مقدمة الوحدة

في هذه الوحدة، سيتعرف الطلاب كيف يستخدمون مشتقة دالة لإيجاد القيم القصوى المحلية الصغرى والعظمى، والنقاط الحرجة، ودراسة سلوك الدالة مما سيسمح لهم بتخطيط بيان الدالة، ثم يعمقون معارفهم ويحددون فترات التقعر ونقاط الانعطاف.

قلل انتشار الآلة الحاسبة البيانية من أهمية رسم بيان دالة من قبل الطالب وأصبح التركيز حاليًّا على الاستفادة من بيان دالة للإجابة عن أسئلة وطرح حلول.

تسمح الآلات الحاسبة برسم بيانات الدوال بدقة، وباستخدام خاصية التكبير Zoom يمكن الحصول على أي جزء من بيان الدالة. كذلك هناك العديد من برامج الرسم البياني على الحاسوب والتي تمتاز بوجود الكثير من الخيارات مما يسهل عمل الطالب.

أدّى هذا التطوّر التكنولوجي إلى فتح مجالات جديدة مثل دراسة حلول معادلات من الدرجة الثالثة أو معادلات أسية ولوغاريتمية بيانيًّا. ونشير هنا إلى طريقة الإحاطة (Dichotomy) المعتمدة والتي تسمح بإيجاد قيم تقريبيّة دقيقة لحلول معادلات باستخدام دوال مطردة على فترة $[a, b]$ حيث $f(a) \times f(b) < 0$.

لا يمكن حل معظم المعادلات الرياضية التي تتضمّن كثيرات حدود ولوغاريتمات أو أسسًا إلا بطريقة تغير الدالة المناظرة.

على سبيل المثال: لدراسة حلول المعادلة: $e^x + x + 1 = 0$ نأخذ الدالة: $f(x) = e^x + x + 1$، نوجد الدالة المشتقة، ثم ندرس تغيرها مما يسمح لنا بإيجاد حل تقريبي دقيق للمعادلة.

كما سيتعرّف الطلاب في هذه الوحدة كيفية إيجاد قيمة الدالة في فترة ما سواء أكانت مطردة أم غير مطردة على هذه الفترة.

والموضوع الذي يأخذ أهمية قصوى حاليًّا في التطبيقات على المشتقات هو التطبيقات في مواقف حياتية مثل


الوحدة الثالثة

تطبيقات على الاشتقاق

Applications on Differentiation

مشروع الوحدة:

1 مقدمة المشروع: فرضًا أنه لا يوجد مكان مخصص في إحدى السيارات لوضع كوب يحتوي على القهوة، وسوف يوضع بجانب مقعد السائق أثناء القيادة. أظهرت التجربة أن الكوب قابل للانسكاب عندما يكون مليئًا بالكامل. ويصبح أكثر ثباتًا كلما تناقصت منه القهوة.

2 الهدف: تحديد أقصى ارتفاع لكمية القهوة كي لا تنسكب من الكوب أثناء قيادة السيارة.

3 اللوازم: ورق رسم بياني – آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط.

4 أسئلة حول التطبيق:

يبيّن الرسم المقابل أن جزءًا من الكوب يحتوي على القهوة. سوف نفترض أن الكوب يكون أكثر ثباتًا عندما تكون نقطة الارتكاز المشتركة للكوب وكمية القهوة هي في أدنى ارتفاع. نقطة ارتكاز المجسم الأسطواني هي نقطته المركزية الهندسية حيث إن إحداثها الصادي $\overline{y}$ يمكن أن يعطى بالقاعدة:

$$\overline{y} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

إذا علمت أن: $m_1 = \pi\delta(R+T)^2B$ (كتلة قاعدة الكوب) , $y_1 = -\frac{B}{2}$ (الإحداثي الصادي لنقطة ارتكاز القاعدة).

$m_2 = \pi\delta(R+T)^2H - \pi\delta R^2H$ (كتلة جوانب الكوب) , $y_2 = \frac{H}{2}$ (الإحداثي الصادي لنقطة ارتكاز جوانب الكوب).

$m_3 = \pi\delta R^2y$ (كتلة القهوة في الكوب) , $y_3 = \frac{y}{2}$ (الإحداثي الصادي لنقطة ارتكاز القهوة).

a احسب قيم m_1 , m_2 , m_3 بدلالة B و y و H و T و R (إرشاد: $m = \delta V$ حيث δ كثافة مشتركة للقهوة والمادّة المصنوع منها الكوب).

b أوجد $\overline{y}$ بدلالة B و y و H و T و R.

c إذا كان: $H = 8\,cm , R = 3\,cm , T = 0.5\,cm , B = 1\,cm$

أثبت أن: $f(y) = \overline{y} = \frac{21.75 + y^2}{8.5 + 2y} \; ; \; 0 \leqslant y \leqslant 8$

d أثبت أنّ مشتقّة $f(y)$ هي: $f'(y) = \frac{2y^2 + 17y - 43.5}{(2y + 8.5)^2}$

y = ارتفاع مستوى القهوة في الكوب (cm)
H = ارتفاع الكوب (cm)
B = سماكة القاعدة (cm)
R = نصف قطر الدائرة الداخلية من الكوب (cm)
T = سماكة الجوانب (cm)
$R + T$ = نصف قطر الدائرة الخارجية من الكوب (cm)

5 ما القيمة المحلية الصغرى؟ فسّر.

6 التقرير: اكتب تقريرًا يبيّن نتائج بحثك. أشر إلى كيفية الاستفادة من مفاهيم التفاضل في عملك. دعّم التقرير بالرسوم البيانية وبعرض على جهاز الإسقاط. طبّق ما توصلت إليه على كوبك المفضل في احتساء القهوة.

دروس الوحدة

القيم القصوى (العظمى/الصغرى) للدوال	تزايد وتناقص الدوال	ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' بمنحنى الدالة f	رسم بيان دوال كثيرات الحدود	تطبيقات على القيم القصوى
3–1	3–2	3–3	3–4	3–5

120

الاقتصاد، والطب، وغير ذلك. نذكر منها الكلفة الدنيا لإنتاج سلعة أو الربح الأقصى ويمكن الحصول على ذلك بنمذجة حالة ما إلى دالة رياضية، ثمّ ندرس تغيّر هذه الدالة للحصول على النتائج المطلوبة.

تجدر الإشارة هنا إلى أن كل المفردات التي تشير إلى قيم قصوى مثل المساحة الأكبر، القيمة الصغرى، ... تعتبر مؤشرًا للطالب لتحويل المسألة الحياتية إلى دالة رياضية ودراسة تغيّرها.

الوحدة الثالثة

أين أنت الآن؟ (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعرفت الدالة التربيعية: القيمة الصغرى والقيمة العظمى.
- تعرفت الرسوم البيانية لبعض الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- مثلت النمو الأسيّ والتضاؤل الأسيّ.
- تعرفت الرسوم البيانية للدوال المثلثية.
- تعرفت الاشتقاق وقواعده.

ماذا سوف تتعلم؟

- إيجاد القيم القصوى المطلقة والقيم القصوى المحلية.
- تطبيق نظرية القيمة المتوسطة.
- تحديد تزايد وتناقص الدوال.
- اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحلية.
- تحديد تقعر منحنى الدالة.
- تحديد نقاط الانعطاف.
- اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية.
- رسم بيان دوال كثيرات الحدود.
- تطبيقات على القيم القصوى.

المصطلحات الأساسية

قيم قصوى مطلقة — قيمة عظمى مطلقة — قيمة صغرى مطلقة — نقطة طرفية — نقطة داخلية — قيمة قصوى محلية — نقطة حرجة — نظرية القيمة المتوسطة — الدوال المتزايدة — الدوال المتناقصة — الدالة المطّردة — اختبار المشتقة الأولى — التقعر — نقاط الانعطاف — اختبار المشتقة الثانية — كثيرات الحدود.

أضف إلى معلوماتك

«إذا كنت أجرؤ القول فإن مسألة تحديد خط المماس هي المسألة الأكثر فائدة وبالعموم هي أكثر ما أود معرفته».

ديكارت (1650 – 1596)

أدت الأبحاث التي قام بها العلماء في القرن السابع عشر في مختلف المجالات: علم الميكانيك والفلك والبصريات، إلى طرح مسائل المماس وحلها. منها: تحديد خط المماس في نقطة معينة، وتحديد النقطة على المنحنى حيث المماس مواز لمستقيم معين. للشكل أدناه محور تناظر. طوّر ديكارت طريقة تسمح بتحديد النقاط حيث المماس مواز لهذا المحور.

121

مشروع الوحدة

يهدف هذا المشروع إلى دراسة فكرة الثبات في السيارة (ثبات كوب قهوة) بطريقة علمية، ويعدّ الثبات من المواضيع التي تزداد أهمية في عصرنا الحالي نظرًا إلى أننا نمضي وقتًا أكثر في تنقلنا بالسيارة.

يربط الطالب في مشروعه هذا بين ما تعلمه في الرياضيات وحل مسائل حياتية.

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

4 (a) $m_1 = \pi\delta(R+T)^2 B$

$m_2 = \pi\delta(R+T)^2 H - \pi\delta R^2 H$

$m_3 = \pi\delta R^2 y$

(b) $\overline{y} = f(y)$

$$= \frac{-\frac{1}{2}(R+T)^2 B^2 + \frac{1}{2}R^2 y^2 + \frac{H}{2}(T^2 H + 2RTH)}{B(R+T)^2 + R^2 y + T^2 H + 2RTH}$$

(c) نعوّض كل رمز بقيمته العددية فنجد بعد الاختزال أن:

$$\overline{y} = f(y) = \frac{y^2 + 21.75}{2y + 8.5}$$

(d) $f'(y) = \dfrac{2y(2y+8.5) - 2(y^2+21.75)}{(2y+8.5)^2}$

$$f'(y) = \frac{2y^2 + 17y - 43.5}{(2y+8.5)^2}$$

5

الفترات	$0 < y < 2.06$	$y > 2.06$
إشارة $f'(y)$	$-$	$+$
سلوك $f(y)$	↘	↗

القيمة المحلية الصغرى تحدث عند $y \approx 2.06$ cm وهي قيمة قريبة جدًّا من $y = 2$ cm

أي أن أقصى ارتفاع لكمية القهوة في الكوب، كي لا تنسكب أثناء قيادة السيارة، يجب أن يكون 2 cm تقريبًا من أصل 8 cm وهو ارتفاع الكوب.

سلّم التقييم

4	الشروحات واضحة ومفهومة بكاملها — الحسابات دقيقة ومفصلة — الاستنتاجات عن الرسم البياني معقولة جدًّا مع النتيجة النهائية — التقرير مفصّل وواضح ومفهوم — القوانين المستخدمة كلها صحيحة.
3	الشروحات واضحة ومفهومة — الحسابات في معظمها دقيقة — الاستنتاجات عن الرسم البياني معقولة وقريبة من النتيجة النهائية — التقرير مفصّل ولكن ينقصه بعض الإيضاح — القوانين في معظمها صحيحة.
2	الشروحات ينقصها الوضوح وفي بعض الأحيان غير مفهومة — أخطاء متعددة في الحسابات — بعض القوانين المستخدمة غير مقبولة — لا ترابط بين الرسم البياني والنتيجة النهائية — التقرير غير مفصّل.
1	معظم عناصر المشروع ناقصة أو تحتوي على الكثير من الأخطاء.

3–1: القيم القصوى (العظمى/الصغرى) للدوال

1 الأهداف

- تحديد القيم القصوى (العظمى/الصغرى) المطلقة والقيم القصوى المحلية.
- إيجاد القيم القصوى.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

قيمة قصوى – قيمة قصوى مطلقة – قيمة عظمى مطلقة – قيمة صغرى مطلقة – قيم قصوى محلية – نقطة حرجة – عدد حرج – نقطة طرفية – نقاط داخلية.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show)

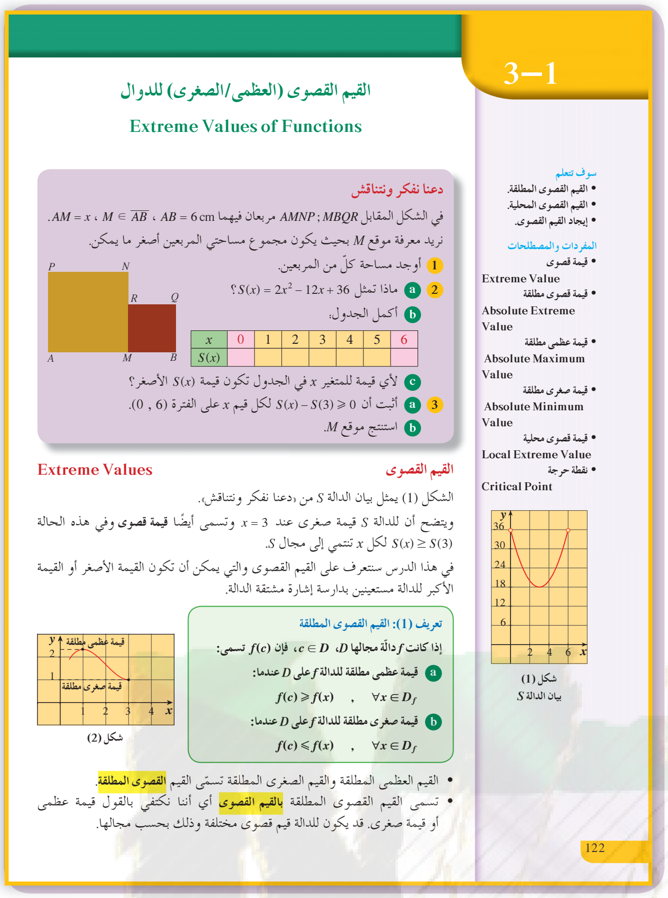
4 التمهيد

ارسم بيان الدالة f : $f(x) = \sin x$

$0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

(a) أوجد أكبر قيمة للدالة f؟

(b) أوجد أصغر قيمة للدالة f؟



3–1

القيم القصوى (العظمى/الصغرى) للدوال

Extreme Values of Functions

سوف تتعلم
- القيم القصوى المطلقة.
- القيم القصوى المحلية.
- إيجاد القيم القصوى.

المفردات والمصطلحات
- قيمة قصوى Extreme Value
- قيمة قصوى مطلقة Absolute Extreme Value
- قيمة عظمى مطلقة Absolute Maximum Value
- قيمة صغرى مطلقة Absolute Minimum Value
- قيمة قصوى محلية Local Extreme Value
- نقطة حرجة Critical Point

دعنا نفكر ونتناقش

في الشكل المقابل $AMNP$; $MBQR$ مربعان فيهما $AB = 6\text{ cm}$ ، $M \in \overline{AB}$ ، $AM = x$.

نريد معرفة موقع M بحيث يكون مجموع مساحتي المربعين أصغر ما يمكن.

1 أوجد مساحة كلّ من المربعين.

2 (a) ماذا تمثل $S(x) = 2x^2 - 12x + 36$؟
(b) أكمل الجدول.

x	0	1	2	3	4	5	6
$S(x)$							

(c) لأي قيمة للمتغير x في الجدول تكون قيمة $S(x)$ الأصغر؟

3 (a) أثبت أن $S(x) - S(3) \geqslant 0$ لكل قيم x على الفترة $(0, 6)$.
(b) استنتج موقع M.

القيم القصوى Extreme Values

الشكل (1) يمثل بيان الدالة S من دعنا نفكر ونتناقش.

ويتضح أن للدالة S قيمة صغرى عند $x = 3$ وتسمى أيضًا **قيمة قصوى** وفي هذه الحالة $S(x) \geqslant S(3)$ لكل x تنتمي إلى مجال S.

في هذا الدرس سنتعرف على القيم القصوى والتي يمكن أن تكون القيمة الأصغر أو القيمة الأكبر للدالة مستعينين بدراسة إشارة مشتقة الدالة.

تعريف (1): القيم القصوى المطلقة

إذا كانت f دالة مجالها D ، $c \in D$ ، فإن $f(c)$ تسمى:

(a) قيمة عظمى مطلقة للدالة f على D عندما: $f(c) \geqslant f(x)\ ,\ \forall x \in D_f$

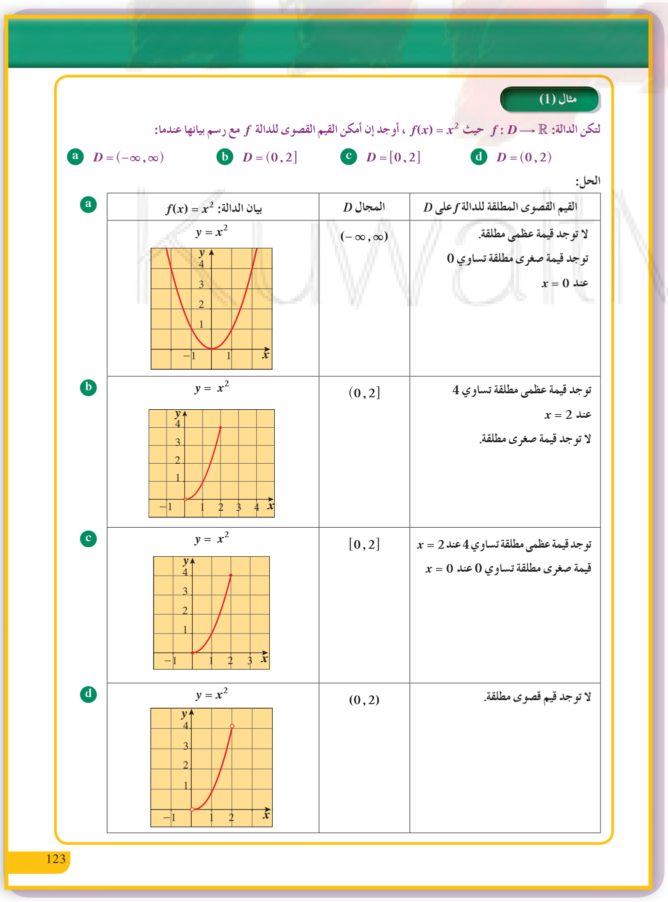
(b) قيمة صغرى مطلقة للدالة f على D عندما: $f(c) \leqslant f(x)\ ,\ \forall x \in D_f$

- القيم العظمى المطلقة والقيم الصغرى المطلقة تسمّى القيم **القصوى المطلقة**.
- تسمى القيم القصوى المطلقة **بالقيم القصوى** أي أننا نكتفي بالقول قيمة عظمى أو قيمة صغرى. قد يكون للدالة قيم قصوى مختلفة وذلك بحسب مجالها.

شكل (1) بيان الدالة S

شكل (2)

122



مثال (1)

لتكن الدالة: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ حيث $f(x) = x^2$ ، أوجد إن أمكن القيم القصوى للدالة f مع رسم بيانها عندما:

(a) $D = (-\infty, \infty)$ (b) $D = (0, 2]$ (c) $D = [0, 2]$ (d) $D = (0, 2)$

الحل:

	بيان الدالة: $f(x) = x^2$	المجال D	القيم القصوى المطلقة للدالة f على D
(a)	$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	لا توجد قيمة عظمى مطلقة. توجد قيمة صغرى مطلقة تساوي 0 عند $x = 0$
(b)	$y = x^2$	$(0, 2]$	توجد قيمة عظمى مطلقة تساوي 4 عند $x = 2$. لا توجد قيمة صغرى مطلقة.
(c)	$y = x^2$	$[0, 2]$	توجد قيمة عظمى مطلقة تساوي 4 عند $x = 2$. قيمة صغرى مطلقة تساوي 0 عند $x = 0$
(d)	$y = x^2$	$(0, 2)$	لا توجد قيم قصوى مطلقة.

123

5 التدريس

إن إحدى الطرائق للبدء في هذا الدرس هي رسم مخطط لدالة مشابهة للدالة في مثال (1)، ومناقشة القيمة الصغرى والعظمى (المطلقة) المحلية. ويمكن للطلاب أن يفهموا بشكل أفضل تعريفات تلك المفاهيم بالإدراك البصري.

يعد فهم القيم العظمى والقيم الصغرى أمرًا حاكمًا في دراسة تطبيقات المشتقة. يحتاج الطلاب إلى لغة التفاضل، لذا شدّد على مصطلحات هذا الدرس، ولذلك فإنّه من المهم ضم المهارات الجبرية المكتسبة سابقًا إلى دراسة التفاضل. توفر الأشكال في (3–6) توضيحًا لهذا الدرس.

استخدم جهاز العرض (Data Show) لعرض بيانات نظرية (1)، ناقش بدقة وعمق هذه الحالات مع الطلاب.

يبيّن شكل (7) كيف يكون للدالة قيمة قصوى عند نقطة ولا تكون الدالة قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

أكّد على أن نظرية (2) وخطوات إيجاد القيم القصوى المطلقة في فترة مغلقة.

استخدم بياني الدالتين $y = x^3$ ، $y = \sqrt[3]{x}$ في نهاية الدرس لتوضح فكرة أنّ القيم القصوى المحليّة تكون عند نقاط حرجة، ولكن ليس بالضرورة أن تكون قيمة قصوى عند كل نقطة حرجة.

في المثال (1)

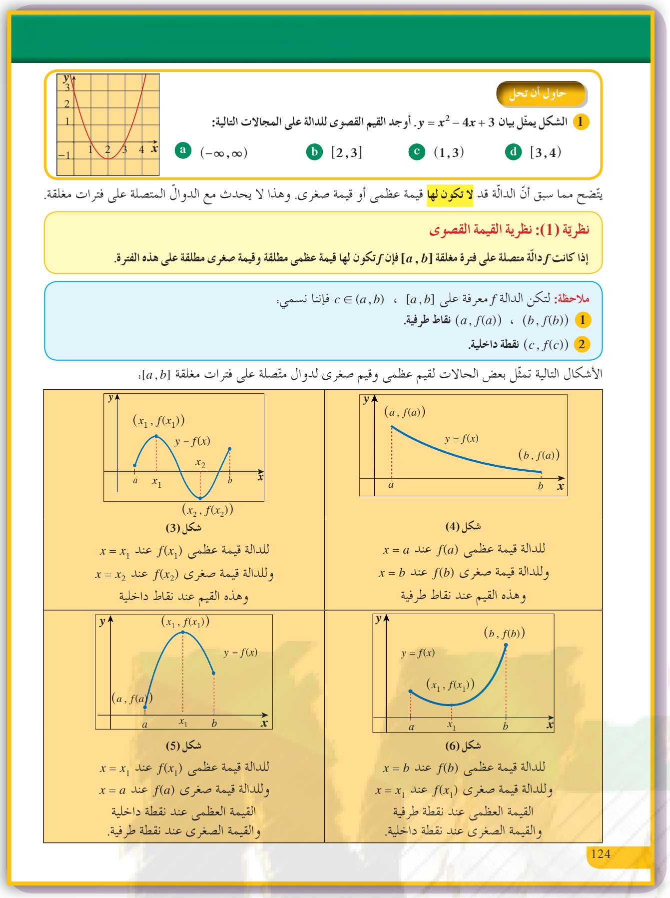
يبيّن كيف يمكن أن تتغيّر القيم القصوى لدالة بسيطة من دوال كثيرة الحدود بحسب المجال المختار.

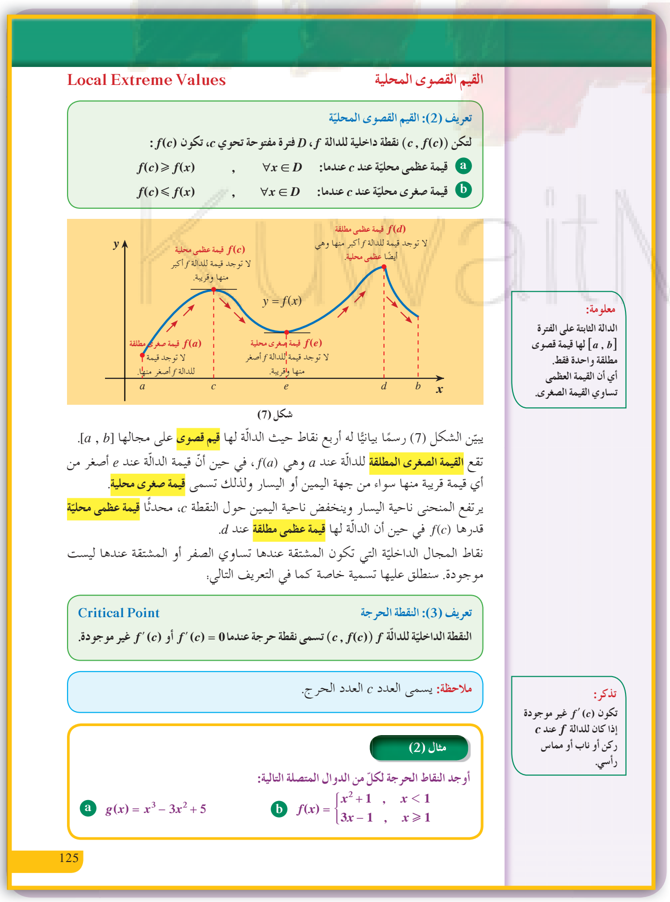
في المثال (2)

يبيّن كيفية إيجاد نقاط حرجة لدوال كثيرة حدود ودوال مفصلية.

في المثال (3)

تطبيق مباشر لإيجاد القيم القصوى المطلقة لدالة. أشر إلى أنه إذا كانت الدالة كثيرة الحدود ومتصلة على فترة مغلقة فيمكن التأكيد على وجود قيم قصوى مطلقة.





في المثال (4)

يبيّن وجود قيمة صغرى مطلقة عند $x = 0$ في حين أن المشتقة عند $x = 0$ غير موجودة.

اسأل الطلاب عن وجود قيم قصوى محلية للدالة f على الفترة $[-2 , 3]$.

في المثال (5)

استخدام العلاقة بين القيم القصوى المحلية (النقاط الحرجة) و $f'(x) = 0$ لإيجاد قيم الثابتين a , b.

أشر إلى استخدام الآلة الحاسبة في حل المعادلتين الآنيتين وإلّا فمن الضروري تبسيط المعادلة الثانية.

