحقق من مدى استيعابهم وفهمهم لما ورد في هذا الدرس.

اختبار سريع

أوجد مشتقة كلّ من الدوال التالية:

1. $f_1(x) = \sin x + x\cos x$

   $f_1'(x) = 2\cos x - x\sin x$

2. $f_2(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

   $f_2'(x) = \dfrac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$

3. $f_3(x) = \dfrac{\tan x}{1 + x}$

   $f_3'(x) = \dfrac{(1+x)\sec^2 x - \tan x}{(1+x)^2}$

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h\to 0} \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)$$

$$= 1 \cdot \cos x = \cos x$$

حل آخر:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos h + \cos x\sin h - \sin(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin x\cos h - \sin x + \cos x\sin h}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} \cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right)$$

$$\lim_{h\to 0} \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h\to 0} \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$= \sin x \times 0 + \cos x \times 1 = \cos x$$

(7) إذا كانت $y = \dfrac{x}{1+\cos x}$ فإن $\dfrac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $-\dfrac{x\sin x}{(1+\cos x)^2}$ (b) $\dfrac{1+\cos x - x\sin x}{(1+\cos x)^2}$

(c) $\dfrac{1+\cos x - x\sin x}{1+\cos^2 x}$ (d) $\dfrac{1+\cos x + x\sin x}{(1+\cos x)^2}$

(8) معادلة المستقيم العمودي على المماس لبيان الدالة $y = 2\cos x$ عند النقطة $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ هي:

(a) $y = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$ (b) $y = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$

(c) $y = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$ (d) $y = -\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$

(9) إذا كانت $y = \dfrac{1}{\sin x}$ فإن y' تساوي:

(a) $\cot x \cdot \csc x$ (b) $\cos x$

(c) $-\cot x \cdot \csc x$ (d) $-\cos x$

42

«حاول أن تحل»

1. (a) $h'(x) = -2\cos x\sin x$

   (b) $g'(x) = \dfrac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}$

   (c) $y'(x) = \dfrac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$

2. (a) $f'(x) = \dfrac{-\sec^2 x}{\tan^2 x}$

   (b) $g'(x) = \sec x\ \tan x - \csc x\cot x$

   (c) $h'(x) = 1 + \tan^2 x$

3. $y = \dfrac{-\sqrt{3}}{6}x + 2 + \dfrac{\pi\sqrt{3}}{18}$

2–5: قاعدة السلسلة

1 الأهداف

- يوجد مشتقة تركيب دالتين باستخدام قاعدة السلسلة.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

قاعدة السلسلة – دالة مركبة – قاعدة سلسلة القوى.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

أوجد مشتقات الدوال التالية:

(a) $f(x) = 2x^3 - 5x$

(b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+4}$

(c) $f(x) = (2x-1)(3x+4)$

(d) $f(x) = x + \sin x$

5 التدريس

يمكن أن توفر فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» مقدمة لقاعدة السلسلة. ولأن هذين المثالين يسهل فهمهما، فإنهما يساعدان على جعل قاعدة السلسلة تبدو معقولة.

يستخدم الكتاب مدخلًا تقليديًّا لتعليم الاستخدام الصحيح لقاعدة السلسلة:

أوّلًا: يتعلّم الطلاب إيجاد مشتقة $y = f(g(x))$ بوضع $g(x)$، وحساب المشتقتين $f'(g(x))g'(x)$، ثم تطبيق قاعدة السلسلة للحصول على:

$$y' = f'(u)\ g'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$$

2–5

قاعدة السلسلة

Chain Rule

سوف تتعلم

- إيجاد مشتقة تركيب دالتين باستخدام قاعدة السلسلة.

المفردات والمصطلحات:

- قاعدة السلسلة Chain Rule
- دالة مركبة Composite Function
- قاعدة سلسلة القوى Power Chain Rule

دعنا نفكر ونتناقش

لتكن الدوال التالية:

$f(x) = 3x^2 + 1 \ , \ g(x) = x^2$

$h(x) = x^3 \ , \ q(x) = x^{10}$

أكمل ما يلي:

(a) $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2+1)$

$= (3x^2+1)^2 = 9x^4 + ... + ...$

$\dfrac{d}{dx}(g\circ f)(x) = 36x^3 + ... + ...$

(b) $(h\circ f)(x) = h(f(x)) = ...$

$= .... = ...$

$(h\circ f)'(x) = ...$

(c) $(q\circ f)(x) = ...$

هل من السهل إيجاد $(q\circ f)'$ بنفس الأسلوب السابق؟

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» لاحظنا أنه عند إيجاد مشتقة:

$(q\circ f)(x) = (3x^2+1)^{10}$

سنجد صعوبة في فك هذا المقدار.

تساعدنا القواعد التالية على إيجاد مشتقة مثل هذه الدوال.

قاعدة السلسلة (التسلسل) Chain Rule

إذا كانت الدالّة f قابلة للاشتقاق عند $g(x)$، الدالة g قابلة للاشتقاق عند x، فإن الدالة المركّبة

$(f\circ g)(x) = f(g(x))$

تكون قابلة للاشتقاق عند x، ويكون:

$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$

أي يمكننا القول إن مشتقّة الدالة المركّبة $f(g(x))$ عند x هي مشتقّة الدّالة f عند $g(x)$ مضروبة في مشتقّة الدالّة g عند x.

103

مثال (1)

إذا كان $g(x) = x^{10} \ , \ f(x) = 3x^2+1$. فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة

(a) $(f\circ g)'(x)$

(b) $(g\circ f)'(-1)$

الحل:

قاعدة السلسلة

(a) $(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$

$f'(x) = 6x \ , \ g'(x) = 10x^9$

$f'(g(x)) = 6(x^{10}) = 6x^{10}$

$\therefore (f\circ g)'(x) = 6x^{10}\cdot 10x^9$

$= 60x^{19}$ $\qquad x^m\cdot x^n = x^{m+n}$

(b) $(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$

$= 10(f(x))^9\cdot 6x$

$= 10(3x^2+1)^9\cdot 6x$

$(g\circ f)'(-1) = -60(4)^9$

$= -15728640$

حاول أن تحل

1 (a) هل يمكنك حل مثال (1) (a) بطريقة أخرى؟ فسّر.

(b) لتكن: $g(x) = x^{13} \ , \ f(x) = -2x^3+4$ أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f\circ g)'(x)$ ، $(g\circ f)'(0)$

مثال (2)

لتكن: $g(x) = x^2+1 \ , \ (x\neq 0) \qquad f(x) = \dfrac{2x+1}{x}$

أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f\circ g)'(x)$

الحل:

$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$

$f'(x) = \dfrac{2x-(2x+1)}{x^2} = \dfrac{-1}{x^2} \quad , \quad g'(x) = 2x$

المتغير: $g(x)$

$f'(g(x)) = f'(x^2+1) = \dfrac{-1}{(x^2+1)^2}$

قاعدة السلسلة

$\therefore (f\circ g)'(x) = \dfrac{-1}{(x^2+1)^2}\cdot 2x$

$= \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

104

عندئذ تختصر العملية بالتعويض عن u والإشارة إلى $g(x)$ على أنها الدالة الداخلية.

ينبغي أن يقوم الطلاب بكثير من التدريبات على قاعدة السلسلة حتى يتمكنوا من استخدامها بصورة متقنة.

عند تقديم صيغة لايبنتز لقاعدة السلسلة، $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

أكِّد أن $\frac{dy}{dx}$ تحسب قيمتها عند $u = g(x)$، $\frac{du}{dx}$ تحسب قيمتها عند x.

في المثالين (2), (1)

تطبيق مباشر لقاعدة السلسلة.

في المثالين (5), (3)

تطبيق لقاعدة السلسلة (الصورة الأخرى).

اسأل الطلاب: هل يمكن إيجاد $\frac{dy}{dx}$ بطريقة أخرى؟

ناقش مع الطلاب الوقت والجهد اللازمين في حالة التعويض عن u في y، ثم التبسيط وإيجاد المشتقة.

في المثال (4)

استخدام مشتقة دالة لإيجاد السرعة اللحظية لجسيم يتحرك على خط مستقيم.

في المثالين (7), (6)

يبيّنان كيفية استخدام قاعدة سلسلة القوى. تأكّد من تمكّن الطلاب من المثالين، يمكنك إعطاءهم أمثلة إضافية.

