مقدمة الوحدة

تتطرق هذه الوحدة إلى موضوعي النهاية والاتصال.

يعتبر الموضوعان من المواضيع المبدئية والجوهرية في علم الطوبولوجيا وهما غنيان جدًّا بالخواص الطوبولوجية لمجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

طرح الرياضيون والفلاسفة منذ القدم مسائل تتعلق بموضوع النهايات. نذكر على سبيل المثال متناقضة زينون (Zeno's Paradox) وهي تتصوّر سباقًا بين «أخيل» أسرع عداء في بلاد الإغريق وسلحفاة عجوز.

في بداية السباق يعطي «أخيل» السلحفاة ميزة مئة متر. عندما يجري «أخيل» المئة متر تكون السلحفاة قد قطعت مسافة قصيرة (لنفرض أنها مترًا واحدًا) ما يتطلب من أخيل زمنًا إضافيًّا لقطع هذه المسافة وأثناء ذلك تكون السلحفاة قد قطعت مسافة أقصر. يحدث هذا السباق إلى ما لا نهاية ويستنتج زينون أن أخيل لا يستطيع التفوق على السلحفاة.

حُلّت مسألة المتناقضة هذه في علم التفاضل والتكامل الحديث باستخدام مبدأ أن متسلسلة لا نهائية من الأعداد الموجبة يمكن أن تقترب من عدد محدد.

تقودنا دراسة النهايات إلى التبصر والتمعن بمفهوم اللانهاية ∞. عندما يأخذ المتغير x قيمًا أكبر فأكبر، وأكبر من أي عدد موجب معطى، نقول إن x تقترب من اللانهاية ونكتب $x \to \infty$ كذلك التعبير $x \to -\infty$ يعني أن قيمة x أصغر من أي عدد سالب معطى.

وفي تمارين النهايات نتعرض لصيغ غير معينة ومنها:

صفر $\times \infty$، $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$، $\infty - \infty$، $\frac{\infty}{\infty}$، ...

لإيجاد النهاية يجب أوّلًا التخلص من الصيغة غير المعينة.

فمثلًا لإيجاد $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 4}$ نصل إلى صيغة غير معيّنة $\frac{0}{0}$.

الوحدة الأولى

النهايات والاتصال

Limits and Continuity

مشروع الوحدة: السرعة اللحظية

1 مقدمة المشروع: تسقط صخرة من مرتفع. يمكن ضبط زمن السقوط وحساب السرعة المتوسطة لسقوط الصخرة بسهولة، ولكن في لحظة ما أثناء السقوط ما هي سرعة الصخرة؟

2 الهدف: معرفة سرعة الصخرة عند اللحظة $t = 2\,s$.

3 اللوازم: أوراق رسم، آلة حاسبة علمية، حاسوب، جهاز عرض.

4 أسئلة حول التطبيق:

تسقط الصخرة وفق العلاقة (قانون جاليليو للسقوط الحر): $d(t) = 4.9t^2$ ، حيث:

$d(t)$ المسافة التي تقطعها الصخرة بالأمتار (m)، t الزمن بالثواني s

a احسب السرعة المتوسطة $\frac{\Delta d}{\Delta t}$ خلال أول ثانيتين من السقوط.

b أكمل الجدول التالي الذي يمثّل السرعة المتوسطة للصخرة في الفترة الزمنية من اللحظة $t = 2$ إلى اللحظة $t = 2 + h$، حيث $\Delta t = h$ هو الفارق في الزمن.

مدة الفترة الزمنية h بالثانية	معدل السرعة $\frac{\Delta d}{\Delta t}$
0.4	
0.1	
0.05	
0.01	
0.001	
0.0001	

c ما الذي تلاحظه بالنسبة إلى معدل السرعة عندما تقترب h كثيرًا من الصفر؟

d ما تقريبًا سرعة الصخرة عند $t = 2$؟

5 التقرير: ضع تقريرًا مفصّلًا بيّن النتائج التي حصلت عليها مشيرًا إلى المعطيات من دروس الوحدة التي استفدت منها. دعّم تقريرك بملصق أو بعرض على جهاز العرض.

دروس الوحدة

النهايات	نهايات تشتمل على ∞ ، $-\infty$	صيغ غير معينة	نهايات بعض الدوال المثلثية	الاتصال	نظريات الاتصال	الاتصال على فترة
1–1	1–2	1–3	1–4	1–5	1–6	1–7

10

ونكتب:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-4)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x-4} = -\frac{2}{3}$$

بعد ذلك تتطرق الوحدة إلى مفهوم الاتصال وهو مفهوم يأتي متداخلًا مع مفهوم النهايات ولكن لتنظيم الأفكار ومنع الكثير من التكرار في دراسة الموضوعين اعتمد هذا الترتيب. ونسجل هنا أن للرياضي «كوشي» الفضل في الإجابة عن الكثير من المسائل المتعلقة بالنهايات والاتصال.

مشروع الوحدة

ماذا سيتعلم الطلاب؟

ولماذا؟

سيتعرف الطلاب في هذه الوحدة النهايات وخصائصها، ومن ثم سيتفهمون نقاط الاتصال والانفصال والدوال المتصلة وتطبيقاتها الحياتية.

اسأل الطلّاب إذا كانوا قد شاهدوا سقوط أجسام مختلفة الأحجام والأوزان وذلك من ارتفاعات متعددة. ناقش معهم توقعاتهم لسرعة صخرة كبيرة أو حجر صغير أو ريشة أثناء السقوط وذلك في أوقات متفاوتة.

الوحدة الأولى

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- رسمت بيان الدالة التربيعية.
- رسمت بيانات دوال القوى.
- وصفت منحنيات كثيرات الحدود.
- أوجدت أصفار دالة كثيرة الحدود.
- تعلمت الكثير من المتطابقات المثلثية.
- رسمت بيانات بعض الدوال.

ماذا سوف تتعلم؟

- تعرف مفهوم نهاية دالة عند نقطة.
- حساب نهايات بعض الدوال.
- استخدام نظريات النهايات.
- إلغاء العامل الصفري (صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$).
- نهايات تشمل على ∞، $-\infty$.
- صيغ غير معينة.
- نهايات بعض الدوال المثلثية.
- نظرية الإحاطة.
- استخدام نظرية الإحاطة لإيجاد بعض النهايات.
- تعرف اتصال دالة عند نقطة ودراسة الاتصال.
- تعرف بعض نظريات الاتصال الأساسية.
- بحث اتصال دالة ناتجة من تركيب دالتين.
- فهم معنى دالة متصلة على فترة.
- تعرف اتصال دالة على فترة.

المصطلحات الأساسية

نهاية دالة عند نقطة – النهاية من الجهتين – النهاية من جهة واحدة – العامل الصفري – صيغ غير معينة – نظرية الإحاطة – خط مقارب (محاذي) رأسي – خط مقارب (محاذي) أفقي – اللانهاية– اتصال دالة عند نقطة – نقاط الاتصال ونقاط الانفصال – التخلص من الانفصال – دالة مركبة – اتصال دالة على فترة.

أضف إلى معلوماتك

في النصف الثاني من القرن الثامن عشر، كان الباحثون في الرياضيات قد أدركوا أنه بدون أسس منطقية، سيكون حساب التكامل والتفاضل محدودًا. طوّر أوغوستين لويس كوشي (Augustin–Louis Cauchy) نظرية في النهايات، فألغى معظم الشكوك حول صحة منطق حساب التكامل والتفاضل.

وصف المؤرخ هوارد إيف (Howard Eves) كوشي بأنه إضافة إلى كونه عالمًا رياضيًا من الطراز الأوّل قدم الكثير لعالم الرياضيات فقد كان أيضًا محاميًا (مارس المهنة لمدة أربعة عشر عامًا)، ومتسلق جبال، ورسام (استخدم الألوان المائية)، ومن صفات كوشي التي ميزته عن معاصريه احترامه للبيئة ودفاعه عنها.

أوغوستين لويس كوشي (Augustin–Louis Cauchy)

11

إجابات «أسئلة حول التطبيق»

(a) $\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{4.9(2)^2 - 4.9(0)^2}{2-0} = 9.8 \text{ m/s}$

(b)

مدة الفترة الزمنية h بالثانية	معدل السرعة $\frac{\Delta d}{\Delta t}$
0.4	21.56
0.1	20.09
0.05	19.845
0.01	19.649
0.001	19.6049
0.0001	19.60049

(c) يقترب معدل السرعة من 19.6

(d) 19.6 m/s

سلّم التقييم

4	الحسابات صحيحة بكاملها – الجدول واضح ويبرز النتائج – التوقعات معقولة – التقرير مفصل ودقيق.
3	معظم الحسابات صحيحة مع أخطاء قليلة – الجدول واضح مع بعض الأخطاء – التوقعات معقولة بأغلبيتها – التقرير مفصل.
2	يوجد أخطاء متعدّدة في الحسابات – الجدول غير واضح وفيه أخطاء متنوّعة – التقرير غير مفصّل وفيه نواقص.
1	معظم عناصر المشروع غير كاملة أو ناقصة.

1–1: النهايات

1 الأهداف

- يتعرف جوار العدد.
- يتعرف النهاية عند نقطة.
- يحسب النهايات من التمثيلات البيانية.
- يستخدم النظريات لحساب بعض النهايات.
- يبسط النهاية من جهة واحدة فقط ومن الجهتين.
- يبسط الصيغة غير المعينة $\frac{0}{0}$.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

جوار – المعيار – جوار ناقص – النهاية من جهة واحدة – النهاية من الجهتين – صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(a) ما هما طرفا الفترات المفتوحة التالية:

$(10,28)$, $(-5,9)$, $(-4,-2)$

(b) أوجد العددين في منتصف المسافة للفترات المفتوحة التالية:

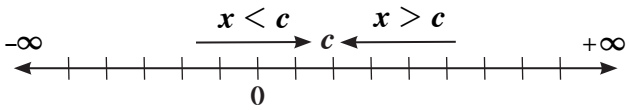
$(-2,2)$, $(13,10^2)$, $(-4,5)$

(c) أوجد بعد كلّ من طرفي الفترة عن العدد في منتصفها كما ورد في السؤال (b).

5 التدريس

يمكن اعتماد عدة طرق منها العددية ومنها الحسية لفهم مبدأ النهاية.

مثال عددي: يمكن استخدام خط الأعداد فنثبت العدد c على الخط ونقرّب منه العدد x من الجهتين: من اليمين إلى اليسار يقترب x من c $(x > c)$ ومن اليسار إلى اليمين يقترب x من c $(x < c)$.



1–1

النهايات

Limits

سوف تتعلم
- النهاية عند النقطة.
- حساب النهايات من التمثيلات البيانية.
- حساب النهايات باستخدام النظريات.
- النهاية من جهة واحدة فقط أو من الجهتين.
- صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$.

المفردات والمصطلحات:
- جوار Neighbourhood
- المعيار Norm
- جوار ناقص Punctured Neighbourhood
- النهاية من جهة واحدة One–Sided Limit
- النهاية من الجهتين Two–Sided Limits
- صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$ Indeterminate Form

عمل تعاوني

أوّلًا: أكمل الجدول التالي كما في 1 :

	الفترة المفتوحة	العدد في منتصف الفترة	التمثيل على خط الأعداد	صورة أخرى للفترة المفتوحة	بُعد العدد عن طرفي الفترة
1	$(3,5)$	4		$(4-1,4+1)$	1
2	$\left(\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$				
3	$\left(1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{4}\right)$				
4	$(0,1)$				
5	$(2.9, 3.1)$				
6	$(6.8, 7.2)$				

ثانيًا: اكتب الفترة المفتوحة التي يبعد طرفاها بمقدار $\frac{1}{5}$ عن العدد الحقيقي 3.

ثالثًا: اكتب فترة مفتوحة يبعد طرفاها بمقدار a عن العدد الحقيقي c.

من العمل التعاوني السابق، الفترة المفتوحة $(c-a , c+a)$ تسمّى جوارًا للعدد c وفقًا للمعيار a حيث $a > 0$.

فمثلًا، الفترة المفتوحة $(3, 5)$ هي جوار للعدد 4 وفقًا للمعيار 1.

والفترة $\left(1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{4}\right)$ هي جوار للعدد 2 وفقًا للمعيار $\frac{1}{4}$.

وكذلك الفترة $\left(1\frac{99}{100}, 2\frac{1}{100}\right)$ هي جوار للعدد 2 وفقًا للمعيار $\frac{1}{100}$.

وعليه يمكننا تحديد جوار لأي عدد باختيارنا معيارًا مناسبًا.

إذا كانت لدينا دالة معرفة على فترة مفتوحة I من الأعداد الحقيقية وتحوي العدد c فإننا نقول إن هذه الدالة معرّفة في جوار للعدد c (أي I تحوي جوارًا للعدد c).