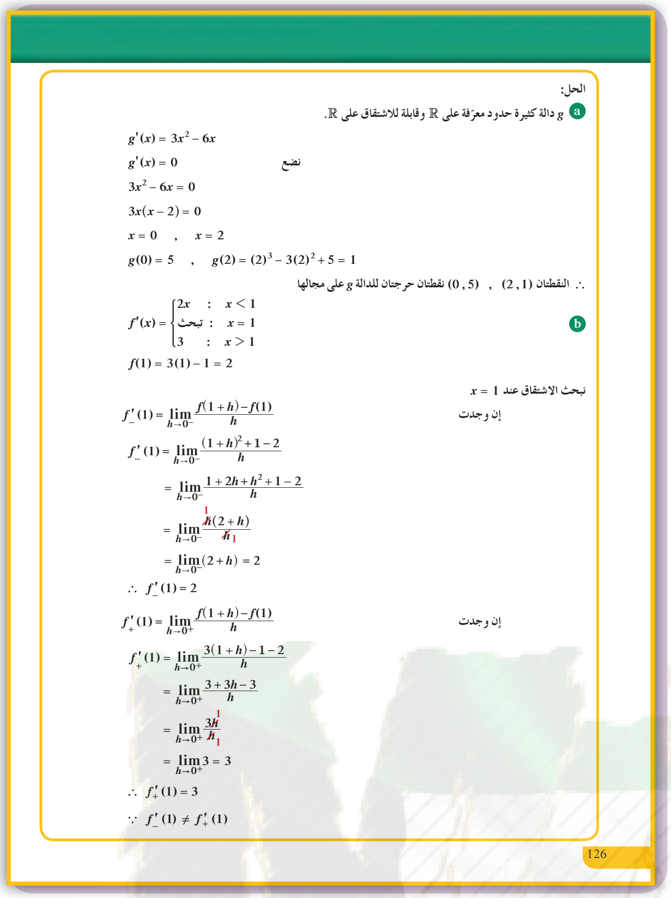
6 الربط

لا يوجد.

7 أخطاء متوقعة و معالجتها

سيفترض بعض الطلاب أن العدد الحرج يناظر دائمًا قيمة قصوى محلية؛ لذلك من الضروري أن يلاحظ الطلاب بعض الأمثلة التي لا تتحقق فيها تلك العلاقة مثل: $f(x) = x^3$.

عند إيجاد النقاط الحرجة لدالة سيتغاضى بعض الطلاب عن إيجاد النقاط حيث تكون المشتقة غير معرفة على عكس الدالة التي تكون عند تلك النقاط مثل: $f(x) = \sqrt[3]{x}$.



الحل:

ⓐ g دالة كثيرة حدود معرّفة على $\mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

$g'(x) = 3x^2 - 6x$

نضع $g'(x) = 0$

$3x^2 - 6x = 0$

$3x(x-2) = 0$

$x = 0 \quad , \quad x = 2$

$g(0) = 5 \quad , \quad g(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 5 = 1$

$\therefore$ النقطتان $(2 , 1)$, $(0 , 5)$ نقطتان حرجتان للدالة g على مجالها

ⓑ
$$f'(x) = \begin{cases} 2x & : \quad x < 1 \\ \text{تبحث} & : \quad x = 1 \\ 3 & : \quad x > 1 \end{cases}$$

$f(1) = 3(1) - 1 = 2$

نبحث الاشتقاق عند $x = 1$

إن وجدت $f'_-(1) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

$$f'_-(1) = \lim_{h \to 0^-} \frac{(1+h)^2 + 1 - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{1 + 2h + h^2 + 1 - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} (2+h) = 2$$

$\therefore \ f'_-(1) = 2$

إن وجدت $f'_+(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

$$f'_+(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{3(1+h) - 1 - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{3 + 3h - 3}{h}$$

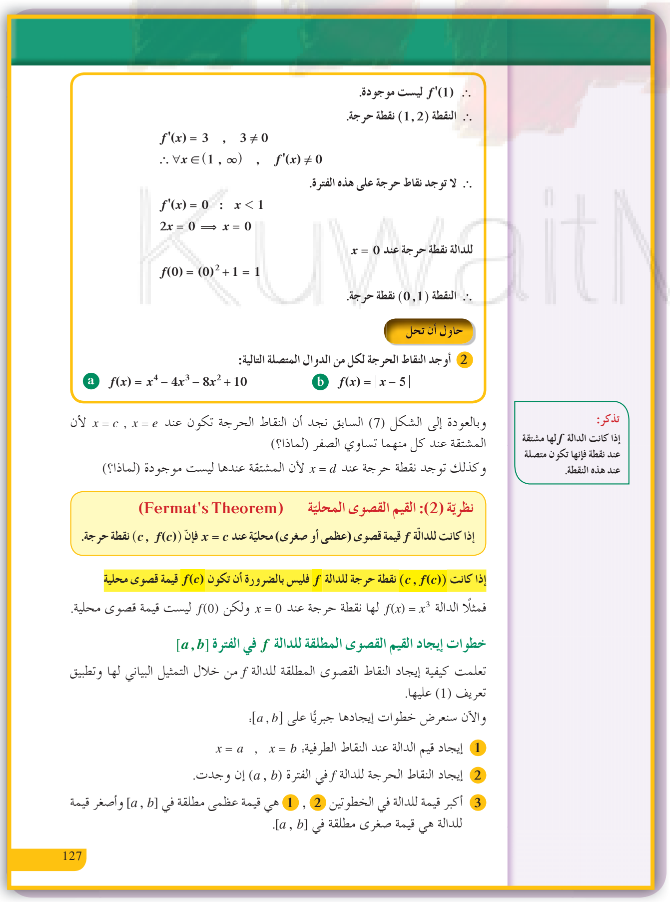
$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{3\cancel{h}}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} 3 = 3$$

$\therefore \ f'_+(1) = 3$

$\because \ f'_-(1) \neq f'_+(1)$

126



$\therefore$ $f'(1)$ ليست موجودة.

$\therefore$ النقطة $(1 , 2)$ نقطة حرجة.

$f'(x) = 3 \quad , \quad 3 \neq 0$

$\therefore \forall x \in (1 , \infty) \quad , \quad f'(x) \neq 0$

$\therefore$ لا توجد نقاط حرجة على هذه الفترة.

$f'(x) = 0 \ : \ x < 1$

$2x = 0 \Longrightarrow x = 0$

للدالة نقطة حرجة عند $x = 0$

$f(0) = (0)^2 + 1 = 1$

$\therefore$ النقطة $(0 , 1)$ نقطة حرجة.

حاول أن تحل

2 أوجد النقاط الحرجة لكل من الدوال المتصلة التالية:

ⓐ $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 10$ ⓑ $f(x) = |x - 5|$

تذكر:
إذا كانت الدالة f لها مشتقة عند نقطة فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة.

وبالعودة إلى الشكل (7) السابق نجد أن النقاط الحرجة تكون عند $x = e$, $x = c$ لأن المشتقة عند كل منهما تساوي الصفر (لماذا؟)

وكذلك توجد نقطة حرجة عند $x = d$ لأن المشتقة عندها ليست موجودة (لماذا؟)

نظريّة (2): القيم القصوى المحليّة (Fermat's Theorem)

إذا كانت للدالّة f قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) محليّة عند $x = c$ فإنّ $(c , f(c))$ نقطة حرجة.

إذا كانت $(c , f(c))$ نقطة حرجة للدالة f فليس بالضرورة أن تكون $f(c)$ قيمة قصوى محلية

فمثلًا الدالة $f(x) = x^3$ لها نقطة حرجة عند $x = 0$ ولكن $f(0)$ ليست قيمة قصوى محلية.

خطوات إيجاد القيم القصوى المطلقة للدالة f في الفترة $[a , b]$

تعلمت كيفية إيجاد النقاط القصوى المطلقة للدالة f من خلال التمثيل البياني لها وتطبيق تعريف (1) عليها.

والآن سنعرض خطوات إيجادها جبريًّا على $[a , b]$:

1 إيجاد قيم الدالة عند النقاط الطرفية: $x = b \quad , \quad x = a$

2 إيجاد النقاط الحرجة للدالة f في الفترة (a , b) إن وجدت.

3 أكبر قيمة للدالة في الخطوتين 2 , 1 هي قيمة عظمى مطلقة في $[a , b]$ وأصغر قيمة للدالة هي قيمة صغرى مطلقة في $[a , b]$.

127

8 التقييم

راقب الطلاب أثناء عملهم على فقرات «حاول أن تحل» وتأكّد من فهمهم لمعنى قيم قصوى محلية وقيم قصوى مطلقة.

اختبار سريع

1. حدّد القيم القصوى للدالة المتصلة f:
$f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ على الفترة $[-2\ ,\ 2]$
قيمة قصوى $\frac{1}{2}$ عند $x = 1$ وقيمة صغرى $-\frac{1}{2}$ عند $x = -1$

2. حدد القيم العظمى والصغرى المطلقة لبيان الدالة f : $f(x) = \sqrt{x}$ على الفترة $[0\ ,\ 2]$
قيمة قصوى مطلقة $\sqrt{2}$ عند $x = 2$ وقيمة صغرى مطلقة 0 عند $x = 0$

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1. $x^2\ ,\ (6-x)^2$

2. (a) مجموع مساحتي المربعين.

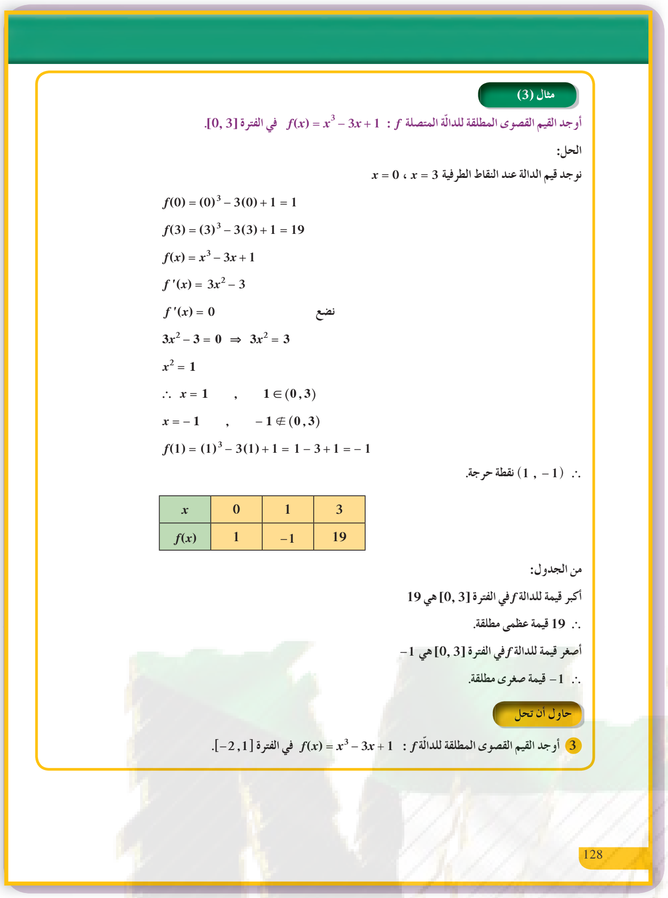
(b)

x	0	1	2	3	4	5	6
$S(x)$	36	26	20	18	20	26	36

(c) $x = 3$

3. (a) $S(x) - S(3) = 2(x-3)^2 \geqslant 0$

(b) M منتصف $\overline{AB}$.


مثال (3)

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالّة المتصلة f : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[0, 3]$.

الحل:

نوجد قيم الدالة عند النقاط الطرفية $x = 3$ ، $x = 0$

$f(0) = (0)^3 - 3(0) + 1 = 1$

$f(3) = (3)^3 - 3(3) + 1 = 19$

$f(x) = x^3 - 3x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

نضع $f'(x) = 0$

$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3$

$x^2 = 1$

$\therefore\ x = 1 \quad , \quad 1 \in (0, 3)$

$x = -1 \quad , \quad -1 \notin (0, 3)$

$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$

$\therefore$ $(1\ ,\ -1)$ نقطة حرجة.

x	0	1	3
$f(x)$	1	-1	19

من الجدول:

أكبر قيمة للدالة f في الفترة $[0, 3]$ هي 19

$\therefore$ 19 قيمة عظمى مطلقة.

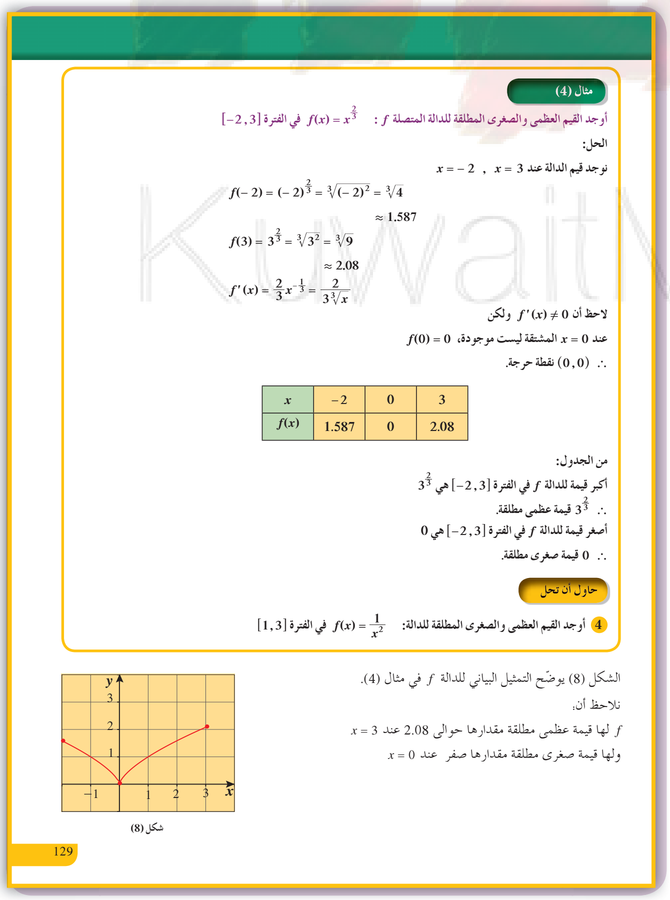
أصغر قيمة للدالة f في الفترة $[0, 3]$ هي -1

$\therefore$ -1 قيمة صغرى مطلقة.

حاول أن تحل

3. أوجد القيم القصوى المطلقة للدالّة f : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[-2, 1]$.

128


مثال (4)

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة المتصلة f : $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ في الفترة $[-2, 3]$

الحل:

نوجد قيم الدالة عند $x = 3$, $x = -2$

$f(-2) = (-2)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-2)^2} = \sqrt[3]{4}$
≈ 1.587

$f(3) = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$
≈ 2.08

$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

لاحظ أن $f'(x) \neq 0$ ولكن

عند $x = 0$ المشتقة ليست موجودة، $f(0) = 0$

$\therefore$ $(0, 0)$ نقطة حرجة.

x	-2	0	3
$f(x)$	1.587	0	2.08

من الجدول:

أكبر قيمة للدالة f في الفترة $[-2, 3]$ هي $3^{\frac{2}{3}}$

$\therefore$ $3^{\frac{2}{3}}$ قيمة عظمى مطلقة.

أصغر قيمة للدالة f في الفترة $[-2, 3]$ هي 0

$\therefore$ 0 قيمة صغرى مطلقة.

حاول أن تحل

4. أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ في الفترة $[1, 3]$

الشكل (8) يوضّح التمثيل البياني للدالة f في مثال (4).

نلاحظ أن:

f لها قيمة عظمى مطلقة مقدارها حوالى 2.08 عند $x = 3$

ولها قيمة صغرى مطلقة مقدارها صفر عند $x = 0$

شكل (8)

129

«حاول أن تحل»

1 **(a)** قيمة صغرى مطلقة تساوي -1 عند $x = 2$

(b) قيمة صغرى مطلقة تساوي -1 عند $x = 2$

قيمة عظمى مطلقة تساوي صفر عند $x = 3$

(c) قيمة صغرى مطلقة تساوي -1 عند $x = 2$

(d) قيمة صغرى مطلقة عند $x = 3$ تساوي صفرًا.

تمرَّنْ 3-1

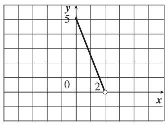
القيم القصوى (العظمى/الصغرى) للدوال

Extreme Values of Functions

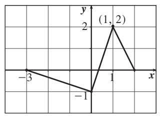
المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (1—2)، أوجد النقاط التي توجد عندها قيم قصوى.

(1)

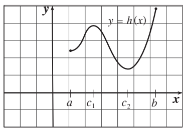


(2)

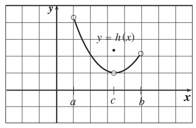


في التمارين (3—6)، حدّد قيمة x التي قد تقع عندها إحدى القيم القصوى المطلقة للدوال الموضح بيانها فيما يلي مستخدمًا نظريّة القيم القصوى.

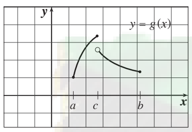
(3)



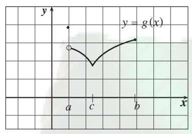
(4)



(5)



(6)



في التمارين (7—9)، حدّد النقاط الحرجة.

(7) $y = x^2(x+2)$ (8) $y = x\sqrt{3-x}$ (9) $y = \begin{cases} 3-x , & x < 0 \\ 3+2x-x^2 , & x \geq 0 \end{cases}$

مثال (5)

لتكن f : $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5 \ , \ a , b \in \mathbb{R}$

وكان للدالة قيمة قصوى محلية عند كلّ من: $x = 1 \ , \ x = \frac{1}{3}$

أوجد قيمة كل من الثابتين a , b

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$\because$ للدالة قيم قصوى محلية عند $x = 1 \ , \ x = \frac{1}{3}$

$\therefore$ توجد نقاط حرجة للدالة عندهما وبالتالي:

$$f'(1) = 0 \ , \ f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$

نحصل على المعادلتين الآتيتين:

$$\begin{cases} 3(1)^2 + 2a(1) + b = 0 \\ 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2a\left(\frac{1}{3}\right) + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + b = -3 \\ \frac{2}{3}a + b = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

استخدم الآلة الحاسبة العلمية لإيجاد الحل $\quad a = -2 \ , \ b = 1$

حاول أن تحل

5 لتكن f : $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1 \ , \ a , b \in \mathbb{R}$

وكان للدالة قيمة قصوى محلية عند كل من: $x = -1 \ , \ x = 2$

أوجد قيمة كل من الثابتين a , b

الربط بالتكنولوجيا:
خطوات الحل المستخدمة لحل معادلتين آنيتين بمتغيرين بالحاسبة.
اضغط المفتاح Mode يظهر على الشاشة 8 خيارات لبرامج مستخدمة،
اختر البرنامج: 5:EQN فيظهر على الشاشة 4 صيغ لمعادلات:
اختر الصيغة:
$1: a_n x + b_n y = c_n$
فيظهر على الشاشة المصفوفة:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}\begin{bmatrix} a\square & b\square & c\square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

اكتب كلًّا من المعادلتين على الشكل التالي:
$ax + by = c$
املأ المربعات في السطر الأول بمعامل x يليه = ثم معامل y يليه = ثم قيمة c يليه = .
كرر العملية في السطر الثاني.
اضغط الآن على المفتاح = تظهر قيمة x (المجهول الأول)
اضغط ثانية على المفتاح = تظهر قيمة y (المجهول الثاني)

ملاحظة:
يمكنك كذلك حل المعادلتين الآنيتين باستخدام طريقة الحذف أو طريقة التعويض.

في التمارين (10—14)، أوجد القيم القصوى المطلقة لكلّ دالّة من الدوال التالية في الفترة المبينة.

(10) $y = 2x^2 - 8x + 9 \ , \ [0,4]$

(11) $f(x) = x^{\frac{3}{5}} \ , \ [-2,3]$

(12) $y = \frac{x}{x^2+1} \ , \ [-3,0]$

(13) $y = \sqrt{3+2x-x^2} \ , \ [-1,1]$

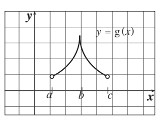
(14) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ , \ \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1—5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت f دالة متصلة على (a , b) فإن f لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة. (a) (b)

(2) في الشكل التالي، للدالة g قيمة قصوى محليّة عند $x = c$. (a) (b)



(3) الدالة g : $g(x) = \sqrt{9-x^2}$ لها قيمة عظمى في مجالها. (a) (b)

(4) الدالة f : $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ لها قيمة عظمى في مجالها. (a) (b)

(5) الدالة h : $h(x) = |3x-5|$ لها قيمة حرجة عند $x = 5$. (a) (b)

في التمارين (6—9)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) لتكن $y = |x|$، فإن الدالة y:

(a) لها قيمة عظمى مطلقة فقط.

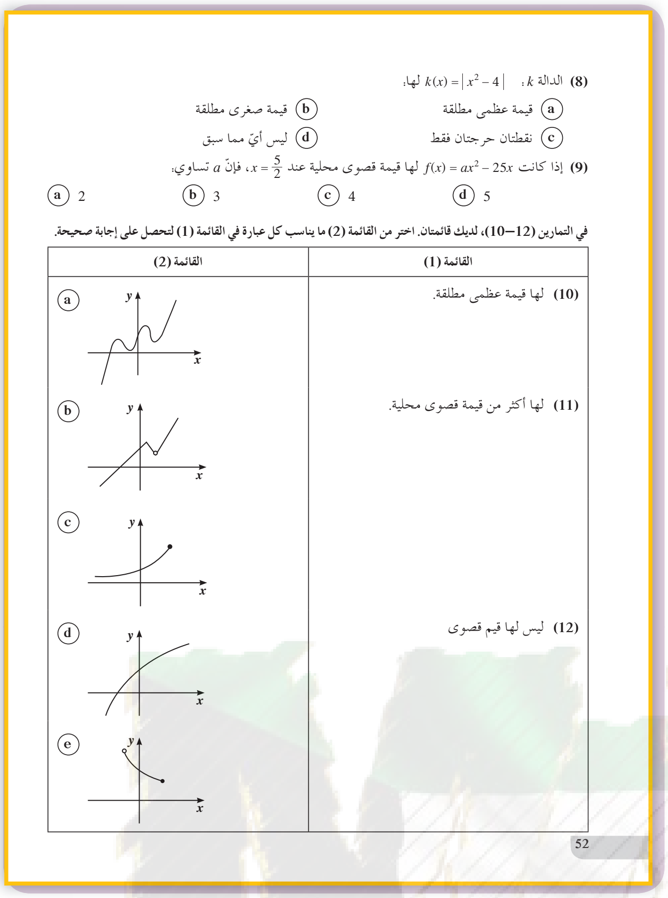
(b) لها قيمة صغرى مطلقة فقط.

(c) لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة.

(d) ليس لها قيمة صغرى مطلقة وليس لها قيمة عظمى مطلقة.

(7) عدد النقاط الحرجة للدالة: $y = 3x^3 - 9x - 4$ على الفترة $(0 , 2)$ هو:

(a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) 0



(8) الدالة k : $k(x) = |x^2 - 4|$ لها:

(a) قيمة عظمى مطلقة (b) قيمة صغرى مطلقة

(c) نقطتان حرجتان فقط (d) ليس أيّ مما سبق

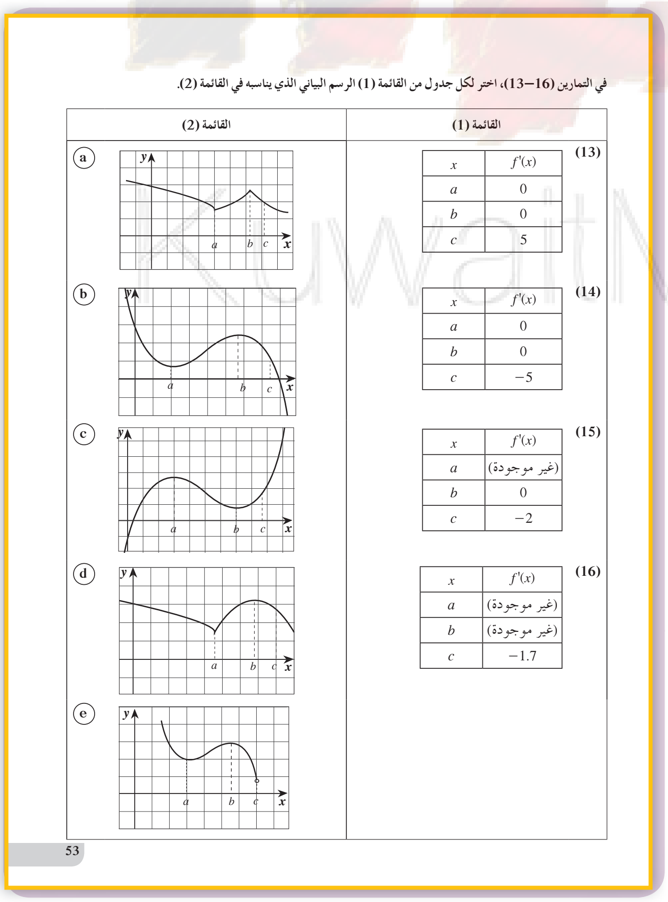
(9) إذا كانت $f(x) = ax^2 - 25x$ لها قيمة قصوى محلية عند $x = \frac{5}{2}$، فإنّ a تساوي:

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

في التمارين (12–10)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل عبارة في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

القائمة (1)	القائمة (2)
(10) لها قيمة عظمى مطلقة.	(a)
(11) لها أكثر من قيمة قصوى محلية.	(b)
	(c)
(12) ليس لها قيم قصوى	(d)
	(e)

52



في التمارين (16–13)، اختر لكل جدول من القائمة (1) الرسم البياني الذي يناسبه في القائمة (2).

القائمة (1)

(13)

x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	5

(14)

x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	-5

(15)

x	$f'(x)$
a	(غير موجودة)
b	0
c	-2

(16)

x	$f'(x)$
a	(غير موجودة)
b	(غير موجودة)
c	-1.7

القائمة (2): (a) (b) (c) (d) (e)

53

2 **(a)** نقاط حرجة: $(0\ ,\ 10), (-1\ ,\ 7), (4\ ,\ -118)$

(b) $f'_{-}(5) = -1\ ,\quad f'_{+}(5) = 1$

$f'(5)$ غير موجودة

$\therefore$ نقطة حرجة $(5,\ 0)$

3 قيمة عظمى مطلقة تساوي 3 عند $x = -1$ وقيمة صغرى مطلقة تساوي -1 عند $x = 1$ وعند $x = -2$

4 قيمة صغرى مطلقة تساوي $\frac{1}{9}$ عند $x = 3$

قيمة عظمى مطلقة تساوي 1 عند $x = 1$

5 $a = -3\ ,\ b = -12$

2–3: تزايد وتناقص الدوال

1 الأهداف

- تطبيق نظرية القيمة المتوسطة.
- إيجاد الفترات من المجال حيث تكون الدالة متزايدة أو متناقصة.
- تعرف الدوال المطّردة.
- تعرف الدالة الثابتة.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

نظرية القيمة المتوسطة – الدوال المتزايدة – الدوال المتناقصة – الدالة المطّردة.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(1) لتكن الدالة f: $f(x) = x^2 - 4x + 3$

أوجد مشتقة الدالة.