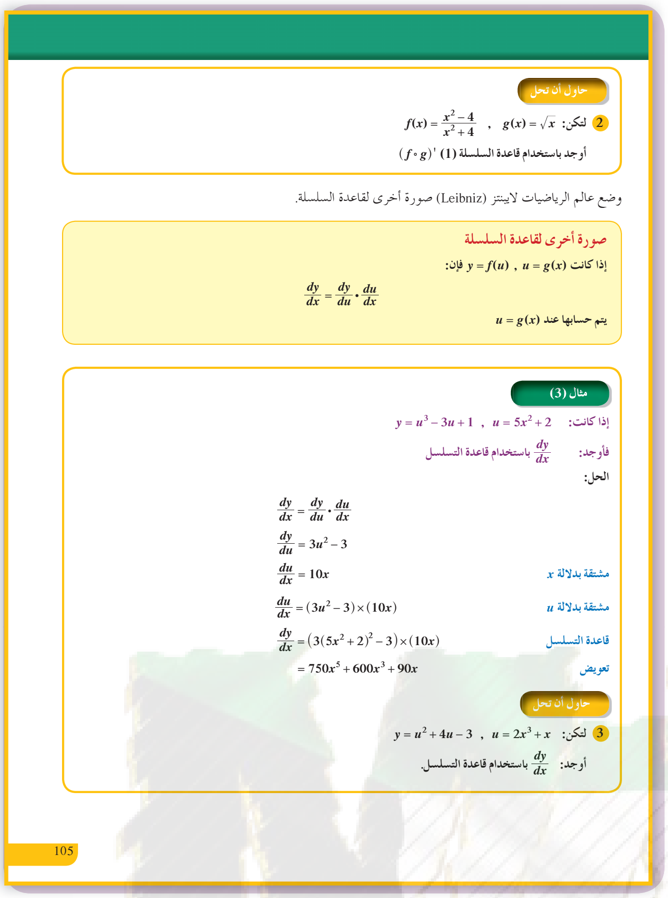
6 الربط

يشكّل المثال (4) ترابطاً مع الفيزياء وحركة الأجسام.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

في تطبيق قاعدة السلسلة الأولى لإيجاد مشتقة $f=(g(x))$، يحدث خطأ شائع بإغفال العامل $g'(x)$ في الإجابة. ساعد الطلاب من خلال أمثلة متعددة على تخطي هذا الخطأ.

حثّ الطلاب على القيام بالكثير من التدريبات على تمارين شبيهة بالمثال (3).



حاول أن تحل

2 لتكن: $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$

أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(1)$

وضع عالم الرياضيات لايبنتز (Leibniz) صورة أخرى لقاعدة السلسلة.

صورة أخرى لقاعدة السلسلة

إذا كانت $u = g(x)$, $y = f(u)$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

يتم حسابها عند $u = g(x)$

مثال (3)

إذا كانت: $u = 5x^2 + 2$, $y = u^3 - 3u + 1$

فأوجد: $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل

الحل:

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$\frac{dy}{du} = 3u^2 - 3$

مشتقة بدلالة x — $\frac{du}{dx} = 10x$

مشتقة بدلالة u — $\frac{du}{dx} = (3u^2 - 3) \times (10x)$

قاعدة التسلسل — $\frac{dy}{dx} = \left(3(5x^2+2)^2 - 3\right) \times (10x)$

تعويض — $= 750x^5 + 600x^3 + 90x$

حاول أن تحل

3 لتكن: $u = 2x^3 + x$, $y = u^2 + 4u - 3$

أوجد: $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

105

مثال (4)

يتحرّك جسيم على محور السينات بحيث إن موضعه عند أيّ لحظة $t \geq 0$ يعطى بالدالّة: $S = \cos(t^2+1)$. أوجد السرعة اللحظية للجسيم كدالة في t.

الحل:

نعلم أن: $v = \frac{dS}{dt}$ (v هي السرعة اللحظية)

في هذه الحالة S دالّة مركّبة، حيث: $u = t^2 + 1$, $S = \cos(u)$

لدينا:

$S = \cos(u)$ — $\frac{dS}{du} = -\sin(u)$

$u = t^2 + 1$ — $\frac{du}{dt} = 2t$

باستخدام قاعدة السلسلة:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{du} \cdot \frac{du}{dt}$$
$$= (-\sin(u)) \cdot 2t$$
$$= (-\sin(t^2+1)) \cdot 2t$$
$$= -2t\sin(t^2+1)$$

حاول أن تحل

4 أوجد مشتقة $y = \sin(x^2 + x)$ بالنسبة إلى المتغيّر x.

من مثال (4) يمكن إيجاد المشتقة باستخدام القاعدة التالية:

$\frac{d}{dx}(\cos f(x)) = -\sin f(x) \cdot f'(x)$ ويمكن تعميمها على الدوال المثلثية الأخرى.

مثال (5)

أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = \sin^3 x$ باستخدام قاعدة السلسلة.

الحل:

نفرض أن: $g(x) = \sin x$, $h(x) = x^3$

$\therefore f(x) = (h \circ g)(x)$

$f'(x) = (h \circ g)'(x)$

$= h'(g(x)) \cdot g'(x)$

$= 3(g(x))^2 \cdot \cos x$

$= 3\sin^2 x \cos x$

حاول أن تحل

5 أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = \cos^5 x$ باستخدام قاعدة السلسلة .

الربط بالفيزياء

إذا كانت $s(t)$ دالة موقع جسم بعد t ثانية من حركته فإن سرعته اللحظية v هي:

$v = \frac{ds}{dt} = s'(t)$

ملاحظة:

$v = \frac{ds}{dt}$ تسمى أيضًا السرعة المتجهة ويمكن أن تكون موجبة أو سالبة.

تذكر:

اقتصرت دراستنا على دوال قابلة للتركيب

106

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يعملون على فقرة «حاول أن تحل».
تحقق من عمل الطلاب وتأكد من فهمهم لاستخدام قاعدة السلسلة.

اختبار سريع

1 أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

$-2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

2 $f(x) = 2x + 1 \ , \ g(x) = x^2$

أوجد: $(f \circ g)'(x)$

$(f \circ g)'(x) = 4x$

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a) $(g \circ f)(x) = 9x^4 + 6x^2 + 1$

$\frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = 36x^3 + 12x + 0$

(b) $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(3x^2 + 1) = (3x^2 + 1)^3$

$(h \circ f)'(x) = 18x(3x^2 + 1)^2$

(c) $(q \circ f)(x) = q(3x^2 + 1) = (3x^2 + 1)^{10}$

كلا.

«حاول أن تحل»

طريقة أخرى:

1 **(a)** $(f \circ g)(x) = 3(x^{10})^2 + 1 = 3x^{20} + 1$

$(f \circ g)'(x) = 60x^{19}$

(b) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \bullet g'(x)$

$f'(x) = -6x^2 \ , \ g'(x) = 13x^{12} \ ,$

$f'(g(x)) = -6(x^{13})^2$

$(f \circ g)'(x) = -6(x^{13})^2 \bullet 13x^{12} = -78x^{38}$

$(g \circ f)'(x) = -78x^2(-2x^3 + 4)^{12}$

$(g \circ f)'(0) = 0$

قاعدة سلسلة القوى Chain Rule Powers

في كثير من الأحيان نحتاج إلى إيجاد مشتقة دالة ما على الصورة: $y = [f(x)]^n$ حيث n عدد نسبي.
لذلك نستخدم القاعدة التالية والمسماة بقاعدة سلسلة القوى:

قاعدة سلسلة القوى

إذا كانت $f(x)$ قابلة للاشتقاق على مجالها وكان n عددًا نسبيًّا فإن:

$$\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1} \bullet f'(x)$$

مثال (6)

لنأخذ: $y = \sqrt[5]{(x^2 + 3x + 5)^3}$ ، أوجد: y'

الحل:

$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

$$y = \sqrt[5]{(x^2 + 3x + 5)^3}$$
$$= (x^2 + 3x + 5)^{\frac{3}{5}}$$
$$y' = \frac{3}{5}(x^2 + 3x + 5)^{\frac{3}{5} - 1} \bullet (2x + 3)$$
$$= \frac{3}{5}(x^2 + 3x + 5)^{-\frac{2}{5}} \bullet (2x + 3)$$
$$= \frac{3(2x + 3)}{5\sqrt[5]{(x^2 + 3x + 5)^2}}$$

حاول أن تحل

6 لتكن: $y = \sqrt[4]{(2x^4 - 3x^2 + 4)^3}$ ، أوجد: y'

مثال (7)

أوجد ميل مماس المنحنى $y = \sin^5 x$ عند $x = \frac{\pi}{3}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 5\sin^4 x(\sin x)' = 5\sin^4 x \bullet \cos x$$

ميل المماس هو:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{3}} = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{45}{32}$$

حاول أن تحل

7 بيّن أن ميل أي مماس للمنحنى $y = \frac{1}{(-2x-1)^3}$ دائمًا يكون موجبًا حيث $x \neq -\frac{1}{2}$

107

تمرَّنْ 2–5

قاعدة السلسلة

Chain Rule

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–3)، أوجد $(f \circ g)'(x)$.