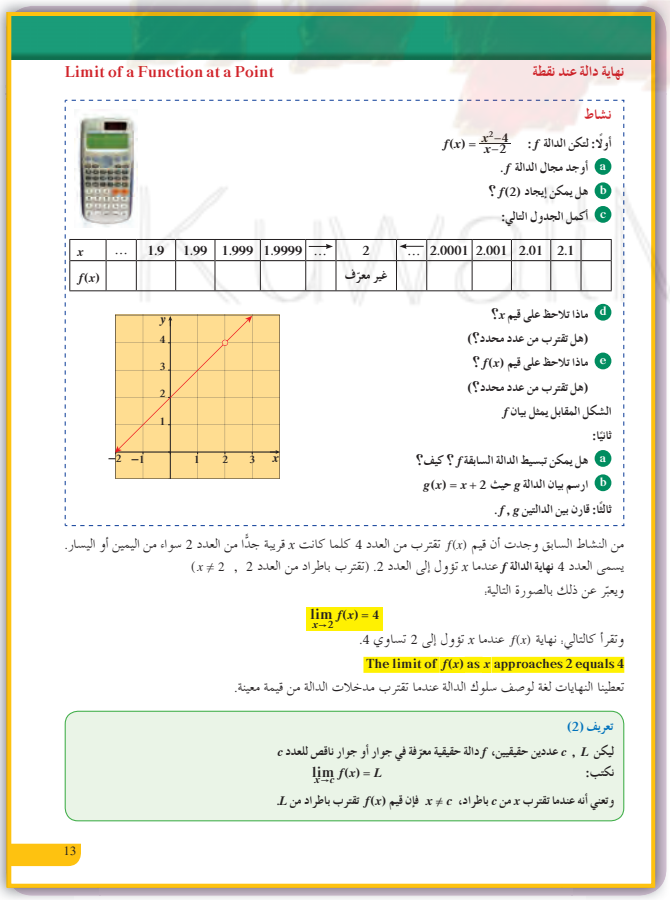
أما إذا كانت الدالة معرفة عند جميع عناصر الفترة I ولكنها غير معرفة عند العدد c نفسه فإن الدالة تكون معرّفة في جوار ناقص للعدد c.

تعريف (1)

لتكن x كمية متغيرة، c عددًا حقيقيًا.

نقول إن x تقترب من c باطراد إذا كان بالإمكان جعل الكمية $|x-c|$ أصغر من أي عدد حقيقي موجب.

12



نهاية دالة عند نقطة

Limit of a Function at a Point

نشاط

أولًا: لتكن الدالة f: $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

a أوجد مجال الدالة f.

b هل يمكن إيجاد $f(2)$؟

c أكمل الجدول التالي:

x	...	1.9	1.99	1.999	1.9999	...	2	...	2.0001	2.001	2.01	2.1	
$f(x)$							غير معرّف						

d ماذا تلاحظ على قيم x؟ (هل تقترب من عدد محدد؟)

e ماذا تلاحظ على قيم $f(x)$؟ (هل تقترب من عدد محدد؟)

الشكل المقابل يمثل بيان f

ثانيًا:

a هل يمكن تبسيط الدالة السابقة f؟ كيف؟

b ارسم بيان الدالة g حيث $g(x) = x + 2$

ثالثًا: قارن بين الدالتين f, g.

من النشاط السابق وجدت أن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 4 كلما كانت x قريبة جدًّا من العدد 2 سواء من اليمين أو اليسار.

يسمى العدد 4 نهاية الدالة f عندما x تؤول إلى العدد 2. (تقترب باطراد من العدد 2 , $x \neq 2$)

ويعبّر عن ذلك بالصورة التالية:

$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$

وتقرأ كالتالي: نهاية $f(x)$ عندما x تؤول إلى 2 تساوي 4.

The limit of $f(x)$ as x approaches 2 equals 4

تعطينا النهايات لغة لوصف سلوك الدالة عندما تقترب مدخلات الدالة من قيمة معينة.

تعريف (2)

ليكن L , c عددين حقيقيين، f دالة حقيقية معرّفة في جوار أو جوار ناقص للعدد c

نكتب: $\lim_{x \to c} f(x) = L$

وتعني أنه عندما تقترب x من c باطراد، $x \neq c$ فإن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L.

13

كلما اقترب x من c كلما صغرت المسافة بينهما. لنصل إلى أصغر قيمة موجبة قريبة جدًّا من الصفر أو تساويه.

مثال حسّي: بإمكان طالب أن يقف في مكان ثابت في غرفة الصف ونطلب من زميلين له أن يدنوا منه على نفس الخط ولكن كل منهما من جهة بحيث يصبحان قريبين منه إلى أدنى مسافة ممكنة.

أمّا فيما يتعلق بنهاية دالة ما f عند العدد المحدد c. فنحن نقيس ردة فعل هذه الدالة f عند اقتراب المتغير x من العدد c، بحيث يكون $|c-x|$ عددًا موجبًا صغيرًا جدًّا، وردة الفعل يعبّر عنها بالرمز L الذي يمكن أن يكون عددًا حقيقيًّا أو غير موجود. إذا تساوت النهايات من جهتي العدد c فيكون للدالة نهاية.

في المثال (1) وفي التدريب (1)

أكّد للطلاب كيفية حساب النهايات: بملاحظة التمثيل البياني للدالة يتم حساب النهايات كالتالي: نوجد النهاية إلى يسار c أي (c^-) وإلى يمين c أي (c^+) عندما تتساوى النهايتان يكون للدالة نهاية عند العدد c.

في المثالين (3) ,(2)

يتمكن الطالب من تطبيق قواعد حساب النهايات في حالات جمع، طرح، ضرب، قسمة الدوال. وأيضًا في حالة ضرب الدوال في ثابت ممّا يسهل عملية إيجاد النهايات.

في المثالين (5) ,(4)

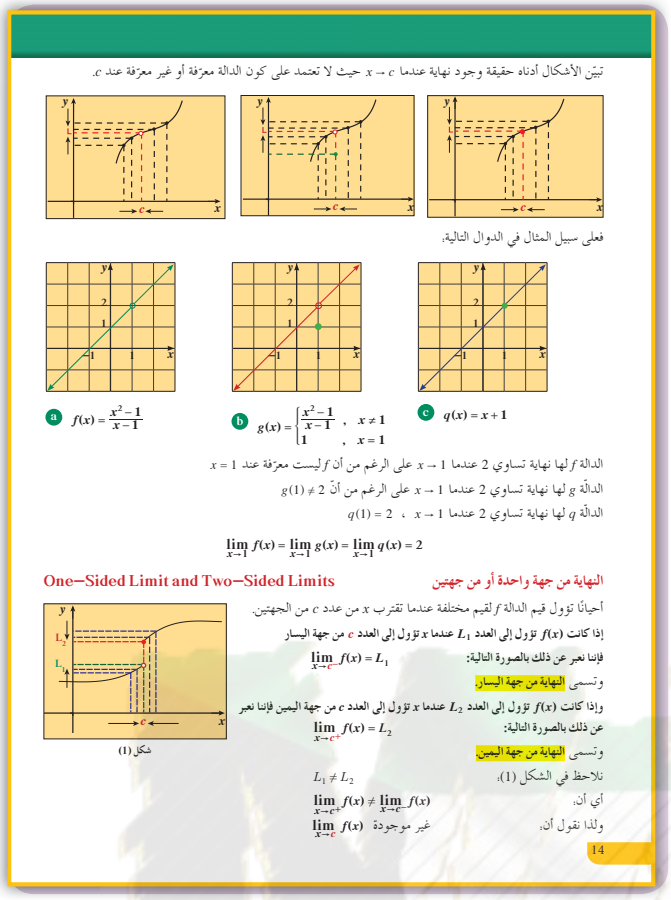
يوجد الطالب النهاية من جهة اليمين ومن جهة اليسار ليتحقق من وجود النهاية عند نقطة لدوال معرفة بأكثر من قاعدة.

في التدريب (2) وفي المثال (6)

تستخدم إعادة تعريف القيمة المطلقة لإيجاد النهايات في جوار العدد المحدد.

في المثال (7)

تستخدم نظرية (6) في إيجاد نهاية دوال تحتوي على أسس أو جذور.



تبيّن الأشكال أدناه حقيقة وجود نهاية عندما $x \to c$ حيث لا تعتمد على كون الدالة معرّفة أو غير معرّفة عند c.

فعلى سبيل المثال في الدوال التالية:

a $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ b $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & , x \neq 1 \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$ c $q(x) = x+1$

الدالة f لها نهاية تساوي 2 عندما $x \to 1$ على الرغم من أن f ليست معرّفة عند $x = 1$

الدالة g لها نهاية تساوي 2 عندما $x \to 1$ على الرغم من أنّ $g(1) \neq 2$

الدالة q لها نهاية تساوي 2 عندما $x \to 1$ ، $q(1) = 2$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} q(x) = 2$$

النهاية من جهة واحدة أو من جهتين **One–Sided Limit and Two–Sided Limits**

أحيانًا تؤول قيم الدالة f لقيم مختلفة عندما تقترب x من عدد c من الجهتين.

إذا كانت $f(x)$ تؤول إلى العدد L_1 عندما x تؤول إلى العدد c من جهة اليسار

فإننا نعبر عن ذلك بالصورة التالية: $\lim_{x\to c^-} f(x) = L_1$

وتسمى النهاية من جهة اليسار.

وإذا كانت $f(x)$ تؤول إلى العدد L_2 عندما x تؤول إلى العدد c من جهة اليمين فإننا نعبر عن ذلك بالصورة التالية: $\lim_{x\to c^+} f(x) = L_2$

وتسمى النهاية من جهة اليمين.

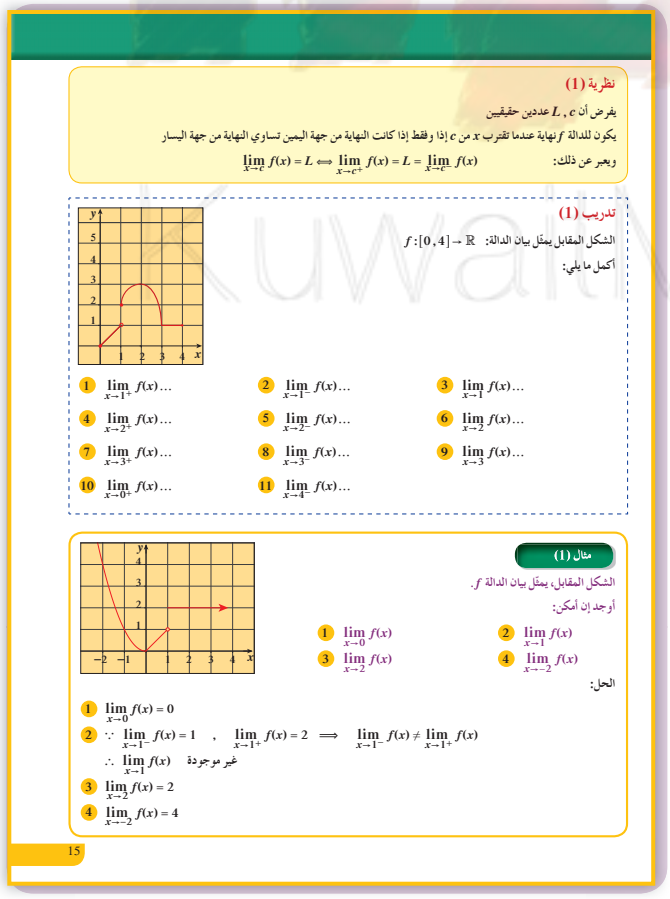
نلاحظ في الشكل (1): $L_1 \neq L_2$

أي أن: $\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x)$

ولذا نقول أن: $\lim_{x\to c} f(x)$ غير موجودة

شكل (1)

14



نظرية (1)

يفرض أن L , c عددين حقيقيين

يكون للدالة f نهاية عندما تقترب x من c إذا وفقط إذا كانت النهاية من جهة اليمين تساوي النهاية من جهة اليسار

ويعبر عن ذلك: $\lim_{x\to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to c^+} f(x) = L = \lim_{x\to c^-} f(x)$

تدريب (1)

الشكل المقابل يمثّل بيان الدالة: $f:[0,4] \to \mathbb{R}$

أكمل ما يلي:

1 $\lim_{x\to 1^+} f(x)$... 2 $\lim_{x\to 1^-} f(x)$... 3 $\lim_{x\to 1} f(x)$...

4 $\lim_{x\to 2^+} f(x)$... 5 $\lim_{x\to 2^-} f(x)$... 6 $\lim_{x\to 2} f(x)$...

7 $\lim_{x\to 3^+} f(x)$... 8 $\lim_{x\to 3^-} f(x)$... 9 $\lim_{x\to 3} f(x)$...

10 $\lim_{x\to 0^+} f(x)$... 11 $\lim_{x\to 4^-} f(x)$...

مثال (1)

الشكل المقابل يمثّل بيان الدالة f.

أوجد إن أمكن:

1 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 2 $\lim_{x\to 1} f(x)$

3 $\lim_{x\to 2} f(x)$ 4 $\lim_{x\to -2} f(x)$

الحل:

1 $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

2 $\because \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2 \implies \lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة

3 $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$

4 $\lim_{x\to -2} f(x) = 4$

15

في الأمثلة (10), (9), (8)

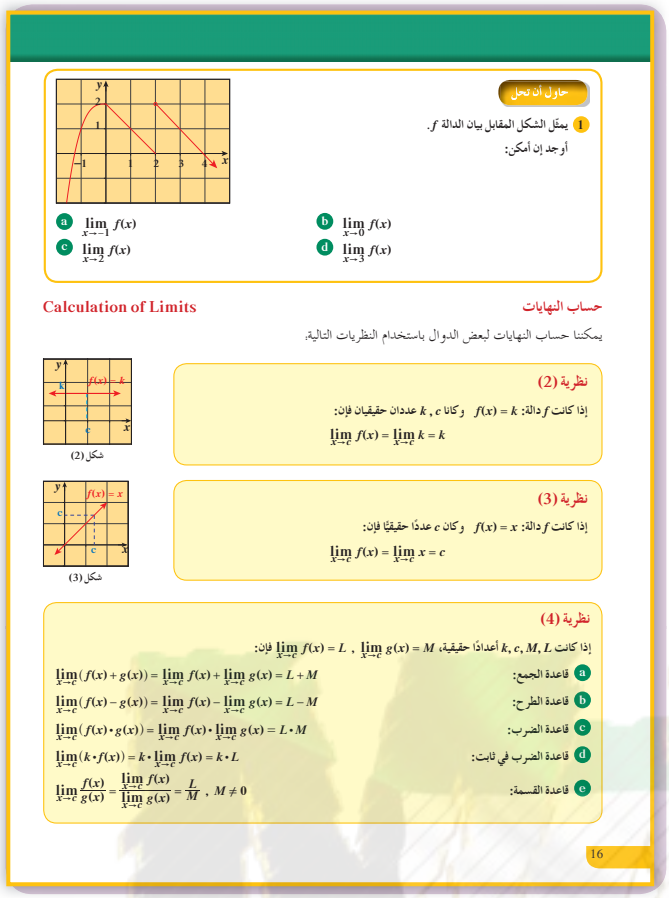
يستخدم التحليل أو مرافق العدد أو قسمة كثيرات الحدود لإلغاء العامل الصفري في المقام لإيجاد نهايات الدوال.