(2) حلّ ما يلي:

(a) $f'(x) = 0$

(b) $f'(x) > 0$

(c) $f'(x) < 0$

(3) **(a)** أكمل الجدول التالي:

x	-1	0	1	2	3	4
$f'(x)$						
$f(x)$						

(b) ماذا تلاحظ بالنسبة إلى إشارة $f'(x)$ وتغير سلوك $f(x)$ لقيم $x < 2$ وقيم $x > 2$؟

3–2

تزايد وتناقص الدوال

Increasing and Decreasing Functions

سوف تتعلم
- نظرية القيمة المتوسطة.
- تزايد وتناقص الدوال.
- الدوال المطردة.
- الدالة الثابتة.

المفردات والمصطلحات
- نظرية القيمة المتوسطة Mean Value Theorem
- الدوال المتزايدة Increasing Functions
- الدوال المتناقصة Decreasing Functions
- الدالة المطّردة Monotonic Function

دعنا نفكر ونتناقش

إذا كانت $f(x) = x^2 - 1$ فأجب عمّا يلي:

1 ارسم المستقيم المار بالنقطتين $A(-1, f(-1))$, $B(2, f(2))$ ثم أوجد الميل $m(\overleftrightarrow{AB})$.

2 هل الدالة f متصلة على $[-1,2]$؟ وهل f قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1,2)$؟

3 أوجد ميل المماس لمنحنى f عند $x = \frac{1}{2}$ (لاحظ أن $\frac{1}{2} \in (-1,2)$)

4 استنتج العلاقة بين 3 , 1 .

نظريّة القيمة المتوسّطة Mean Value Theorem

تربط نظريّة القيمة المتوسّطة بين متوسّط معدل تغيّر دالّة على فترة ما، ومعدّل التغيّر للدالّة عند نقطة تنتمي إلى هذه الفترة.

تكمن نتائجها القويّة في صميم بعض التطبيقات الكثيرة الأهميّة في علم حساب التفاضل والتكامل.

تقول النظريّة إنّه في مكان ما بين نقطتين A , B على منحنى دالة قابلة للاشتقاق، يوجد على الأقل خطّ مماسّ واحد يوازي قاطع المنحنى $\overleftrightarrow{AB}$ (كما في الشكل (1)).

$$m(\overleftrightarrow{AB}) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

مماس مواز للقاطع

ميل المماس = $f'(c)$

$y = f(x)$

شكل (1)

نظريّة (3): نظريّة القيمة المتوسّطة

إذا كانت f دالة:

1 متّصلة على الفترة $[a , b]$

2 قابلة للاشتقاق على الفترة (a , b)

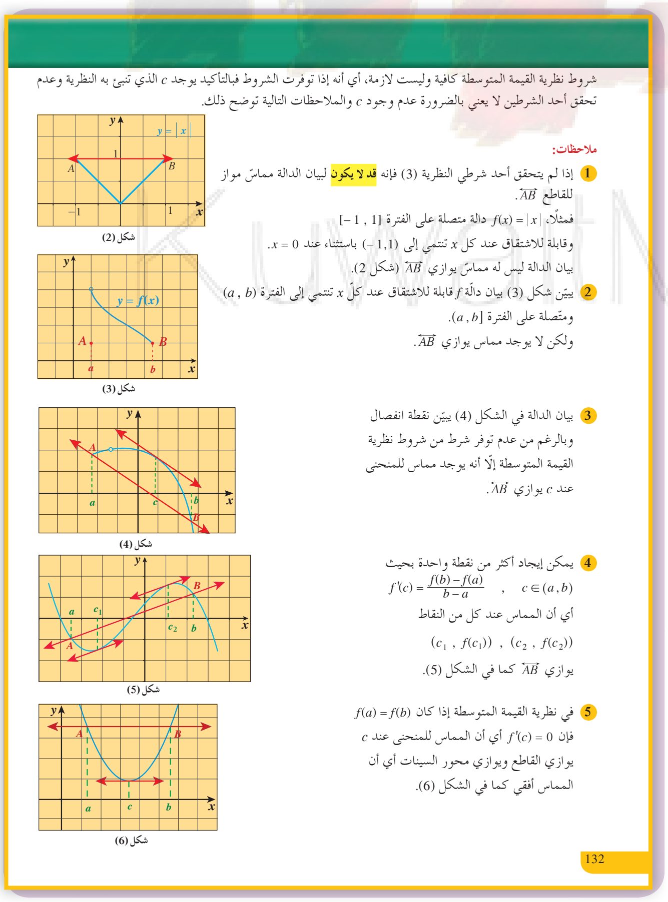
فإنّه يوجد على الأقل $c \in (a , b)$ بحيث $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

معلومة:

إن تسارع سيارة من سكون لتقطع مسافة 120 m يستغرق 8 s يبلغ معدل سرعة السيارة خلال هذه الفترة الزمنية $\frac{120}{8} = 15$ m/s أي 54 km/h

تفيد نظرية القيمة المتوسطة أنه خلال انطلاق السيارة وفي نقطة ما محددة على المسار يجب أن يشير عداد السرعة إلى 54 km/h

131



شروط نظرية القيمة المتوسطة كافية وليست لازمة، أي أنه إذا توفرت الشروط فبالتأكيد يوجد c الذي تنبئ به النظرية وعدم تحقق أحد الشرطين لا يعني بالضرورة عدم وجود c والملاحظات التالية توضح ذلك.

ملاحظات:

1 إذا لم يتحقق أحد شرطي النظرية (3) فإنه قد لا يكون لبيان الدالة مماسّ مواز للقاطع $\overleftrightarrow{AB}$.

فمثلًا، $f(x) = |x|$ دالة متصلة على الفترة $[-1 , 1]$ وقابلة للاشتقاق عند كل x تنتمي إلى $(-1,1)$ باستثناء عند $x = 0$.

بيان الدالة ليس له مماسّ يوازي $\overleftrightarrow{AB}$ (شكل 2).

2 يبيّن شكل (3) بيان دالّة f قابلة للاشتقاق عند كلّ x تنتمي إلى الفترة (a , b) ومتّصلة على الفترة $[a , b)$.

ولكن لا يوجد مماس يوازي $\overleftrightarrow{AB}$.

3 بيان الدالة في الشكل (4) يبيّن نقطة انفصال وبالرغم من عدم توفر شرط من شروط نظرية القيمة المتوسطة إلّا أنه يوجد مماس للمنحنى عند c يوازي $\overleftrightarrow{AB}$.

4 يمكن إيجاد أكثر من نقطة واحدة بحيث $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, $c \in (a , b)$ أي أن المماس عند كل من النقاط $(c_1 , f(c_1))$, $(c_2 , f(c_2))$ يوازي $\overleftrightarrow{AB}$ كما في الشكل (5).

5 في نظرية القيمة المتوسطة إذا كان $f(a) = f(b)$ فإن $f'(c) = 0$ أي أن المماس للمنحنى عند c يوازي القاطع ويوازي محور السينات أي أن المماس أفقي كما في الشكل (6).

$y = |x|$

شكل (2)

$y = f(x)$

شكل (3)

شكل (4)

شكل (5)

شكل (6)

132

5 التدريس

لتشجيع الطلاب على دراسة نظرية القيمة المتوسطة، قد ترغب في أن تبدأ هذا الدرس بمناقشة تطبيق سهل، مثلًا: انطلقت سيارة من السكون وقطعت مسافة $100\,\text{m}$ خلال $8\,\text{s}$، معدل سرعة السيارة خلال هذه الثواني الثمانية هو $12.5\,\text{m/s}$ أي $45\,\text{km/h}$، مما يعني أنه في نقطة ما خلال التسارع بيّن مؤشر السرعة في السيارة $45\,\text{km/h}$

خُذ بعض الوقت في مناقشة كل من فروض ونتائج نظرية القيمة المتوسطة والملاحظات عليها. لاحظ أن الحالة الخاصة منها في الملاحظة رقم (5) تسمّى نظرية رول. أهمية هذه النظرية هي بالسماح لنا باستنتاج خواص دالة من مشتقتها.

استخدم الرسم البياني لتوضيح تزايد وتناقص الدوال ومنها تعريف الدالة المطردة.

في نظرية (4)، لاحظ استخدام فترات مفتوحة في وصف أين تكون الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة. على الطلاب أن يدركوا أن العبارة: f متزايدة على الفترة I لا تعني أن $f'(a) > 0$ أو $f'(b) > 0$. في نهاية الدرس اربط بين بيان الدالة f وبيان مشتقتها من خلال النشاط الموضّح.

في المثالين (1), (2)

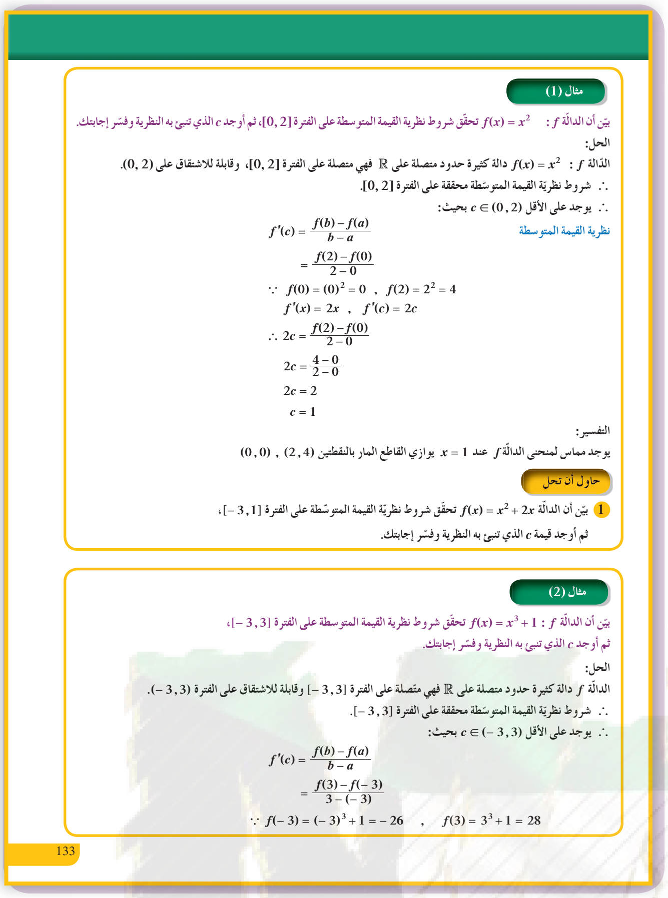
تطبيق مباشر لمفهوم القيمة المتوسطة.

شجّع الطلاب على تطبيق القيمة المتوسطة باستخدام دالة كثيرة الحدود: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ وذلك على فترتين: $[1, 2]$، $[2, 3]$ كي يستنتجوا قيمة c على كل فترة.

اطلب إليهم إيجاد العلاقة بين قيمة c وميل المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين صورتي طرفي كل فترة.

في الأمثلة (3), (4), (5)

تطبيق مشتقة الدالة لدراسة تزايدها أو تناقصها على مجال تعريفها وتكوين جدول يوضح فترات التزايد وفترات التناقص.


مثال (1)

بيّن أن الدالّة $f: f(x) = x^2$ تحقّق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 2]$، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

الحل:

الدّالة $f: f(x) = x^2$ دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ فهي متصلة على الفترة $[0, 2]$، وقابلة للاشتقاق على $(0, 2)$.

$\therefore$ شروط نظريّة القيمة المتوسّطة محققة على الفترة $[0, 2]$.

$\therefore$ يوجد على الأقل $c \in (0, 2)$ بحيث:

نظرية القيمة المتوسطة

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$$

$$\because\ f(0) = (0)^2 = 0\ ,\ f(2) = 2^2 = 4$$

$$f'(x) = 2x\ ,\ f'(c) = 2c$$

$$\therefore\ 2c = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$$

$$2c = \frac{4 - 0}{2 - 0}$$

$$2c = 2$$

$$c = 1$$

التفسير:

يوجد مماس لمنحنى الدالّة f عند $x = 1$ يوازي القاطع المار بالنقطتين $(2, 4)$, $(0, 0)$

حاول أن تحل

1 بيّن أن الدالّة $f(x) = x^2 + 2x$ تحقّق شروط نظريّة القيمة المتوسّطة على الفترة $[-3, 1]$، ثم أوجد قيمة c الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

مثال (2)

بيّن أن الدالّة $f: f(x) = x^3 + 1$ تحقّق شروط نظريّة القيمة المتوسطة على الفترة $[-3, 3]$، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

الحل:

الدالّة f دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ فهي متّصلة على الفترة $[-3, 3]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(-3, 3)$.

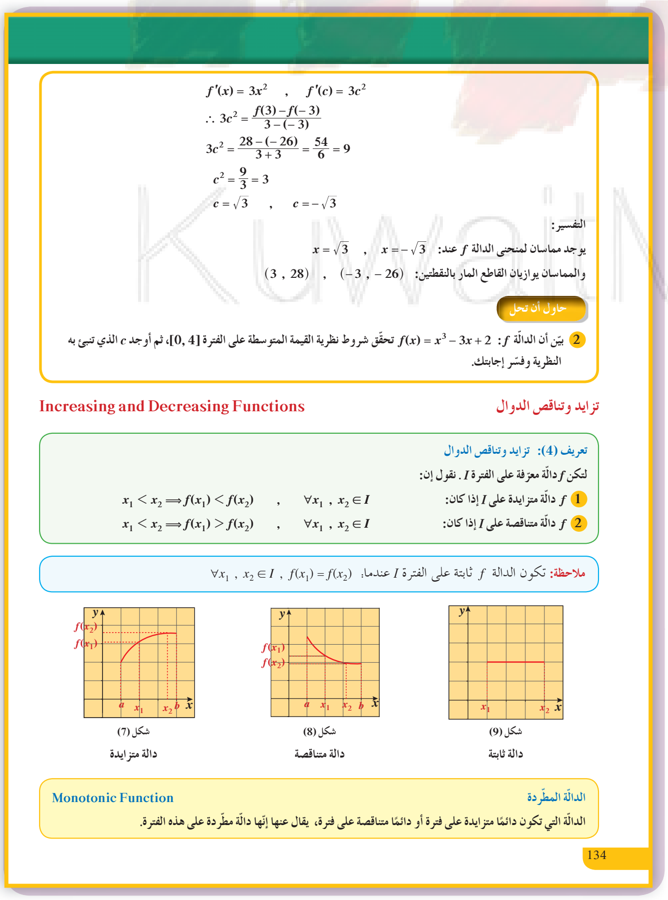
$\therefore$ شروط نظريّة القيمة المتوسّطة محققة على الفترة $[-3, 3]$.

$\therefore$ يوجد على الأقل $c \in (-3, 3)$ بحيث:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)}$$

$$\because\ f(-3) = (-3)^3 + 1 = -26\ ,\ f(3) = 3^3 + 1 = 28$$

133


$$f'(x) = 3x^2\ ,\ f'(c) = 3c^2$$

$$\therefore\ 3c^2 = \frac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)}$$

$$3c^2 = \frac{28 - (-26)}{3 + 3} = \frac{54}{6} = 9$$

$$c^2 = \frac{9}{3} = 3$$

$$c = \sqrt{3}\ ,\ c = -\sqrt{3}$$

التفسير:

يوجد مماسان لمنحنى الدالة f عند: $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$

والمماسان يوازيان القاطع المار بالنقطتين: $(-3, -26)$, $(3, 28)$

حاول أن تحل

2 بيّن أن الدالّة $f: f(x) = x^3 - 3x + 2$ تحقّق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 4]$، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

تزايد وتناقص الدوال — Increasing and Decreasing Functions

تعريف (4): تزايد وتناقص الدوال

لتكن f دالّة معرّفة على الفترة I. نقول إن:

1 f دالّة متزايدة على I إذا كان: $\forall x_1, x_2 \in I\ ,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

2 f دالّة متناقصة على I إذا كان: $\forall x_1, x_2 \in I\ ,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

ملاحظة: تكون الدالة f ثابتة على الفترة I عندما: $f(x_1) = f(x_2)\ ,\ \forall x_1, x_2 \in I$

شكل (7) دالة متزايدة

شكل (8) دالة متناقصة

شكل (9) دالة ثابتة

الدالّة المطّردة — Monotonic Function

الدالّة التي تكون دائمًا متزايدة على فترة أو دائمًا متناقصة على فترة، يقال عنها إنّها دالّة مطّردة على هذه الفترة.

134

6 الربط

إن تسارع سيارة من سكون لتقطع مسافة 120 m يستغرق 8 s، يبلغ معدل سرعة السيارة خلال هذه الفترة الزمنية

$\frac{120}{8} = 15\,\text{m/s}$ أي 54 km/h

تفيد نظرية القيمة المتوسطة أنه خلال انطلاق السيارة وفي نقطة ما محددة على المسار يجب أن يشير عداد السرعة إلى 54 km/h

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

عند تطبيق نتيجة (1) لتحديد أين تكون الدالة f متزايدة، يمكن أن يخطئ الطلاب عند حل المتباينة $f'(x) > 0$، وذلك إما بتحليل خطأ للدالة $f'(x)$ أو بخطأ في تحديد الإشارة.

8 التقييم

راقب الطلاب وهم يعملون على حل فقرات «حاول أن تحل». تأكّد من كونهم قد فهموا تزايد الدوال وتناقصها والقيمة المتوسطة.

اختبار سريع

1 بيّن أن الدالة $f(x) = x^2 + 2x - 1$ تحقق شروط القيمة المتوسطة على الفترة $[0,1]$، ثم أوجد قيمة c التي تحقق $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ على هذه الفترة.

الدالة متصلة على $[0,1]$، قابلة للاشتقاق على $(0,1)$ ، $f(0) = -1$ ، $f(1) = 2$

حيث: $f'(x) = 2x + 2$

$$f'(c) = \frac{2 - (-1)}{1 - 0} = 3$$

$$2c + 2 = 3$$

$$c = \frac{1}{2}$$

2 أين تتزايد الدالة $f(x) = x^3 - x^2$؟ وأين تتناقص؟

متزايدة على كل من $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$, $(-\infty, 0)$

متناقصة على $\left(0, \frac{2}{3}\right)$

تمكّننا نظرية القيمة المتوسطة من تحديد أين تتزايد الدوال وأين تتناقص بالضبط.
الدوالّ التي مشتقّاتها موجبة تكون دوالّ متزايدة، والدوالّ التي مشتقّاتها سالبة تكون دوالّ متناقصة.
ويتضح ذلك من خلال النظرية التالية:

نظرية (4): الدوالّ المتزايدة والدوالّ المتناقصة والدوال الثابتة

لتكن f دالّة قابلة للاشتقاق على (a, b).

1 إذا كانت $f'(x) > 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة (a, b)، فإنّ f تتزايد على (a, b).

2 إذا كانت $f'(x) < 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة (a, b)، فإنّ f تتناقص على (a, b).

3 إذا كانت $f'(x) = 0$ عند كلّ نقطة تنتمي إلى الفترة (a, b)، فإنّ الدالة f ثابتة على (a, b).

مثال (3)

أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f : $f(x) = x^2 - 5x + 6$

الحل:

الدالة f كثيرة حدود فهي متصلة على $\mathbb{R}$

نوجد مشتقة الدالة f : $f'(x) = 2x - 5$

نضع $f'(x) = 0$

$2x - 5 = 0 \Longrightarrow x = \frac{5}{2}$

نكوّن الجدول لدراسة إشارة f'

$-\infty$, $\frac{5}{2}$, ∞

الفترات	$\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$	$\left(\frac{5}{2}, \infty\right)$
إشارة f'	$--$	$++$
سلوك الدالة f	↘↘	↗↗

من الجدول:

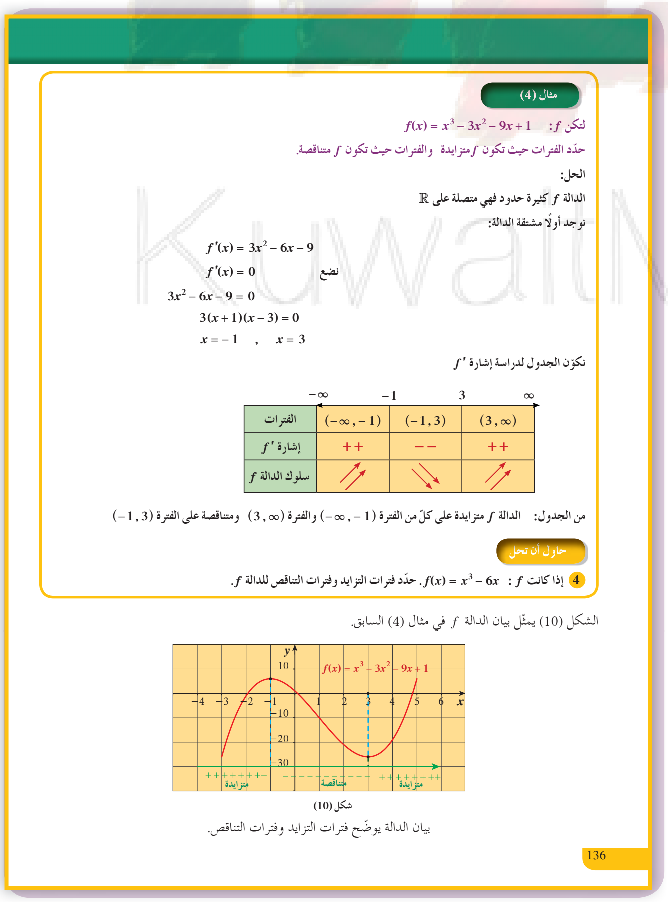
f متناقصة على الفترة $\left(-\infty , \frac{5}{2}\right)$

f متزايدة على الفترة $\left(\frac{5}{2} , \infty\right)$

حاول أن تحل

3 أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f : $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

135



مثال (4)

لتكن f: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

حدّد الفترات حيث تكون f متزايدة والفترات حيث تكون f متناقصة.

الحل:

الدالة f كثيرة حدود فهي متصلة على $\mathbb{R}$

نوجد أولًا مشتقة الدالة:

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

نضع $f'(x) = 0$

$3x^2 - 6x - 9 = 0$

$3(x + 1)(x - 3) = 0$

$x = -1 \quad , \quad x = 3$

نكوّن الجدول لدراسة إشارة f'

$-\infty$, -1 , 3 , ∞

الفترات	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$
إشارة f'	$++$	$--$	$++$
سلوك الدالة f	↗↗	↘↘	↗↗

من الجدول: الدالة f متزايدة على كلّ من الفترة $(-\infty, -1)$ والفترة $(3, \infty)$ ومتناقصة على الفترة $(-1, 3)$

حاول أن تحل

4 إذا كانت f : $f(x) = x^3 - 6x$. حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f.

الشكل (10) يمثّل بيان الدالة f في مثال (4) السابق.

شكل (10)

بيان الدالة يوضّح فترات التزايد وفترات التناقص.

136

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1 ميل $\overleftrightarrow{AB} = 1$

2 الدالة f متصلة على $[-1,2]$، كذلك قابلة للاشتقاق على $(-1, 2)$

3 1

4 المماس موازٍ لِـ $\overleftrightarrow{AB}$.

«حاول أن تحل»

1 الدالة f متصلة على الفترة $[-3,1]$، قابلة للاشتقاق على $(-3,1)$ حيث: $f'(x) = 2x + 2$، $f(-3) = 3$، $f(1) = 3$، إذاً نظرية القيمة المتوسطة تحقق وجود نقطة c على الفترة $(-3,1)$

حيث : $f'(c) = \dfrac{f(1) - f(-3)}{1 - (-3)} = \dfrac{3 - 3}{4} = 0$

$2c + 2 = 0$

$c = -1$

المماس عند $c = -1$ موازٍ لمحور السينات

2 f متصلة على الفترة $[0, 4]$ وقابلة للاشتقاق على $(0, 4)$

$f(0) = 2 \quad , \quad f(4) = 54$

$\therefore$ نظرية القيمة المتوسطة تحقق وجود نقطة c على الفترة $(0, 4)$ حيث: $f'(x) = 3x^2 - 3$

$3c^2 - 3 = \dfrac{54 - 2}{4 - 0} = 13$

$3c^2 = 16 \; ; \; c = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

$\because = \dfrac{-4}{\sqrt{3}} \notin (0,4) \qquad \therefore \; c = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

3 $f'(x) = -2x + 4$

$f'(x) = 0 \; , \; x = 2 \; , \; f(2) = 1$

	$-\infty$ ... 2	2 ... ∞
الفترات	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
إشارة f'	$+ \; +$	$- \; -$
سلوك f	↗ ↗	↘ ↘

f متزايدة على الفترة $(-\infty, 2)$.

f متناقصة على الفترة $(2, \infty)$.

مثال (5)

إذا كانت f الدالة: $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$.

حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة.

الحل:

الدالة f حدودية نسبية فهي متصلة لكل x حيث $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

نوجد مشتقة الدالة

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - 1(x)^2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

نضع $f'(x) = 0$

$$\frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0$$

$$\Longrightarrow x = 0 \quad , \quad x = 2$$

نكوّن الجدول لدراسة إشارة f'

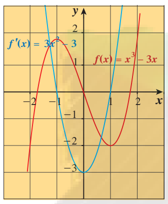
	$-\infty$ ... 0	0 ... 1	1 ... 2	2 ... ∞
الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
إشارة f'	+	− غير معرفة	−	+
سلوك الدالة f	↗	↘	↘	↗

من الجدول f متزايدة على كل من الفترة $(-\infty, 0)$ والفترة $(2, \infty)$ ومتناقصة على كل من الفترة $(0, 1)$ والفترة $(1, 2)$

حاول أن تحل

5 حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f : $f(x) = \dfrac{x^2}{2x - 1}$

نشاط



الشكل المقابل يوضّح بيان الدالة f وبيان مشتقتها f'

أكمل ما يلي:

في الفترة $(-\infty, -1)$ الدالة f متزايدة ومنحنى الدالة f' يقع أعلى محور السينات أي أن $f'(x)$ موجبة $\forall x \in (-\infty, -1)$

في الفترة $(-1, 1)$ الدالة f .... ومنحنى الدالة f' يقع ....

أي أن ....

في الفترة $(1, \infty)$ الدالة f .... ومنحنى الدالة f' يقع ....

أي أن ....