(1) $f(x) = 2x + 1 \ , \ g(x) = 3x^2$

(2) $f(x) = \frac{x-1}{x} \ , \ g(x) = x^2 + 1$

(3) $f(x) = 5x^2 - 1 \ , \ g(x) = x^{15}$

في التمارين (4–6)، أوجد $(f \circ g)'$ عند القيم المعطاة لـ x.

(4) $f(x) = x^5 + 1 \ , \ g(x) = \sqrt{x} \ , \ x = 1$

(5) $f(x) = x + \frac{1}{\cos^2 x} \ , \ g(x) = \pi x \ , \ x = \frac{1}{4}$

(6) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \ , \ g(x) = 10x^2 + x + 1 \ , \ x = 0$

(7) أوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

(a) $y = \cos u \ , \ u = 6x + 2$

(b) $y = 5u^3 + 4 \ , \ u = 3x^2 + 1$

(8) أوجد $\frac{ds}{dt}$، حيث $s = \sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{4}t\right)$

في التمارين (9–15)، أوجد $\frac{dy}{dx}$

(9) $y = \tan(2x - x^3)$

(10) $y = \sin(3x + 1)$

(11) $y = (\tan x + \sec x)^2$

(12) $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$

(13) $y = (1 - 6x)^{\frac{2}{3}}$

(14) $y = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

(15) $y = \sin^2(3x - 2)$

في التمرينين (16–17)، أوجد:

(a) معادلة المماس على منحنى الدالة.

(b) معادلة الخط العموديّ على المماس في النقاط المعطاة على منحنى كل دالة مما يلي.

(16) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5} \ , \ (2 \ , 3)$ عند

(17) $g(x) = (x^3 + 1)^8 \ , \ (0 \ , 1)$ عند

43

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت $y = \cos(\sqrt{3}x)$ فإن $\frac{dy}{dx} = \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x)$ (a) (b)

(2) إذا كانت $y = 5\cot\left(\frac{2}{x}\right)$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{10}{x^2}\csc^2\left(\frac{2}{x}\right)$ (a) (b)

(3) إذا كانت $y = (x+\sqrt{x})^{-2}$ فإن $\frac{dy}{dx} = -2(x+\sqrt{x})^{-1}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ (a) (b)

(4) إذا كانت $s = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3t\right)$ فإن $\frac{ds}{dt} = 3\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3t\right)$ (a) (b)

في التمارين (5—9)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) إذا كانت $y = \sin^{-5}x - \cos^3 x$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $5\sin^{-6}x\cos x - 3\cos^2 x\sin x$ (b) $5\sin^{-6}x\cos x + 3\cos^2 x\sin x$

(c) $-5\sin^{-6}x\cos x - 3\cos^2 x\sin x$ (d) $-5\sin^{-6}x\cos x + 3\cos^2 x\sin x$

(6) إذا كانت $y = \frac{3}{\sqrt{2x+1}}$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $3(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$ (b) $-3(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$

(c) $-3(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$ (d) $3(2x+1)^{-1}$

(7) إذا كانت $s = \frac{4}{3\pi}\sin 3t + \frac{4}{5\pi}\cos 5t$ فإن $\frac{ds}{dt}$ تساوي:

(a) $\frac{4}{\pi}\sin 3t - \frac{4}{\pi}\cos 5t$ (b) $\frac{4}{\pi}\cos 3t + \frac{4}{\pi}\sin 5t$

(c) $\frac{4}{\pi}\cos 3t - \frac{4}{\pi}\sin 3t$ (d) $\frac{4}{\pi}\cos 3t - \frac{4}{\pi}\sin 5t$

(8) إذا كانت $r = \tan(2-\theta)$ فإن $\frac{dr}{d\theta}$ تساوي:

(a) $\sec^2(2-\theta)$ (b) $-\sec^2(2-\theta)$

(c) $\sec^2(\theta+2)$ (d) $\sec(2-\theta)$

(9) إذا كانت $f(u) = \cot\frac{\pi u}{10}$ و $u = g(x) = 5\sqrt{x}$ فإن $(f\circ g)'$ عند $x = +1$ تساوي:

(a) $\frac{3\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{4}$

(c) $-\frac{\pi}{4}$ (d) $-\frac{3\pi}{4}$

44

2 $f'(x) = \frac{16x}{(x^2+4)^2}$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$(f\circ g)'(x) = \frac{16\sqrt{x}}{(x+4)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{8}{(x+4)^2}$$

$$(f\circ g)'(1) = \frac{8}{25}$$

3 $\frac{dy}{du} = 2u+4$; $\frac{du}{dx} = 6x^2+1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = (2(2x^3+x)+4)\cdot(6x^2+1)$$

$$= 24x^5 + 16x^3 + 24x^2 + 2x + 4$$

4 $\frac{dy}{dx} = (2x+1)\cdot\cos(x^2+x)$

5 $f'(x) = -5\cos^4 x\sin x$

6 $y' = \frac{3(4x^3-3x)}{2\sqrt[4]{2x^4-3x^2+4}}$

7 $y' = \frac{6}{(-2x-1)^4}$; $y' > 0$

2–6: المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني

1 الأهداف

- يوجد المشتقات من الرتب العليا.
- يوجد مشتقة بطريقة الاشتقاق الضمني.
- يثبت صحة متطابقات.

2 المفردات والمفاهيم

مشتقة ذات رتبة عليا – اشتقاق ضمني.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

إذا كانت: $g(x) = \frac{1}{x}$ ، $f(x) = x^4 - 5x^2 + 1$

فأوجد: $u(x) = g'(x)$ ، $h(x) = f'(x)$

ثم أوجد: $v(x) = u'(x)$ ، $l(x) = h'(x)$

5 التدريس

نحتاج أحيانًا في الفيزياء وغيرها إلى إيجاد مشتقة الدالة المشتقة أي المشتقة من الرتبة الثانية والتي نرمز إليها بـ $f''(x)$ وقد نحتاج أيضًا إلى إيجاد المشتقة من الرتبة الثالثة $f'''(x)$ والمشتقة من الرتبة الرابعة $f^{(4)}(x)$.

أشر إلى الفرق بين $f^4(x)$ و $f^{(4)}(x)$.

خاص للمعلم: لإيجاد $g'(x)$ و $g''(x)$، $g'''(x)$ و $g^{(4)}(x)$ حيث $g(x) = \frac{1}{x}$.

يمكن الاستنتاج أن $g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

اسأل الطلاب: إذا كان لدينا المعادلة: $x^2 + y^2 = 1$ (معادلة دائرة)، فكيف يمكننا إيجاد ميل المماس عند نقطة على هذه الدائرة؟

طرق الاشتقاق التي تعرف عليها الطلاب لا تسمح بإيجاد المشتقة في هذه الحالة ثم ميل المماس. لحل هذه الإشكالية نعرض الاشتقاق الضمني.

2–6

المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني

Higher Order Derivatives and Implicit Differentiation

سوف تتعلم
- المشتقات العليا.
- الاشتقاق الضمني.

المفردات والمصطلحات:
- مشتقة ذات رتبة عليا Higher Order Derivative
- اشتقاق ضمني Implicit Derivative

دعنا نفكر ونتناقش

لتكن: $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5$

أكمل:

1. $f'(x) = \dots = g(x)$
2. $g'(x) = \dots$

هل $g'(x) = (f'(x))'$؟

تذكر:

(a) $y = f(x)$

(b) $\frac{dy}{dx} = y'$

أولًا: المشتقات ذات الرتب العليا Higher Order Derivatives

رمزنا سابقًا لمشتقة دالة على مجالها بالرمز $y' = \frac{dy}{dx}$ والآن سوف تسمى y' المشتقة من الرتبة الأولى للدالة y بدلالة المتغير x.

والمشتقة الأولى نفسها (y') يمكن أن تكون دالة قابلة للاشتقاق على مجالها بدلالة المتغير x وبالتالي يمكن كتابتها:

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

ملاحظة: أحيانًا نستخدم قاعدة السلسلة مرتين أو أكثر لإيجاد مشتقة.

وهذه تسمى المشتقة من الرتبة الثانية للدالة y بدلالة x.