6 الربط

يقدّر الباحثون عدد الحيوانات المهددة بالانقراض باستخدام علاقات وضعوها من خلال مراقباتهم.
ويستخدمون النهايات لتوقع عدد هذه الحيوانات في الأمد البعيد.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

في حساب النهايات وخاصة في حالات القيمة المطلقة ودوال الحدودية النسبية يجب التبسيط قبل التعويض في حالة الصيغ غير المعيّنة، كذلك الأمر في حالات الأسس ولكن يجب الانتباه إلى طبيعة الأس وما إذا كان فردي أو زوجي.



حاول أن تحل

1 يمثّل الشكل المقابل بيان الدالة f.
أوجد إن أمكن:

a $\lim_{x\to -1} f(x)$ b $\lim_{x\to 0} f(x)$
c $\lim_{x\to 2} f(x)$ d $\lim_{x\to 3} f(x)$

حساب النهايات — Calculation of Limits

يمكننا حساب النهايات لبعض الدوال باستخدام النظريات التالية.

نظرية (2)
إذا كانت f دالة: $f(x) = k$ وكانا k, c عددان حقيقيان فإن:
$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} k = k$

شكل (2)

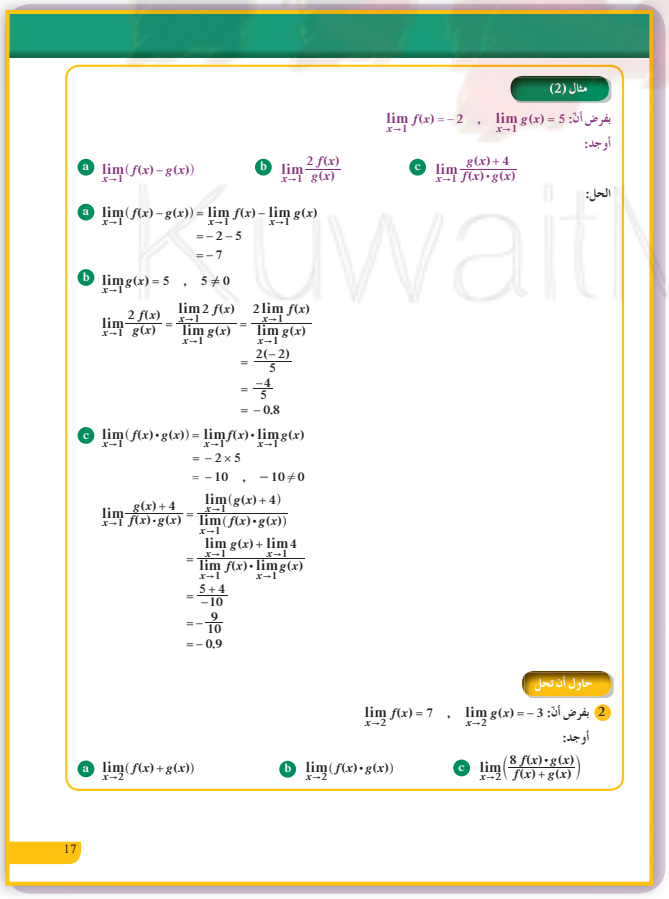
نظرية (3)
إذا كانت f دالة: $f(x) = x$ وكان c عددًا حقيقيًا فإن:
$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} x = c$

شكل (3)

نظرية (4)
إذا كانت k, c, M, L أعدادًا حقيقية، $\lim_{x\to c} g(x) = M$ ، $\lim_{x\to c} f(x) = L$ فإن:

a قاعدة الجمع: $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L+M$
b قاعدة الطرح: $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L-M$
c قاعدة الضرب: $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to c} f(x)\cdot \lim_{x\to c} g(x) = L\cdot M$
d قاعدة الضرب في ثابت: $\lim_{x\to c}(k\cdot f(x)) = k\cdot \lim_{x\to c} f(x) = k\cdot L$
e قاعدة القسمة: $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \frac{L}{M}$ ، $M \neq 0$

16



مثال (2)

بفرض أنّ: $\lim_{x\to 1} g(x) = 5$ ، $\lim_{x\to 1} f(x) = -2$
أوجد:

a $\lim_{x\to 1}(f(x)-g(x))$ b $\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)}{g(x)}$ c $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)+4}{f(x)\cdot g(x)}$

الحل:

a $\lim_{x\to 1}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to 1} f(x) - \lim_{x\to 1} g(x)$
$= -2-5$
$= -7$

b $\lim_{x\to 1} g(x) = 5$ ، $5 \neq 0$
$\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to 1} 2f(x)}{\lim_{x\to 1} g(x)} = \frac{2\lim_{x\to 1} f(x)}{\lim_{x\to 1} g(x)}$
$= \frac{2(-2)}{5}$
$= \frac{-4}{5}$
$= -0.8$

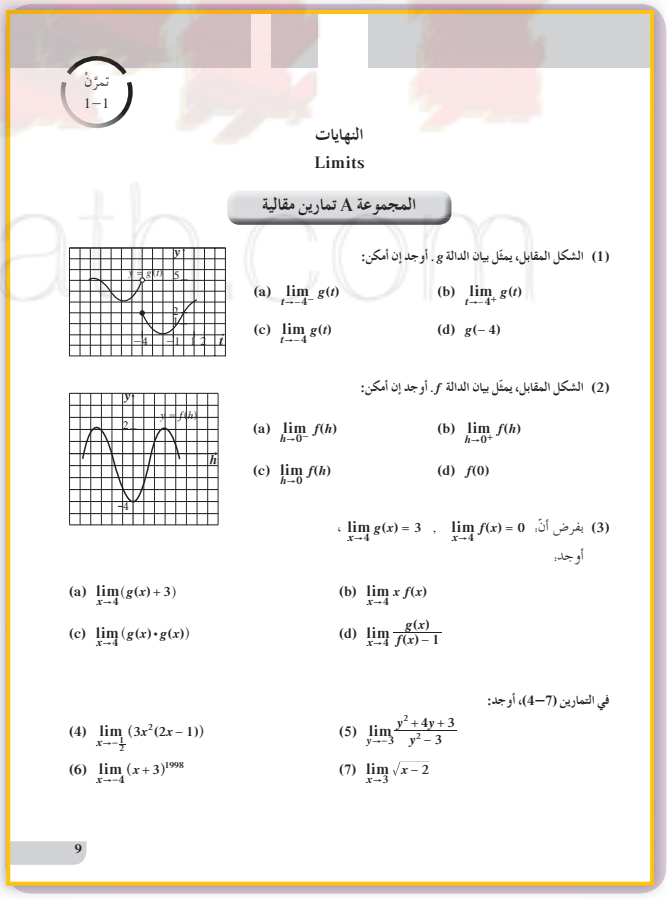
c $\lim_{x\to 1}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to 1} f(x)\cdot \lim_{x\to 1} g(x)$
$= -2\times 5$
$= -10$ ، $-10 \neq 0$
$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)+4}{f(x)\cdot g(x)} = \frac{\lim_{x\to 1}(g(x)+4)}{\lim_{x\to 1}(f(x)\cdot g(x))}$
$= \frac{\lim_{x\to 1} g(x) + \lim_{x\to 1} 4}{\lim_{x\to 1} f(x)\cdot \lim_{x\to 1} g(x)}$
$= \frac{5+4}{-10}$
$= -\frac{9}{10}$
$= -0.9$

حاول أن تحل

2 بفرض أنّ: $\lim_{x\to 2} g(x) = -3$ ، $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$
أوجد:

a $\lim_{x\to 2}(f(x)+g(x))$ b $\lim_{x\to 2}(f(x)\cdot g(x))$ c $\lim_{x\to 2}\left(\frac{8f(x)\cdot g(x)}{f(x)+g(x)}\right)$

17



تمرّن 1-1

النهايات
Limits

المجموعة A تمارين مقالية

(1) الشكل المقابل، يمثّل بيان الدالة g. أوجد إن أمكن:

(a) $\lim_{t\to -4^-} g(t)$ (b) $\lim_{t\to -4^+} g(t)$
(c) $\lim_{t\to -4} g(t)$ (d) $g(-4)$

(2) الشكل المقابل، يمثّل بيان الدالة f. أوجد إن أمكن:

(a) $\lim_{h\to 0^-} f(h)$ (b) $\lim_{h\to 0^+} f(h)$
(c) $\lim_{h\to 0} f(h)$ (d) $f(0)$

(3) بفرض أنّ: $\lim_{x\to 4} f(x) = 0$ ، $\lim_{x\to 4} g(x) = 3$ ،
أوجد:

(a) $\lim_{x\to 4}(g(x)+3)$ (b) $\lim_{x\to 4} x\,f(x)$
(c) $\lim_{x\to 4}(g(x)\cdot g(x))$ (d) $\lim_{x\to 4}\frac{g(x)}{f(x)-1}$

في التمارين (7–4)، أوجد:

(4) $\lim_{x\to -\frac{1}{2}}(3x^2(2x-1))$ (5) $\lim_{y\to -3}\frac{y^2+4y+3}{y^2-3}$
(6) $\lim_{x\to -4}(x+3)^{1998}$ (7) $\lim_{x\to 3}\sqrt{x-2}$

9

8 التقييم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل»، وتحقق من مدى إدراكهم لمفاهيم هذا الدرس ونظرياته.

اختبار سريع

أوجد النهايات الآتية:

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$ $\quad \dfrac{1}{5}$

(b) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ $\quad 6$

(c) $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x-2|x+1|}{x+2}$ $\quad -1$

(d) $\lim\limits_{x\to 3} f(x),\ f(x)=\begin{cases} 2(x+1) & , \ x<3 \\ 4 & , \ x=3 \\ x^2-1 & , \ x>3 \end{cases}$ $\quad 8$

نظريات حساب النهايات صحيحة عند حساب النهاية من جهة واحدة.

مثال (4)

إذا كانت الدالة f:
$$f(x)=\begin{cases} 3x+2 & x<1 \\ 5 & x=1 \\ \frac{5}{x} & x>1 \end{cases}$$
فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

الحل:

النهاية من جهة اليسار
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(3x+2)=3(1)+2=5$$

النهاية من جهة اليمين
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{5}{x}=\frac{5}{1}=5$$

(يمكن التحقق من أن نهاية المقام $\neq 0$)
$$\because \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=5$$
$$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)=5$$

حاول أن تحل

4 إذا كانت الدالة f:
$$f(x)=\begin{cases} x^2-3 & : x<2 \\ x-1 & : x>2 \end{cases}$$
فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

مثال (5)

إذا كانت الدالة g:
$$g(x)=\begin{cases} x^2-2 & x\leq 0 \\ 1-2x & x>0 \end{cases}$$
فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

الحل:

النهاية من جهة اليسار
$$\lim_{x\to 0^-} g(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2-2)=-2$$

النهاية من جهة اليمين
$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}(1-2x)=1$$
$$\because \lim_{x\to 0^+} g(x)\neq \lim_{x\to 0^-} g(x)$$
$$\therefore \lim_{x\to 0} g(x) \text{ غير موجودة}$$

حاول أن تحل

5 إذا كانت الدالة g:
$$g(x)=\begin{cases} x^3+x & x>1 \\ \frac{x}{x^2+1} & x\leq 1 \end{cases}$$
فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

19

نظرية (5): دوال كثيرات الحدود ودوال الحدوديات النسبية

Polynomial and Rational Functions

a إذا كانت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ دالة كثيرة الحدود، c عددًا حقيقيًا، فإنّ:
$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c)=a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}+\ldots+a_0$$

b إذا كانت $f(x), g(x)$ كثيرتي حدود، c عددًا حقيقيًا، فإنّ:
$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(c)}{g(c)}\ ,\ g(c)\neq 0$$

ملاحظة: يمكن تطبيق نظرية a على الدوال التي على الصورة $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ ومجالها مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$

مثال (3)

أوجد:

a $\lim\limits_{x\to -1}(x^4-2x^3+5)$ b $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x+4}{x+2}$ c $\lim\limits_{x\to 3}(x^2(2-x))$

الحل:

a نظرية (5)
$$\lim_{x\to -1}(x^4-2x^3+5)=(-1)^4-2(-1)^3+5$$
$$=1+2+5$$
$$=8$$

b تحقق من أن المقام $\neq 0$
$$g(x)=x+2$$
أي أن المقام $\neq$ صفر
$$g(2)=2+2=4\ ,\ 4\neq 0$$
نظرية(5)
$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}=\frac{(2)^2+2(2)+4}{2+2}$$
$$=\frac{4+4+4}{4}$$
$$=\frac{12}{4}$$
$$=3$$

c نظرية
$$\lim_{x\to 3}(x^2(2-x))=\lim_{x\to 3}(2x^2-x^3)$$
$$=2(3)^2-(3)^3$$
$$=18-27$$
$$=-9$$