137

4 $f'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

	$-\infty$ ... $-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$ ... $\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$ ... ∞
الفترات	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
إشارة f'	$+ \; +$	$- \; -$	$+ \; +$
سلوك f	↗ ↗	↘ ↘	↗ ↗

f متزايدة على كلّ من الفترتين $(-\infty, -\sqrt{2})$، $(\sqrt{2}, \infty)$، f متناقصة على الفترة $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

5 الدالة غير معرفة عند $x = \frac{1}{2}$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2x}{(2x-1)^2} = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$$

	$-\infty$ 0 $\frac{1}{2}$ 1 ∞			
الفترات	$(-\infty , 0]$	$\left(0 , \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2} , 1\right)$	$(1 , \infty)$
إشارة f'	$+ +$	$- -$	$- -$	$+ +$
سلوك f	↗ ↗	↘ ↘	↘ ↘	↗ ↗

f متزايدة على كلّ من الفترتين $(-\infty , 0)$ ، $(1 , \infty)$.

f متناقصة على كلّ من الفترتين $\left(\frac{1}{2} , 1\right)$ ، $\left(0 , \frac{1}{2}\right)$.

«نشاط»

* متناقصة، منحنى الدالة f' يقع أسفل محور السينات،
$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (-1,1)$

* متزايدة، منحنى الدالة f' يقع أعلى محور السينات،
$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (1,\infty)$

تمرَّنْ 3−2

تزايد وتناقص الدوال

Increasing and Decreasing Functions

المجموعة A تمارين مقالية

(1) بيّن أن الدالة f: $f(x) = x^2 + 2x - 1$ تحقّق شروط نظريّة القيمة المتوسطة على $[0, 1]$. ثمّ أوجد قيمة c التي تنبئ بها النظرية. فسّر إجابتك.

(2) بيّن أن الدالة f: $f(x) = x + \frac{1}{x}$ تحقّق شروط نظريّة القيمة المتوسطة على $\left[\frac{1}{2} , 2\right]$. ثمّ أوجد قيمة c التي تنبئ بها النظرية. فسّر إجابتك.

في التمارين (7–3)، حدّد الفترات التي تكون فيها الدوال التالية متزايدة والفترات التي تكون فيها متناقصة.

(3) $f(x) = 5x - x^2$ **(4)** $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24$ **(5)** $k(x) = \frac{1}{x^2}$

(6) $h(x) = \frac{-x}{x^2+4}$ **(7)** $f(x) = x^4 - 2x^2$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة g : $g(x) = x^2 - x - 3$ متزايدة على $\left(-\infty , \frac{1}{2}\right)$ (a) (b)

(2) الدالة f: $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ متناقصة على كل من الفترة $(-\infty , -\sqrt{5})$ والفترة $(\sqrt{5} , \infty)$ (a) (b)

(3) الدالة f: $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على $[0, 1]$ (a) (b)

(4) الدالة f: $f(x) = x^3 + 1$ مطّردة على $\mathbb{R}$.   (a) (b)

في التمارين (8–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) تكون الدالة k : $k(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

(a) متزايدة على كل فترة من مجال تعريفها.

(b) متناقصة على كل فترة من مجال تعريفها.

(c) متناقصة على الفترة $(-\infty , -2)$ والفترة $(-2 , 2)$ ومتزايدة على الفترة $(2 , \infty)$

(d) ليس أيّ مما سبق.

54

(6) الدالة R : $R(x) = |x|$

(a) متزايدة على مجال تعريفها.

(b) متناقصة على مجال تعريفها.

(c) متزايدة على الفترة $(0 , \infty)$ ومتناقصة على الفترة $(-\infty , 0)$

(d) متناقصة على الفترة $(0 , \infty)$ ومتزايدة على الفترة $(-\infty , 0)$

(7) إذا كانت f' : $f'(x) = -x^2$ ، فإنّ الدالة f :

(a) متزايدة على مجال تعريفها.

(b) متناقصة على مجال تعريفها.

(c) متزايدة على الفترة $(-\infty, 0)$

(d) متناقصة على الفترة $(0 , \infty)$

(8) إذا كانت f' : $f'(x) = -3x$، فإنّ الدالة f:

(a) متزايدة على الفترة $(0, \infty)$

(b) متناقصة على الفترة $(-\infty, 0]$

(c) متزايدة على مجال تعريفها.

(d) متزايدة على الفترة $(-\infty, 0)$ ومتناقصة على الفترة $(0 , \infty)$

55

3–3: ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' بمنحنى الدالة f

1 الأهداف

- استخدام اختبارات المشتقة الأولى لتحديد القيم القصوى المحلية.
- استخدام الرسم البياني لتحديد تقعر منحنى الدالة.
- استخدام اختبار المشتقة الثانية لتحديد تقعر منحنى الدالة وتحديد نقاط الانعطاف وتحديد القيم القصوى المحلية.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

قيمة قصوى محلية – اختبار المشتقة الأولى –نقطة طرفية – التقعر – نقاط الانعطاف – اختبار المشقة الثانية.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

لتكن الدالة: $f(x) = x^3 - 3x + 3$

(a) أوجد $f'(x)$ و $f''(x)$

(b) أكمل الجدول التالي:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$							
$f''(x)$							
$f(x)$							

(c) ماذا تلاحظ بالنسبة إلى إشارات $f'(x)$ و $f''(x)$ وتأثيرها على تغير $f(x)$؟

(d) عيّن النقاط $(x, f(x))$ من الجدول في مستوى إحداثي.

(e) ناقش الربط بين $f'(x)$ و $f''(x)$ و $f(x)$.

3–3

ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' بمنحنى الدالة f

Connecting f' and f'' with the Graph of f

سوف تتعلم
- اختبار المشتقة الأولى لتحديد القيم القصوى المحلية.
- تحديد تقعر منحنى الدالة باستخدام المشتقة الثانية أو الرسم البياني.
- تحديد نقاط الانعطاف بدراسة المشتقة الثانية.
- اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوى المحلية.

المفردات والمصطلحات
- قيمة قصوى محلية Local Extrema
- اختبار المشتقة الأولى First Derivative Test
- نقطة طرفية End Point
- التقعر Concavity
- نقاط الانعطاف Points of Inflection
- اختبار المشتقة الثانية Second Derivative Test

ملاحظة:
- $f' > 0$ تعني أن قيم $f'(x)$ موجبة لكل قيم x
- $f' < 0$ تعني أن قيم $f'(x)$ سالبة لكل قيم x

دعنا نفكر ونتناقش

انظر إلى بيان الدالة في الشكل أدناه، ثمّ ضع علامة (✓) لكل فقرة مناسبة في الجدول أدناه:

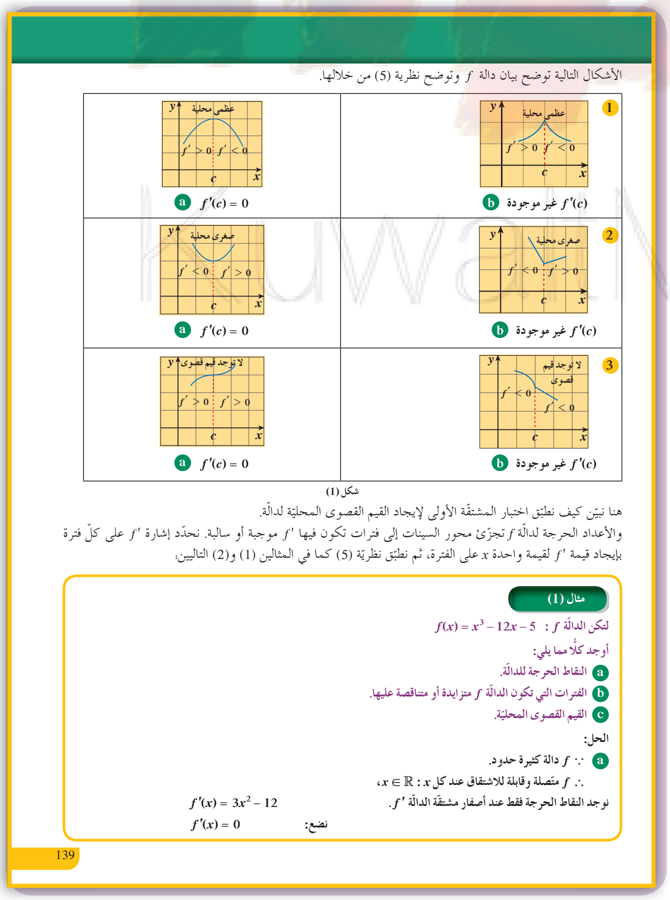
الفترة (المجال)	قيمة صغرى مطلقة	قيمة عظمى مطلقة	قيمة صغرى محلية	قيمة عظمى محلية	تزايد في فترة	تناقص في فترة
$[a, c_2]$						
$[c_1, c_3)$						
$[c_2, c_3)$						
$[c_3, c_5)$						
$[c_1, c_4]$						
$[c_5, b]$						

نظريّة (5): اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحليّة

لتكن f دالّة متّصلة على مجالها وكانت $(c, f(c))$ نقطة حرجة.

1. إذا كانت إشارة المشتقّة f' تتغيّر من الموجب إلى السالب عند $x = c$ ، فإن f يكون لها قيمة عظمى محلية عند c.
2. إذا تغيرت إشارة f' من السالب إلى الموجب عند $x = c$ ، فإن f يكون لها قيمة صغرى محلّية عند c.
3. إذا لم تتغيّر إشارة f' عند $x = c$ ، فإن f لا يكون لها قيمة قصوى محلّية عند c.

138



الأشكال التالية توضح بيان دالة f وتوضح نظرية (5) من خلالها.

شكل (1)

هنا نبيّن كيف نطبّق اختبار المشتقّة الأولى لإيجاد القيم القصوى المحليّة لدالّة.
والأعداد الحرجة لدالّة f تجزّئ محور السينات إلى فترات تكون فيها f' موجبة أو سالبة. نحدّد إشارة f' على كلّ فترة بإيجاد قيمة f' لقيمة واحدة x على الفترة، ثم نطبّق نظريّة (5) كما في المثالين (1) و(2) التاليين:

مثال (1)

لتكن الدالّة f : $f(x) = x^3 - 12x - 5$

أوجد كلًّا مما يلي:
- (a) النقاط الحرجة للدالّة.
- (b) الفترات التي تكون الدالّة f متزايدة أو متناقصة عليها.
- (c) القيم القصوى المحليّة.

الحل:

(a) ∵ f دالة كثيرة حدود.

∴ f متّصلة وقابلة للاشتقاق عند كل x : $x \in \mathbb{R}$،

نوجد النقاط الحرجة فقط عند أصفار مشتقّة الدالّة f'. $\quad f'(x) = 3x^2 - 12$

نضع: $\quad f'(x) = 0$

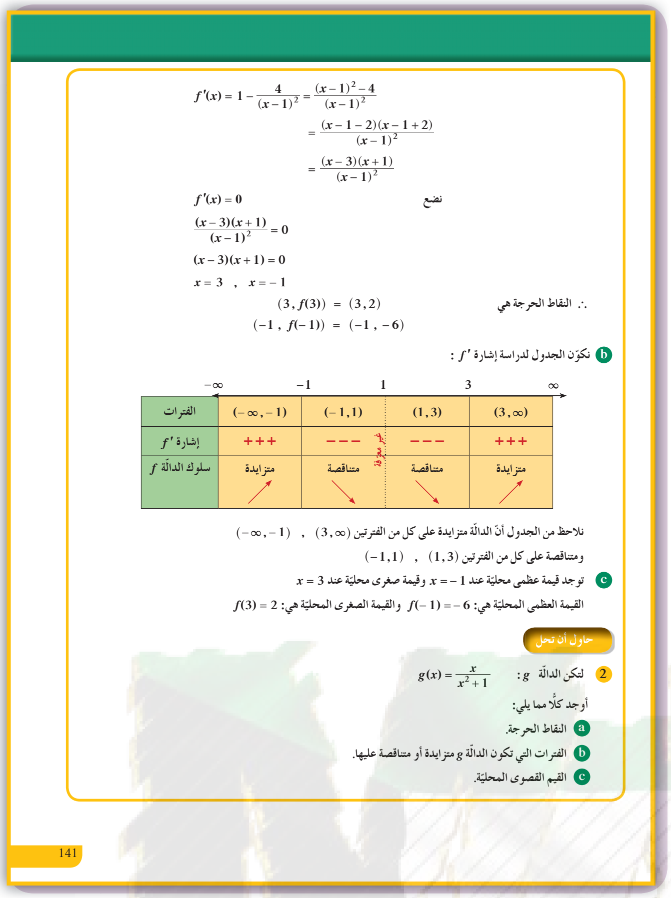
139

5 التدريس

يمكنك التهيئة لنظرية (5): «اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحلية» من فقرة «دعنا نفكر ونناقش»، عن طريق تقديم عدة رسوم بيانية، وجَعْل الطلاب يناقشون المشتقات وعلاقتها بالقيم القصوى للدالة.

يقدم هذا الدرس العديد من الاختبارات الأساسية لدراسة تغيّر دالة تمهيدًا لرسم بيانها. وهذه الاختبارات هي: اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحلية (نظرية 5)، واختبار التقعر، واختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية.

على الرغم من أن استخدام هذه الاختبارات لرسم منحنيات الدوال لا يسمح برسم بيانها بدقة، إلا أنه من المهم أن يفهم الطلاب الترابط بين المشتقتين الأولى والثانية ومنحنى الدالة. دراسة إشارة المشتقتين الأولى والثانية يوضّح كل السمات المهمة التي يشير إليها منحنى مرسوم.



$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1-2)(x-1+2)}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$$

نضع $f'(x) = 0$

$$\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2} = 0$$

$(x-3)(x+1) = 0$

$x = 3 \quad , \quad x = -1$

∴ النقاط الحرجة هي $(3, f(3)) = (3, 2)$ ، $(-1, f(-1)) = (-1, -6)$

b نكوّن الجدول لدراسة إشارة f' :

الفترات	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
إشارة f'	+++	---	---	+++
سلوك الدالّة f	متزايدة	متناقصة	متناقصة	متزايدة

غير معرّفة

نلاحظ من الجدول أنّ الدالّة متزايدة على كل من الفترتين $(3, \infty)$ ، $(-\infty, -1)$ ومتناقصة على كل من الفترتين $(1, 3)$ ، $(-1, 1)$

c توجد قيمة عظمى محليّة عند $x = -1$ وقيمة صغرى محليّة عند $x = 3$

القيمة العظمى المحليّة هي: $f(-1) = -6$ والقيمة الصغرى المحليّة هي: $f(3) = 2$

حاول أن تحل

2 لتكن الدالّة g : $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$

أوجد كلًّا مما يلي:

a النقاط الحرجة.

b الفترات التي تكون الدالّة g متزايدة أو متناقصة عليها.

c القيم القصوى المحليّة.

141

$3x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow 3(x-2)(x+2) = 0$

$x = -2 \quad , \quad x = 2$

∴ النقاط الحرجة هي: $(-2, f(-2)) = (-2, 11)$ ، $(2, f(2)) = (2, -21)$

b نكوّن الجدول لدراسة إشارة f' :

الفترات	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
إشارة f'	+++	---	+++
سلوك الدالّة f	متزايدة	متناقصة	متزايدة

نلاحظ من الجدول: الدالّة متزايدة على الفترة $(-\infty, -2)$ والفترة $(2, \infty)$ ومتناقصة على الفترة $(-2, 2)$.

c نستطيع أن نلاحظ من الجدول أنّه توجد قيمة عظمى محليّة عند $x = -2$، وقيمة صغرى محليّة عند $x = 2$.

القيمة العظمى المحليّة هي $f(-2) = 11$، والقيمة الصغرى المحليّة هي $f(2) = -21$.

حاول أن تحل

1 لتكن الدالّة f : $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$. أوجد كلًّا مما يلي:

a النقاط الحرجة للدالة.

b الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها.

c القيم القصوى المحلية.

مثال (2)

لتكن الدالّة f : $f(x) = x - 3 + \frac{4}{x-1}$

فأوجد كلًّا مما يلي:

a النقاط الحرجة للدالّة.

b الفترات التي تكون عليها الدالّة f متزايدة وتلك التي تكون عليها متناقصة.

c القيم القصوى المحليّة.

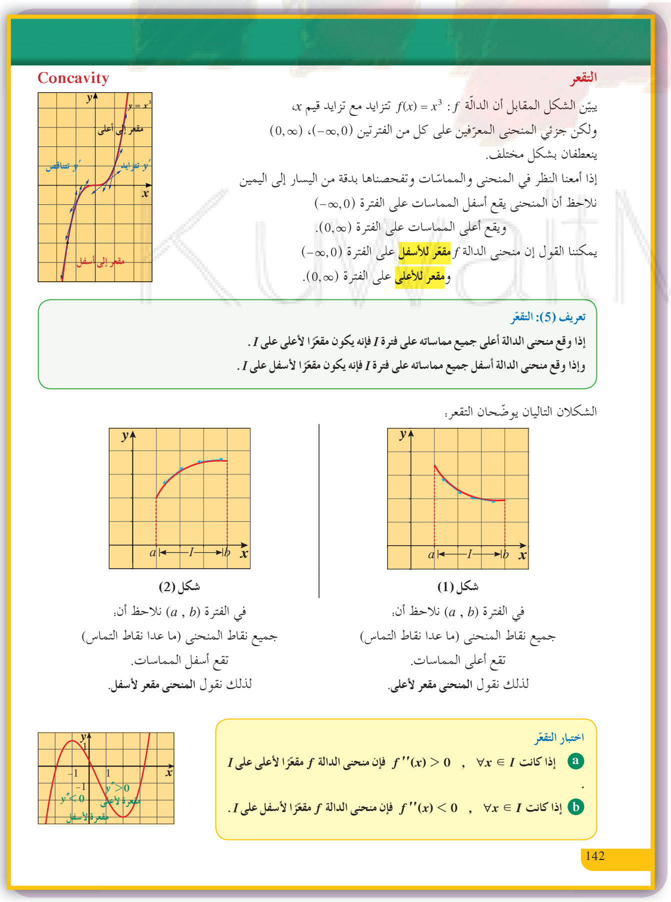
الحل:

a ∵ f مجموع دالتين إحداهما كثيرة حدود والأخرى حدودية نسبية

∴ مجال الدالة f هو $\mathbb{R} - \{1\}$

∴ f متّصلة وقابلة للاشتقاق على كل فترة من مجالها $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

140



التقعر Concavity

يبيّن الشكل المقابل أن الدالّة f : $f(x) = x^3$ تتزايد مع تزايد قيم x،
ولكن جزئي المنحنى المعرّفين على كل من الفترتين $(-\infty, 0)$، $(0, \infty)$ ينعطفان بشكل مختلف.

إذا أمعنا النظر في المنحنى والمماسّات وتفحصناها بدقة من اليسار إلى اليمين نلاحظ أن المنحنى يقع أسفل المماسات على الفترة $(-\infty, 0)$ ويقع أعلى المماسات على الفترة $(0, \infty)$.

يمكننا القول إن منحنى الدالة f **مقعّر للأسفل** على الفترة $(-\infty, 0)$ و**مقعر للأعلى** على الفترة $(0, \infty)$.

تعريف (5): التقعّر

إذا وقع منحنى الدالة أعلى جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعّرًا لأعلى على I.

وإذا وقع منحنى الدالة أسفل جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعّرًا لأسفل على I.

الشكلان التاليان يوضّحان التقعر:

شكل (1)

في الفترة (a, b) نلاحظ أن:
جميع نقاط المنحنى (ما عدا نقاط التماس) تقع أعلى المماسات.
لذلك نقول **المنحنى مقعر لأعلى**.

شكل (2)

في الفترة (a, b) نلاحظ أن:
جميع نقاط المنحنى (ما عدا نقاط التماس) تقع أسفل المماسات.
لذلك نقول **المنحنى مقعر لأسفل**.

اختبار التقعّر

a إذا كانت $\forall x \in I \quad , \quad f''(x) > 0$ فإن منحنى الدالة f مقعّرًا لأعلى على I

b إذا كانت $\forall x \in I \quad , \quad f''(x) < 0$ فإن منحنى الدالة f مقعّرًا لأسفل على I.

142

سوف يحتاج الطلاب أن يتعلموا الاعتماد على أحكامهم لتقرير أي الاختبارات يطبقونها لإيجاد القيم القصوى المحلية لدالة. في بعض الأحيان تتطلّب y'' عملًا مطولًا لإيجادها جبريًّا. قد يكون اختبار المشتقة الأولى أسهل من اختبار المشتقة الثانية. شجّع الطلاب على كتابة عبارات تصف ما يصلون إليه.

في المثالين (2) ,(1)

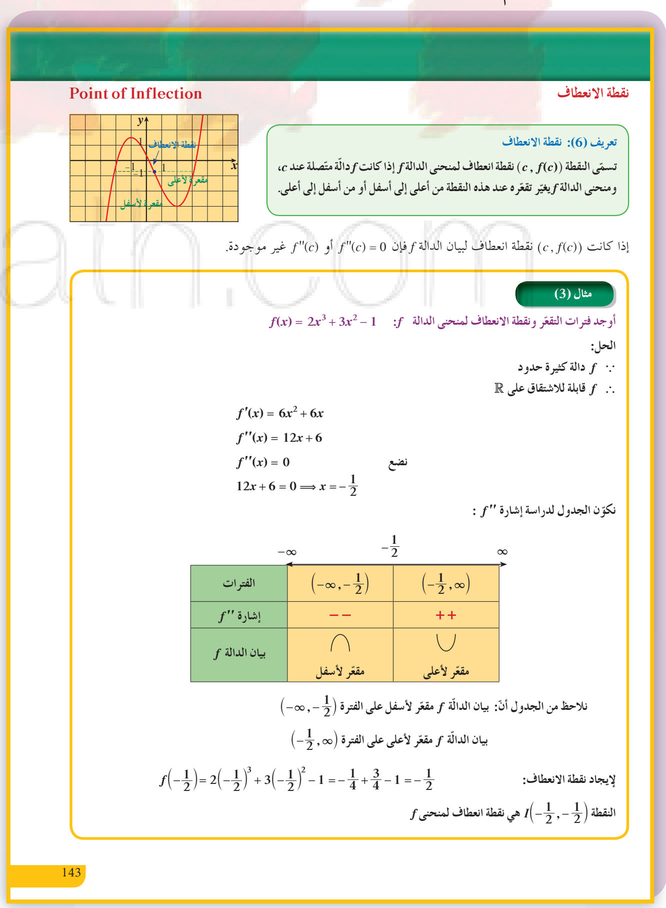
يشكل هذان المثالان تطبيقًا مباشرًا على كيفية استخدام اختبار المشتقة الأولى لإيجاد النقاط الحرجة والفترات التي تكون الدالة متزايدة أو متناقصة عليها وأيضًا القيم القصوى المحلية. تحقّق من تمكن الطلاب من وضع جدول يساعد في دراسة تغير الدوال.

في المثال (3)

دراسة تقعر الدالة وإيجاد نقطة الانعطاف باستخدام إشارة المشتقة من الرتبة الثانية. أشر إلى وجود أكثر من نقطة انعطاف في بعض الحالات.

في المثال (4)

استخدام اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية. وهذا يتطلب إيجاد قيم x بحيث تكون $f'(x) = 0$ ثم دراسة إشارة $f''(x)$.



نقطة الانعطاف — Point of Inflection

تعريف (6): نقطة الانعطاف

تسمى النقطة $(c, f(c))$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f إذا كانت f دالة متصلة عند c، ومنحنى الدالة f يتغير تقعره عند هذه النقطة من أعلى إلى أسفل أو من أسفل إلى أعلى.

إذا كانت $(c, f(c))$ نقطة انعطاف لبيان الدالة f فإن $f''(c) = 0$ أو $f''(c)$ غير موجودة.

مثال (3)

أوجد فترات التقعر ونقطة الانعطاف لمنحنى الدالة f: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$

الحل:

$\because$ f دالة كثيرة حدود

$\therefore$ f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 6x^2 + 6x$

$f''(x) = 12x + 6$

نضع $f''(x) = 0$

$12x + 6 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$

نكوّن الجدول لدراسة إشارة f'':

الفترات	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$
إشارة f''	$--$	$++$
بيان الدالة f	$\cap$ مقعر لأسفل	$\cup$ مقعر لأعلى

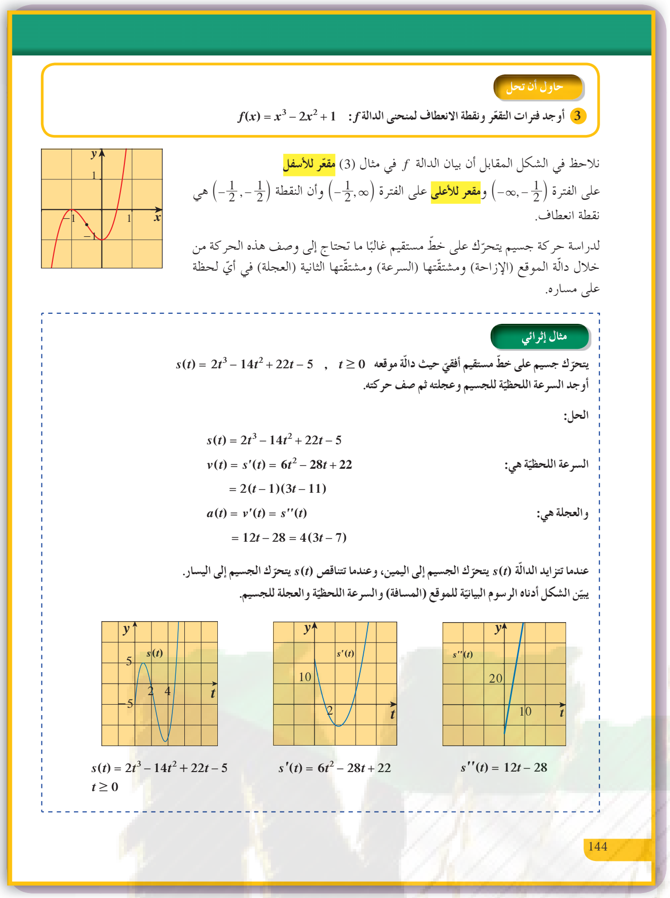
نلاحظ من الجدول أنّ: بيان الدالة f مقعر لأسفل على الفترة $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

بيان الدالة f مقعر لأعلى على الفترة $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$

لإيجاد نقطة الانعطاف: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{2}$

النقطة $I\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ هي نقطة انعطاف لمنحنى f

143



حاول أن تحل

3 أوجد فترات التقعر ونقطة الانعطاف لمنحنى الدالة f: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

نلاحظ في الشكل المقابل أن بيان الدالة f في مثال (3) مقعر للأسفل على الفترة $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ ومقعر للأعلى على الفترة $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ وأن النقطة $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ هي نقطة انعطاف.

لدراسة حركة جسيم يتحرّك على خطّ مستقيم غالبًا ما نحتاج إلى وصف هذه الحركة من خلال دالة الموقع (الإزاحة) ومشتقتها (السرعة) ومشتقتها الثانية (العجلة) في أيّ لحظة على مساره.