والمشتقة الثانية نفسها يمكن أن تكون دالة قابلة للاشتقاق على مجالها بدلالة المتغير x وبالتالي يمكن كتابة:

$$y''' = \frac{d(y'')}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

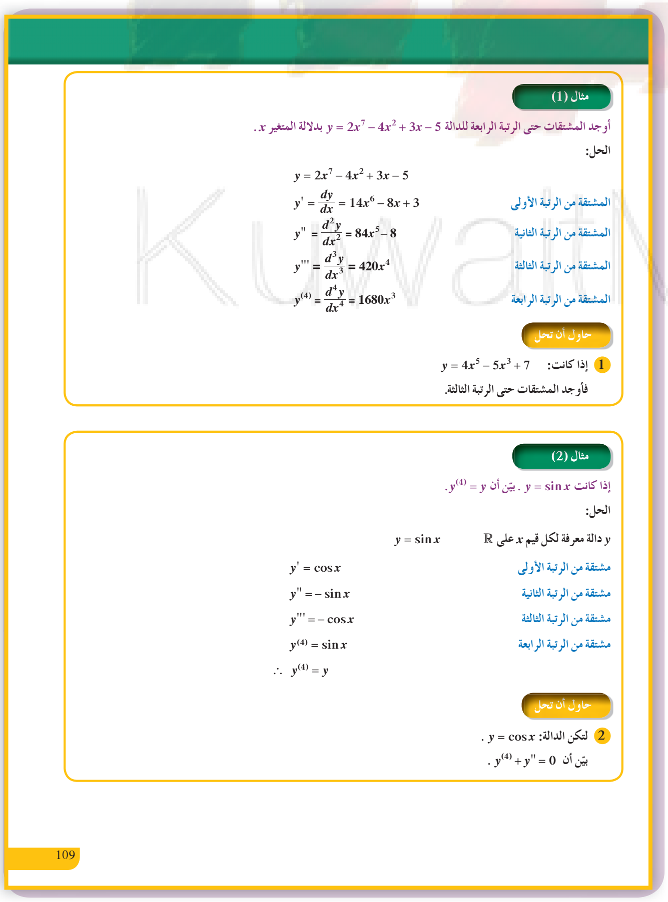
ملاحظة: لا يجب الخلط بين رتبة مشتقة الدالة $y^{(n)}$ و y^n من قوى y.

وهذه تسمى المشتقة من الرتبة الثالثة للدالة y بدلالة المتغير x.

وبصورة عامة إذا كان n عددًا صحيحًا حيث $n > 1$ فإن مشتقة الدالة y من الرتبة n بدلالة x هي على الشكل التالي:

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx}\left(y^{(n-1)}\right) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

108



مثال (1)

أوجد المشتقات حتى الرتبة الرابعة للدالة $y = 2x^7 - 4x^2 + 3x - 5$ بدلالة المتغير x.

الحل:

$y = 2x^7 - 4x^2 + 3x - 5$

المشتقة من الرتبة الأولى $y' = \frac{dy}{dx} = 14x^6 - 8x + 3$

المشتقة من الرتبة الثانية $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 84x^5 - 8$

المشتقة من الرتبة الثالثة $y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = 420x^4$

المشتقة من الرتبة الرابعة $y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4} = 1680x^3$

حاول أن تحل

1. إذا كانت: $y = 4x^5 - 5x^3 + 7$

فأوجد المشتقات حتى الرتبة الثالثة.

مثال (2)

إذا كانت $y = \sin x$. بيّن أن $y^{(4)} = y$.

الحل:

y دالة معرفة لكل قيم x على $\mathbb{R}$ $y = \sin x$

مشتقة من الرتبة الأولى $y' = \cos x$

مشتقة من الرتبة الثانية $y'' = -\sin x$

مشتقة من الرتبة الثالثة $y''' = -\cos x$

مشتقة من الرتبة الرابعة $y^{(4)} = \sin x$

$\therefore\ y^{(4)} = y$

حاول أن تحل

2. لتكن الدالة: $y = \cos x$.

بيّن أن $y^{(4)} + y'' = 0$.

109

في المثالين (2), (1)

تطبيق مباشر لمفهوم المشتقات ذات الرتب العليا. أشر إلى أنه لإيجاد المشتقة من الرتبة الرابعة يجب إيجاد أولًا المشتقة من الرتبة الثالثة والتي تحتاج إلى المشتقة من الدرجة الثانية.

في المثال (3)

إيجاد المشتقة من الرتبة الثانية لِـ $y = \dfrac{1}{\cos x}$ والتي تكتب أيضًا $y = \sec x$. ولإيجاد y'' نحتاج لاستخدام مشتقة حاصل ضرب دالتين.

في المثال (4)

تطبيق الاشتقاق الضمني لإيجاد مشتقة. ذكّر الطلاب أن x متغير وبالتالي $x' = 1$ بينما y دالة ومشتقتها y'.

في الأمثلة (7), (6), (5)

استخدم الاشتقاق الضمني لإيجاد ميل المماس على منحنى، وبالتالي إيجاد معادلة المماس عند نقطة تقع على المنحنى. أعد تذكير الطلاب بأن النقطة يجب أن تنتمي إلى منحنى الدالة.

في المثالين (9), (8)

استخدم الاشتقاق الضمني لإثبات علاقات بين $f(x)$ أو y ومشتقاتها من الرتب العليا.

6 الربط

لا يوجد.

مثال (3)

أوجد y'' حيث $y = \dfrac{1}{\cos x}$

الحل:

$$y = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$
$$y' = \sec x \tan x$$
$$y'' = \frac{d}{dx}(\sec x \tan x)$$
$$= \tan x \frac{d}{dx}\sec x + \sec x \frac{d}{dx}\tan x$$
$$= \tan x \,.\, \sec x \,.\, \tan x + \sec x \,.\, \sec^2 x$$
$$= \sec x \cdot \tan^2 x + \sec^3 x$$

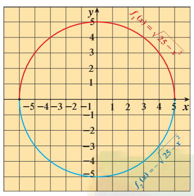
حاول أن تحل

3 أوجد y'' حيث $y = \dfrac{1}{\sin x}$

ثانيًا: الاشتقاق الضمنيّ **Implicit Derivative**

في دراستنا السابقة يمكننا إيجاد مشتقات بعض الدوال على الصورة $y = f(x)$ مثل:

$$y = 3x^2 - 2x + 1 \quad , \quad y = \sqrt{x^2+4} \quad , \ldots$$



وبالنظر لمعادلة المنحنى $y - xy = x$

نلاحظ أنه يمكننا كتابتها **بالصورة الصريحة** $y = f(x)$ أي $y = \dfrac{x}{1-x}$

ومنه يمكننا إيجاد مشتقة هذه الدالة أو ميل منحنى هذه الدالة حيث $x \neq 1$.

وبالنسبة لمنحنى $x^2 + y^2 = 25$ نجد أن ميل المنحنى معرّف عند جميع نقاطه باستثناء النقطتين $(5,0)$ و $(-5,0)$. لماذا؟

ونجد أن المنحنى هو اتحاد منحنيي الدالتين $y_1 = f_1(x) = \sqrt{25-x^2}$, $y_2 = f_2(x) = -\sqrt{25-x^2}$، اللتين كلّ منهما قابلة للاشتقاق عند أيّ نقطة في مجالها عدا 5، -5.

ولكن، هل يمكننا إيجاد ميل المنحنى إذا كان من غير الممكن التوصل للصورة الصحيحة للحصول على الدوالّ المكوّنة لها؟

الإجابة عن هذا السؤال تتمثّل في اعتبار y دالّة قابلة للاشتقاق في x ، واشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى x باستخدام قواعد الاشتقاق التي سبق تعلّمها في هذه الوحدة.

وهذا يمكّننا من إيجاد صيغة $\dfrac{dy}{dx}$ بدلالة x, y نحسب منها ميل المنحنى عند أيّ نقطة (x, y) على المنحنى.

تسمّى عمليّة إيجاد المشتقّة $\dfrac{dy}{dx}$ بهذه الطريقة الاشتقاق الضمنيّ.

110

مثال توضيحي

أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ حيث $y^3 + 5y^2 - x^3 = 0$

الحل:

نفرض أن $y = f(x)$ وبالتعويض في المعادلة:

$$f(x)^3 + 5(f(x))^2 - x^3 = 0$$

وباستخدام قاعدة السلسلة نوجد المشتقة فتكون كالتالي:

$$3(f(x))^2 \cdot f'(x) + 10\, f(x) \cdot f'(x) - 3x^2 = 0$$

أي أن:

$$3y^2 y' + 10yy' - 3x^2 = 0$$

وبحل هذه المعادلة للحصول على y' :

$$y'(3y^2 + 10y) = 3x^2$$
$$\therefore \quad y' = \frac{3x^2}{3y^2 + 10y}$$

باستخدام نفس الخطوات المتبعة في المثال التوضيحي يمكننا التوصل إلى أن:

$$(y^2)' = 2yy'$$
$$(y^3)' = 3y^2 y'$$

مثال (4)

أوجد $y' = \dfrac{dy}{dx}$ في الحالات التالية:

a $y^2 + xy = 7x$

b $y = x + x^2 y^5$

الحل:

a نشتقّ طرفي المعادلة بالنسبة للمتغير x باعتبار أن y دالّة في x قابلة للاشتقاق، وتطبيق قاعدة السلسلة هو:

$$\left[\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1} f'(x)\right]$$

$$2yy' + 1xy' + y = 7$$
$$y'(2y + x) = 7 - y$$
$$y' = \frac{7 - y}{2y + x}$$

b $y = x + x^2 y^5$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} + \frac{d(x^2 y^5)}{dx}$$

111

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في الاشتقاق الضمني عند إيجاد $\frac{d}{dx}x$ و $\frac{dy}{dx}$.