حاول أن تحل

3 a هل يمكن حل c في المثال (3) بطريقة أخرى؟

b أوجد:

1 $\lim\limits_{x\to 1}(x^3+3x^2-2x-17)$ 2 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x+6}{x+2}$

18

---

(8) لتكن الدالة f:
$$f(x)=\begin{cases} 3-x, & x<2 \\ 2, & x=2 \\ \frac{x}{2}, & x>2 \end{cases}$$
أوجد: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

(9) لتكن الدالة f:
$$f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{1-x^2}, & 0\leq x<1 \\ 1, & 1\leq x<2 \\ 2, & x=2 \end{cases}$$
أوجد إن أمكن:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

(10) لتكن الدالة f:
$$f(x)=\begin{cases} -x^2+4, & -1\leq x<1 \\ 2, & 1\leq x<2 \\ x, & 2\leq x<4 \end{cases}$$
أوجد إن أمكن:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

في التمارين (11–16)، أوجد:

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(4+x)^2-16}{x}$ (12) $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t^2-3t+2}{t^2-4}$

(13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3+x)^3-27}{x}$ (14) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{|x+2|}{x^2+3x+2}$

(15) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-4x+3}$ (16) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{\sqrt[3]{9x+3}}$

في التمارين (17–19)، أوجد النهايات التالية:

(17) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-3x^2-7x+6}{x+2}$

(18) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-7x^2-18}{x-3}$

(19) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^3-5x^2-12}{x-2}$

10

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

أوّلًا:

	الفترة المفتوحة	العدد في منتصف الفترة	التمثيل على خط الأعداد	صورة أخرى للفترة المفتوحة	بعد العدد عن طرفي الفترة
1	$(3, 5)$	4	1 1 / 3 4 5	$(4-1, 4+1)$	1
2	$\left(\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$	1	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ / $\frac{1}{2}$ 1 $1\frac{1}{2}$	$\left(1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$
3	$\left(1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{4}\right)$	2	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ / $1\frac{3}{4}$ 2 $2\frac{1}{4}$	$\left(2-\frac{1}{4}, 2+\frac{1}{4}\right)$	$\frac{1}{4}$
4	$(0, 1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ / 0 $\frac{1}{2}$ 1	$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$
5	$(2.9, 3.1)$	3	0.1 0.1 / 2.9 3 3.1	$(3-0.1, 3+0.1)$	0.1
6	$(6.8, 7.2)$	7	0.2 0.2 / 6.8 7 7.2	$(7-0.2, 7+0.2)$	0.2

ثانيًا: $\left(2\frac{4}{5}, 3\frac{1}{5}\right)$

ثالثًا: $(c-a, c+a)$

«حاول أن تحل»

1 (a) 1 (b) 2

(c) غير موجودة (d) 1

2 (a) 4 (b) -21 (c) -42

3 (a) $\left(\lim\limits_{x\to 3} x^2\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to 3}(2-x)\right) = 9\times(2-3) = -9$

(b) (1) -15 (2) 5

4 $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$

تذكر:

$$|x-a| = \begin{cases} x-a : x \geqslant a \\ -x+a : x < a \end{cases}$$

تدريب (2)

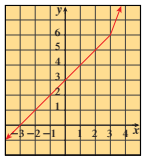
لتكن $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ حيث $x \neq 1$

a اكتب $f(x)$ بدون استخدام رمز القيمة المطلقة. (بإعادة تعريف المطلق)

b أوجد $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

c هل للدالة f نهاية عندما $x \to 1$؟ فسّر.

مثال (6)



لتكن: $f(x) = |x-3| + 2x$ الممثلة بالشكل.

a اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

b أوجد $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

c هل للدالة f نهاية عندما $x \to 3$؟

الحل:

a $f(x) = \begin{cases} x-3+2x & x \geqslant 3 \\ -x+3+2x & x < 3 \end{cases}$

$= \begin{cases} 3x-3 & x \geqslant 3 \\ x+3 & x < 3 \end{cases}$

b $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}(3x-3) = 3(3)-3 = 6$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}(x+3) = 3+3 = 6$

c $\because \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 6$

$\therefore \lim\limits_{x\to 3} f(x) = 6$

$\therefore$ للدالة f نهاية عندما $x \to 3$ وهذه النهاية تساوي 6.

حاول أن تحل

6 لتكن f : $f(x) = x^2 - |x+2|$

a اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

b أوجد: $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$

c هل للدالة f نهاية عندما $x \to -2$؟

الربط بالحياة:

يقدّر الباحثون عدد الحيوانات المهددة بالانقراض باستخدام علاقات وضعوها من خلال مراقباتهم ويستخدمون النهايات لتوقع عدد هذه الحيوانات في الأمد البعيد.

قاعدة القوة

تعلمت مما سبق أن

$$\lim_{x\to 2}(x+1) = 2+1 = 3$$

$$\lim_{x\to 2}(x+1)^2 = \lim_{x\to 2}((x+1)\cdot(x+1))$$
$$= \lim_{x\to 2}(x+1)\cdot\lim_{x\to 2}(x+1) = (3)^2$$
$$\lim_{x\to 2}(x+1)^3 = \lim_{x\to 2}((x+1)^2(x+1))$$
$$= \lim_{x\to 2}(x+1)^2\cdot\lim_{x\to 2}(x+1) = (3)^2\cdot 3 = 3^3$$

وبالمثل يمكن إيجاد قيمة $\lim\limits_{x\to 2}(x+1)^n$ حيث n عددًا صحيحًا موجبًا وهي تساوي $(3)^n$.

نظرية (6)

بفرض أن $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ موجودة وكانت n عددًا صحيحًا موجبًا فإن:

a $\lim\limits_{x\to c}(f(x))^n = \left(\lim\limits_{x\to c} f(x)\right)^n$

b $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$ (في حالة n عددًا زوجيًا يشترط أن يكون $c > 0$)

c $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$ (في حالة n عددًا زوجيًا يشترط أن تكون $\lim\limits_{x\to c} f(x) > 0$)

ملاحظة: سنكتفي بدراسة حالات الجذور التربيعية والتكعيبية للدوال فقط.

مثال (7)

أوجد:

a $\lim\limits_{x\to -1}(x^2-3x-1)^5$ b $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{x-3}$ c $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x^2-2}}{x-2}$

الحل:

a $\lim\limits_{x\to -1}(x^2-3x-1)^5 = \left(\lim\limits_{x\to -1}(x^2-3x-1)\right)^5 = 3^5 = 243$

b $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{x-3} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 2}(x-3)}$

$= \sqrt[3]{2-3} = \sqrt[3]{-1} = -1$

c $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x^2-2}}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to 3}(x-2) = 1$, $1 \neq 0$ تحقّق أن نهاية المقام $\neq 0$

$\lim\limits_{x\to 3}(3x^2-2) = 25$, $25 > 0$ تحقّق أن نهاية ما تحت الجذر > 0

$\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{3x^2-2} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 3}(3x^2-2)} = \sqrt{25} = 5$

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x^2-2}}{x-2} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{3x^2-2}}{\lim\limits_{x\to 3}(x-2)}$

$= \frac{5}{1} = 5$

5 $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = 2$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} g(x)$ غير موجودة

6 (a) $\begin{cases} x^2+x+2 & , \quad x<-2 \\ 4 & , \quad x=-2 \\ x^2-x-2 & , \quad x>-2 \end{cases}$

(b) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 4$

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 4$

(c) نعم توجد نهاية عندما $x \longrightarrow -2$ تساوي 4.

7 (a) $2\sqrt{5}$ (b) 1296 (c) $\frac{-2}{3}$

8 (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{6}{7}$ (c) $\frac{1}{10}$

9 (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\sqrt[3]{3}$ (c) -6

10 (a) 11 (b) -67

«تدريب» (1)

1 2 **2** 1 **3** غير موجودة

4 3 **5** 3 **6** 3

7 1 **8** 1 **9** 1

10 0 **11** 1

«تدريب» (2)

(a) $f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x>1 \\ -1 & : \quad x<1 \end{cases}$

(b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$

(c) لا، لأن $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

حاول أن تحل

7 أوجد:

(a) $\lim\limits_{x\to 5} \sqrt{x^2-5}$ (b) $\lim\limits_{x\to 4} (x+\sqrt{x})^4$ (c) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x^3-4x+5}}{x-2}$

إلغاء العامل الصفري في المقام

Eliminating Zero Factor of the Denominator

إذا كان لدينا دالة نسبية وكانت نهاية مقام هذه الدالة النسبية لا تساوي الصفر عندما $x \to c$ فإننا نطبّق نظرية (4) فرع (c) لإيجاد نهاية هذه الدالة. أما إذا ساوت نهاية المقام الصفر، فإننا نقوم باختصار العامل الصفري المشترك بين البسط والمقام، إن وجد، ثم نستخدم الصيغة المبسطة لإيجاد النهاية.

ملاحظات:

1. عند التعويض المباشر لقيمة x في كل من البسط والمقام وحصلنا على $\frac{0}{0}$ فإنها تسمى **صيغة غير معينة (Indeterminate Form)**.
2. يمكن استخدام التحليل أو القسمة أو الضرب بالمرافق أو غيرها لإيجاد الصيغة المبسطة.

تذكر:

مرافق العدد الجذري هو عدد جذري بحيث يكون ناتج ضرب العددين عددًا نسبيًا.

أمثلة:

- $\sqrt{2}+1$ ، $\sqrt{2}-1$ مترافقان
- $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ مترافقان
- $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ ، $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ مترافقان
- $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ ، $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ مترافقان

مثال (8)

أوجد إن أمكن:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(2+x)^3-8}{x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x^2-1}$

الحل:

(a) عند التعويض المباشر عن x بـ 1 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معيّنة.

$\frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \frac{(\cancel{x-1})(x+2)}{x(\cancel{x-1})}$ $(x-1)$ عامل صفري مشترك بين البسط والمقام.

$= \frac{x+2}{x}$, $x \neq 1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x+2}{x}$ استخدم الصيغة المبسطة

$\because \lim\limits_{x\to 1} x = 1$, $1 \neq 0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} \frac{x+2}{x} = \frac{1+2}{1} = 3$ عوّض عن x بـ 1

تذكر:

إذا كان a صفر للدالة الحدودية $f(x)$ فإن $(x-a)$ عامل من عوامل $f(x)$.

(b) عند التعويض المباشر عن x بـ 0 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معيّنة.

$\frac{(2+x)^3-8}{x} = \frac{(2+x-2)((2+x)^2+2(2+x)+(2)^2)}{x}$

$= \frac{x^1(4+4x+x^2+4+2x+4)}{x^1}$ x عامل صفري مشترك بين البسط والمقام

$= x^2+6x+12$, $x \neq 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{(2+x)^3-8}{x} = \lim\limits_{x\to 0} (x^2+6x+12) = 12$ استخدم الصيغة المبسطة

(c) عند التعويض المباشر عن x بـ 1 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معيّنة.

$\frac{|x-1|}{x^2-1} = \begin{cases} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x+1)} & : \quad x>1 \\ \frac{-\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x+1)} & : \quad x<1 \ , \ x \neq -1 \end{cases}$ اكتب البسط دون استخدام رمز القيمة المطلقة وحلّل المقام إلى عوامل $(x-1)$ عامل صفري مشترك بين البسط والمقام

$= \begin{cases} \frac{1}{x+1} & x>1 \\ \frac{-1}{(x+1)} & x<1 \end{cases}$, $x \neq 1$

لإيجاد $\lim\limits_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x^2-1}$

$\because \lim\limits_{x\to 1^+} (x+1) = 2$, $2 \neq 0$ نتحقق من نهاية المقام $\neq 0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ استخدم الصيغة المبسطة وعوّض عن x بـ 1 (النهاية من جهة اليمين)

$\because \lim\limits_{x\to 1^-} -(x+1) = -(1+1) = -2$, $-2 \neq 0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{-(x+1)} = \frac{1}{-(1+1)} = -\frac{1}{2}$ استخدم الصيغة المبسطة وعوّض عن x بـ 1 (النهاية من جهة اليسار)

$\because \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{|x-1|}{x^2-1} \neq \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{|x-1|}{x^2-1}$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x^2-1}$ غير موجودة

تذكر:

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

حاول أن تحل

8 أوجد إن أمكن:

(a) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+3x+2}{x^2-4}$ (b) $\lim\limits_{x\to -7} \frac{(x+4)^2-9}{x^2+7x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{|x+2|-7}{x^2-25}$

«نشاط»

أوّلًا: (a) $(-\infty,2)\cup(2,\infty)$

(b) لا، لأن f غير معرّفة عند $x = 2$.

(c)

x	…	1.9	1.99	1.999	1.9999	→ …
$f(x)$	…	3.9	3.99	3.999	3.9999	

x	2	← …	2.0001	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	غير معرّف		4.0001	4.001	4.01	4.1

(d) تقترب قيم x من 2 من الجهتين.

(e) تقترب قيم $f(x)$ من 4

مثال (9)

أوجد:

a $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$ b $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ c $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt[3]{x}+2}$

الحل:

a $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$

عند التعويض المباشر عن x بـ 2 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معيّنة.