مثال إثرائي

يتحرك جسيم على خط مستقيم أفقي حيث دالة موقعه $s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5$ ، $t \geq 0$

أوجد السرعة اللحظية للجسيم وعجلته ثم صف حركته.

الحل:

$s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5$

السرعة اللحظية هي: $v(t) = s'(t) = 6t^2 - 28t + 22$

$= 2(t-1)(3t-11)$

والعجلة هي: $a(t) = v'(t) = s''(t)$

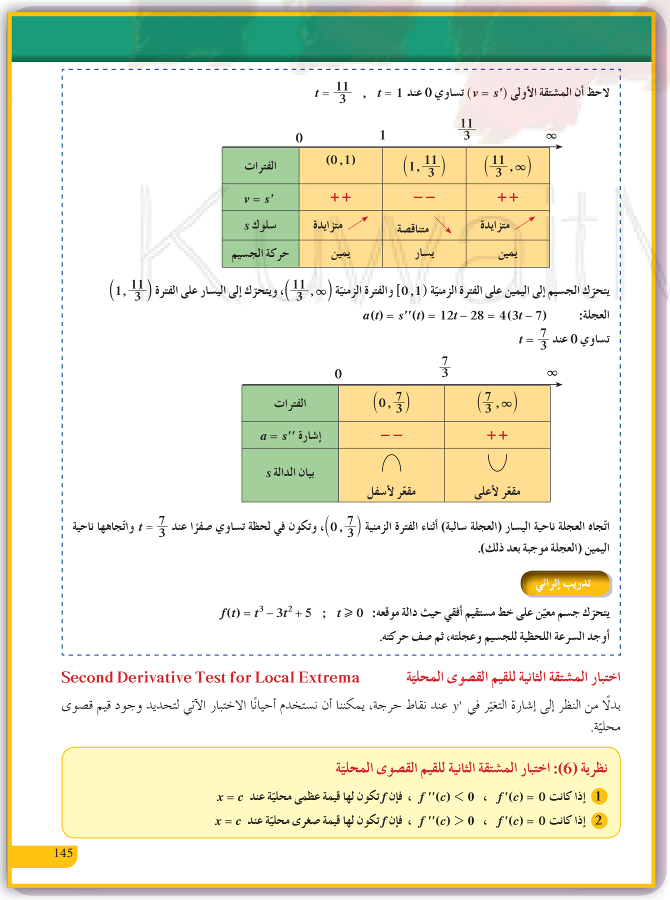
$= 12t - 28 = 4(3t-7)$

عندما تتزايد الدالة $s(t)$ يتحرك الجسيم إلى اليمين، وعندما تتناقص $s(t)$ يتحرك الجسيم إلى اليسار.

يبين الشكل أدناه الرسوم البيانية للموقع (المسافة) والسرعة اللحظية والعجلة للجسيم.

$s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5$, $t \geq 0$ — $s'(t) = 6t^2 - 28t + 22$ — $s''(t) = 12t - 28$

144



لاحظ أن المشتقة الأولى $(v = s')$ تساوي 0 عند $t = 1$ ، $t = \frac{11}{3}$

الفترات	$(0, 1)$	$\left(1, \frac{11}{3}\right)$	$\left(\frac{11}{3}, \infty\right)$
$v = s'$	$++$	$--$	$++$
سلوك s	متزايدة ↗	متناقصة ↘	متزايدة ↗
حركة الجسيم	يمين	يسار	يمين

يتحرك الجسيم إلى اليمين على الفترة الزمنية $[0, 1)$ والفترة الزمنية $\left(\frac{11}{3}, \infty\right)$، ويتحرك إلى اليسار على الفترة $\left(1, \frac{11}{3}\right)$

العجلة: $a(t) = s''(t) = 12t - 28 = 4(3t-7)$

تساوي 0 عند $t = \frac{7}{3}$

الفترات	$\left(0, \frac{7}{3}\right)$	$\left(\frac{7}{3}, \infty\right)$
إشارة $a = s''$	$--$	$++$
بيان الدالة s	$\cap$ مقعر لأسفل	$\cup$ مقعر لأعلى

اتجاه العجلة ناحية اليسار (العجلة سالبة) أثناء الفترة الزمنية $\left(0, \frac{7}{3}\right)$، وتكون في لحظة تساوي صفرًا عند $t = \frac{7}{3}$ واتجاهها ناحية اليمين (العجلة موجبة بعد ذلك).

تدريب إثرائي

يتحرك جسم معيّن على خط مستقيم أفقي حيث دالة موقعه: $f(t) = t^3 - 3t^2 + 5$; $t \geqslant 0$

أوجد السرعة اللحظية للجسيم وعجلته، ثم صف حركته.

اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية — Second Derivative Test for Local Extrema

بدلًا من النظر إلى إشارة التغير في y' عند نقاط حرجة، يمكننا أن نستخدم أحيانًا الاختبار الآتي لتحديد وجود قيم قصوى محليّة.

نظرية (6): اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية

1 إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) < 0$ ، فإن f تكون لها قيمة عظمى محلية عند $x = c$

2 إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) > 0$ ، فإن f تكون لها قيمة صغرى محلية عند $x = c$

145

6 الربط

يربط المثال الإثرائي بين الدالة ومشتقاتها من جهة ودراسة الحركة على خط مستقيم من جهة أخرى.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

من المهم أن يفهم الطلاب أن الشرط $f'(c) = 0$ لا يضمن أن f لها قيمة قصوى محلية عند $(c, f(c))$. وبالمثل، يعيِّن بعض الطلّاب أي نقاط تكون عندها $f''(x) = 0$ كنقاط انعطاف. ذكِّر الطلّاب أن تغيرًا في التقعر ينبغي أن يكون موجودًا لكي يكون للدالة نقطة انعطاف.

8 التقييم

راقب الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل»، تأكّد من فهمهم لتأثير إشارة كل من f' ، f'' على الدالة f.

اختبار سريع

1 لتكن الدالة f: $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$

(a) أوجد $f'(x)$ ، ثم $f''(x)$.

$f'(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $f''(x) = \dfrac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$

(b) ادرس تقعر الدالة f على الفترة $(-\infty, \infty)$.

الدالة مقعرة لأسفل على كل من الفترتين $(-\infty, -\sqrt{3}), (0, \sqrt{3})$.

الدالة مقعرة لأعلى على كل من الفترتين $(-\sqrt{3}, 0), (\sqrt{3}, \infty)$.

2 استخدم اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للدالة f : $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

$= 3(x-1)(x+3)$

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1 \quad , \quad x = -3$

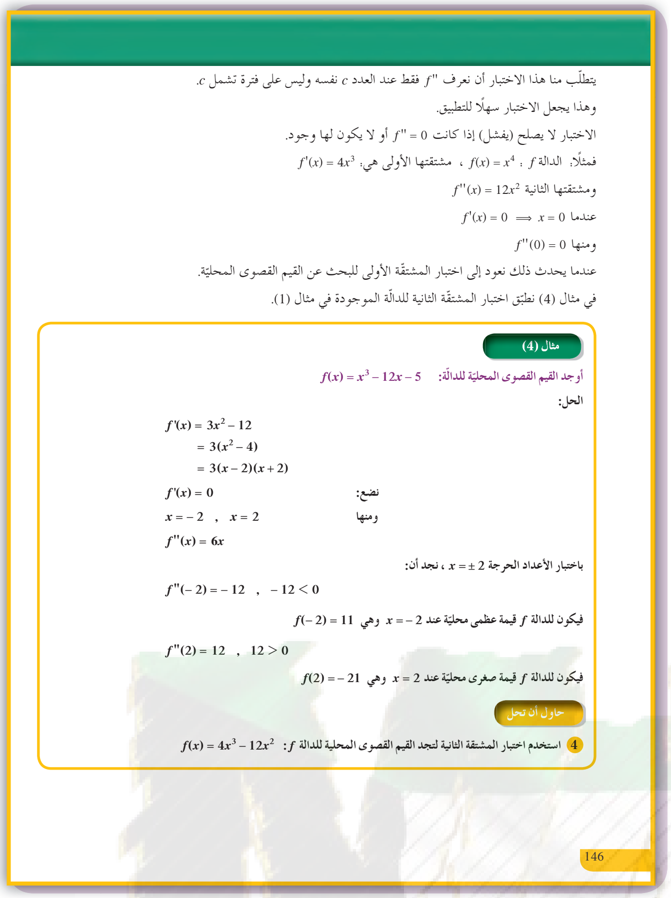
$f''(x) = 6x + 6$

$f''(-3) = -12 < 0$

للدالة f قيمة عظمى محلية 27 عند $x = -3$

$f''(1) = 12 > 0$

للدالة f قيمة صغرى محلية -5 عند $x = 1$



يتطلّب منا هذا الاختبار أن نعرف f'' فقط عند العدد c نفسه وليس على فترة تشمل c.
وهذا يجعل الاختبار سهلًا للتطبيق.
الاختبار لا يصلح (يفشل) إذا كانت $f'' = 0$ أو لا يكون لها وجود.
فمثلًا: الدالة f : $f(x) = x^4$ ، مشتقتها الأولى هي: $f'(x) = 4x^3$
ومشتقتها الثانية $f''(x) = 12x^2$
عندما $f'(x) = 0 \implies x = 0$
ومنها $f''(0) = 0$
عندما يحدث ذلك نعود إلى اختبار المشتقّة الأولى للبحث عن القيم القصوى المحليّة.
في مثال (4) نطبّق اختبار المشتقّة الثانية للدالّة الموجودة في مثال (1).

مثال (4)

أوجد القيم القصوى المحليّة للدالّة: $f(x) = x^3 - 12x - 5$

الحل:

$f'(x) = 3x^2 - 12$
$= 3(x^2 - 4)$
$= 3(x-2)(x+2)$

نضع: $f'(x) = 0$

ومنها $x = -2 \quad , \quad x = 2$

$f''(x) = 6x$

باختبار الأعداد الحرجة $x = \pm 2$ ، نجد أن:

$f''(-2) = -12 \quad , \quad -12 < 0$

فيكون للدالة f قيمة عظمى محليّة عند $x = -2$ وهي $f(-2) = 11$

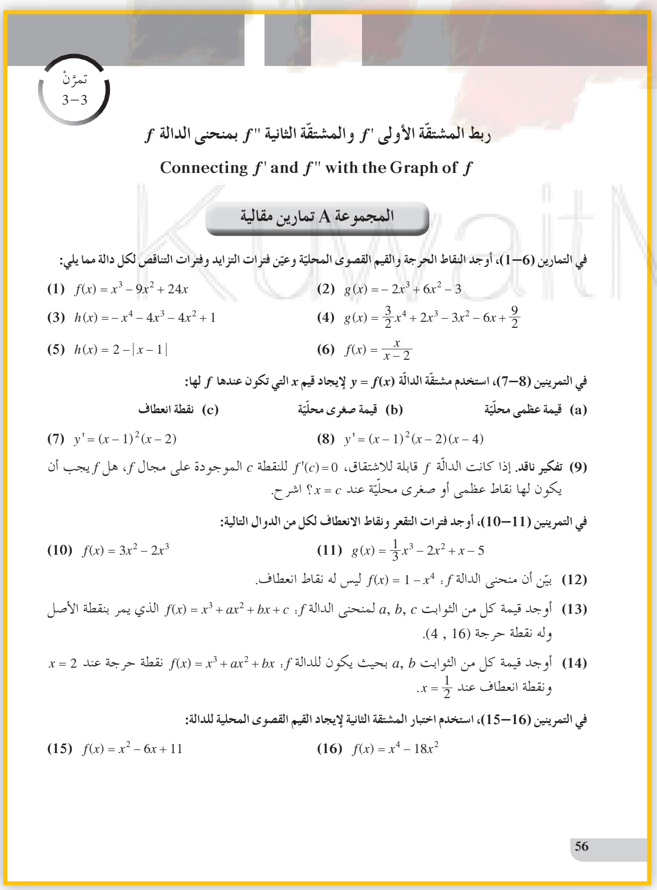
$f''(2) = 12 \quad , \quad 12 > 0$

فيكون للدالة f قيمة صغرى محليّة عند $x = 2$ وهي $f(2) = -21$

حاول أن تحل

4 استخدم اختبار المشتقة الثانية لتجد القيم القصوى المحلية للدالة f: $f(x) = 4x^3 - 12x^2$

146



تمرَّنْ 3−3

ربط المشتقّة الأولى f' والمشتقّة الثانية f'' بمنحنى الدالة f

Connecting f' and f'' with the Graph of f

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1−6)، أوجد النقاط الحرجة والقيم القصوى المحليّة وعيّن فترات التزايد وفترات التناقص لكل دالة مما يلي:

(1) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$
(2) $g(x) = -2x^3 + 6x^2 - 3$
(3) $h(x) = -x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 1$
(4) $g(x) = \frac{3}{2}x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 6x + \frac{9}{2}$
(5) $h(x) = 2 - |x-1|$
(6) $f(x) = \frac{x}{x-2}$

في التمرينين (7−8)، استخدم مشتقّة الدالّة $y = f(x)$ لإيجاد قيم x التي تكون عندها f لها:

(a) قيمة عظمى محلّيّة (b) قيمة صغرى محلّيّة (c) نقطة انعطاف

(7) $y' = (x-1)^2(x-2)$
(8) $y' = (x-1)^2(x-2)(x-4)$

(9) **تفكير ناقد.** إذا كانت الدالّة f قابلة للاشتقاق، $f'(c) = 0$ للنقطة c الموجودة على مجال f، هل f يجب أن يكون لها نقاط عظمى أو صغرى محلّيّة عند $x = c$؟ اشرح.

في التمرينين (10−11)، أوجد فترات التقعر ونقاط الانعطاف لكل من الدوال التالية:

(10) $f(x) = 3x^2 - 2x^3$
(11) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 5$

(12) بيّن أن منحنى الدالة f: $f(x) = 1 - x^4$ ليس له نقاط انعطاف.

(13) أوجد قيمة كل من الثوابت a, b, c لمنحنى الدالة f: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ الذي يمر بنقطة الأصل وله نقطة حرجة (4 , 16).

(14) أوجد قيمة كل من الثوابت a, b بحيث يكون للدالة f: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ نقطة حرجة عند $x = 2$ ونقطة انعطاف عند $x = \frac{1}{2}$.

في التمرينين (15−16)، استخدم اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للدالة:

(15) $f(x) = x^2 - 6x + 11$
(16) $f(x) = x^4 - 18x^2$

56

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

الفترة (المجال)	قيمة صغرى مطلقة	قيمة عظمى مطلقة	قيمة صغرى محلية	قيمة عظمى محلية	تزايد في فترة	تناقص في فترة
$[a , c_2]$	✓	✓			✓	
$[c_1 , c_3)$		✓		✓	✓	✓
$[c_2 , c_3)$		✓				✓
$[c_3 , c_5)$	✓	✓		✓	✓	✓
$[c_1 , c_4]$	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$[c_5 , b]$	✓	✓				✓

«حاول أن تحل»

1 **(a)** عند $(2 , 0)$ ، $(0 , -4)$

(b) متزايدة على: $(0 , 2)$

متناقصة على كل من: $(-\infty , 0)$, $(2 , \infty)$

(c) عند $x = 0$ يوجد قيمة صغرى محلية تساوي -4

عند $x = 2$ يوجد قيمة عظمى محلية تساوي 0

2 **(a)** عند $\left(1 , \frac{1}{2}\right)$ ، $\left(-1 , -\frac{1}{2}\right)$

(b) متزايدة على: $(-1,1)$

متناقصة على كل من: $(-\infty , -1)$, $(1 , \infty)$

(c) عند $x = -1$ يوجد قيمة صغرى محلية تساوي $-\frac{1}{2}$

عند $x = 1$ يوجد قيمة عظمى محلية تساوي $\frac{1}{2}$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة $y = x^3 - 3x^2 + 5$ على الفترة $(0 , 3)$ هي مقعّرة لأسفل. (a) (b)

(2) الدالة $y = \frac{x}{x^2+1}$ على $(-\infty , 0)$ هي مقعّرة لأعلى. (a) (b)

(3) إذا كانت $f''(c) = 0$، فإنّ لمنحنى الدالة f نقطة انعطاف عند $(c , f(c))$. (a) (b)

(4) إذا كان لمنحنى الدالة f نقطة انعطاف عند $(c , f(c))$ فإن $f''(c) = 0$. (a) (b)

(5) يمكن أن تكون النقطة الحرجة نقطة انعطاف. (a) (b)

(6) الدالة $y = -3x^8$ هي مقعّرة للأعلى. (a) (b)

في التمارين (7–12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) إذا كان الشكل المقابل يمثل بيان الدالة المشتقة f' فإن الدالة f تكون:

(a) متزايدة على كل من $(4 , 5)$, $(1 , 3)$.

(b) متناقصة على كل من $(4 , 5)$, $(1 , 3)$.

(c) لها قيمة صغرى محلية عند $x = 3$ فقط.

(d) لها نقطة انعطاف عند كل من $x = 2$, $x = 4$.

(8) إذا كانت f دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة والشكل المقابل يوضح بيان f'' فإن منحنى f مقعرًا للأسفل في الفترة:

(a) $(-\infty , 3)$ (b) $(3 , \infty)$

(c) $(-1 , 4]$ (d) $(3 , 5)$

(9) أي من منحنيات الدوال التالية يكون مقعرًا لأسفل في $(-1 , 1)$:

(a) $f(x) = x^2$ (b) $f(x) = x|x|$ (c) $f(x) = -x^3$ (d) $f(x) = -x^2$

(10) إذا كانت f دالة كثيرة حدود، $(c , f(c))$ نقطة انعطاف لها فإن:

(a) $f''(c) = 0$ (b) $f'(c) = 0$ (c) $f(c) = 0$ (d) $f''(c)$ غير موجودة

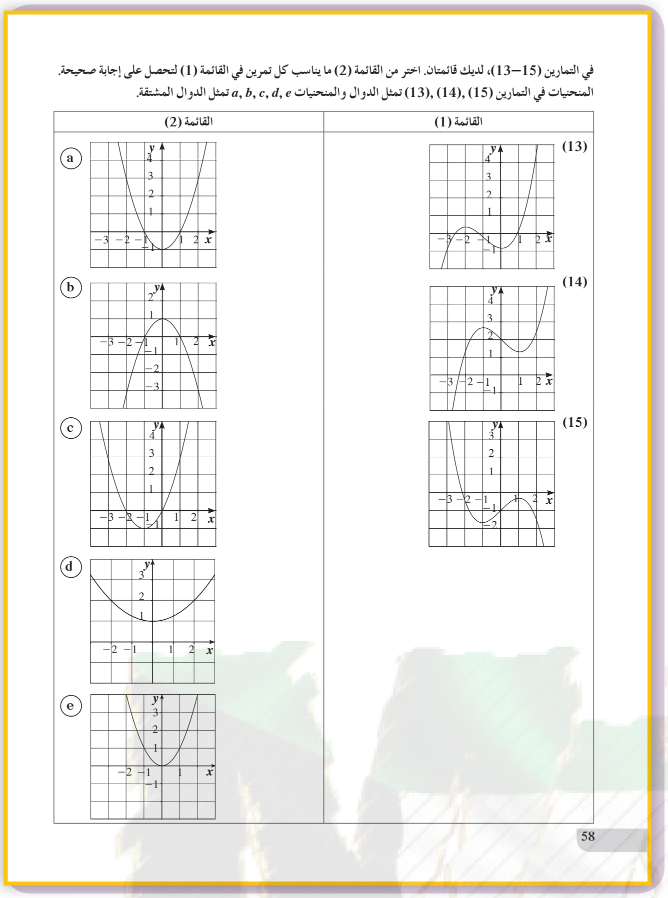
(11) أي من الدوال التالية ليس لها نقطة انعطاف:

(a) $f(x) = x^3 + 5x$ (b) $f(x) = 4x^2 - 2x^4$ (c) $f(x) = x^3$ (d) $f(x) = (x-2)^4$

(12) للدالة f: $f(x) = (x^2 - 3)^2$ نقاط انعطاف عددها:

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

57


في التمارين (15–13)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.
المنحنيات في التمارين (15) ,(14) ,(13) تمثل الدوال والمنحنيات a, b, c, d, e تمثل الدوال المشتقة.

القائمة (2)	القائمة (1)
a	(13)
b	(14)
c	(15)
d	
e	

58

3 نقطة انعطاف $I\left(\frac{2}{3}\ ,\ \frac{11}{27}\right)$

على الفترة $\left(-\infty\ ,\ \frac{2}{3}\right)$ مقعرة لأسفل.

على الفترة $\left(\frac{2}{3}\ ,\ \infty\right)$ مقعرة لأعلى.

4 $f'(x) = 12x^2 - 24x$

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 12x(x-2) = 0$

$\Longrightarrow x = 0\ ,\ x = 2$

$f''(x) = 24x - 24$

$f''(0) = -24 < 0$

عند $x = 0$ لمنحنى f قيمة عظمى محلية هي 0.

$f''(2) = 24 > 0$

عند $x = 2$ لمنحنى f قيمة صغرى محلية هي -16

«تدريب إثرائي»

السرعة اللحظية:

$f'(t) = 3t^2 - 6t = 3t(t-2)$

	0	2	∞
الفترات	$(0,2)$	$(2,\infty)$	
إشارة f' $V = f'$	$- -$	$+ +$	
سلوك f	$\searrow\ \searrow$ متناقصة	$\nearrow\ \nearrow$ متزايدة	
حركة الجسيم	يتحرك يسارًا	يتحرك يمينًا	

العجلة: $f''(t) = 6t - 6 = a$

	0	1	∞
الفترات	$(0,1)$	$(1,\infty)$	
إشارة f'' $a = f''$	$- -$	$+ +$	
بيان f	$\cap$ مقعر لأسفل	$\cup$ مقعر لأعلى	

العجلة تناقصية في الفترة $(0\ ,\ 1)$ وتساوي صفر عند اللحظة $t = 1$ وتزايدية على الفترة $(1\ ,\ \infty)$

4–3: رسم بيان دوال كثيرات الحدود

1 الأهداف

- ربط بيان f' و f.
- رسم بيان دوال كثيرات الحدود.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

بيان دوال كثيرات الحدود.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عما يلي:

ارسم بيان كل من الدوال التالية:

(a) $y = 2x + 1$ **(b)** $y = 3 - 2x$

(c) $y = -x^2$ **(d)** $y = 2x^2$

في التمرينين (c) و(d) اطلب إليهم وصف طرفي منحنى الدالة باستخدام الأسهم: ↗ أو ↘

5 التدريس

من المهم جدًّا مناقشة الخطوات اللازم اتباعها في رسم بيان دالة كثيرة الحدود. استعرض النقاط بالترتيب. توقف عند كل نقطة منها للمناقشة والاستماع إلى آراء الطلاب. في النقطة 2 أشر إلى أنه في حالة الحدود المقفلة نوجد $f(a)$ دون النهاية وتكون النقطة $M(a\ ,\ f(a))$ نقطة توقف. دراسة إشارة f' مهمة جدًّا وهي مفصلية في رسم بيان الدالة.

تساعد النقاط الإضافية على دقة رسم بيان الدالة. ذكّرهم بضرورة دراسة تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات ومحور الصادات وذلك بالتعويض عن x بـ صفر (التقاطع مع محور الصادات) ثم حل المعادلة $f(x) = 0$ (التقاطع مع محور السينات).

3–4

رسم بيان دوال كثيرات الحدود

Graph of Polynomial Functions

سوف تتعلم
- ربط بيان f' و f.
- خطوات رسم بيان دوال كثيرات الحدود.

المفردات والمصطلحات
- بيان دوال كثيرات الحدود Graph of Polynomial Functions

دعنا نفكر ونتناقش

يبيّن الشكل المقابل بيان الدالة f : $f(x) = x^2 + 2x - 1$

1 أوجد إن أمكن:

a $f'(x)$ محدّدًا كلًّا من النقاط الحرجة وفترات التزايد وفترات التناقص للدالة f.

b $f''(x)$ محدّدًا كلًّا من نقاط الانعطاف وفترات التقعر.

2 قارن نتائج الحل في 1 مع المنحنى المرسوم.

تعلمت فيما سبق كيفية رسم منحنى تقريبي لبيان دالة كثيرة حدود معتمدًا على سلوك نهاية الدالة، وفي البنود السابقة تعلمت تحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة وتحديد النقاط الحرجة والقيم العظمى أو الصغرى، وتمّ تحديد نقاط الانعطاف والفترات التي يكون فيها منحنى الدالة مقعرًا لأعلى أو لأسفل. وسنستفيد من كل هذه المعلومات لرسم بيان دالة كثيرة الحدود رسمًا أكثر دقة.

الخطوات اللازم اتباعها في دراسة تغير الدالة كثيرة الحدود ورسم بيانها

Steps to be Followed in Drawing the Graph of a Polynomial Function

1 عيّن مجال الدالة f.

مجال دالة كثيرة الحدود هو $\mathbb{R}$ ولكنه يقتصر أحيانًا على فترة من $\mathbb{R}$ خاصة في المسائل الحياتية.

2 أوجد النهايات عند الحدود المفتوحة لمجال الدالة f.

3 عيّن النقاط الحرجة للدالة f.

4 كوّن جدولًا لدراسة إشارة f' وتحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة والقيم القصوى المحلية.

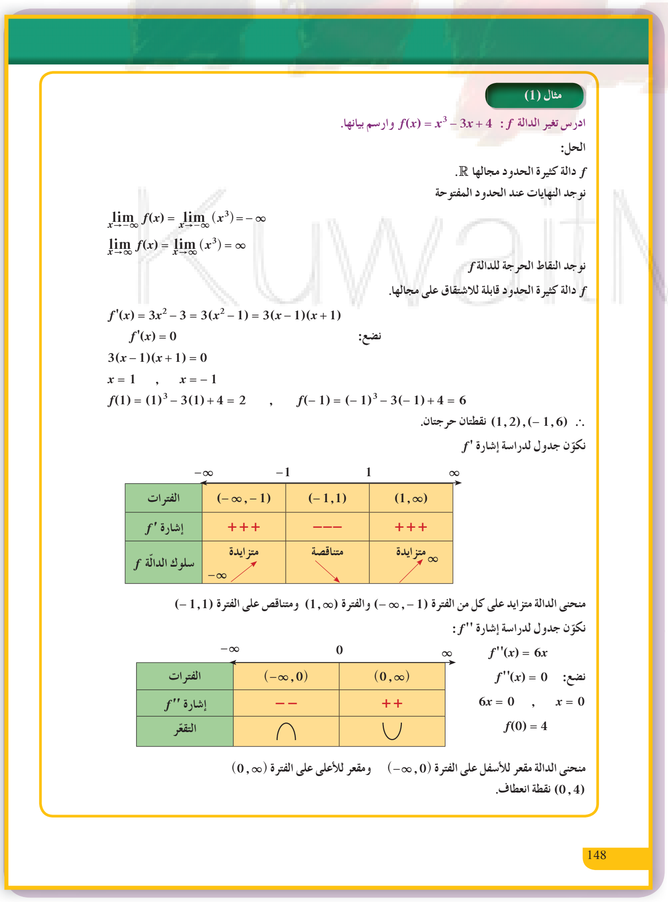
5 كوّن جدولًا لدراسة إشارة f'' وتحديد فترات التقعر لمنحنى الدالة ثم نقاط الانعطاف إن وجدت.