ذكّرهم بأن $\frac{d}{dx}x = 1$، أشر إلى أن بيان $f(x) = x$ مستقيم يمر بنقطة الأصل وميله 1 وبالتالي $f\,'(x) = 1$ بينما $\frac{d}{dx}y = y'$

8 التقييم

تابع الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل».
تحقق من عملهم وتأكد من تمكنهم من إيجاد المشتقات من الرتب العليا ودقة تطبيقهم للاشتقاق الضمني.

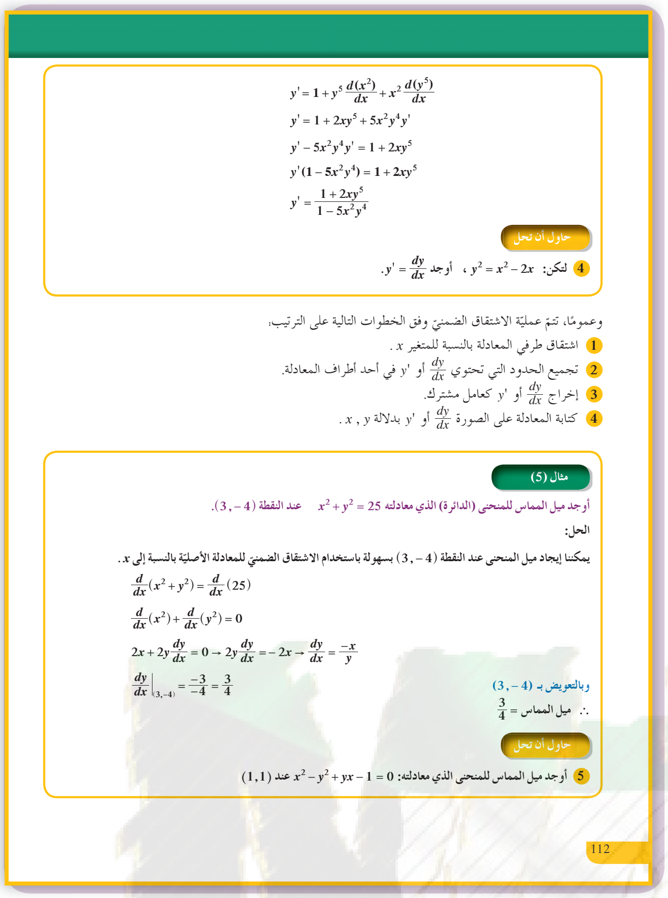
اختبار سريع

1. إذا كانت $f(x) = \frac{x+1}{x}$ فأوجد $f'''(x)$.

$f'''(x) = \frac{-6}{x^4}$

2. أوجد معادلة المماس عند النقطة $(2,1)$ على منحنى المعادلة: $x^2 + 4y^2 = 8$

$y = -\frac{1}{2}x + 2$



$$y' = 1 + y^5\frac{d(x^2)}{dx} + x^2\frac{d(y^5)}{dx}$$
$$y' = 1 + 2xy^5 + 5x^2y^4y'$$
$$y' - 5x^2y^4y' = 1 + 2xy^5$$
$$y'(1 - 5x^2y^4) = 1 + 2xy^5$$
$$y' = \frac{1 + 2xy^5}{1 - 5x^2y^4}$$

حاول أن تحل

4 لتكن: $y^2 = x^2 - 2x$ ، أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$.

وعمومًا، تتمّ عمليّة الاشتقاق الضمنيّ وفق الخطوات التالية على الترتيب:

1. اشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة للمتغير x .
2. تجميع الحدود التي تحتوي $\frac{dy}{dx}$ أو y' في أحد أطراف المعادلة.
3. إخراج $\frac{dy}{dx}$ أو y' كعامل مشترك.
4. كتابة المعادلة على الصورة $\frac{dy}{dx}$ أو y' بدلالة x , y .

مثال (5)

أوجد ميل المماس للمنحنى (الدائرة) الذي معادلته $x^2 + y^2 = 25$ عند النقطة $(3 , -4)$.

الحل:

يمكننا إيجاد ميل المنحنى عند النقطة $(3 , -4)$ بسهولة باستخدام الاشتقاق الضمنيّ للمعادلة الأصليّة بالنسبة إلى x .

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$
$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$
$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \to 2y\frac{dy}{dx} = -2x \to \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

وبالتعويض بـ $(3 , -4)$

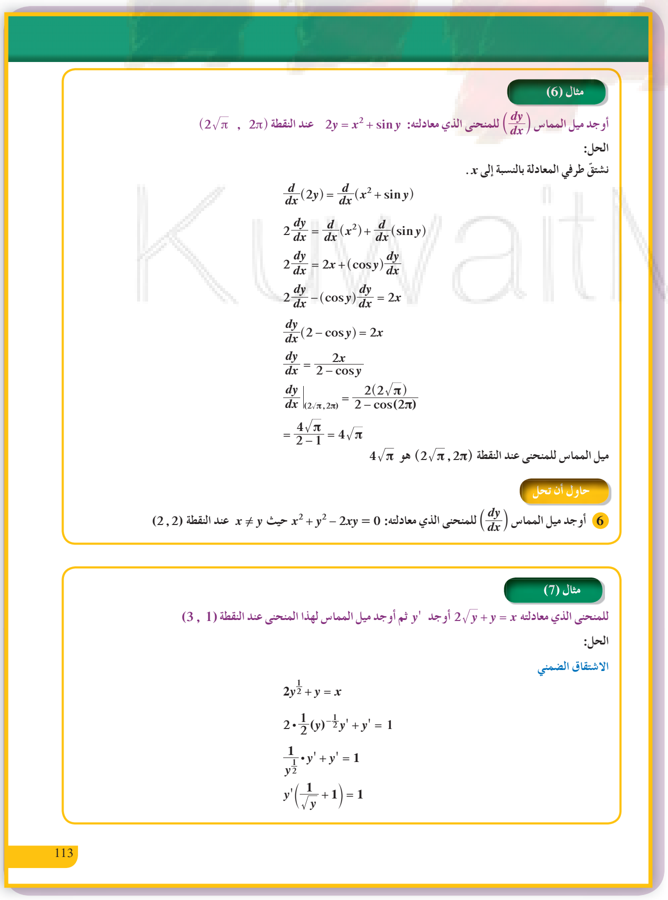
$$\frac{dy}{dx}\Big|_{(3,-4)} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

∴ ميل المماس $= \frac{3}{4}$

حاول أن تحل

5 أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته: $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند $(1,1)$

112



مثال (6)

أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته: $2y = x^2 + \sin y$ عند النقطة $(2\sqrt{\pi} \ , \ 2\pi)$

الحل:

نشتقّ طرفي المعادلة بالنسبة إلى x .

$$\frac{d}{dx}(2y) = \frac{d}{dx}(x^2 + \sin y)$$
$$2\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(\sin y)$$
$$2\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos y)\frac{dy}{dx}$$
$$2\frac{dy}{dx} - (\cos y)\frac{dy}{dx} = 2x$$
$$\frac{dy}{dx}(2 - \cos y) = 2x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2 - \cos y}$$
$$\frac{dy}{dx}\Big|_{(2\sqrt{\pi},2\pi)} = \frac{2(2\sqrt{\pi})}{2 - \cos(2\pi)}$$
$$= \frac{4\sqrt{\pi}}{2-1} = 4\sqrt{\pi}$$

ميل المماس للمنحنى عند النقطة $(2\sqrt{\pi} , 2\pi)$ هو $4\sqrt{\pi}$

حاول أن تحل

6 أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته: $x^2 + y^2 - 2xy = 0$ حيث $x \neq y$ عند النقطة $(2 , 2)$

مثال (7)

للمنحنى الذي معادلته $2\sqrt{y} + y = x$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(3 \ , \ 1)$

الحل:

الاشتقاق الضمني

$$2y^{\frac{1}{2}} + y = x$$
$$2 \cdot \frac{1}{2}(y)^{-\frac{1}{2}}y' + y' = 1$$
$$\frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} \cdot y' + y' = 1$$
$$y'\left(\frac{1}{\sqrt{y}} + 1\right) = 1$$

113

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1 $f'(x) = 4x^3 - 6x$

2 $g'(x) = 12x^2 - 6$

$g'(x) = (f'(x))'$

«حاول أن تحل»