اضرب البسط والمقام في مرافق البسط

$$\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}=\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}\times\frac{\sqrt{2x-3}+1}{\sqrt{2x-3}+1}$$

$$=\frac{2x-3-1}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}$$

$(\sqrt{a}-b)(\sqrt{a}+b)=a-b^2$

$(x-2)$ عامل مشترك بين البسط والمقام

$$=\frac{2(\cancel{x-2})}{(\cancel{x-2})(\sqrt{2x-3}+1)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2x-3}+1}\quad,\quad x\neq 2$$

تحقّق أن نهاية ما تحت الجذر أكبر من 0

$$\lim_{x\to 2}(2x-3)=1\ ;\ 1>0$$

$$\lim_{x\to 2}(\sqrt{2x-3}+1)=\lim_{x\to 2}\sqrt{2x-3}+\lim_{x\to 2}1$$

تحقّق من أن نهاية المقام $\neq 0$

$$=\sqrt{\lim_{x\to 2}(2x-3)}+1=1+1=2\quad,\quad 2\neq 0$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x-3}+1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2}{\sqrt{2x-3}+1}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 2}2}{\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{2x-3}+1)}=\frac{2}{2}=1$$

b $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

عند التعويض المباشر عن x بـ 1 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معيّنة.

حلّل البسط: الفرق بين مكعبين

$$\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{(\cancel{\sqrt[3]{x}-1})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\cancel{\sqrt[3]{x}-1})}$$

$$=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\quad,\quad x\neq 1$$

استخدم الصيغة المبسطة

$$\therefore\ \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{x\to 1}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)$$

$$=\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{x^2}+\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{x}+\lim_{x\to 1}1$$

$$=\sqrt[3]{\lim_{x\to 1}x^2}+\sqrt[3]{\lim_{x\to 1}x}+1$$

عوّض عن x بـ 1

$$=1+1+1=3$$

معلومة:

$x-a=(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})$

حيث $x\geq 0\ ,\ a\geq 0$

$x-a=(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xa}+\sqrt[3]{a^2})$

$x+a=(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xa}+\sqrt[3]{a^2})$

c $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt[3]{x}+2}$

عند التعويض عن x بـ -2 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معيّنة.

مرافق $\sqrt[3]{a}$ هو $\sqrt[3]{a^2}$

$$\frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x}+2}=\frac{(x^2-4)}{\sqrt[3]{x}+2}\times\frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}$$

$\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{a}=a$

$$=\frac{(x^2-4)\times\sqrt[3]{(x+2)^2}}{x+2}$$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$$=\frac{(\cancel{x+2})(x-2)\sqrt[3]{(x+2)^2}}{(\cancel{x+2})}$$

$$=(x-2)\sqrt[3]{(x+2)^2}\quad,\quad x\neq -2$$

استخدم الصيغة المبسطة

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x}+2}=\lim_{x\to -2}\left((x-2)\sqrt[3]{(x+2)^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to -2}(x-2)\cdot\lim_{x\to -2}\sqrt[3]{(x+2)^2}$$

$$=\lim_{x\to -2}(x-2)\cdot\sqrt[3]{\lim_{x\to -2}(x+2)^2}$$

$$=(-2-2)\cdot\sqrt[3]{(-2+2)^2}$$

$$=(-4)\times(0)=0$$

حاول أن تحل

9 أوجد إن أمكن:

a $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$ b $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x}+1}$ c $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-9}{3-\sqrt{x}}$

مثال (10)

أوجد:

a $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1}$ b $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^5+32}{x+2}$

الحل:

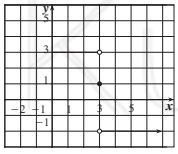
a $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1}$

عند التعويض عن x بـ -1 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معيّنة.

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim\limits_{x\to -3}f(x)=-2$ (في الرسم البياني أدناه) (a) (b)



(2) $\lim\limits_{y\to 2}\dfrac{y^2+5y+6}{y+2}=5$ (a) (b)

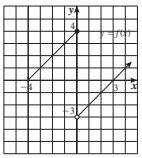
(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^3+8x^2}{3x^4-16x^2}=0$ (a) (b)

(4) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{x}=-2$ (a) (b)

(5) $\lim\limits_{x\to 1^+}(2x-|x|+2)=3$ (a) (b)

في التمارين (6–14)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) الشكل المقابل هو بيان دالة f.



العبارة الصحيحة في ما يلي هي:

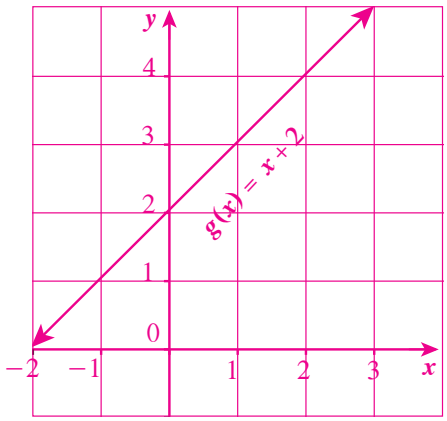
(a) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=4$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-3$

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=4$ (d) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-3$

ثانيًا: (a) نعم

$$f(x) = x + 2 \quad , \quad x \neq 2$$

(b)



ثالثًا: النقطة (2, 4) تنتمي إلى بيان g ولا تنتمي إلى بيان f.

أقسم البسط على المقام ونوجد الناتج باستخدام القسمة التركيبية

−1	1	6	2	−3
		−1	−5	3
	1	5	−3	0

الناتج: $x^2 + 5x - 3$ والباقي صفر

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 2x - 3}{x + 1} = x^2 + 5x - 3 \quad , \quad x \neq -1$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 6x^2 + 2x - 3}{x + 1} = \lim_{x \to -1} (x^2 + 5x - 3)$$

$$= (-1)^2 + 5(-1) - 3$$ عوّض عن x بـ -1

$$= -7$$

b $\lim_{x \to -2} \frac{x^5 + 32}{x + 2}$

$\frac{x^5 + 32}{x + 2}$ عند التعويض عن x بـ -2 في كل البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة.

$$x^5 + 32 = x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 32$$

أقسم البسط على المقام وأوجد الناتج باستخدام القسمة التركيبية

−2	1	0	0	0	0	32
		−2	4	−8	16	−32
	1	−2	4	−8	16	0

الناتج: $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$ والباقي صفر

$$\frac{x^5 + 32}{x + 2} = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16 \quad , \quad x \neq -2$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^5 + 32}{x + 2} = \lim_{x \to -2} (x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$

$$= (-2)^4 - 2(-2)^3 + 4(-2)^2 - 8(-2) + 16$$ عوّض عن x بـ -2

$$= 16 + 16 + 16 + 16 + 16$$

$$= 80$$ بسّط

حاول أن تحل

10 أوجد إن أمكن:

a $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}{x - 3}$ **b** $\lim_{x \to 2} \frac{-x^5 + x^3 + x + 22}{x - 2}$

26

(7) $\lim_{x \to -2} (x^3 + 3x^2 - 2x - 17) =$

(a) 17 (b) −17 (c) 9 (d) −9

(8) $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} =$

(a) 1 (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (d) غير موجودة

(9) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 5x + 2} =$

(a) 1 (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{3}$

(10) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} =$

(a) −1 (b) 1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 0

(11) $\lim_{x \to 2^+} \frac{|x - 2|}{x^2 - 4} =$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $-\frac{1}{4}$

(12) $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2 + x} - \frac{1}{2}}{x} =$

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $-\frac{1}{4}$

(13) $\lim_{x \to -8} \frac{x + 8}{\sqrt[3]{x} + 2} =$

(a) 12 (b) −12 (c) 4 (d) −4

(14) $\lim_{x \to -3} \frac{2x^3 + 9x^2 + 9x}{x + 3} =$

(a) 9 (b) 0 (c) −3 (d) −9

12

2–1: نهايات تشتمل على ∞ ، −∞

1 الأهداف

- يحسب نهايات محددة عندما $x \to \pm\infty$.
- يحسب نهايات غير محددة $(\pm\infty)$ عندما $x \to c$.
- يوجد الخطوط المقاربة الرأسية والأفقية.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

نهاية محددة – خط مقارب أفقي – خط مقارب رأسي.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب الإجابة عن الأسئلة التالية:

(1) لتكن: $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$

أوجد:

(a) $f(-2)$

(b) $f\left(\frac{1}{2}\right)$

(c) $f(3)$

(2) بسّط كلًّا من التعبيرات الجبرية التالية:

(a) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$

(b) $\dfrac{x - 3}{\sqrt{x - 2} - 1}$

(c) $\dfrac{x^2 - 4|x| + 3}{(x-1)(x+3)}$

1–2

نهايات تشتمل على ∞ ، −∞

Limits Involving −∞ , ∞

سوف تتعلم
- نهايات محددة عندما $x \to \pm\infty$.
- نهايات غير محددة عندما $x \to a$.
- الخطوط المقاربة الرأسية والأفقية.

المفردات والمصطلحات:
- نهاية محددة Finite Limit
- خط مقارب أفقي Horizontal Asymptote
- خط مقارب رأسي Vertical Asymptote

دعنا نفكر ونتناقش

لتكن الدوال التالية: $g(x) = x^2 + 1$ ، $f(x) = \frac{1}{x}$

a أكمل الجدول التالي:

x	$f(x) = \frac{1}{x}$	$g(x) = x^2 + 1$
−100		
−3 000		
−60 000		
100		
3 000		
60 000		

b استنتج قيم الدوال الواردة أعلاه عندما تأخذ x قيمًا موجبة كبيرة جدًّا وعندما تأخذ x قيمًا سالبة صغيرة جدًّا.

أوّلًا: نهايات محددة عندما $x \to \pm\infty$ — Finite Limits as $x \to \pm\infty$

إذا كانت x تأخذ قيمًا كبيرة جدًّا أي أن قيم x تكبر بلا حدود (تتحرّك مبتعدة كثيرًا جهة اليمين على خط الأعداد) فإننا نقول $x \to \infty$.

وإذا كانت x تأخذ قيمًا صغيرة جدًّا أي أن قيم x تصغر بلا حدود (تتحرّك مبتعدة كثيرًا جهة اليسار على خط الأعداد) فإننا نقول $x \to -\infty$.

تعريف (3)

لتكن f دالة معرّفة في الفترة (a, ∞) فإن:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى ∞.

تعريف (4)

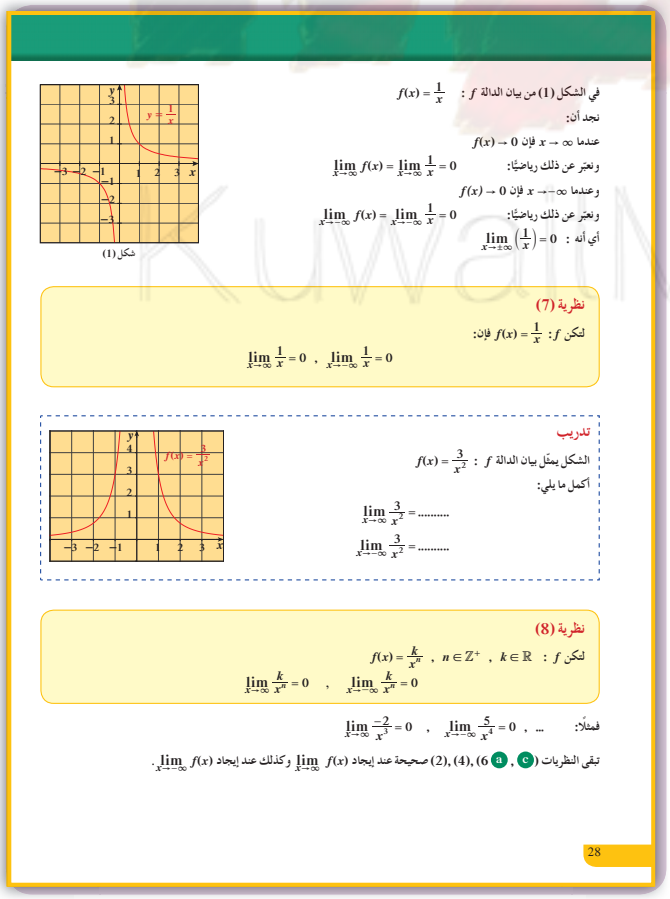
لتكن f دالة معرّفة في الفترة $(-\infty, a)$ فإن:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى $-\infty$.

معلومة:
من الأزل إلى الأبد
- الأزل: استمرار الوجود في أزمنة غير متناهية من الماضي.
- الأبد: استمرار الوجود في أزمنة غير متناهية في المستقبل.

27



في الشكل (1) من بيان الدالة f : $f(x) = \frac{1}{x}$

نجد أن:

عندما $x \to \infty$ فإن $f(x) \to 0$

ونعبّر عن ذلك رياضيًّا: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

وعندما $x \to -\infty$ فإن $f(x) \to 0$

ونعبّر عن ذلك رياضيًّا: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

أي أنه: $\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$

شكل (1)

نظرية (7)

لتكن f : $f(x) = \frac{1}{x}$ فإن:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0 \ , \ \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

تدريب

الشكل يمثّل بيان الدالة f : $f(x) = \frac{3}{x^2}$

أكمل ما يلي:

$\lim_{x \to \infty} \frac{3}{x^2} = ...$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x^2} = ...$

نظرية (8)

لتكن f : $k \in \mathbb{R}$ ، $n \in \mathbb{Z}^+$ ، $f(x) = \frac{k}{x^n}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{k}{x^n} = 0 \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{k}{x^n} = 0$$

فمثلًا: $\lim_{x \to \infty} \frac{-2}{x^3} = 0 \ , \ \lim_{x \to -\infty} \frac{-5}{x^4} = 0 \ , \ ...$

تبقى النظريات (6 a , c) ، (4) ، (2) صحيحة عند إيجاد $\lim_{x \to \infty} f(x)$ وكذلك عند إيجاد $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

28

5 التدريس

تشكل الدالة $y = \frac{1}{x}$ مثالًا جيّدًا يمكن البدء به لدراسة النهايات عندما $x \to \pm\infty$.