6 أوجد نقاطًا إضافية.

تساعد هذه النقاط على رسم بيان الدالة بدقة وأهم هذه النقاط، نقاط التقاطع مع أحد المحورين إن أمكن.

7 ارسم بيان الدالة f. استخدم نتائج الخطوات السابقة في الرسم.

147



مثال (1)

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x^3 - 3x + 4$ وارسم بيانها.

الحل:

f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$.

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(x^3) = \infty$$

نوجد النقاط الحرجة للدالة f

f دالة كثيرة الحدود قابلة للاشتقاق على مجالها.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$$

نضع: $f'(x) = 0$

$$3(x-1)(x+1) = 0$$

$$x = 1 \quad , \quad x = -1$$

$$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 4 = 2 \quad , \quad f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 4 = 6$$

∴ $(1, 2), (-1, 6)$ نقطتان حرجتان.

نكوّن جدول لدراسة إشارة f'

الفترات	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
إشارة f'	+ + +	− − −	+ + +
سلوك الدالّة f	$-\infty$ متزايدة ↗	متناقصة ↘	متزايدة ↗ ∞

منحنى الدالة متزايد على كل من الفترة $(-\infty, -1)$ والفترة $(1, \infty)$ ومتناقص على الفترة $(-1, 1)$

نكوّن جدول لدراسة إشارة f'':

$f''(x) = 6x$

نضع: $f''(x) = 0$

$6x = 0 \quad , \quad x = 0$

$f(0) = 4$

الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
إشارة f''	− −	+ +
التقعّر	∩	∪

منحنى الدالة مقعر للأسفل على الفترة $(-\infty, 0)$ ومقعر للأعلى على الفترة $(0, \infty)$

$(0, 4)$ نقطة انعطاف.

148

في الأمثلة (1), (2), (3), (4)

دراسة تغير دالة ورسم بيانها حيث درجة الدالة تتدرج من الدرجة الثالثة إلى الرابعة لاحظ أنه في المثالين (1), (2) حيث درجة كل دالة 3 يوجد نقطة انعطاف واحدة ولكن في المثالين (3), (4) يوجد نقطتي انعطاف.

في المثال (5)

ربط بين بيان f' وبيان f. الفكرة مهمة جدًّا ويجدر بالمعلم التوقف عندها ومناقشتها مع الطلاب. لاحظ اقتصار دراستنا على حالات سهلة.

6 الربط

لا يوجد.

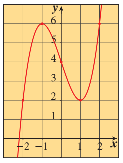
7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في الربط بين بيان الدالة f' لرسم بيان الدالة f.

أشر إلى الطلاب أن بيان الدالة f' فوق محور السينات يناظر قيمة موجبة لذا شجعهم على إيجاد فترة المتغير x وإن بيان الدالة f' أسفل محور السينات يناظر قيمة سالبة لذا شجّعهم على إيجاد فترة المتغير x.

8 التقييم

راقب الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل»، تحقق من صحة عملهم ومن اتباعهم بالترتيب للخطوات المقترحة في رسم بيان الدوال.



نقاط إضافية

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-14	2	6	4	2	6	22
	نقطة إضافية	نقطة إضافية	نقطة عظمى محلية	نقطة انعطاف	نقطة صغرى محلية	نقطة إضافية	نقطة إضافية

بيان الدالة f:

حاول أن تحل

1 ادرس تغير الدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ وارسم بيانها.

مثال (2)

ادرس تغير الدالة f: $f(x) = 1 - x^3$ وارسم بيانها.

الحل:

f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$.

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-x^3) = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(-x^3) = -\infty$$

نوجد النقاط الحرجة حيث f دالة قابلة للاشتقاق على مجالها.

$f'(x) = -3x^2$

نضع: $f'(x) = 0$

$-3x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$

$f(0) = 1 - (0)^3 = 1$

$\therefore$ $(0,1)$ نقطة حرجة.

نكوّن جدول التغيّر لدراسة إشارة f':

الدالة متناقصة على الفترة $(-\infty, 0)$ والفترة $(0, \infty)$

	$-\infty$ → 0	0 → ∞
إشارة f'	$---$	$---$
سلوك الدالّة f	∞ متناقصة	متناقصة $-\infty$

نكوّن جدول لدراسة إشارة f''

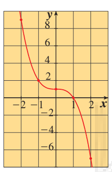
$f''(x) = -6x$

$-6x = 0 \Longrightarrow x = 0$

$(0,1)$ نقطة انعطاف.

	$-\infty$ → 0	0 → ∞
إشارة f''	$++$	$--$
التقعّر	$\cup$ تقعّر لأعلى	$\cap$ تقعّر لأسفل

149



نقاط إضافية

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	9	2	1	0	-7

بيان الدالة f:

حاول أن تحل

2 ادرس تغير الدالة f: $f(x) = x - 2x^3$ وارسم بيانها.

مثال (3)

ادرس تغير الدالة f: $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 2$ وارسم بيانها.

الحل:

f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$.

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(3x^4) = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(3x^4) = \infty$$

نوجد النقاط الحرجة للدالة f

f دالة كثيرة الحدود قابلة للاشتقاق على مجالها.

$f'(x) = 12x^3 + 12x^2$

نضع: $f'(x) = 0$

$12x^3 + 12x^2 = 0$

$12x^2(x+1) = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad , \quad x = -1$

$f(0) = 2 \quad , \quad f(-1) = 3 - 4 + 2 = 1$

$(-1,1), (0,2)$ نقطتان حرجتان.

نكوّن جدول لدراسة إشارة f'

	$-\infty$ → -1	-1 → 0	0 → ∞
إشارة f'	$---$	$+++$	$+++$
سلوك الدالّة f	∞ متناقصة	متزايدة	متزايدة ∞

الدالة متناقصة على الفترة $(-\infty, -1)$ ومتزايدة على الفترة $(-1, 0)$ والفترة $(0, \infty)$

150

نكوّن جدول لدراسة إشارة f''

$f''(x) = 36x^2 + 24x$

نضع: $f''(x) = 0$

$12x(3x+2) = 0$

$x = 0 \quad , \quad x = -\frac{2}{3}$

$f(0) = 2 \ , \ f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{38}{27}$

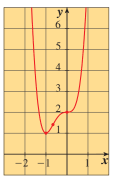
	$-\infty$ … $-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$ … 0	0 … ∞
إشارة f''	+ +	− −	+ +
التقعّر	$\cup$ تقعّر لأعلى	$\cap$ تقعّر لأسفل	$\cup$ تقعّر لأعلى

النقطتان $(0, 2)$ ، $\left(-\frac{2}{3}, \frac{38}{27}\right)$ هما نقطتا انعطاف.

نقاط إضافية

x	-2	-1	$-\frac{2}{3}$	0	1
$f(x)$	18	1	$\frac{38}{27}$	2	9

بيان الدالة f:



حاول أن تحل

3 ادرس تغير الدالة f: $f(x) = x^4 - 2x^2$ وارسم بيانها.

مثال (4)

ادرس تغير الدالة f: $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$ وارسم بيانها.

الحل:

f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$.

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-x^4) = -\infty$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (-x^4) = -\infty$

151

نوجد النقاط الحرجة للدالة f

f دالة كثيرة الحدود قابلة للاشتقاق على مجالها.

$f'(x) = -4x^3 + 4x$

نضع: $f'(x) = 0$

$-4x^3 + 4x = 0$

$-4x(x^2 - 1) = 0$

$-4x(x-1)(x+1) = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad , \quad x = 1 \quad , \quad x = -1$

$f(0) = 1$

$f(1) = -(1)^4 + 2(1)^2 + 1 = 2$

$f(-1) = -(-1)^4 + 2(-1)^2 + 1 = 2$

$\therefore$ $(0,1)$ ، $(1,2)$ ، $(-1,2)$ نقاط حرجة.

نكوّن جدول لدراسة إشارة f'

	$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … 1	1 … ∞
إشارة f'	+ + +	− − −	+ + +	− − −
سلوك الدالة f	متزايدة	متناقصة	متزايدة	متناقصة

$\therefore$ الدالة متزايدة على كل من الفترة $(-\infty, -1)$ والفترة $(0, 1)$ والدالة متناقصة على كل من الفترة $(-1, 0)$ والفترة $(1, \infty)$

نكوّن جدول لدراسة إشارة f''

$f''(x) = -12x^2 + 4$

نضع: $f''(x) = 0$

$-12x^2 + 4 = 0$

$-12\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = 0$

$-12\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$

$x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad , \quad x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

	$-\infty$ … $-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$ … $\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$ … ∞
إشارة f''	− −	+ +	− −
التقعّر	$\cap$ تقعّر لأسفل	$\cup$ تقعّر لأعلى	$\cap$ تقعّر لأسفل

نقاط الانعطاف هي: $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{14}{9}\right)$ ، $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{14}{9}\right)$

152

اختبار سريع

ادرس تغيّر الدالة f: $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 10$ وارسم بيانها.

الدالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$.

$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = 3(-x^2 + 2x + 3)$

$= 3(-x-1)(x-3)$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow x = -1 \quad , \quad x = 3$

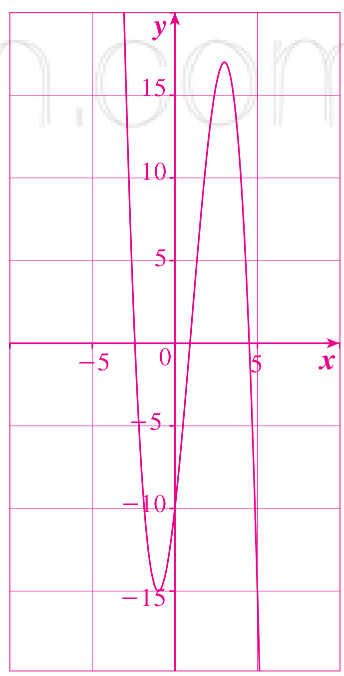
الفترات	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$
إشارة f'	− −	+ +	− −
سلوك f	↘ ↘	↗ ↗	↘ ↘

$f''(x) = -6x + 6$

$f''(x) = 0 \Longrightarrow x = 1 \Longrightarrow I(1, 1)$

نقطة انعطاف لمنحنى الدالة.

الفترات	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
إشارة f''	+	−
التقعّر	$\cup$	$\cap$



$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 10$

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1 (a) $f'(x) = 2x + 2$ تكون $f'(x) = 0$ عند $x = -1$ أي أن $(-1\ ,\ -2)$ نقطة حرجة.

$-\infty \qquad -1 \qquad \infty$

الفترات	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
إشارة f'	− −	+ +
سلوك f	متناقصة	متزايدة

تتناقص f على الفترة $(-\infty, -1)$ وتتزايد f على الفترة $(-1, \infty)$.

(b) $f''(x) = 2 > 0\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$

لا يوجد نقاط انعطاف وتقعر المنحنى إلى أعلى.

2 يتوافق المنحنى المرسوم مع كافة الإجابات الموجودة في السؤال (1).

«حاول أن تحل»

1 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$

$-\infty \qquad 1 \qquad 3 \qquad \infty$

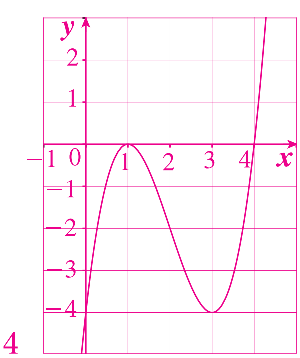
الفترات	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
إشارة f'	+ +	− −	+ +
سلوك f	↗ ↗	↘ ↘	↗ ↗

$f''(x) = 6x - 12\ ,\ f''(x) = 0 \Longrightarrow x = 2$

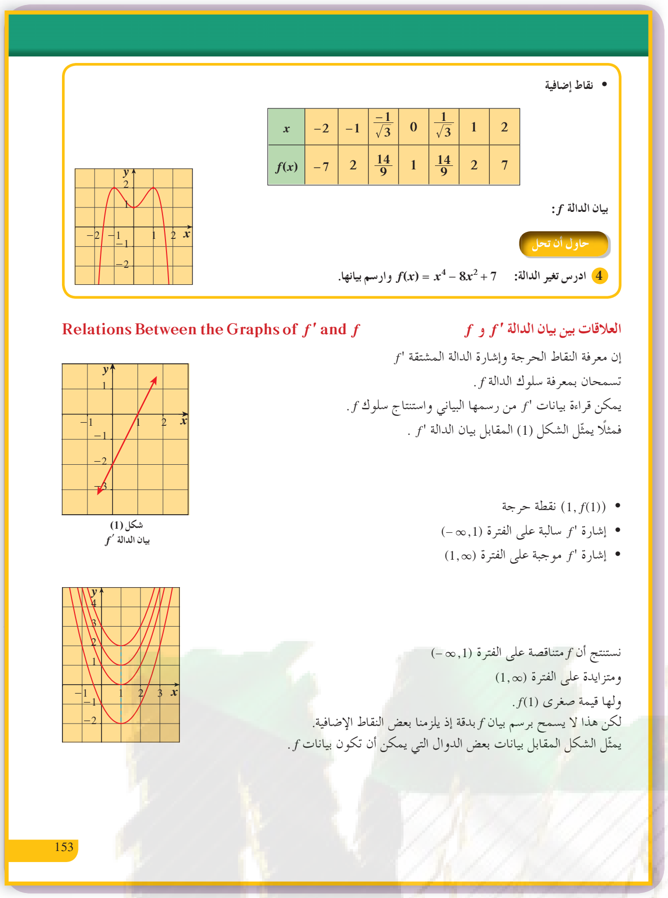
$I(2, -2)$ هي نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f.

$-\infty \qquad 2 \qquad \infty$

الفترات	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
إشارة f''	− −	+ +
التقعر	∩	∪



$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$



- نقاط إضافية

x	-2	-1	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	2
$f(x)$	-7	2	$\frac{14}{9}$	1	$\frac{14}{9}$	2	7

بيان الدالة f:

حاول أن تحل

4 ادرس تغير الدالة: $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$ وارسم بيانها.

العلاقات بين بيان الدالة f' و f — Relations Between the Graphs of f' and f

إن معرفة النقاط الحرجة وإشارة الدالة المشتقة f' تسمحان بمعرفة سلوك الدالة f.

يمكن قراءة بيانات f' من رسمها البياني واستنتاج سلوك f.

فمثلًا يمثّل الشكل (1) المقابل بيان الدالة f'.

شكل (1)
بيان الدالة f'

- $(1, f(1))$ نقطة حرجة
- إشارة f' سالبة على الفترة $(-\infty, 1)$
- إشارة f' موجبة على الفترة $(1, \infty)$

نستنتج أن f متناقصة على الفترة $(-\infty, 1)$ ومتزايدة على الفترة $(1, \infty)$ ولها قيمة صغرى $f(1)$.

لكن هذا لا يسمح برسم بيان f بدقة إذ يلزمنا بعض النقاط الإضافية.

يمثّل الشكل المقابل بيانات بعض الدوال التي يمكن أن تكون بيانات f.

153

2 $f'(x) = 1 - 6x^2$

$= (1 - \sqrt{6}\,x)(1 + \sqrt{6}\,x)$

$-\infty \qquad -\frac{1}{\sqrt{6}} \qquad \frac{1}{\sqrt{6}} \qquad \infty$

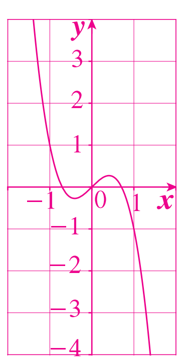
إشارة f'	− −	+ +	− −
سلوك f	↘ ↘	↗ ↗	↘ ↘

$f''(x) = -12x\ ,\ f''(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$

$I(0, 0)$ هي نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f.

$-\infty \qquad 0 \qquad \infty$

إشارة f''	+	−
تقعر منحنى f	∪	∩



$f(x) = x - 2x^3$


مثال (5) الرسم البياني للدالة f من f' (إثرائي)

ارسم صورة تقريبيّة للرسم البيانيّ للدالة f التي لها الخواص التالية:

a) $f(0) = 0$

b) الرسم البيانيّ للدالّة f' (مشتقّة الدالّة f) موضّح في الشكل المقابل.

c) f دالّة متّصلة لكلّ x

الحل:

لتحقيق الخاصّيّة a نبدأ بنقطة الأصل.

لتحقيق الخاصّيّة b نأخذ بعين الاعتبار ما يوضّحه الرسم البيانيّ للمشتقّة بالنسبة إلى الميول.

إلى يسار $x = 1$ الرسم البيانيّ للدالّة f له ميل ثابت قدره -1، لذلك نرسم مستقيمًا ميله -1 إلى يسار $x = 1$ مع التأكّد من أنّه يمرّ بنقطة الأصل.

إلى يمين $x = 1$ الرسم البيانيّ للدالّة f له ميل ثابت قدره 2، لذلك ينبغي أن يكون مستقيمًا ميله 2.

هناك عدد لا نهائيّ من مثل تلك المستقيمات، ولكنّ واحدًا فقط، المستقيم الذي يقابل الجانب الأيسر من الرسم البيانيّ عند النقطة $(1 , -1)$ سوف يحقّق شرط الاتصال.

يبيّن الشكل أعلاه الرسم البيانيّ الناتج.

حاول أن تحل

5 ارسم صورة تقريبيّة للرسم البيانيّ للدالّة f التي لها الخواصّ التالية:

a) $f(0) = 1$

b) الرسم البيانيّ للدالّة f' موضّح في الشكل المقابل.

c) f دالّة متّصلة لكلّ x.

154

3 $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

$= 4x(x-1)(x+1)$

	$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … 1	1 … ∞
إشارة f'	$- \ -$	$+ \ +$	$- \ -$	$+ \ +$
سلوك f	↘ ↘	↗ ↗	↘ ↘	↗ ↗

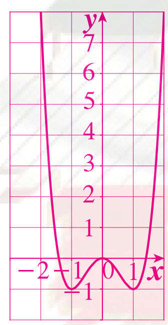
$f''(x) = 12x^2 - 4 = 4(\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1)$

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} , -\frac{5}{9}\right) , \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} , \frac{-5}{9}\right)$

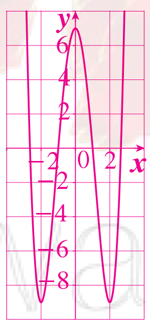
نقاط انعطاف لمنحنى الدالة f

	$-\infty$ … $-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$ … $\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$ … ∞
إشارة f''	$+$	$-$	$+$
تقعر منحنى f	∪	∩	∪

$f(x) = x^4 - 2x^2$



$f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$



4 $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x-2)(x+2)$

	$-\infty$ … -2	-2 … 0	0 … 2	2 … ∞
إشارة f'	$- \ -$	$+ \ +$	$- \ -$	$+ \ +$
سلوك f	↘ ↘	↗ ↗	↘ ↘	↗ ↗

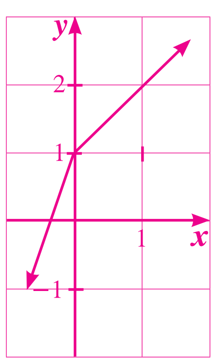
$f''(x) = 12x^2 - 16 = 4(x\sqrt{3} - 2)(x\sqrt{3} + 2)$

نقاط انعطاف $\left(\frac{2}{\sqrt{3}} , -\frac{17}{9}\right) , \left(\frac{-2}{\sqrt{3}} , \frac{-17}{9}\right)$ لمنحنى الدالة f.

	$-\infty$ … $-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$ … $\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$ … ∞
إشارة f'	$+$	$-$	$+$
تقعر منحنى f	∪	∩	∪

5 $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & , \ x < 0 \\ x + 1 & , \ x \geqslant 0 \end{cases}$

إجابة ممكنة:



تمرّن 3-4

رسم بيان دوال كثيرات الحدود

Graph of Polynomial Functions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (1—2)، استخدم جدول دراسة إشارة f' لتحديد مجال f ورسم بيان تقريبي لمنحنى الدالة f.

(1)

	$-\infty$ — 2	2 — ∞
الفترات	$(-\infty\ ,\ 2)$	$(2\ ,\ \infty)$
إشارة f'	$-\ -$	$+\ +$
سلوك f	↘	↗

علمًا بأن: $f(2)=-2$

(2)

الفترات	$(-\infty\ ,\ -3)$	$(-3\ ,\ 0)$	$(0\ ,\ 5)$	$(5,\ \infty)$
إشارة f'	$-\ -$	$+\ +$	$+\ +$	$-\ -$
سلوك f	↘	↗	↗	↘

علمًا بأن: $f(-3)=0$ و $f(0)=2$ و $f(5)=4$

في التمارين (3—6)، ادرس تغير كل من الدوال التالية وارسم بيانها.

(3) $f(x)=x^3-2x^2-4x+7$

(4) $g(x)=\frac{x^4}{4}-2x^2+5$

(5) $h(x)=8x^2-x^4-8$

(6) $f(x)=-x^3-3x$

(7) لتكن الدالة f : $f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2+1$ لكل عدد حقيقي x وليكن (C) منحنى هذه الدالة.

(a) ضع جدول التغير لـ f.

(b) لتكن A النقطة على (C) التي إحداثيها السيني 1.

أوجد معادلة مستقيم المماس l في A على منحنى الدالة.

(c) ارسم l و(C).

(8) لتكن f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=-x^4+2x^2+x$.

(a) ادرس تغيّر f وارسم بيانها (C).

(b) أوجد النقاط على المنحنى (C) حيث يكون ميل المماس يساوي 1.

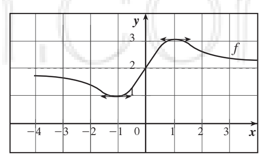
(c) أثبت أن لنقطتين من هذه النقاط مماس مشترك.

(9) f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ حيث a, b, c, d أعداد حقيقية.

استخدم جدول التغير التالي لإيجاد قيم a, b, c, d حيث $f(-2)=5$ ، $f(0)=1$

x	$-\infty$		-2		0		∞
إشارة f'		$+$	0		0	$+$	
سلوك f	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

(10) كوّن جدولًا لدراسة إشارة f' من بيان الدالة f الممثلة بالرسم أدناه.



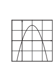
المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

لتكن f : $f(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2+2$ و(C) منحناها.

(1) يمر المنحنى (C) بنقطة الأصل. (a) (b)

(2) الشكل المجاور يمثّل منحنى الدالة f'. (a) (b)



(3) المماس عند النقطة التي إحداثيها السيني يساوي 2 موازٍ لمحور السينات. (a) (b)

(4) 4 هي قيمة عظمى محلية. (a) (b)

(5) المنحنى (C) مقعر لأعلى على الفترة $(-\infty\ ,\ 1)$. (a) (b)

في التمارين (6—11)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

الدالة f دالة كثيرة حدود جدول تغيرها:

x	$-\infty$		-1		5		∞
$f(x)$	∞	↘	-5	↗	3	↘	$-\infty$

(6) العبارة الصحيحة فيما يلي هي:

(a) $f(-2)>f(0)$ (b) $f(0)<f(6)$

(c) $f(-9)>f(-2)$ (d) $f(-1)>f(8)$

(7) للمعادلة $f(x)=0$:

(a) حل واحد (b) حلّان

(c) ثلاثة حلول (d) لا حل لها.

(8) جدول تغير الدالة f يوضّح أن:

(a) -5 قيمة صغرى مطلقة.

(b) 3 قيمة عظمى مطلقة.

(c) -5 قيمة صغرى محلية، 3 قيمة عظمى محلية.

(d) -1 قيمة صغرى محلية، 5 قيمة عظمى محلية.

(9) لتكن الدالة f : $f(x)=-x^2+7x+1$

(a) لمنحنى f قيمة عظمى محلية.

(b) لمنحنى f نقطة انعطاف.

(c) منحنى f مقعر لأعلى.

(d) لمنحنى f قيمة صغرى محلية.

(10) لتكن f : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ ,\ a\neq 0$. لمنحنى f دائمًا:

(a) قيمة عظمى محلية وقيمة صغرى محلية.

(b) نقطة انعطاف.

(c) تقعّر لأسفل ثم تقعّر لأعلى.

(d) لا تمر بنقطة الأصل.

(11) الدالة f كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة.

(a) لمنحنى f دائمًا نقطتي انعطاف.

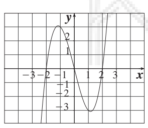
(b) لمنحنى f أكثر من قيمة عظمى محلية.

(c) منحنى f يقطع دائمًا محور السينات.

(d) قد لا يكون لمنحنى f قيمة صغرى محلية.

في التمارين (12—14)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

الشكل المقابل يمثل بيان الدالة f.



القائمة (1)	القائمة (2)
(12) $f'(x)=0$	(a) $(-\infty\ ,\ 0)$
(13) $f'(x)>0$ في	(b) $(-\infty\ ,\ -1)\ ,\ (1\ ,\ \infty)$
(14) $f'(x)<0$ في	(c) $-2\ ,\ 0\ ,\ 2$
	(d) $-1\ ,\ 1$
	(e) $(0\ ,\ \infty)$

3-5: تطبيقات على القيم القصوى

1 الأهداف

- حل مسائل تطبيقية تتضمن إيجاد قيم صغرى وعظمى للدوال في الهندسة والصناعة والاقتصاد.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

القيم العظمى والقيم الصغرى.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – ورق مقوى – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) إذا كان لدينا عددان $a > 0$ ، $b > 0$ ومجموعهما $a + b = 20$، فمتى يكون حاصل ضربهما أكبر عدد ممكن؟

(b) إذا كان لدينا عددان $a > 0$ ، $b > 0$ وحاصل ضربهما $ab = 36$، فمتى يكون حاصل جمعهما أصغر عدد ممكن؟

3-5

تطبيقات على القيم القصوى

Applications on Extreme Value

سوف تتعلم
- تطبيقات على الهندسة والصناعة.
- تطبيقات على الاقتصاد.