1 $y' = 20x^4 - 15x^2$

$y'' = 80x^3 - 30x$

$y''' = 240x^2 - 30$

2 $y' = -\sin x$

$y'' = -\cos x$

$y''' = \sin x$

$y^{(4)} = \cos x$

$y^{(4)} + y'' = \cos x - \cos x = 0$

3 $y = \dfrac{1}{\sin x} = \csc x$

$y' = -\csc x \cdot \cot x$

$y'' = -(-\csc x \cot x) \cdot \cot x - \csc x \cdot (-\csc^2 x)$

$= \csc x \cdot \cot^2 x + \csc^3 x$

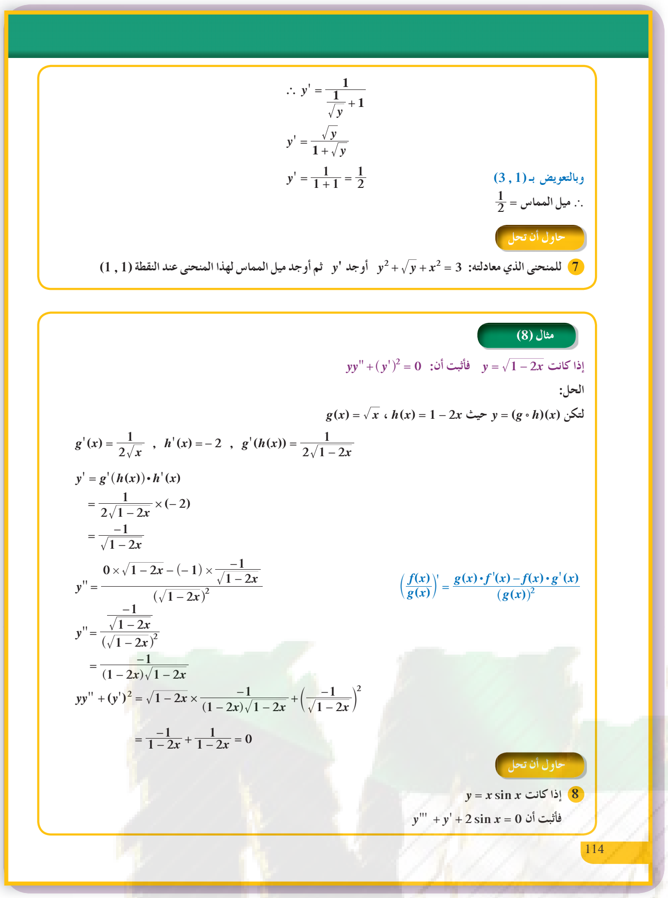
4 $y' = \dfrac{x-1}{y}$

5 $y' = \dfrac{2x+y}{2y-x}$; $y'_{(1,1)} = 3$ ميل المماس:

6 الميل ثابت ويساوي 1

$y' = 1$

7 $y' = \dfrac{-2x}{2y + \dfrac{1}{2\sqrt{y}}}$; $y'_{(1.1)} = -\dfrac{4}{5}$



$$\therefore\ y' = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{y}} + 1}$$

$$y' = \frac{\sqrt{y}}{1+\sqrt{y}}$$

وبالتعويض بـ $(3 , 1)$

$$y' = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ ميل المماس $= \frac{1}{2}$

حاول أن تحل

7 للمنحنى الذي معادلته: $y^2 + \sqrt{y} + x^2 = 3$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(1 , 1)$

مثال (8)

إذا كانت $y = \sqrt{1-2x}$ فأثبت أن: $yy'' + (y')^2 = 0$

الحل:

لتكن $y = (g \circ h)(x)$ حيث $h(x) = 1-2x$ ، $g(x) = \sqrt{x}$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ ,\ h'(x) = -2\ ,\ g'(h(x)) = \frac{1}{2\sqrt{1-2x}}$$

$$y' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-2x}} \times (-2)$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$y'' = \frac{0 \times \sqrt{1-2x} - (-1) \times \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}}{(\sqrt{1-2x})^2}$$

$$y'' = \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-2x}}}{(\sqrt{1-2x})^2}$$

$$= \frac{-1}{(1-2x)\sqrt{1-2x}}$$

$$yy'' + (y')^2 = \sqrt{1-2x} \times \frac{-1}{(1-2x)\sqrt{1-2x}} + \left(\frac{-1}{\sqrt{1-2x}}\right)^2$$

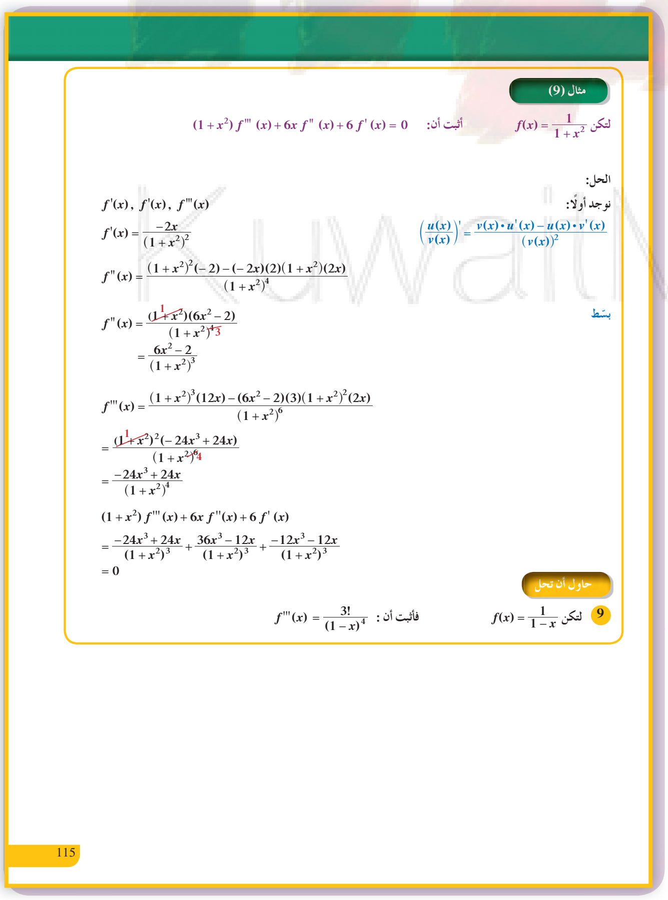
$$= \frac{-1}{1-2x} + \frac{1}{1-2x} = 0$$

حاول أن تحل

8 إذا كانت $y = x \sin x$

فأثبت أن $y''' + y' + 2\sin x = 0$

114



مثال (9)

لتكن $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ أثبت أن: $(1+x^2) f'''(x) + 6x f''(x) + 6 f'(x) = 0$

الحل:

نوجد أولًا: $f'(x) , f'(x) , f'''(x)$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(1+x^2)^2(-2) - (-2x)(2)(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4}$$

بسّط

$$f''(x) = \frac{(\cancel{1+x^2})(6x^2-2)}{(1+x^2)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{(1+x^2)^3(12x) - (6x^2-2)(3)(1+x^2)^2(2x)}{(1+x^2)^6}$$

$$= \frac{(\cancel{1+x^2})^2(-24x^3+24x)}{(1+x^2)^{\cancel{6}\,4}}$$

$$= \frac{-24x^3+24x}{(1+x^2)^4}$$

$$(1+x^2) f'''(x) + 6x f''(x) + 6 f'(x)$$

$$= \frac{-24x^3+24x}{(1+x^2)^3} + \frac{36x^3-12x}{(1+x^2)^3} + \frac{-12x^3-12x}{(1+x^2)^3}$$

$$= 0$$

حاول أن تحل

9 لتكن $f(x) = \frac{1}{1-x}$ فأثبت أن : $f'''(x) = \frac{3!}{(1-x)^4}$

115

تمرّن 2-6

المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني

Higher Order Derivatives And Implicit Differentiation

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–6)، أوجد: $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، $\frac{d^3y}{dx^3}$

(1) $y = 2x^4 - x^3 + x^2 - 3x$

(2) $y = -x^5 + 2x^3 - 4x + 1$

(3) $y = \frac{3}{x-2}$

(4) $y = \sin 2x$

(5) $y = \cos 4x$

(6) $y = \sin^2 x$

في التمارين (7–9)، أوجد: $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$

(7) $y^2 = x^2 + 4x + 2$

(8) $y^2 - 4y = x - 3$

(9) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$

في التمارين (10–12)، أوجد معادلة المماس ومعادلة الخطّ العموديّ على المماس على منحنى الدالة عند كل نقطة معطاة على هذا المنحنى.

(10) $x^2 + 2xy - y^2 = 7 \quad , \quad (2\ ,\ 3)$

(11) $6x^2 + 3xy - 2y^3 - 7y - 6 = 0 \quad , \quad (-1\ ,\ 0)$

(12) $2xy + \pi \sin y = 2\pi \quad , \quad \left(1\ ,\ \frac{\pi}{2}\right)$

(13) أوجد $A\ ,\ B$ في: $y = A\sin x + B\cos x$ حيث $y'' - y = \sin x$.

(14) أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y = \frac{\cos x}{1 + \tan x}$ واكتب معادلة المماس على منحنى الدالة عند $A(0\ ,\ 1)$.