استخدم الحاسوب وجهاز الإسقاط (Data Show) لعرض بيان الدالة $y = \frac{1}{x}$.

استخدم خاصية التكبير Zoom+ لتعرض بيان الدالة عندما $x \to \infty$.

ناقش مع الطلاب فكرة الاقتراب من المحور السيني دون التقاطع معه.

أشر إلى الخطأ البصري حيث نرى أن الخط المنحدر يتطابق مع المحور السيني.

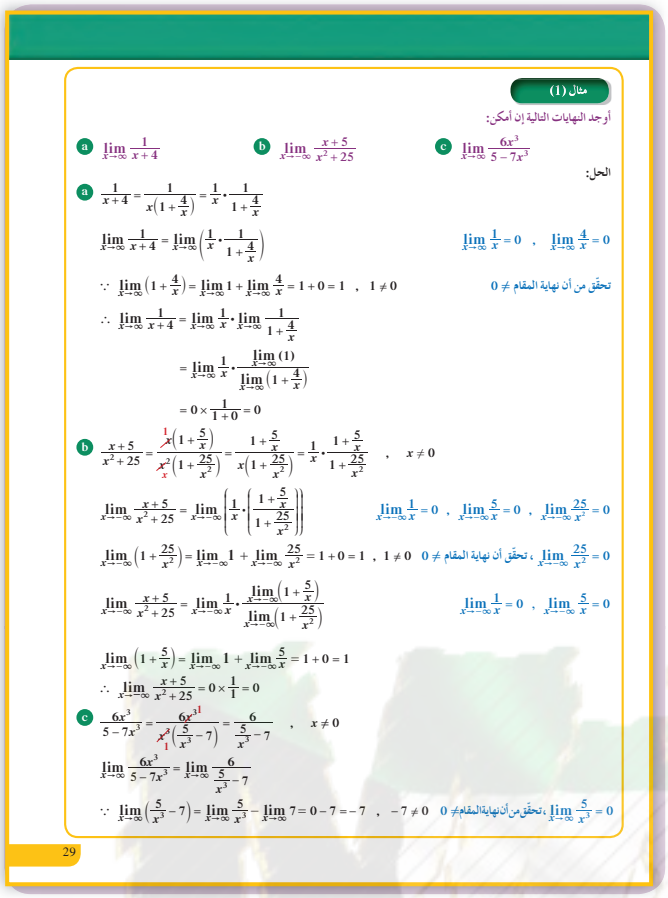
اسأل الطلاب كيف تتغير قيمة الكسر $\frac{1}{x}$ عندما تأخذ x قيمًا موجبة أكبر فأكبر وعندما تأخذ x قيمًا سالبة أصغر فأصغر.

بعد ذلك اطرح فكرة الخط المقارب الأفقي وطريقة كتابته.

شدّد على معنى $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ وهو أن قيم $f(x)$ تقترب كثيرًا من الصفر دون أن تساويه. عندما x تأخذ قيمًا كبيرة جدًّا (x تكبر بلا حدود).

في المثال (1)

نستخدم بطريقة مباشرة أو غير مباشرة النظرية (8) عن طريق تحليل العوامل بأخذ x^n حيث n أكبر أس في التعبير الجبري، ومن ثم نبسط، ونوجد النهاية.



مثال (1)

أوجد النهايات التالية إن أمكن:

a $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x+4}$ b $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+5}{x^2+25}$ c $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x^3}{5-7x^3}$

الحل:

a $\frac{1}{x+4} = \frac{1}{x(1+\frac{4}{x})} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{x}}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x+4} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{x}}\right)$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ ، $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x}=0$

$\because \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x} = 1+0 = 1$ ، $1 \neq 0$ تحقّق من أن نهاية المقام $\neq 0$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x+4} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{4}{x}}$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)}$

$= 0\times\frac{1}{1+0} = 0$

b $\frac{x+5}{x^2+25} = \frac{\cancel{x}^{1}\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\cancel{x^2}_{x}\left(1+\frac{25}{x^2}\right)} = \frac{1+\frac{5}{x}}{x\left(1+\frac{25}{x^2}\right)} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1+\frac{5}{x}}{1+\frac{25}{x^2}}$ ، $x \neq 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+5}{x^2+25} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1+\frac{5}{x}}{1+\frac{25}{x^2}}\right)\right)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x}=0$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{25}{x^2}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{25}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{25}{x^2} = 1+0 = 1$ ، $1 \neq 0$ ، تحقّق أن نهاية المقام $\neq 0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{25}{x^2}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+5}{x^2+25} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{25}{x^2}\right)}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x} = 1+0 = 1$

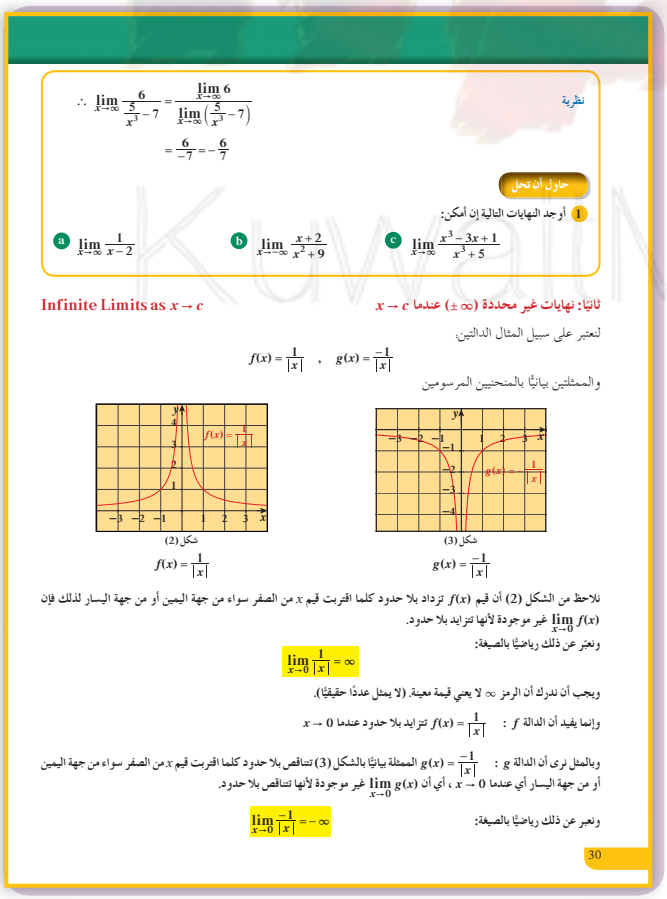
$\therefore \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+5}{x^2+25} = 0\times\frac{1}{1} = 0$

c $\frac{6x^3}{5-7x^3} = \frac{6\cancel{x^3}^{1}}{\cancel{x^3}_{1}\left(\frac{5}{x^3}-7\right)} = \frac{-6}{\frac{5}{x^3}-7}$ ، $x \neq 0$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^3}{5-7x^3} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{-6}{\frac{5}{x^3}-7}$

$\because \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5}{x^3}-7\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^3} - \lim\limits_{x\to\infty} 7 = 0-7 = -7$ ، $-7 \neq 0$ ، تحقّق من أن نهاية المقام $\neq 0$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^3}=0$

29



نظرية

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\frac{-6}{\frac{5}{x^3}-7} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 6}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5}{x^3}-7\right)}$

$= \frac{6}{-7} = -\frac{6}{7}$

حاول أن تحل

1 أوجد النهايات التالية إن أمكن:

a $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x-2}$ b $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+2}{x^2+9}$ c $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+1}{x^3+5}$

ثانيًا: نهايات غير محددة ($\pm\infty$) عندما $x \to c$ — Infinite Limits as $x \to c$

لنعتبر على سبيل المثال الدالتين:

$f(x) = \frac{1}{|x|}$ ، $g(x) = \frac{-1}{|x|}$

والممثلتين بيانيًا بالمنحنيين المرسومين

شكل (2) $f(x) = \frac{1}{|x|}$ — شكل (3) $g(x) = \frac{-1}{|x|}$

نلاحظ من الشكل (2) أن قيم $f(x)$ تزداد بلا حدود كلما اقتربت قيم x من الصفر سواء من جهة اليمين أو من جهة اليسار لذلك فإن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة لأنها تتزايد بلا حدود.

ونعبّر عن ذلك رياضيًا بالصيغة:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{|x|} = \infty$

ويجب أن ندرك أن الرمز ∞ لا يعني قيمة معينة. (لا يمثل عددًا حقيقيًا).

وإنما يفيد أن الدالة f : $f(x) = \frac{1}{|x|}$ تتزايد بلا حدود عندما $x \to 0$

وبالمثل نرى أن الدالة g : $g(x) = \frac{-1}{|x|}$ الممثلة بيانيًا بالشكل (3) تتناقص بلا حدود كلما اقتربت قيم x من الصفر سواء من جهة اليمين أو من جهة اليسار أي عندما $x \to 0$ ، أي أن $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ غير موجودة لأنها تتناقص بلا حدود.

ونعبر عن ذلك رياضيًا بالصيغة:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{|x|} = -\infty$

30

في المثال (2)

نستخدم نظرية (10) بعد إعادة تعريف القيمة المطلقة لإيجاد النهاية.

في المثال (3)

استخدام التبسيط ونظريات النهايات لإيجاد معادلات الخطوط المقاربة الأفقية والرأسية.

6 الربط

من الأزل إلى الأبد

- الأزل: استمرار الوجود في أزمنة غير متناهية من الماضي.
- الأبد: استمرار الوجود في أزمنة غير متناهية في المستقبل.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يعتقد بعض الطلاب أنه إذا كان $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ فإن $y = b$ هو خط مقارب أفقي.

شدّد على أن الخطوط المقاربة تنتج فقط عندما x أو y تقترب من اللا نهاية.

8 التقييم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» وتحقق من مدى إدراكهم لمفاهيم هذا الدرس ونظرياته.

اختبار سريع

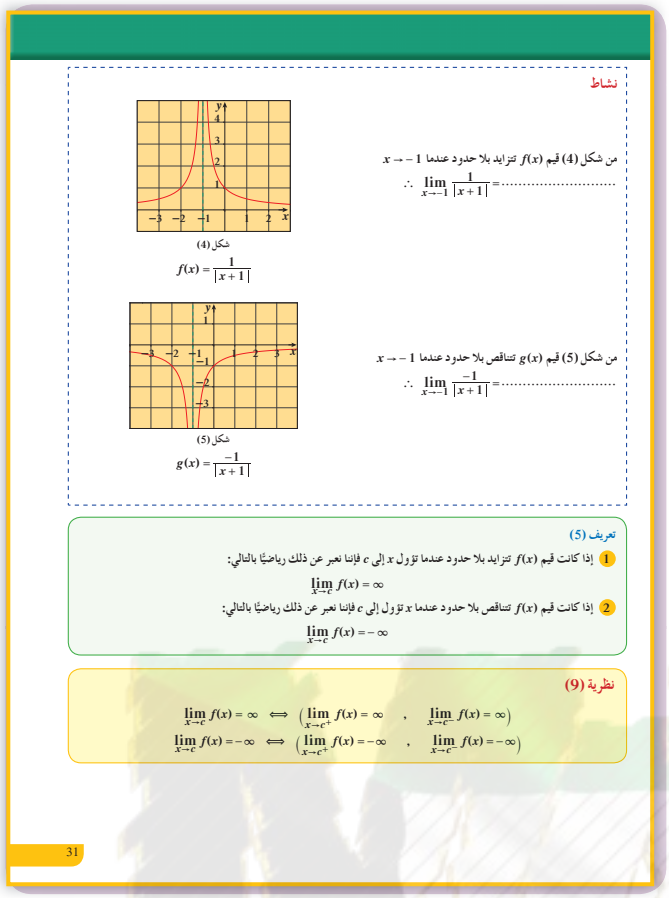
أوجد الخطوط المقاربة الرأسية والأفقية (إذا وجدت) لمنحنى الدالة f في كلّ مما يلي:

(a) $f(x) = \dfrac{2x}{x+4}$ $\qquad x = -4\ ,\ y = 2$

(b) $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{2x^2+1}$ $\qquad y = \dfrac{3}{2}$

(c) $f(x) = \dfrac{3}{x}$ $\qquad x = 0\ ,\ y = 0$

(d) $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ $\qquad x = 2\ ,\ y = 0$



نشاط

من شكل (4) قيم $f(x)$ تتزايد بلا حدود عندما $x \to -1$

$\therefore \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1}{|x+1|} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

شكل (4)

$f(x) = \dfrac{1}{|x+1|}$

من شكل (5) قيم $g(x)$ تتناقص بلا حدود عندما $x \to -1$

$\therefore \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{-1}{|x+1|} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

شكل (5)

$g(x) = \dfrac{-1}{|x+1|}$

تعريف (5)

1. إذا كانت قيم $f(x)$ تتزايد بلا حدود عندما تؤول x إلى c فإننا نعبر عن ذلك رياضيًا بالتالي:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$$

2. إذا كانت قيم $f(x)$ تتناقص بلا حدود عندما x تؤول إلى c فإننا نعبر عن ذلك رياضيًا بالتالي:

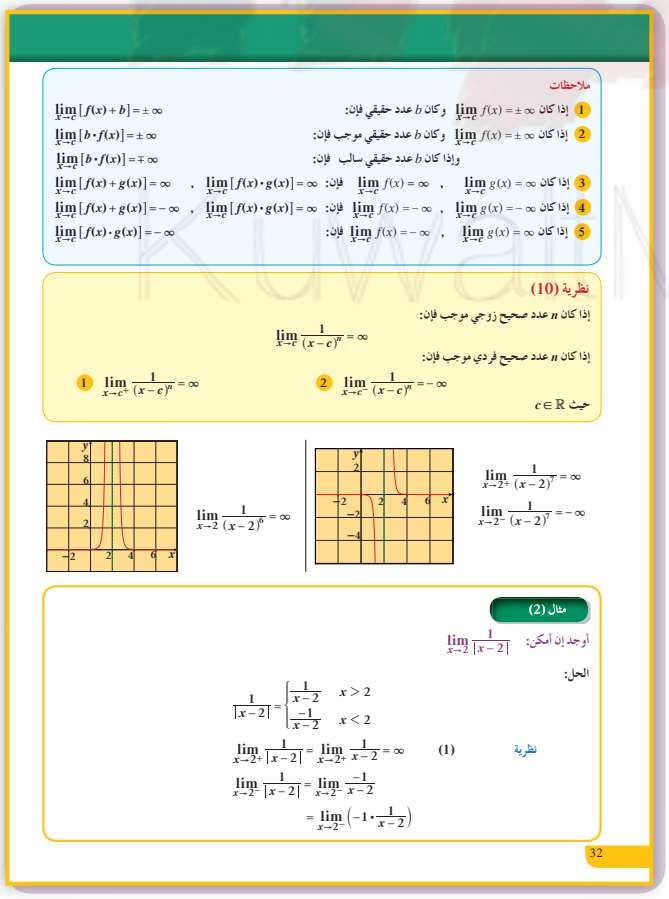
$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

نظرية (9)

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty \iff \left(\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty \ ,\ \lim_{x\to c^-} f(x) = \infty\right)$$

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty \iff \left(\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty \ ,\ \lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty\right)$$

31



ملاحظات

1. إذا كان $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ وكان b عدد حقيقي فإن: $\lim\limits_{x\to c}[f(x)+b] = \pm\infty$
2. إذا كان $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ وكان b عدد حقيقي موجب فإن: $\lim\limits_{x\to c}[b\cdot f(x)] = \pm\infty$
   وإذا كان b عدد حقيقي سالب فإن: $\lim\limits_{x\to c}[b\cdot f(x)] = \mp\infty$
3. إذا كان $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$ ، $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)] = \infty$ ، $\lim\limits_{x\to c}[f(x)+g(x)] = \infty$
4. إذا كان $\lim\limits_{x\to c} g(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)] = \infty$ ، $\lim\limits_{x\to c}[f(x)+g(x)] = -\infty$
5. إذا كان $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$ ، $\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)] = -\infty$

نظرية (10)

إذا كان n عدد صحيح زوجي موجب فإن:

$$\lim_{x\to c} \frac{1}{(x-c)^n} = \infty$$

إذا كان n عدد صحيح فردي موجب فإن:

1. $\lim\limits_{x\to c^+} \dfrac{1}{(x-c)^n} = \infty$
2. $\lim\limits_{x\to c^-} \dfrac{1}{(x-c)^n} = -\infty$

حيث $c \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^6} = \infty$

$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{(x-2)^7} = \infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{(x-2)^7} = -\infty$

مثال (2)

أوجد إن أمكن: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{|x-2|}$

الحل:

$$\frac{1}{|x-2|} = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & x > 2 \\ \dfrac{-1}{x-2} & x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty \qquad (1) \quad \text{نظرية}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-1}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \left(-1\cdot\frac{1}{x-2}\right)$$

32

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

a

x	$f(x) = \frac{1}{x}$	$g(x) = x^2 + 1$
-100	$-\frac{1}{100} = -0.01$	10 001
$-3\,000$	$-\frac{1}{3\,000} = -0.000\overline{3}$	9 000 001
$-60\,000$	$-\frac{1}{60\,000} = -0.00016\overline{}$	3 600 000 001
100	$\frac{1}{100} = 0.01$	10 001
3 000	$\frac{1}{3\,000} = 0.000\overline{3}$	9 000 001
60 000	$\frac{1}{60\,000} = 0.00016\overline{}$	3 600 000 001

b $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad , \quad \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \quad , \quad \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$

«حاول أن تحل»

1 (a) 0

(b) 0

(c) 1

2 ∞

3 (a) $x = -3 \ , \ y = 0$

(b) $x = 0 \ , \ y = 0$

(c) $x = 3 \ , \ y = 2$

نظرية

$\because \lim\limits_{x\to2^-} \frac{1}{(x-2)} = -\infty \ , \ -1 < 0$

استخدم ملاحظة (2) (2)

$\therefore \lim\limits_{x\to2^-} \left(-1 \cdot \frac{1}{x-2}\right) = \infty$

من (2) ، (1)

$\therefore \lim\limits_{x\to2} \frac{1}{|x-2|} = \infty$

حاول أن تحل

2 أوجد إن أمكن: $\lim\limits_{x\to-1} \frac{3}{|x+1|}$

تعريف (6): الخط المقارب (المحاذي) الأفقي — Definition of Horizontal Asymptote

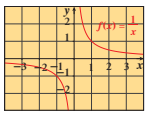
الخط $y = b$ يسمى خط مقارب أفقي لمنحنى الدالة $y = f(x)$ إذا توفر أحد الشرطين التاليين أو كلاهما:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$

بالنظر إلى بيان الدالة f : $f(x) = \frac{1}{x}$ نلاحظ أن:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \ , \ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

ونقول إن الخط المستقيم $y = 0$ هو خط مقارب أفقي (أو محاذي أفقي) لمنحنى الدالة f . (الشكل (6))

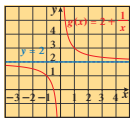


شكل (6)

وكذلك بالنظر إلى بيان الدالة g : $g(x) = 2 + \frac{1}{x}$ نلاحظ أن:

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2 \ , \ \lim\limits_{x\to-\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2$

ونقول إن الخط المستقيم $y = 2$ هو خط مقارب أفقي لمنحنى الدالة g . (الشكل (7))



شكل (7)

ونلاحظ أنه إذا كان $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ فإن الخط المقارب الأفقي وحيد وهو $y = b$.

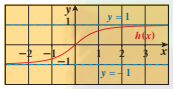
قد يكون لمنحنى الدالة أكثر من خط مقارب أفقي.

فمثلاً:

لمنحنى الدالة h : $h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ في الشكل المقابل خطان مقاربان أفقيان هما:

$y = 1$ و $y = -1$

لاحظ أن: $h(x) = \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$ (الشكل (8))



شكل (8)

ملاحظة:

سنقتصر دراستنا على المحاذيات الأفقية لدوال الحدوديات النسبية.

33

تمرّن 1–2

نهايات تشتمل على ∞ ، $-\infty$

Limits Involving $-\infty, \infty$

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–4)، أوجد:

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x-2}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^3}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-1}{2x+3}$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\left(2 - \frac{x}{x+1}\right)\left(\frac{x^2}{5+x^2}\right)\right)$

في التمارين (5–8)، أوجد إن أمكن:

(5) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{\sqrt{4x^2}}$

(6) $\lim\limits_{x\to5} \frac{3}{|x-5|}$

(7) $\lim\limits_{x\to-2} \frac{-7}{|x+2|}$

(8) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \frac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^8}}$

في التمارين (9–12)، أوجد إن أمكن معادلات الخطوط المقاربة الرأسية والأفقية لكل مما يلي:

(9) $f(x) = \frac{3x^2-2x+1}{2x^2+5x}$

(10) $f(x) = \frac{x-2}{2x^2+3x-5}$

(11) $f(x) = \frac{4x^3-2x+1}{x^3+x^2}$

(12) $f(x) = \frac{4x}{2x^2-5x+2}$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim\limits_{x\to-4^-} \frac{1}{(x+4)^9} = -\infty$ (a) (b)

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-1}{|x|-3} = 2$ (a) (b)

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{|x|-3}{x+3} = -1$ (a) (b)

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-x}{2x^2-5x-3} = -\infty$ (a) (b)

(5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{|2x-3|} = \frac{1}{2}$ (a) (b)

13

«تدريب»

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x^2}=0$$

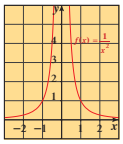
«نشاط»

$$\lim_{x\to-1}\frac{1}{|x+1|}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{-1}{|x+1|}=-\infty$$

مثال (3)

أوجد إن أمكن معادلات الخطوط المقاربة الرأسية والأفقية لكل مما يلي:



(a) $g(x)=\frac{1}{x^2-4}$ (b) $h(x)=\frac{x-1}{x^2-3x+2}$

الحل:

(a) $x^2-4=(x-2)(x+2)$

صفرا المقام هما: $2\ ,\ -2$ وليست أصفارًا للبسط.

$\therefore$ المستقيمان $x=-2\ ,\ x=2$ هما المقاربان الرأسيان لمنحنى الدالة g.

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim_{x\to\infty}(1)-\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}}=\frac{0}{1-0}=0$$

$\therefore$ المستقيم $y=0$ هو خط مقارب أفقي لمنحنى g.

(b) $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

$$h(x)=\frac{x-1}{x^2-3x+2}$$

نضع $h(x)$ في أبسط صورة $=\frac{x-1}{(x-1)(x-2)}$

$=\frac{1}{x-2}\quad ,\quad x\neq 1$

2 صفرًا للمقام وليس من أصفار البسط

$\therefore$ المستقيم $x=2$ خط مقارب رأسي لمنحنى h

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}}{\lim_{x\to\infty}1-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}}=\frac{0}{1-0}=0$$

$\therefore$ المستقيم $y=0$ هو خط مقارب أفقي المنحنى h

حاول أن تحل

3 أوجد إن أمكن معادلات الخطوط المقاربة الرأسية والأفقية لمنحنيات الدوال التالية:

(a) $f(x)=\frac{x-3}{x^2-9}$ (b) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ (c) $f(x)=\frac{2x}{x-3}$

35

تعريف (7): الخط المقارب (المحاذي) الرأسي — **Definition of Vertical Asymptote**

الخط $x=a$ يسمى خط مقارب رأسي لمنحنى الدالة $y=f(x)$ إذا توفر على الأقل أحد الشروط التالية:

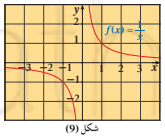
$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty\ ,\ \lim_{x\to a^+}f(x)=\infty\ ,\ \lim_{x\to a}f(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to a}f(x)=-\infty\ ,\ \lim_{x\to a^+}f(x)=-\infty\ ,\ \lim_{x\to a}f(x)=-\infty$$

بالنظر إلى بيان الدالة f : $f(x)=\frac{1}{x}$ نلاحظ أن:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty\ ,\ \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

ونقول إن الخط المستقيم $x=0$ هو خط مقارب (محاذي) رأسي لمنحنى الدالة f . (الشكل (9))



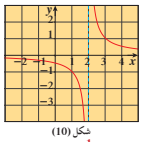
شكل (9)

بالنظر إلى بيان الدالة f: $f(x)=\frac{1}{x-2}$ نلاحظ أن:

$$\lim_{x\to2^-}\left(\frac{1}{x-2}\right)=-\infty\ ,\ \lim_{x\to2^+}\left(\frac{1}{x-2}\right)=+\infty$$

ونقول إن الخط المستقيم $x=2$ هو خط مقارب رأسي لمنحنى الدالة f . (الشكل (10))

نلاحظ أن $x=2$ هو صفر المقام.



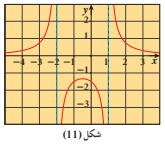
شكل (10)

$f(x)=\frac{1}{x-2}$

بالنظر إلى بيان الدالة f : $f(x)=\frac{3}{(x+2)(x-1)}$

نلاحظ أن: $x=1\ ,\ x=-2$ هما مقاربان (محاذيان) رأسيان لمنحنى الدالة f . (الشكل (11))

ونلاحظ أيضًا أن $1\ ,\ -2$ هما صفرا للمقام.



شكل (11)

$f(x)=\frac{3}{(x+2)(x-1)}$

ملاحظة:

إذا كانت الدالة $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ حيث $h\ ,\ g$ كثيرتي حدود وليس بينهما عوامل مشتركة، فإن لكل صفر c لدالة المقام h يكون المستقيم $x=c$ خطًّا مقاربًا رأسيًّا (أو محاذيًا رأسيًّا).

أما في حالة وجود عوامل مشتركة بين $h\ ,\ g$ فيكون المحاذي الرأسي عند صفر (أصفار) المقام بعد التبسيط.