المفردات والمصطلحات
- القيم العظمى والقيم الصغرى
Max–Min Values

عمل تعاوني

وجد صاحب محل لبيع الأحذية الرياضية أنه يمكن نمذجة ربحه بالدالة f:

$f(x) = -15x^2 + 600x + 50$، حيث x تمثل سعر الحذاء بالدينار.

a ما سعر الحذاء الذي يحقق أعلى ربح؟

b ما قيمة أعلى ربح؟

من «العمل التعاوني» وجدت أكبر قيمة للدالة من خلال تطبيق خواص القطع المكافئ للدالة التربيعية، وفي هذا البند يمكنك إيجاد القيم نفسها باستخدام خواص القيم القصوى التي درستها حيث إن الاشتقاق يقدم لنا الطريقة الناجحة لإيجاد أكبر القيم وأصغرها للدوال ويمكن أن تساعدنا الخطوات التالية على ذلك :

1 **افهم المسألة:** اقرأ المسألة بعناية، حدّد المعلومات التي تحتاج إليها لحل المسألة.

2 **كوّن نموذجًا رياضيًّا للمسألة:** ارسم أشكالًا وضع علامات على الأجزاء المهمّة في المسألة. ضع متغيّرًا واحدًا يمثّل الكميّة المطلوب الحصول على قيمتها العظمى أو قيمتها الصغرى. ثم اكتب دالة باستخدام المتغيّر بحيث تعطي قيمتها القصوى المعلومات التي نبحث عنها.

3 **ارسم بيان الدالّة:** أوجد مجال الدالة. وحدّد قيم المتغيّر التي تكون معقولة في المسألة.

4 حدّد **النقاط الحرجة** ويمكن إيجاد **النقاط الطرفيّة**:
أوجد أين تكون المشتقّة صفريّة أو أين لا يكون لها وجود.

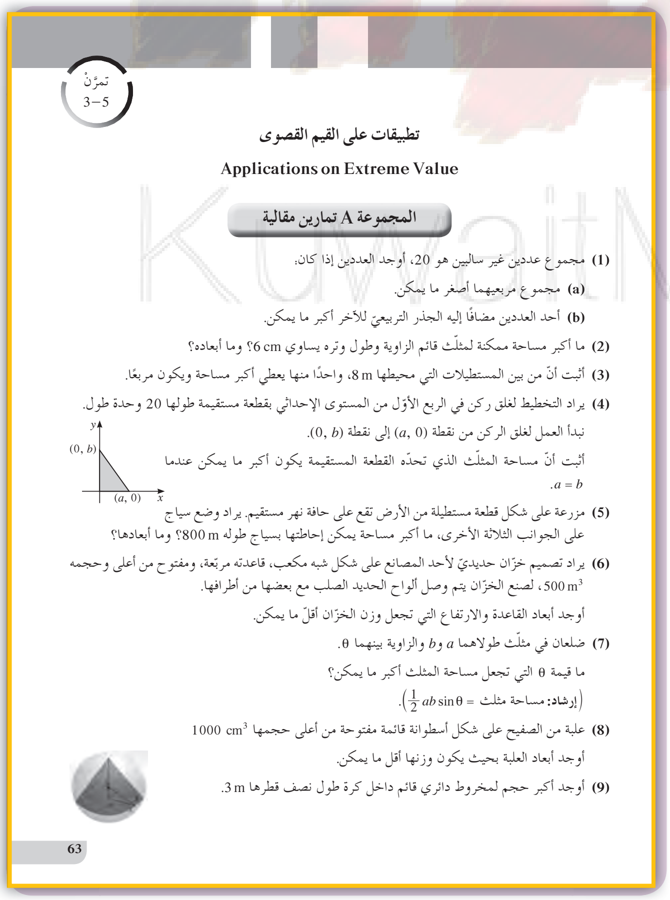
5 **حل النموذج الرياضي:** إذا لم تكن واثقًا من النتيجة دعّم أو أكّد صحّة حلك بطريقة أخرى.

6 **فسّر الحل:** ترجم نتيجتك الرياضية إلى الموقف في المسألة، ثمّ قرّر ما إذا كانت النتيجة معقولة.

مثال (1)

عددان موجبان مجموعهما 100 ومجموع مربعيهما أصغر ما يمكن، ما العددان؟

155



تمرَّنْ 3-5

تطبيقات على القيم القصوى

Applications on Extreme Value

المجموعة A تمارين مقالية

(1) مجموع عددين غير سالبين هو 20، أوجد العددين إذا كان:

(a) مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن.

(b) أحد العددين مضافًا إليه الجذر التربيعيّ للآخر أكبر ما يمكن.

(2) ما أكبر مساحة ممكنة لمثلّث قائم الزاوية وطول وتره يساوي 6 cm؟ وما أبعاده؟

(3) أثبت أنّ من بين المستطيلات التي محيطها 8 m، واحدًا منها يعطي أكبر مساحة ويكون مربعًا.

(4) يراد التخطيط لغلق ركن في الربع الأوّل من المستوى الإحداثي بقطعة مستقيمة طولها 20 وحدة طول. نبدأ العمل لغلق الركن من نقطة $(a, 0)$ إلى نقطة $(0, b)$.
أثبت أنّ مساحة المثلّث الذي تحدّه القطعة المستقيمة يكون أكبر ما يمكن عندما $a = b$.

(5) مزرعة على شكل قطعة مستطيلة من الأرض تقع على حافة نهر مستقيم. يراد وضع سياج على الجوانب الثلاثة الأخرى، ما أكبر مساحة يمكن إحاطتها بسياج طوله 800 m؟ وما أبعادها؟

(6) يراد تصميم خزّان حديديّ لأحد المصانع على شكل شبه مكعب، قاعدته مربّعة، ومفتوح من أعلى وحجمه $500\ m^3$، لصنع الخزّان يتم وصل ألواح الحديد الصلب مع بعضها من أطرافها.
أوجد أبعاد القاعدة والارتفاع التي تجعل وزن الخزّان أقلّ ما يمكن.

(7) ضلعان في مثلّث طولاهما a و b والزاوية بينهما θ.
ما قيمة θ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن؟
(**إرشاد:** مساحة مثلث $= \frac{1}{2} ab \sin\theta$).

(8) علبة من الصفيح على شكل أسطوانة قائمة مفتوحة من أعلى حجمها $1000\ cm^3$
أوجد أبعاد العلبة بحيث يكون وزنها أقل ما يمكن.

(9) أوجد أكبر حجم لمخروط دائري قائم داخل كرة طول نصف قطرها 3 m.

63

5 التدريس

قد ترغب في أن تبدأ هذا الدرس بأن تطلب إلى الطلاب أن يأتوا بمواقف يريدون فيها أن يوجدوا قيمًا عظمى أو صغرى لدالة. كن مستعدًا لإعطاء العديد من الأمثلة في حالة لم يقدم الطلاب أي موقف.

تقليديًّا، يجد الطلاب صعوبة مع مسائل حياتية، خاصة بتكوين الدالة التي يكون مطلوبًا إيجاد قيمها القصوى (أصغر أو أكبر قيمة)، وتحديد المجال المناسب لسياق المسألة. في هذا الصدد، أكِّد على «إستراتيجيّة الخطوات لحل مسائل القيم العظمى والصغرى».

في المثال (1)

تطبيق مباشر على القيم العظمى. أشر إلى أن وجود عبارة «مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن» هي التي تدفعنا لإيجاد القيم الصغرى.

في المثال (2)

راجع مع الطلاب هذا المثال مشدّدًا على أنّ الجملة «حجم الصندوق أكبر ما يمكن» هي المؤشر لتطبيقات القيم القصوى.

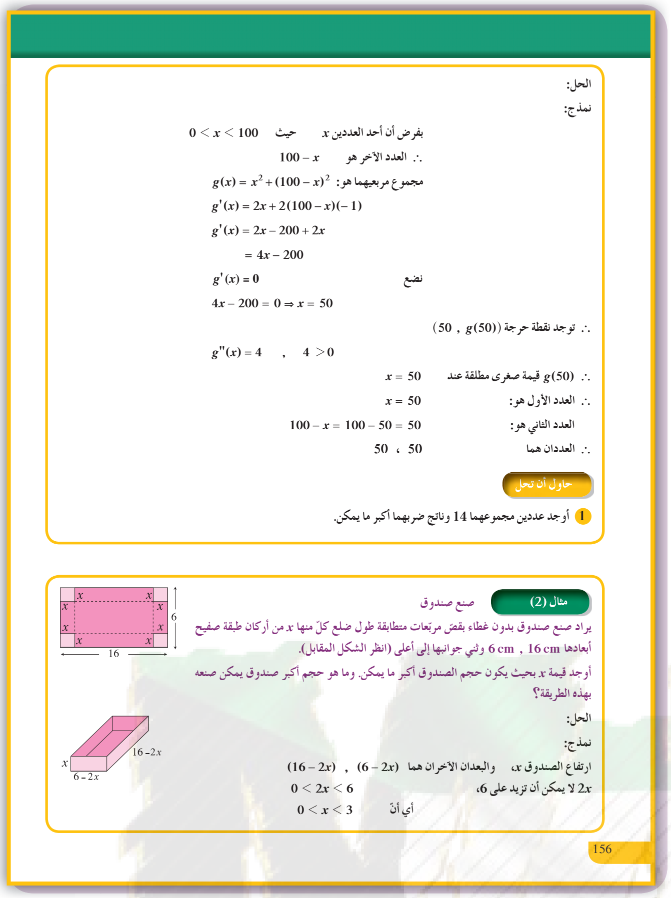
أشر إلى أن المفردات والتعبيرات المماثلة تدل على استخدام القيم القصوى.

أحيانًا في التطبيقات الحياتية لا يمكن وضع رسم بياني دقيق للدالة يدويًّا نظرًا لوجود قيم كبيرة لـ x أو y. لذا ينصح في هذه الحالة استخدام آلة حاسبة بيانية أو حاسوب.

في المثال (3)

من المهم قبل البدء في هذا المثال مراجعة قواعد المساحات المطلوب استخدامها (مساحة الدائرة + المساحة الجانبية للأسطوانة) وأيضًا حجم الأسطوانة.

اسأل عن العلاقة بين السعة والحجم (العلاقة بين اللتر و cm^3).



الحل:

نمذج:

بفرض أن أحد العددين x حيث $0 < x < 100$

$\therefore$ العدد الآخر هو $100 - x$

مجموع مربعيهما هو: $g(x) = x^2 + (100 - x)^2$

$g'(x) = 2x + 2(100 - x)(-1)$

$g'(x) = 2x - 200 + 2x$

$= 4x - 200$

نضع $g'(x) = 0$

$4x - 200 = 0 \Rightarrow x = 50$

$\therefore$ توجد نقطة حرجة $(50 , g(50))$

$g''(x) = 4 \quad , \quad 4 > 0$

$\therefore$ $g(50)$ قيمة صغرى مطلقة عند $x = 50$

$\therefore$ العدد الأول هو: $x = 50$

العدد الثاني هو: $100 - x = 100 - 50 = 50$

$\therefore$ العددان هما 50 ، 50

حاول أن تحل

1 أوجد عددين مجموعهما 14 وناتج ضربهما أكبر ما يمكن.

مثال (2) صنع صندوق

يراد صنع صندوق بدون غطاء بقصّ مربّعات متطابقة طول ضلع كلّ منها x من أركان طبقة صفيح أبعادها 16 cm , 6 cm وثني جوانبها إلى أعلى (انظر الشكل المقابل).

أوجد قيمة x بحيث يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن. وما هو حجم أكبر صندوق يمكن صنعه بهذه الطريقة؟

الحل:

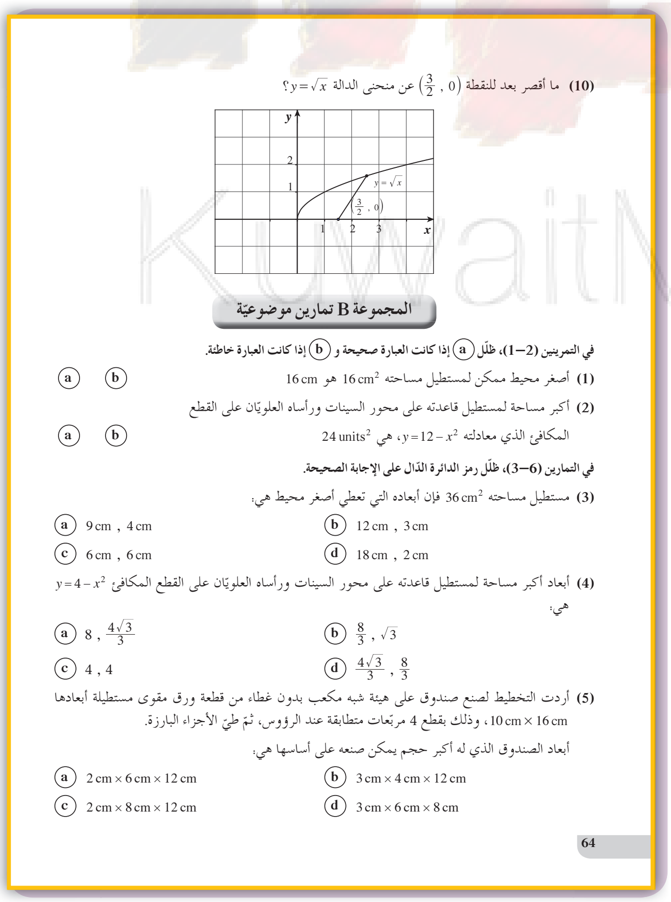
نمذج:

ارتفاع الصندوق x، والبعدان الآخران هما $(6 - 2x)$, $(16 - 2x)$

$2x$ لا يمكن أن تزيد على 6، $0 < 2x < 6$

أي أنّ $0 < x < 3$

156



(10) ما أقصر بعد للنقطة $\left(\frac{3}{2} , 0\right)$ عن منحنى الدالة $y = \sqrt{x}$؟

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمرينين (1–2)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) أصغر محيط ممكن لمستطيل مساحته $16\ cm^2$ هو 16 cm (a) (b)

(2) أكبر مساحة لمستطيل قاعدته على محور السينات ورأساه العلويّان على القطع المكافئ الذي معادلته $y = 12 - x^2$، هي $24\ units^2$ (a) (b)

في التمارين (3–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(3) مستطيل مساحته $36\ cm^2$ فإن أبعاده التي تعطي أصغر محيط هي:

(a) 9 cm , 4 cm (b) 12 cm , 3 cm
(c) 6 cm , 6 cm (d) 18 cm , 2 cm

(4) أبعاد أكبر مساحة لمستطيل قاعدته على محور السينات ورأساه العلويّان على القطع المكافئ $y = 4 - x^2$ هي:

(a) $8 , \frac{4\sqrt{3}}{3}$ (b) $\frac{8}{3} , \sqrt{3}$
(c) $4 , 4$ (d) $\frac{4\sqrt{3}}{3} , \frac{8}{3}$

(5) أردت التخطيط لصنع صندوق على هيئة شبه مكعب بدون غطاء من قطعة ورق مقوى مستطيلة أبعادها $16\ cm \times 10\ cm$، وذلك بقطع 4 مربّعات متطابقة عند الرؤوس، ثمّ طيّ الأجزاء البارزة.

أبعاد الصندوق الذي له أكبر حجم يمكن صنعه على أساسها هي:

(a) $2\ cm \times 6\ cm \times 12\ cm$ (b) $3\ cm \times 4\ cm \times 12\ cm$
(c) $2\ cm \times 8\ cm \times 12\ cm$ (d) $3\ cm \times 6\ cm \times 8\ cm$

64

في المثال (4)

من المفيد محاورة الطلاب والنقاش معهم بواسطة رسم هندسي عن أقصر مسافة بين نقطة ومستقيم وهي طول القطعة المستقيمة على الخط العمودي من النقطة إلى المستقيم وبالتالي نوجد القيمة الصغرى لدالة المسافة بين النقطة خارج المستقيم وأي نقطة على هذا المستقيم.

في المثال (5)

كثيرًا ما تحوّل المسائل الاقتصادية إلى دوال يدرس تغيّرها لإيجاد القيم العظمى (كالربح) والصغرى (كالكلفة) وهذا مبدأ أساسي في الاقتصاد.

6 الربط

تعطى التكلفة الكلية لإنتاج آلة ما بالدالة: $C(x) = 100x^2 + 1300x + 1000$، حيث x تمثل ألف وحدة إنتاج، و$C(x)$ تعطى بآلاف الدنانير. تباع كل وحدة إنتاج بثمن 2 000 دينار.

(a) إذا كان x عدد الوحدات المباعة، فأوجد بدلالة x

الربح = سعر مبيع الكمية − كلفة الكمية المباعة

دالة الربح: $P(x) = R(x) - C(x)$

$$P(x) = 2\,000x - 100x^2 - 1300x - 1000$$

$$P(x) = -100x^2 + 700x - 1000$$

(b) أوجد قيمة x التي تحقق أكبر ربح.

$$P'(x) = -200x + 700 \Rightarrow P'(x) = 0$$

$$-200x = -700 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$$

$$P''(x) = -200 < 0$$

يتحقق أكبر ربح عند: $P'(x) = 0$

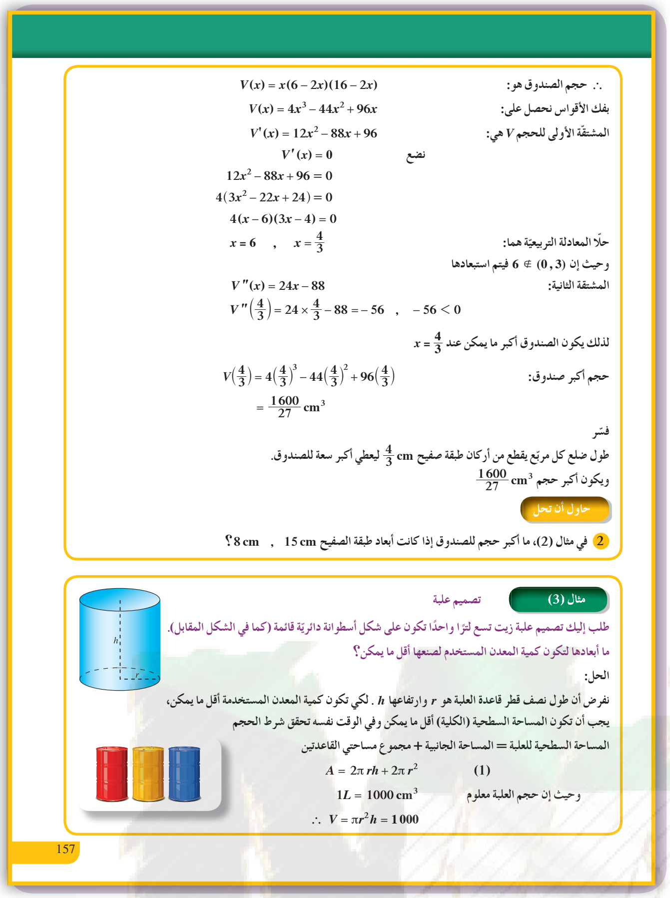
$\because$ x تمثل 1 000 وحدة إنتاج

$\therefore$ يتحقق أكبر ربح عند: $\frac{7}{2} \times 1000$

أي 3 500 وحدة إنتاج.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

في مسائل تطبيقات على القيم القصوى، قد يتغاضى الطلاب عن نقاط النهاية كنقاط ممكنة لقيم قصوى، أو يجدون حلولًا خارج مجال المتغير موضع الدراسة.



$\therefore$ حجم الصندوق هو: $V(x) = x(6-2x)(16-2x)$

بفك الأقواس نحصل على: $V(x) = 4x^3 - 44x^2 + 96x$

المشتقّة الأولى للحجم V هي: $V'(x) = 12x^2 - 88x + 96$

نضع $V'(x) = 0$

$12x^2 - 88x + 96 = 0$

$4(3x^2 - 22x + 24) = 0$

$4(x-6)(3x-4) = 0$

حلّا المعادلة التربيعيّة هما: $x = 6 \quad , \quad x = \frac{4}{3}$

وحيث إن $6 \notin (0\,,3)$ فيتم استبعادها

المشتقّة الثانية: $V''(x) = 24x - 88$

$V''\left(\frac{4}{3}\right) = 24 \times \frac{4}{3} - 88 = -56 \quad , \quad -56 < 0$

لذلك يكون الصندوق أكبر ما يمكن عند $x = \frac{4}{3}$

حجم أكبر صندوق: $V\left(\frac{4}{3}\right) = 4\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 44\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 96\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1600}{27}\ \text{cm}^3$

فسّر

طول ضلع كل مربّع يقطع من أركان طبقة صفيح $\frac{4}{3}$ cm ليعطي أكبر سعة للصندوق.

ويكون أكبر حجم $\frac{1600}{27}\ \text{cm}^3$

حاول أن تحل

2 في مثال (2)، ما أكبر حجم للصندوق إذا كانت أبعاد طبقة الصفيح 15 cm , 8 cm؟

مثال (3) تصميم علبة

طلب إليك تصميم علبة زيت تسع لترًا واحدًا تكون على شكل أسطوانة دائريّة قائمة (كما في الشكل المقابل).

ما أبعادها لتكون كمية المعدن المستخدم لصنعها أقل ما يمكن؟

الحل:

نفرض أن طول نصف قطر قاعدة العلبة هو r وارتفاعها h. لكي تكون كمية المعدن المستخدمة أقل ما يمكن، يجب أن تكون المساحة السطحية (الكلية) أقل ما يمكن وفي الوقت نفسه تحقق شرط الحجم

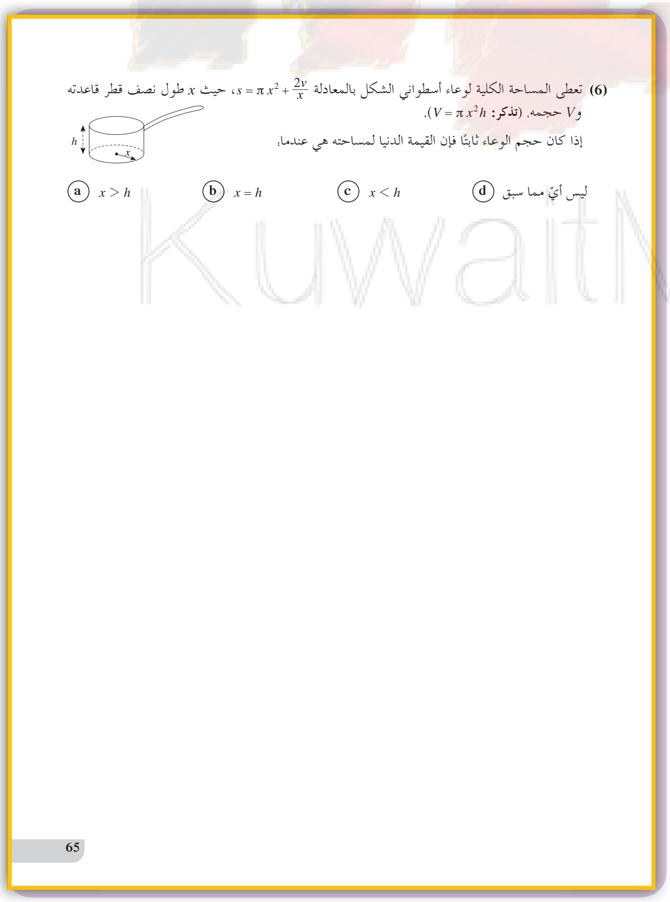
المساحة السطحية للعلبة = المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدتين

$A = 2\pi rh + 2\pi r^2 \qquad (1)$

وحيث إن حجم العلبة معلوم $1L = 1000\ \text{cm}^3$

$\therefore\ V = \pi r^2 h = 1000$

157



(6) تعطى المساحة الكلية لوعاء أسطواني الشكل بالمعادلة $s = \pi x^2 + \frac{2v}{x}$، حيث x طول نصف قطر قاعدته وV حجمه. (**تذكر:** $V = \pi x^2 h$).

إذا كان حجم الوعاء ثابتًا فإن القيمة الدنيا لمساحته هي عندما:

ⓐ $x > h$ ⓑ $x = h$ ⓒ $x < h$ ⓓ ليس أيّ مما سبق

65

عند الرسم البياني لمسائل التطبيقات التي تتضمن دوال مثلثية، غالبًا ما يتم التغاضي عن حلول بديلة لكل من: $f'(x) = 0$ أو $f''(x) = 0$.

الطبيعة الدورية للدوال المثلثية لا بد من أن تكون دائمًا موضع الاعتبار في هذه المسائل، وذلك باستثناء بعض الحالات التي تكون فيها الشروط الفيزيائية للمسألة مقيّدة للمجال.

8 التقييم

راقب الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل»، وتأكّد من فهمهم لتطبيق الدوال على القيم العظمى والصغرى لنماذج من الواقع.

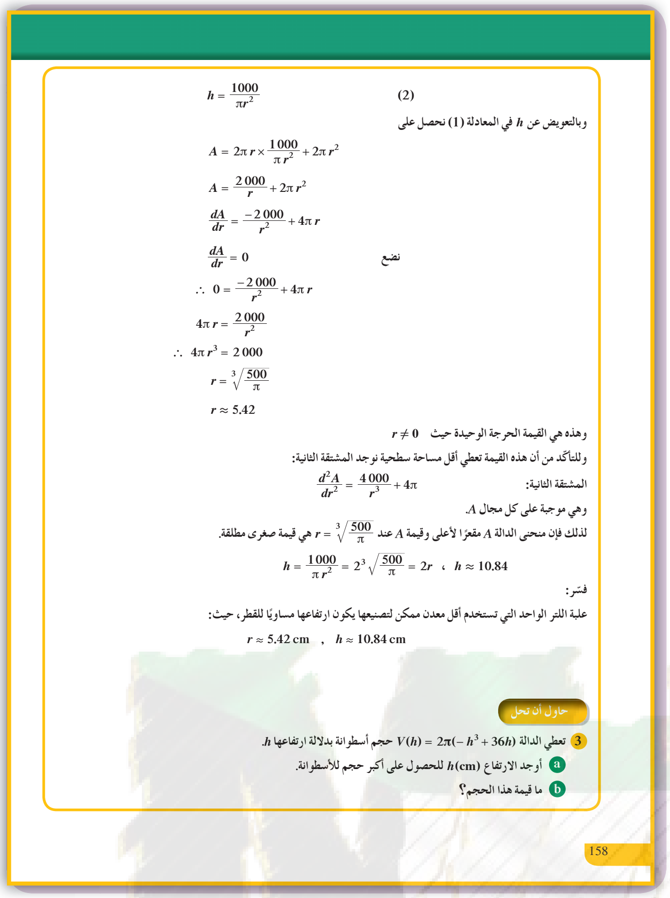
اختبار سريع

يريد صاحب مشروع زراعي بناء خزان مياه على شكل شبه مكعب مفتوح من أعلى يتسع لِـ $72\ \text{m}^3$، قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها x m وارتفاعه y m تعطى تكاليف بناء الخزان بالمعادلة:

$$C = 50x^3 + 300xy$$

أوجد قيم x , y للحصول على أقل كلفة ممكنة.