(15) إذا كانت $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

فأثبت أن: $4x^2 f''(x) - 3\,f(x) = 0$

(16) إذا كانت $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

فأثبت أن: $(1-x^2)f'''(x) - 6xf''(x) - 6f'(x) = 0$

45

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–3)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كان: $y = \frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$ فإن: $\frac{d^2y}{dx^2} = -2x$ (a) (b)

(2) إذا كان: $y = \frac{-3x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 4x$ فإن: $\frac{d^3y}{dx^3} = -18x$ (a) (b)

(3) معادلة المماس لمنحنى: $x^2 - y^2 - x^2y = 7$ عند النقطة $(2\ ,\ -1)$ هي: $y = 4x - 9$ (a) (b)

في التمارين (4–7)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(4) إذا كانت: $f(x) = (1+6x)^{\frac{2}{3}}$ فإن: $f''(x)$ تساوي:

(a) $\frac{8}{27}(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$
(b) $8(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$
(c) $-8(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$
(d) $-64(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$

(5) إذا كانت: $f(x) = \frac{2x+1}{3x+2}$ فإن: $f^{(4)}(x)$ تساوي:

(a) $24(3x+2)^{-5}$
(b) $-24(3x+2)^{-5}$
(c) $648(3x+2)^{-5}$
(d) $-648(3x+2)^{-5}$

(6) ميل الخطّ العمودي على المماس (الناظم) عند النقطة $A(3\ ,\ 2)$ على منحنى: $x^2 - y^2 - 2xy = -7$ هو:

(a) -5
(b) $-\frac{1}{5}$
(c) $\frac{1}{5}$
(d) 5

(7) ميل المماس عند النقطة $A(1\ ,\ 1)$ على منحنى: $x^2 - 3y^2 + 2xy = 0$ هي:

(a) -1
(b) 0
(c) 1
(d) 2

46

8

$$y' = \sin x + x\cos x$$

$$y'' = \cos x + \cos x - x\sin x = 2\cos x - x\sin x$$

$$y''' = -2\sin x - \sin x - x\cos x = -3\sin x - x\cos x$$

$$y''' + y' + 2\sin x$$

$$= -3\sin x - x\cos x + \sin x + x\cos x + 2\sin x = 0$$

9

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad ; \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \quad ;$$

$$f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4} = \frac{3!}{(1-x)^4}$$

المرشد لحل المسائل

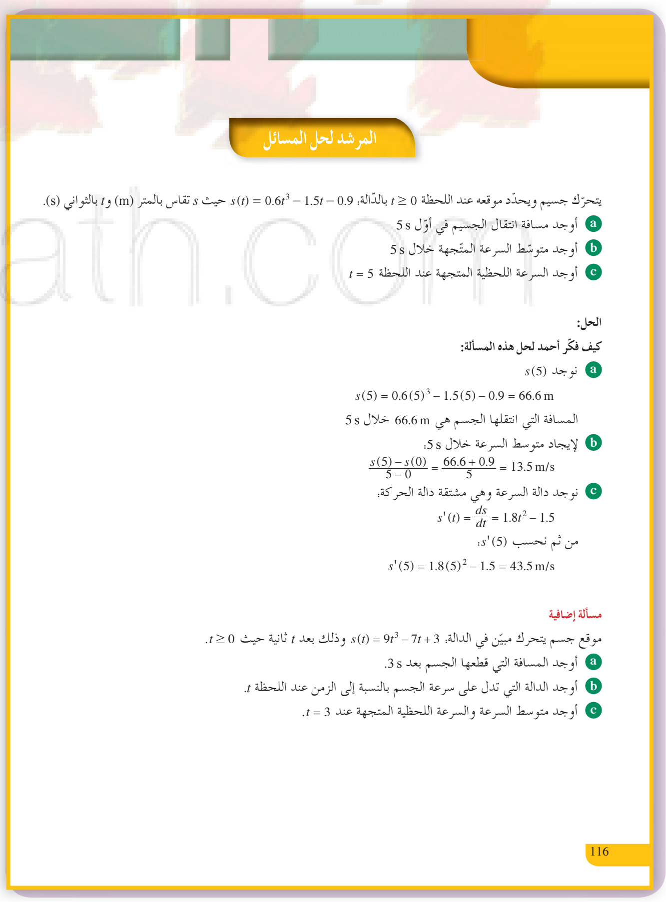
حل «مسألة إضافية»

(a) $s(3) = 225\ \text{m}$

(b) $s'(t) = 27t^2 - 7$

(c) متوسط السرعة = $74\ \text{m/s}$

السرعة اللحظية المتجهة: $236\ \text{m/s}$



المرشد لحل المسائل

يتحرّك جسيم ويحدّد موقعه عند اللحظة $t \geq 0$ بالدّالة: $s(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$ حيث s تقاس بالمتر (m) و t بالثواني (s).

(a) أوجد مسافة انتقال الجسيم في أوّل 5 s

(b) أوجد متوسّط السرعة المتّجهة خلال 5 s

(c) أوجد السرعة اللحظية المتجهة عند اللحظة $t = 5$

الحل:

كيف فكّر أحمد لحل هذه المسألة:

(a) نوجد $s(5)$

$$s(5) = 0.6(5)^3 - 1.5(5) - 0.9 = 66.6\ \text{m}$$

المسافة التي انتقلها الجسم هي 66.6 m خلال 5 s

(b) لإيجاد متوسط السرعة خلال 5 s:

$$\frac{s(5) - s(0)}{5 - 0} = \frac{66.6 + 0.9}{5} = 13.5\ \text{m/s}$$

(c) نوجد دالة السرعة وهي مشتقة دالة الحركة:

$$s'(t) = \frac{ds}{dt} = 1.8t^2 - 1.5$$

من ثم نحسب $s'(5)$:

$$s'(5) = 1.8(5)^2 - 1.5 = 43.5\ \text{m/s}$$

مسألة إضافية

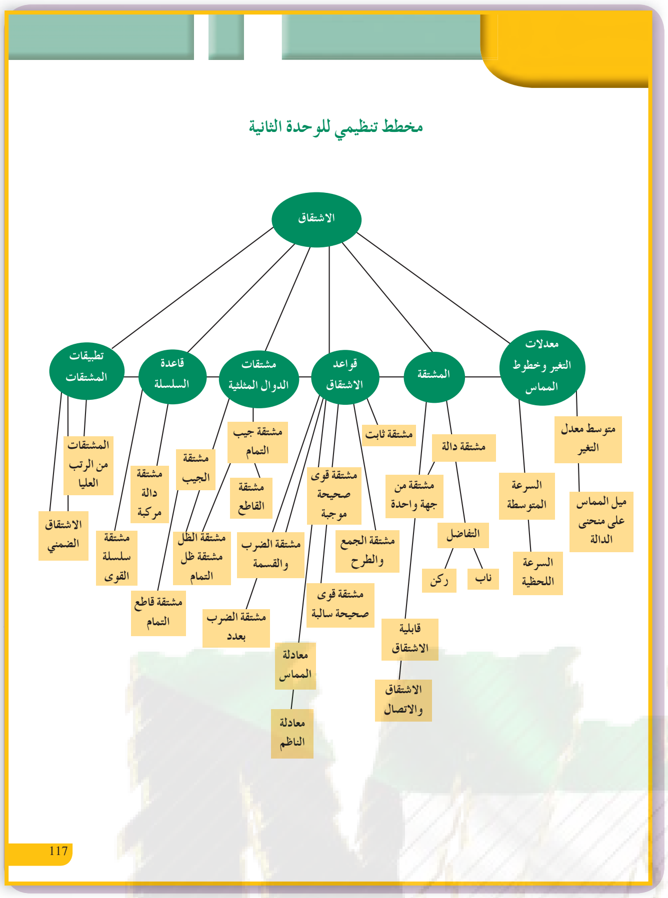
موقع جسم يتحرك مبيّن في الدالة: $s(t) = 9t^3 - 7t + 3$ وذلك بعد t ثانية حيث $t \geq 0$.

(a) أوجد المسافة التي قطعها الجسم بعد 3 s.

(b) أوجد الدالة التي تدل على سرعة الجسم بالنسبة إلى الزمن عند اللحظة t.

(c) أوجد متوسط السرعة والسرعة اللحظية المتجهة عند $t = 3$.

116



مخطط تنظيمي للوحدة الثانية

117

ملخص

- يعرف متوسط معدل التغير للدالة f على فترة مغلقة $[a, b]$ بالقاعدة $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
- السرعة المتوسطة بين مدتين من الزمن هي معدل التغير على هذه الفترة.
- السرعة اللحظية هي السرعة التي تعطى خلال لحظة من الزمن وتعطى بالقاعدة:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

حيث t هي اللحظة من الزمن لإيجاد السرعة اللحظية.