$2\sqrt{3}\ \text{m}$, $6\ \text{m}$



$$h = \frac{1000}{\pi r^2} \qquad (2)$$

وبالتعويض عن h في المعادلة (1) نحصل على

$$A = 2\pi r \times \frac{1\,000}{\pi r^2} + 2\pi r^2$$

$$A = \frac{2\,000}{r} + 2\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dr} = \frac{-2\,000}{r^2} + 4\pi r$$

نضع $\frac{dA}{dr} = 0$

$$\therefore\ 0 = \frac{-2\,000}{r^2} + 4\pi r$$

$$4\pi r = \frac{2\,000}{r^2}$$

$$\therefore\ 4\pi r^3 = 2\,000$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

$$r \approx 5.42$$

وهذه هي القيمة الحرجة الوحيدة حيث $r \neq 0$

وللتأكّد من أن هذه القيمة تعطي أقل مساحة سطحية نوجد المشتقة الثانية:

المشتقة الثانية: $\frac{d^2A}{dr^2} = \frac{4\,000}{r^3} + 4\pi$

وهي موجبة على كل مجال A.

لذلك فإن منحنى الدالة A مقعرًا لأعلى وقيمة A عند $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ هي قيمة صغرى مطلقة.

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r \ ، \ h \approx 10.84$$

فسّر:

علبة اللتر الواحد التي تستخدم أقل معدن ممكن لتصنيعها يكون ارتفاعها مساويًا للقطر، حيث:

$r \approx 5.42$ cm , $h \approx 10.84$ cm

حاول أن تحل

3 تعطي الدالة $V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$ حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها h.

a أوجد الارتفاع h(cm) للحصول على أكبر حجم للأسطوانة.

b ما قيمة هذا الحجم؟

158

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a) 20 دينارًا

(b) 6 050 دينارًا

«حاول أن تحل»

1 العدد الأول 7 ، العدد الثاني 7

2 $\dfrac{2450}{27}\,cm^3$

3 (a) $h = 2\sqrt{3}\ cm$

(b) $V \approx 522.37\ cm^3$

4 أقصر مسافة تحدث عند $x = \dfrac{5}{2}$ وتساوي $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$ وحدة طول

5 (a) 5 000 مكثف.

(b) 6 000 مكثف.

مثال (4)

أوجد أقصر مسافة بين النقطة $P(x\ ,\ y)$ على المنحنى الذي معادلته $x^2 - y^2 = 16$ والنقطة $Q(6\ ,\ 0)$

الحل:

$$x^2 - y^2 = 16 \Rightarrow y^2 = x^2 - 16$$

نوجد المسافة بين النقطتين $P\ ,\ Q$

$$PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$
$$= \sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + y^2}$$

نفرض أن دالة المسافة هي:

$$S(x) = \sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2}$$
$$S(x) = \sqrt{x^2 - 12x + 36 + x^2 - 16}$$
$$= \sqrt{2x^2 - 12x + 20}$$
$$= (2x^2 - 12x + 20)^{\frac{1}{2}}$$
$$S'(x) = \frac{1}{2}(4x - 12)(2x^2 - 12x + 20)^{\frac{-1}{2}}$$
$$= \frac{2x - 6}{\sqrt{2x^2 - 12x + 20}}$$
$$S'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

نوجد أصفار المقام بوضع $2x^2 - 12x + 20 = 0$

المميز: $\Delta = (-12)^2 - 4(2)(20)$

$\Delta = -16 \quad , \quad -16 < 0$

∴ لا يوجد أصفار للمقام

نكوّن جدول التغيّر

x	$-\infty$	3	∞
$S'(x)$	$--$		$++$
$S(x)$	↘		↗

∴ أقصر مسافة بين النقطتين $Q\ ,\ P$ هي عند $x = 3$

$$S(3) = \sqrt{18 - 36 + 20} = \sqrt{2}$$

أقصر مسافة هي $\sqrt{2}$ وحدة طول.

حاول أن تحل

4 أوجد أقصر مسافة بين النقطة $A(x\ ,\ y)$ على المنحنى الذي معادلته $y = \sqrt{x}$ والنقطة $B(3\ ,\ 0)$

159

مثال (5)

تنتج إحدى شركات الأدوات الكهربائية خلال فترة زمنية محددة كمية x من الخلاطات الكهربائية..

يعطى معدل كلفة إنتاج كل قطعة (بالدينار) بالعلاقة $C(x) = x - 20 + \dfrac{400}{x}$

1 أوجد كمية القطع المنتجة خلال الفترة لتحقيق أقل كلفة ممكنة.

2 تباع كل قطعة منتجة بمبلغ 100 دينار.

a عبّر عن ربح الشركة بمعلومية x.

b أوجد قيمة x التي تحقق أكبر ربح، وما قيمته؟

الحل:

يمثّل المتغير x عدد القطع المنتجة ∴ x عدد صحيح موجب.

1 ندرس تغير الدالة c على الفترة $(0, \infty)$ لحساب قيمة x التي تعطي قيمة صغرى.

$$C'(x) = 1 - \frac{400}{x^2} = \frac{x^2 - 400}{x^2} = \frac{(x-20)(x+20)}{x^2}$$

∵ $x^2 > 0 \ ,\ x + 20 > 0$ (x عدد صحيح موجب)

∴ إشارة C' تساوي إشارة $x - 20$

جدول التغير

x	0	20	∞
إشارة f'	$--$		$++$
سلوك f	↘		↗

من جدول التغير نستنتج أن إنتاج 20 قطعة يحقق أقل كلفة ممكنة.

2 a الربح = سعر مبيع الكمية − كلفة الكمية المباعة

سعر الكمية المباعة: $100x$

كلفة الكمية المباعة: $\left(x - 20 + \frac{400}{x}\right).x = x^2 - 20x + 400$

الربح:

$$P(x) = 100x - (x^2 - 20x + 400)$$
$$= 100x - x^2 + 20x - 400$$
$$= -x^2 + 120x - 400$$

b لحساب قيمة x التي تحقق أكبر ربح ندرس تغيّر الدالة P على الفترة $(0, \infty)$ ونوجد قيمة x التي تحقق قيمة قصوى.

$$P'(x) = -2x + 120$$

نضع $P'(x) = 0$

$$-2x + 120 = 0$$
$$x = 60$$

160

تغير الدالة P :

x	0	60	∞
إشارة P'	$++$		$--$
سلوك P	↗		↘

من جدول التغير نستنتج أن قيمة x التي تحقق قيمة عظمى للدالة P هي 60 أي أن مبيع 60 قطعة يحقق أكبر ربح للشركة.

أكبر قيمة للربح:

$$P(60) = -(60)^2 + 120(60) - 400$$
$$= -4\,000 + 7\,200$$
$$= 3\,200$$

أكبر قيمة للربح 3 200 دينار.

حاول أن تحل

5 تصنع إحدى الشركات يوميًّا x (بالآلاف) من المكثفات الكهربائية.

يعطى معدل كلفة إنتاج كل قطعة بالعلاقة: $C(x) = x - 2 + \dfrac{25}{x}$

a أوجد كمية المكثفات المنتجة يوميًّا لتحقيق أقل كلفة ممكنة.

b تباع كل ألف قطعة بسعر 10 دنانير.

أوجد كمية المكثفات المنتجة لتحقيق أكبر ربح.

161

المرشد لحل المسائل

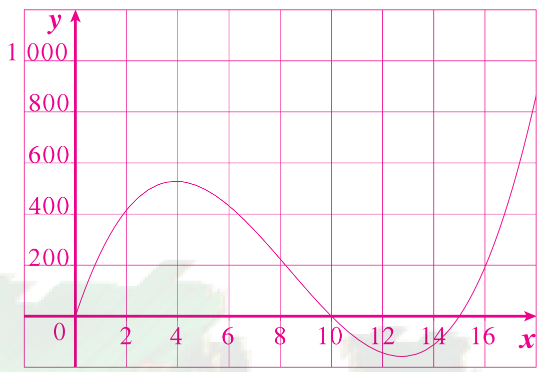
حل «مسألة إضافية»

(a) $V(x) = x(15 - x)(20 - 2x)$

(b) $0 < 2x < 20$

$0 < x < 10$

$\therefore$ مجال الدالة $(0\ ,\ 10)$

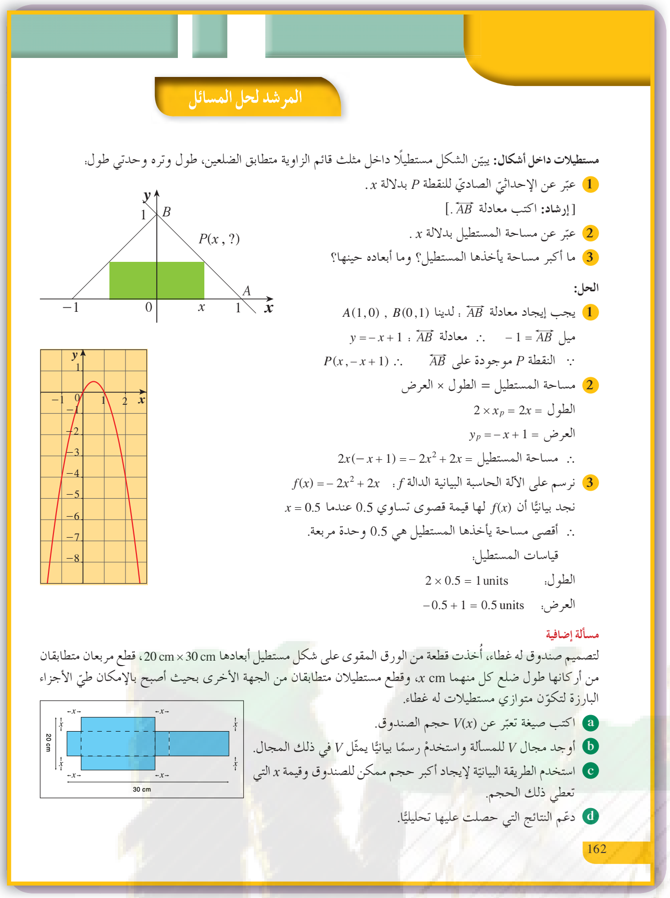


(c) $x \approx 4\ ,\ V \approx 528$

(d) $V'(x) = 6x^2 - 100x + 300$

$V'(x) = 0 \Longrightarrow x \approx 4$

$V(4) \approx 528$



المرشد لحل المسائل

مستطيلات داخل أشكال: يبيّن الشكل مستطيلًا داخل مثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين، طول وتره وحدتي طول.

1. عبّر عن الإحداثيّ الصاديّ للنقطة P بدلالة x.
   [**إرشاد:** اكتب معادلة $\overleftrightarrow{AB}$.]
2. عبّر عن مساحة المستطيل بدلالة x.
3. ما أكبر مساحة يأخذها المستطيل؟ وما أبعاده حينها؟

الحل:

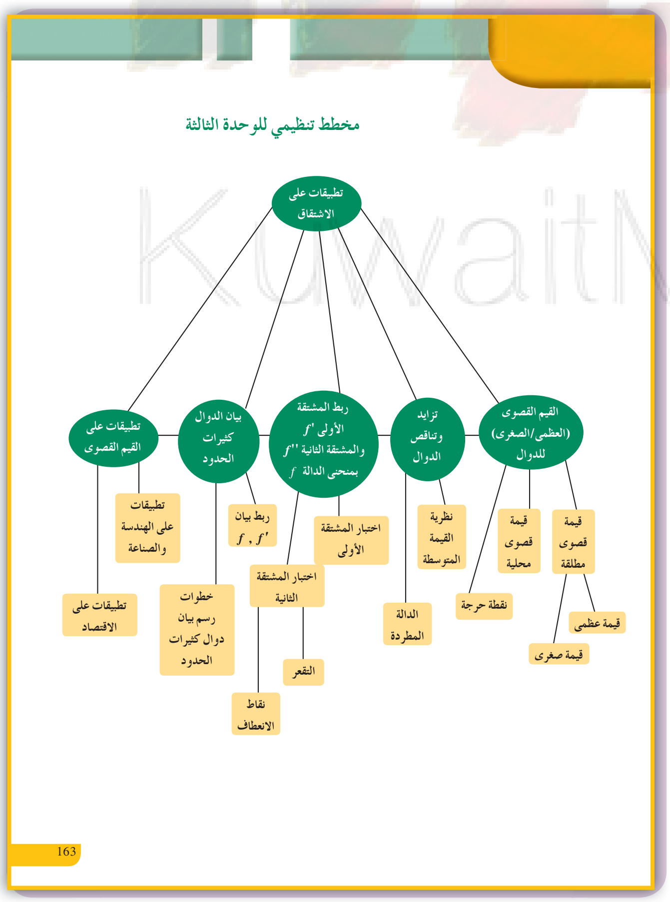
1. يجب إيجاد معادلة $\overleftrightarrow{AB}$ ؛ لدينا $A(1,0)\ ,\ B(0,1)$
   ميل $\overleftrightarrow{AB} = -1$ $\therefore$ معادلة $\overleftrightarrow{AB}$: $y = -x + 1$
   $\because$ النقطة P موجودة على $\overleftrightarrow{AB}$ $\therefore P(x\ ,-x+1)$
2. مساحة المستطيل = الطول × العرض
   الطول = $2 \times x_p = 2x$
   العرض = $y_p = -x + 1$
   $\therefore$ مساحة المستطيل = $2x(-x+1) = -2x^2 + 2x$
3. نرسم على الآلة الحاسبة البيانية الدالة f : $f(x) = -2x^2 + 2x$
   نجد بيانيًّا أن $f(x)$ لها قيمة قصوى تساوي 0.5 عندما $x = 0.5$
   $\therefore$ أقصى مساحة يأخذها المستطيل هي 0.5 وحدة مربعة.
   قياسات المستطيل:
   الطول: $2 \times 0.5 = 1$ units
   العرض: $-0.5 + 1 = 0.5$ units

مسألة إضافية

لتصميم صندوق له غطاء، أُخذت قطعة من الورق المقوى على شكل مستطيل أبعادها $20\text{ cm} \times 30\text{ cm}$، قطع مربعان متطابقان من أركانها طول ضلع كل منهما x cm، وقطع مستطيلان متطابقان من الجهة الأخرى بحيث أصبح بالإمكان طيّ الأجزاء البارزة لتكوّن متوازي مستطيلات له غطاء.

- **a** اكتب صيغة تعبّر عن $V(x)$ حجم الصندوق.
- **b** أوجد مجال V للمسألة واستخدمْ رسمًا بيانيًّا يمثّل V في ذلك المجال.
- **c** استخدم الطريقة البيانيّة لإيجاد أكبر حجم ممكن للصندوق وقيمة x التي تعطي ذلك الحجم.
- **d** دعّم النتائج التي حصلت عليها تحليليًّا.

162



ملخص

- إذا كانت f دالة مجالها D، $c \in D$ فإن $f(c)$ تسمى:
  - قيمة عظمى مطلقة للدالة f على D عندما: $f(c) \geqslant f(x)\ ,\ \forall x \in D_f$
  - قيمة صغرى مطلقة للدالة f على D عندما: $f(c) \leqslant f(x)\ ,\ \forall x \in D_f$
- إذا كانت f دالّة متصلة على فترة مغلقة $[a\ ,\ b]$ فإن f تكون لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة.
- لتكن $(c\ ,f(c))$ نقطة داخلية للدالة f ، D فترة مفتوحة تحوي c ، $f(c)$ تكون:
  - **a** قيمة عظمى محليّة عند c عندما: $\forall x \in D$ $\qquad f(c) \geqslant f(x)$
  - **b** قيمة صغرى محليّة عند c عندما: $\forall x \in D$ $\qquad f(c) \leqslant f(x)$
- النقطة الداخليّة للدالّة f $(c\ ,f(c))$ تسمى نقطة حرجة عندما $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير موجودة.
- إذا كانت للدالّة f قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) محليّة عند $x = c$ فإنّ $(c\ ,f(c))$ نقطة حرجة.
- إذا كانت f دالة:
  - متّصلة على الفترة $[a\ ,\ b]$
  - قابلة للاشتقاق على الفترة $(a\ ,\ b)$

  فإنّه يوجد على الأقل $c \in (a\ ,b)$ بحيث $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
- لتكن f دالّة معرّفة على الفترة I . نقول إن:
  - **1** f دالّة متزايدة على I إذا كان: $\forall x_1\ ,\ x_2 \in I \quad , \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
  - **2** f دالّة متناقصة على I إذا كان: $\forall x_1\ ,\ x_2 \in I \quad , \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- الدالّة التي تكون دائمًا متزايدة على فترة أو دائمًا متناقصة على فترة، يقال عنها إنّها دالّة مطّردة على هذه الفترة.
- لتكن f دالّة قابلة للاشتقاق على $(a\ ,\ b)$.
  - ذا كانت $f'(x) > 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة $(a\ ,\ b)$، فإنّ f تتزايد على $(a\ ,\ b)$.
  - إذا كانت $f'(x) < 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة $(a\ ,\ b)$، فإنّ f تتناقص على $(a\ ,\ b)$.
  - إذا كانت $f'(x) = 0$ عند كلّ نقطة تنتمي إلى الفترة $(a\ ,\ b)$، فإنّ الدالة f ثابتة على $(a\ ,\ b)$.
- لتكن f دالّة متّصلة على مجالها وكانت $(c\ ,f(c))$ نقطة حرجة.
  - إذا كانت إشارة المشتقّة f' تتغيّر من الموجب إلى السالب عند $x = c$ فإن f يكون لها قيمة عظمى محلية عند c.
  - إذا تغيرت إشارة f' من السالب إلى الموجب عند $x = c$ فإن f يكون لها قيمة صغرى محلّية عند c.

اختبار الوحدة الثالثة

في التمرينين (2—1)، أوجد القيم القصوى المطلقة للدوالّ على الفترات الموضّحة:

(1) $f(x) = x^3 - 9x^2 - 21x - 11\ ,\ [-2\ ,0]$

(2) $f(x) = \dfrac{5}{x^2+1}\quad ,\quad [-2\ ,3]$

في التمارين (5—3)، أوجد:

(a) **فترات التزايد وفترات التناقص للدالة.**

(b) **القيم القصوى المحليّة.**

(3) $f(x) = x^3 - 12x + 6$ **(4)** $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ **(5)** $h(x) = \dfrac{x}{x^2+2x+9}$

في التمارين (8—6)، أوجد:

(a) **فترات التقعر لأعلى وفترات التقعر لأسفل.**

(b) **نقاط الانعطاف إن وجدت.**

(6) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3$ **(7)** $g(x) = x^4 - 2x^3 + 5x - 6$ **(8)** $h(x) = \dfrac{3}{x-1}$

في التمرينين (10—9)، استخدم مشتقة الدالة $y = f(x)$ لإيجاد:

(a) **قيم x التي عندها قيم قصوى محلية للدالة f.**

(b) **فترات التقعر لأعلى.**

(c) **فترات التقعر لأسفل.**

(9) $y' = 6(x+1)(x-2)$ **(10)** $y' = 6(x+1)(x-2)^2$

(11) استخدم المشتقة الثانية للدالّة $y = f(x)$ لإيجاد قيم x التي يكون عندها نقاط انعطاف للدالة f.

$y'' = x(x-3)^2$

في التمارين (14—12)، ادرس تغير كل من الدوال التالية ثم ارسم بيانها.

(12) $f(x) = (x+2)(x^2-2x+4)$

(13) $g(x) = x^4 - 6x^2 + 9$

(14) $h(x) = (x^2+4x+4)^2$

- إذا لم تتغيّر إشارة f' عند $x = c$ فإن f لا يكون لها قيمة قصوى محلّية عند c.
- تعريف: التقعّر

  إذا وقع منحنى الدالة أعلى جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعّرًا لأعلى على I .

  وإذا وقع منحنى الدالة أسفل جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعّرًا لأسفل على I .
- اختبار التقعّر:
  - **a** إذا كانت $\forall x \in I\ ,\ f''(x) > 0$ فإن منحنى الدالة f مقعّرًا لأعلى على I .
  - **b** إذا كانت $\forall x \in I\ ,\ f''(x) < 0$ فإن منحنى الدالة f مقعّرًا لأسفل على I .
- نقطة الانعطاف:

تسمّى النقطة $(c\ ,f(c))$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f إذا كانت f دالّة متّصلة عند c، ومنحنى الدالة f يغيّر تقعّره عند هذه النقطة من أعلى إلى أسفل أو من أسفل إلى أعلى.

- إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) < 0$ ، فإن f تكون لها قيمة عظمى محليّة عند $x = c$.
- إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) > 0$ ، فإن f تكون لها قيمة صغرى محليّة عند $x = c$.

(15) لتكن الدالة f : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

(a) بيّن أنّ شروط نظريّة القيم المتوسطة محققة على الفترة $[0\ ,3]$

(b) أوجد قيمة أو قيم c على $(a,\ b)$ حيث $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(16) لتكن الدالة f : $f(x) = x^2 + bx + c$

أوجد قيم $b\ ,\ c$ إذا كان منحنى f له قيمة صغرى محلية تساوي -1 عند $x = -2$

تمارين إثرائية

(1) **الحركة على مستقيم.** يتحدد موقع جسيم A على محور السينات بالمعادلة: $S_1 = \sin t$ ويتحدد موقع جسيم B على نفس المحور بالمعادلة: $S_2 = \sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$ حيث S_2 و S_1 بالمتر و t بالثواني.

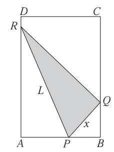
(a) في أي وقت بالثواني يتلاقى الجسيم A مع الجسيم B على الفترة $[0\ ,\ 2\pi]$؟

(b) ما أكبر مسافة يمكن أن تفصل بين الجسيم A والجسيم B؟

(c) في أي وقت على الفترة $[0\ ,\ 2\pi]$ تكون المسافة بين الجسيمين تتغير بأقصى سرعة لها؟

(2) **طي ورقة.** قطعة ورق مستطيلة الشكل أبعادها $28\,\text{cm} \times 22\,\text{cm}$ موضوعة على أرض مسطحة.

اطوِ إحدى زواياها المقابلة للضلع الأطول كما ترى في الصورة بحيث ينطبق الرأس A عند Q على $\overline{BC}$.



المطلوب إيجاد أقصر طول للضلع PR.

(a) أثبت أن: $L^2 = \dfrac{x^3}{x-11}$

(b) ما قيمة x التي تعطي أصغر قيمة لـ L^2؟

(c) ما أصغر قيمة لـ L؟

(3) **المبيع.** تبلغ تكلفة تصنيع سلعة وتوزيعها 10 دنانير.

إذا كان سعر مبيع هذه السلعة هو (دنانير) x وعدد السلع المباعة يعطى بالقاعدة:

$$n = \frac{a}{x-10} + b(100-x)$$

ما هو سعر المبيع الذي يحقق أكبر ربح؟ (a, b ثوابت موجبة في المعادلة).

في التمارين (6—4)، أوجد الفترات التي تكون عندها الدالّة:

(a) **متزايدة** **(b)** **متناقصة** **(c)** **مقعّرة لأعلى** **(d)** **مقعّرة لأسفل**

ثمّ أوجد:

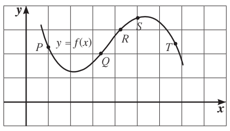
(e) **القيم القصوى المحليّة** **(f)** **نقاط الانعطاف**

(4) $y = 1 + x - x^2 - x^4$

(5) $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}}$

(6) $y = x^{\frac{4}{5}}(2-x)$

(7) عند أيّ من النقاط الخمس المحدّدة على المنحنى الممثّل للدالّة $y = f(x)$ والمبيّنة في الشكل:



(a) تكون كلّ من y' و y'' سالبة؟

(b) تكون y' سالبة و y'' موجبة؟

(8) لنأخذ الدالة f: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$

أوجد قيم a, b, c, d إذا كان منحنى f له الخصائص التالية:

(a) يمر بالنقطة $A(0\ ,\ 3)$

(b) له قيمة عظمى محلية تساوي 3 عند $x = 0$

(c) $I(1\ ,\ 1)$ نقطة انعطاف

(9) الربط بين $f\ ,\ f'\ ,\ f''$: f دالة متّصلة على $[0, 3]$ وتحقّق الآتي:

x	0	1	2	3
f	0	2	0	-2
f'	3	0	غير موجودة	-3
f''	0	-1	غير موجودة	0

x	$0 < x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x < 3$
f	+	+	−
f'	+	−	−
f''	−	−	−

(a) أوجد القيم القصوى المطلقة لـ f وأين تتحقّق.

(b) أوجد أيّ نقاط انعطاف.

(c) ارسم بيانًا تقريبيًّا ممكنًا للدالّة f.

(10) لنأخذ الدالة f : $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d} \quad (a \neq 0\ ,\ c \neq 0)$

أوجد قيم a, b, c, d إذا كان منحنى f له الخصائص التالية:

(a) $y = 2$ مقارب أفقي.

(b) $x = \frac{1}{2}$ مقارب رأسي.

(c) يمر بالنقطة $A(-1\ ,\ 1)$

(11) لتكن الدالة f المعرَّفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = 2x^2 - 4x$ و (C) منحناها.

(a) ادرس تغير f وضع جدول التغير ثم ارسم (C).

(b) استنتج منحنى الدالة g : $g(x) = |2x^2 - 4x|$.

(c) استنتج منحنى الدالة h : $h(x) = 2x^2 - 4|x|$.

(12) **(a)** هل يمكن أن يكون المستقيم $y = 7x + 9$ مماسًا لمنحنى الدالة f : $f(x) = x^3 + 4x + 11$؟

(b) في حال الإيجاب حدّد نقاط التماس.

(13) لتكن f : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$

(a) ادرس تغيّر f وارسم بيانها (C).

(b) حدّد النقاط على (C) حيث يكون المماس موازيًا للمستقيم $y = 3x + 5$

(14) ليكن (C) و (C') منحنيي الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x) = x^3 - 3x + 2$ و $g(x) = x^2 - 3x$

(a) ادرس تغير كل من الدالتين f و g ونهاياتهما.

(b) أوجد إحداثيات النقطة المشتركة بين منحنيي الدالتين.

(c) أوجد معادلات مستقيمات المماس في هذه النقطة على (C) و (C').

(d) ارسم (C) و (C').