- معدل التغير لدالة f عند النقطة $P(a, f(a))$ إن وجد هو:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- ميل المماس لمنحنى عند نقطة محددة يعطى بالقاعدة: $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ حيث إن a هي الإحداثي السيني للنقطة على منحنى الدالة f حيث إن x_0 ، y_0 هما إحداثيا النقطة على المنحنى، m هي ميل المماس.
- معادلة الناظم على المماس عند نقطة على منحنى تعطى بالقاعدة: $y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x-a)$
- مشتقة الدالة f عند نقطة إحداثها السيني a تعطى بالقاعدة:

$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ أو $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ إذا وجدت.

- نحصل على ركن عندما تكون المشتقّتان من جهة اليمين ومن جهة اليسار عند التقاء الشعاعين غير متساويتين.
- نحصل على ناب عندما يكون ميل المماس للمنحنى عند نقطة تقاطع محددة يقترب من ∞ في إحدى الجهات ويقترب من $-\infty$ في الجهة الثانية ويوجد مماس رأسي عندها.
- نحصل على مماس رأسي عندما يكون المماسللمنحنى عند نقطة رأسيًا.
- إذا كانت الدالة f لها مشتقة عند نقطة ، فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة.
- معكوس النظرية ليس صحيحًا دائمًا، الدالة المتصلة قد يكون لها ركن أو ناب أو مماس عمودي ومن ثم لا تكون قابلة للاشتقاق عند نقطة معينة.
- إذا كان $f(x) = c$ فإن: $f'(x) = 0$ حيث c قيمة ثابتة.
- إذا كانت $f(x) = x$ فإن $f'(x) = 1$
- إذا كان $f(x) = x^n$ فإن: $f'(x) = nx^{n-1}$ حيث n عدد صحيح موجب أو سالب.
- $(kf(x))' = k\,f'(x)$
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$

118

- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
- إذا كان $f(x) = \sin x$ فإن: $f'(x) = \cos x$
- إذا كان $f(x) = \cos x$ فإن: $f'(x) = -\sin x$
- إذا كان $f(x) = \tan x$ فإن: $f'(x) = \sec^2 x$
- إذا كان $f(x) = \cot x$ فإن: $f'(x) = -\csc^2 x$
- إذا كان $f(x) = \sec x$ فإن: $f'(x) = \sec x \cdot \tan x$
- إذا كان $f(x) = \csc x$ فإن: $f'(x) = -\csc x \cdot \cot x$
- إذا كانت الدالّة f قابلة للاشتقاق عند $g(x)$، الدالة g قابلة للاشتقاق عند x، فإن الدالة المركبّة $(f\circ g)(x) = f(g(x))$ تكون قابلة للاشتقاق عند x ، ويكون: $(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$
- إذا $y = f(u)$ حيث إن $g = u(x)$ فإن: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$
- $\frac{dy}{dx}$، $\frac{d^2y}{d^2x}$، $\frac{d^3y}{d^3x}$، ...... $\frac{d^ny}{d^nx}$ هي مشتقات الدالة y من الرتب العليا إذا وجدت في مجال تعريفها.
- في الاشتقاق الضمني نوجد مشتقة المتغير المستقل x ومشتقة المتغير التابع y ثم نوجد $\frac{dy}{dx}$.

تمارين إثرائية

(1) أوجد ميل المماس على منحنى الدالة f: $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ عند نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات.

(2) يتحرك جسيم على خط مستقيم بمعادلة: $S(t) = t^3 - 3t^2$ حيث t الوقت بالثواني (s) وS بالأمتار (m).
أوجد السرعة المتجهة لهذا الجسيم والعجلة عند $t = 2$.

(3) أوجد $\frac{dy}{dx}$، حيث $y = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

(4) أوجد ميل المماس على منحنى الدالة: $x = y^2 - 4y$ عند نقطة تقاطع المنحنى مع محور الصادات.

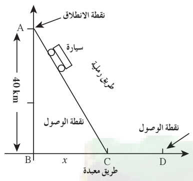
(5) أوجد $\frac{dy}{dx}$، حيث $y = \frac{u^2-1}{u^2+1}$ و $u = \sqrt[3]{x^2+2}$.

(6) أوجد معادلة المماس ومعادلة الخطّ العمودي على منحنى الدالة: $x\sin 2y = y\cos 2x$ عند النقطة $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ على هذا المنحنى.

(7) **اكتب للتعلم.** هل هناك قيمة للثابت b تجعل الدالة التالية: $g(x) = \begin{cases} x+b, & x<0 \\ \cos x, & x\geq 0 \end{cases}$ متصلة وقابلة للاشتقاق عند $x = 0$؟ أعط أسبابًا لإجابتك.

(8) استخدم المتطابقة $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ لإيجاد مشتقّة $\sin 2x$، ثم استخدم المتطابقة $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ للتعبير عن هذه المشتقة بدلالة $\cos 2x$.

(9) يشارك أحد المتبارين في سباق السيارات على الرمال في الصحراء، حيث A هي نقطة الانطلاق وتبعد 40 km عن النقطة B، ونقطة الوصول هي على الطريق المعبدة عند D.



يستطيع هذا المتباري قيادة سيارته بمعدل سرعة 45 km على الرمال وبمعدل سرعة 75 km على الطريق المعبدة (انظر الصورة)، وسوف ينال الجائزة الكبيرة إذا وصل إلى الموقع D الذي يبعد 50 km عن الموقع B في وقت لا يتجاوز 85 دقيقة. المطلوب مساعدة هذا المتباري على تحليل هذه المسألة وإيجاد أقل وقت ممكن لهذه الرحلة.

هل سيربح الجائزة؟

اختبار الوحدة الثانية

في التمارين (9–1)، أوجد مشتقّات الدوالّ.

(1) $y = x^5 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x$

(2) $y = 3 - 7x^3 + 3x^7$

(3) $y = 2\sin x\cos x$

(4) $y = \frac{2x+1}{2x-1}$

(5) $s = \cos(1-2t)$

(6) $s = \cot\frac{2}{t}$

(7) $y = \sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

(8) $y = x\sqrt{2x+1}$

(9) $y = \frac{x^2}{\sin(5x)}$

في التمرينين (11–10)، أوجد عند النقطة المبيّنة معادلة:

(a) المماس لمنحنى الدالة.

(b) الخطّ العموديّ على المماس (الناظم).

(10) $y = \sqrt{x^2 - 2x}\ ,\quad x = 3$

(11) $y = 4 + \cot x - \frac{2}{\sin x}\ ,\quad x = \frac{\pi}{2}$

(12) لتكن f: $f(x) = \begin{cases} x, & 0\leq x\leq 1 \\ 2-x, & 1<x\leq 2 \end{cases}$
بيّن أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 1$

في التمارين (16–13)، أوجد: $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، $\frac{d^3y}{dx^3}$

(13) $y = 3x^4 - 5x^2 + 2x$

(14) $y = \sin 3x$

(15) $y = \cos^2 2x$

(16) $y = (3x-5)(x^2-x)$

في التمرينين (18–17)، أوجد: $\frac{dy}{dx}$

(17) $x^2 - 3y^2 + y = 4$

(18) $x^2 + xy^2 + 2x - 3y = 0$

(19) أوجد معادلة المماس ومعادلة الخطّ العمودي على المماس (الناظم) على منحنى الدالة: $x^2 + 2xy = 3$ عند النقطة $A(1, 1)$ على هذا المنحنى.

(10) استخدم الاشتقاق الضمني لتجد $\frac{dy}{dx}$ من $x^2 + 5xy + y^5 = 8$

(11) استخدم الاشتقاق الضمني لتجد ميل المماس عند النقطة $(-4, 1)$ على منحنى: $2xy - 3x - 4y = 5$
واكتب معادلة للخط العمودي على المماس على المنحنى عند النقطة المعطاة.

(12) أثبتت إحدى الدراسات في إحدى الضواحي الصناعية أن متوسط الانبعاث اليومي لأول أكسيد الكربون يمكن نمذجتة بالقانون: $C(P) = \sqrt{0.5p^2 + 17}$ جزء من مليون، حيث p هو عدد السكان بالآلاف، ويقدر عدد السكان انطلاقًا من هذه السنة بدلالة t سنة بالقانون: $p(t) = 0.1t^2 + 3.1$ بآلاف الأشخاص.

(a) ما معدل تغير أول أكسيد الكربون مع الوقت t بعد 3 سنوات بدءًا من الآن؟ فسِّر.

(b) إذا تزايد عدد السكان مع الوقت إلى 8 000، فما معدل تغير أول أكسيد الكربون مع الوقت t في السنوات القادمة بدءًا من الآن؟ فسّر.

(13) **إيجاد المماسات.** أوجد معادلات جميع المماسات لمنحنى الدالة $f(x) = 9 - x^2$ التي تمرّ بالنقطة $(1, 12)$