34

في التمارين (14 – 6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\lim_{x\to\infty}\frac{|x|}{|x|+1}=$

(a) 0 (b) 1 (c) ∞ (d) $\frac{1}{2}$

(7) $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+3}=$

(a) ∞ (b) $-\infty$ (c) 1 (d) 0

(8) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}}=$

(a) ∞ (b) $-\infty$ (c) 3 (d) -3

(9) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x}+1\right)\left(\frac{5x^2-1}{x^2}\right)=$

(a) 0 (b) 5 (c) 1 (d) $-\infty$

(10) $\lim_{x\to\infty}\frac{-|x+3|}{2x}=$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) ∞ (d) $-\infty$

(11) $\lim_{x\to2^-}\left(\frac{3}{x-2}\right)^5=$

(a) 0 (b) 2 (c) ∞ (d) $-\infty$

(12) $\lim_{x\to4^+}\frac{2}{(x-4)^3}=$

(a) ∞ (b) 2 (c) $-\infty$ (d) 0

(13) المقارب الأفقي والمقارب الرأسي لمنحنى الدالة f: $f(x)=\frac{2x-3}{2x+1}$ هما:

(a) $y=2\ ,\ x=\frac{1}{2}$ (b) $y=2\ ,\ x=-\frac{1}{2}$

(c) $y=1\ ,\ x=-\frac{1}{2}$ (d) $y=1\ ,\ x=\frac{1}{2}$

(14) المقارب الأفقي والمقاربات الرأسية لمنحنى الدالة f: $f(x)=\frac{3x-5}{x^2-9}$ هي:

(a) $y=3\ ,\ x=3\ ,\ x=-3$ (b) $y=3\ ,\ x=9\ ,\ x=-9$

(c) $y=-3\ ,\ x=3\ ,\ x=-3$ (d) $y=0\ ,\ x=3\ ,\ x=-3$

14

3–1: صيغ غير معينة

1 الأهداف

- يتعرف على صيغ غير معينة:

$\frac{\infty}{\infty}$ ، $\frac{-\infty}{\infty}$ ، $\frac{\infty}{-\infty}$ ، $\frac{-\infty}{-\infty}$ ، $\infty - \infty$

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

صيغة غير معينة.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

أوجد نهاية كل من الدوال التالية عندما $x \to \infty$:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{2x^2 + 4x - 5}$

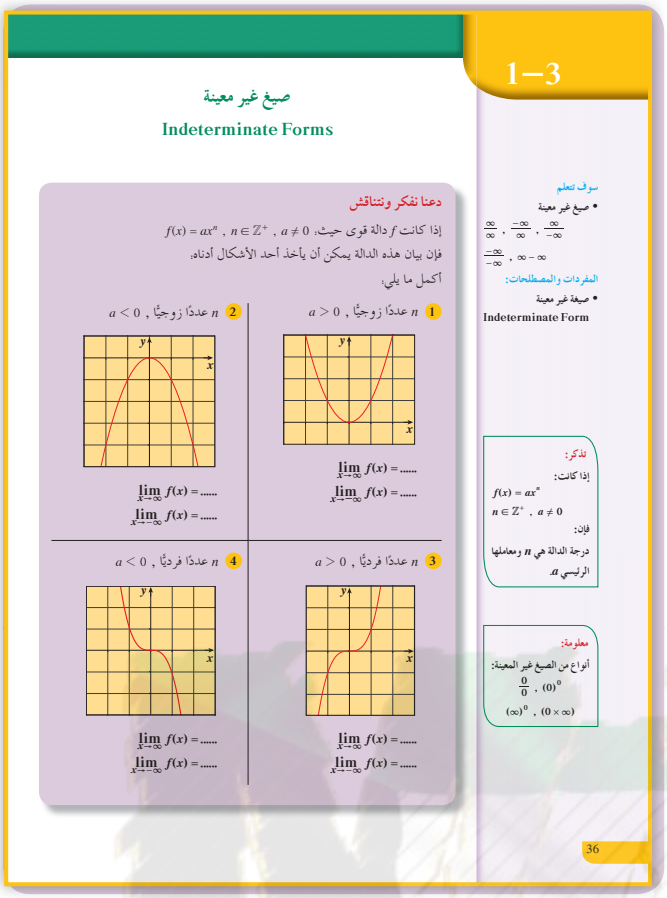
(b) $l(x) = \dfrac{-x^2 + 5}{x^3 - 4}$

5 التدريس

يمكن أن نبدأ الدرس بفقرة «دعنا نفكر ونتناقش» لاستنتاج الحالات المختلفة التي تأخذها الدوال عندما يؤول المتغير x إلى ∞ أو $-\infty$.

ويجب التشديد على إشارة المعامل a وماهية الأس n إذا كان زوجي أو فردي وذلك عندما يؤول المتغير x إلى $-\infty$.

وهنا يجب أن ننبه الطالب إلى إمكانية التخلص من الصيغ غير المعينة وذلك باستخدام عدة طرق مختلفة منها نظرية (11) أو إخراج العامل المشترك في حالة الجذور التربيعية لكثيرات الحدود.



1–3

صيغ غير معينة

Indeterminate Forms

سوف تتعلم

- صيغ غير معينة

$\frac{\infty}{\infty}$ ، $\frac{-\infty}{\infty}$ ، $\frac{\infty}{-\infty}$

$\frac{-\infty}{-\infty}$ ، $\infty - \infty$

المفردات والمصطلحات:

- صيغة غير معينة

Indeterminate Form

دعنا نفكر ونتناقش

إذا كانت f دالة قوى حيث: $f(x) = ax^n$ ، $n \in \mathbb{Z}^+$ ، $a \neq 0$

فإن بيان هذه الدالة يمكن أن يأخذ أحد الأشكال أدناه.

أكمل ما يلي:

1 n عددًا زوجيًا ، $a > 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = ...$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ...$

2 n عددًا زوجيًا ، $a < 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = ...$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ...$

3 n عددًا فرديًا ، $a > 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = ...$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ...$

4 n عددًا فرديًا ، $a < 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = ...$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ...$

تذكر:

إذا كانت:

$f(x) = ax^n$

$n \in \mathbb{Z}^+$ ، $a \neq 0$

فإن:

درجة الدالة هي n ومعاملها الرئيسي a.

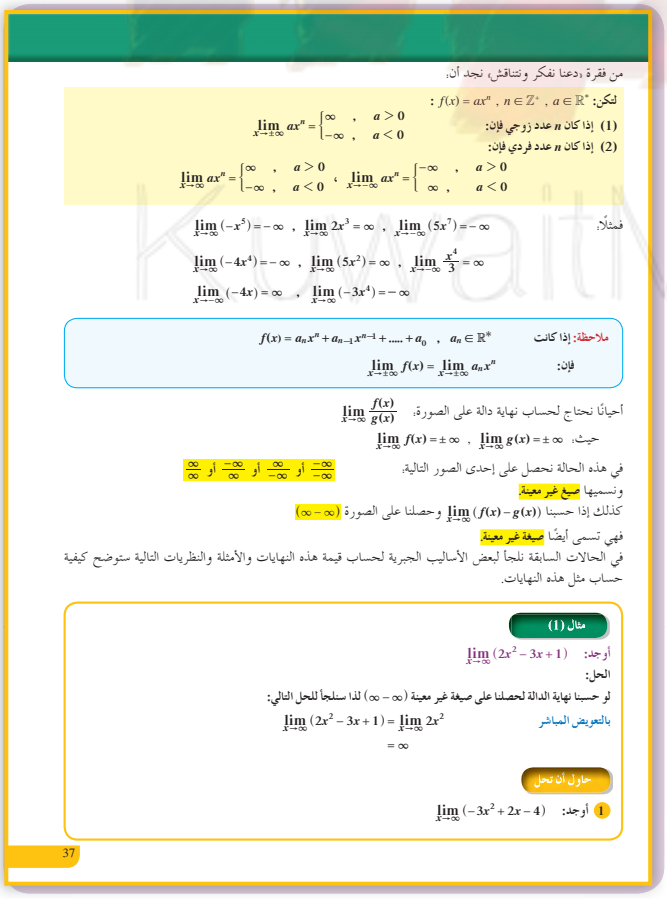
معلومة:

أنواع من الصيغ غير المعينة:

$\frac{0}{0}$ ، $(0)^0$

$(\infty)^0$ ، $(0 \times \infty)$

36



من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» نجد أن:

لتكن: $f(x) = ax^n$ ، $n \in \mathbb{Z}^+$ ، $a \in \mathbb{R}^*$:

(1) إذا كان n عدد زوجي فإن:

$$\lim_{x \to \pm\infty} ax^n = \begin{cases} \infty & , \quad a > 0 \\ -\infty & , \quad a < 0 \end{cases}$$

(2) إذا كان n عدد فردي فإن:

$$\lim_{x \to \infty} ax^n = \begin{cases} \infty & , \quad a > 0 \\ -\infty & , \quad a < 0 \end{cases} \text{ ، } \lim_{x \to -\infty} ax^n = \begin{cases} -\infty & , \quad a > 0 \\ \infty & , \quad a < 0 \end{cases}$$

فمثلًا:

$\lim\limits_{x \to \infty} (-x^5) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \to \infty} 2x^3 = \infty$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} (5x^7) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} (-4x^4) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \to \infty} (5x^2) = \infty$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^4}{3} = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-4x) = \infty$ ، $\lim\limits_{x \to \infty} (-3x^4) = -\infty$

ملاحظة: إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$ ، $a_n \in \mathbb{R}^*$

فإن: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} a_n x^n$

أحيانًا نحتاج لحساب نهاية دالة على الصورة: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

حيث: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$ ، $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \pm\infty$

في هذه الحالة نحصل على إحدى الصور التالية: $\frac{\infty}{\infty}$ أو $\frac{-\infty}{\infty}$ أو $\frac{\infty}{-\infty}$ أو $\frac{-\infty}{-\infty}$

ونسميها صيغ غير معينة

كذلك إذا حسبنا $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - g(x))$ وحصلنا على الصورة $(\infty - \infty)$

فهي تسمى أيضًا صيغة غير معينة

في الحالات السابقة نلجأ لبعض الأساليب الجبرية لحساب قيمة هذه النهايات والأمثلة والنظريات التالية ستوضح كيفية حساب مثل هذه النهايات.

مثال (1)

أوجد: $\lim\limits_{x \to \infty} (2x^2 - 3x + 1)$

الحل:

لو حسبنا نهاية الدالة لحصلنا على صيغة غير معينة $(\infty - \infty)$ لذا سنلجأ للحل التالي:

بالتعويض المباشر

$$\lim_{x \to \infty} (2x^2 - 3x + 1) = \lim_{x \to \infty} 2x^2$$
$$= \infty$$

حاول أن تحل

1 أوجد: $\lim\limits_{x \to \infty} (-3x^2 + 2x - 4)$

37

في المثال (1)

يتم إيجاد النهاية باستخدام الملاحظة السابقة للمثال.

في المثال (2)

يتم تطبيق نظرية (11) مباشرة لإيجاد النهاية.

في المثال (3)

يتم توظيف نظرية (11) لايجاد قيمة الثابتين a, b.

في المثال (4)

استخدام إخراج العامل المشترك للتخلص من الصيغ غير المعينة وإعادة تعريف المطلق ومراعاة شروط نهاية الجذر التربيعي.

6 الربط

لا يوجد.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يخطئ الطلاب في التحليل فيكتبون x مع الأس الأصغر كعامل مشترك. شدّد على أن تكون دائمًا x مع الأس الأكبر هي العامل المشترك وذلك لاحتساب النهاية.

كما قد يخطئ الطلاب في إعادة تعريف $|x|$ عندما $x \to -\infty$ ويجب التأكيد على أن نظرية (11) تطبق للدالة الحدودية النسبية فقط.

8 التقييم

تابع الطلاب في عملهم مع تمارين فقرة «حاول أن تحل» لتقف على حسن فهمهم في التخلص من الصيغ غير المعنية.

اختبار سريع

❶ (a) أوجد: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2-5x+1}{4x^2+x-3}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-5x+1}{4x^2+x-3} = \frac{3}{4}$$

(b) أوجد: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+5}{5x^2-4x}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+5}{5x^2-4x} = 0$$

❷ إذا كانت $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^2+bx-4}{3x-2} = 2$

فأوجد قيم: a , b

درجة الحدودية في البسط يجب أن تساوي درجة الحدودية في المقام لذا $a = 0$ ثم $\frac{b}{3} = 2$ ومنه $b = 6$

مثال تمهيدي

أوجد:

ⓐ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-2x}{4x^2+5}$ ⓑ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3+2x^2-7}{3x^4-2x}$

الحل:

ⓐ لو حسبنا نهاية دالة البسط على نهاية دالة المقام لحصلنا على صيغة غير معينة لذا سنلجأ للحل التالي:

$$\frac{3x^2-2x}{4x^2+5} = \frac{3-\frac{2}{x}}{4+\frac{5}{x^2}} \quad x \neq 0$$ أقسم كلًّا من البسط والمقام على x^2

$$\lim_{x\to\infty}\left(4+\frac{5}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} 4 + \lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2} = 4+0=4 \quad , \quad 4 \neq 0$$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^2} = 0$

$$\because \lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 3 - \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} = 3-0=3$$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x} = 0$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x}{4x^2+5} = \lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{4+\frac{5}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\frac{5}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{3}{4}$$

ⓑ لو حسبنا نهاية دالة البسط على نهاية دالة المقام لحصلنا على صيغة غير معينة لذلك نقسم كلًّا من البسط والمقام على x^4 (أكبر قوة لـ x).

$$\frac{5x^3+2x^2-7}{3x^4-2x} = \frac{\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{7}{x^4}}{3-\frac{2}{x^3}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x^2}\right) = 3-0=3 \quad , \quad 3 \neq 0$$ التحقق من أن المقام $\neq 0$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+2x^2-7}{3x^4-2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{7}{x^4}}{3-\frac{2}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{x^4}}{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^3}}$$

$$= \frac{0+0-0}{3-0} = 0$$

نلاحظ من المثال التمهيدي ⓐ أن درجة الحدودية في البسط تساوي درجة الحدودية في المقام تساوي 2 وأن نهاية الدالة النسبية تساوي $\frac{3}{4}$

وهو ناتج قسمة معامل x بأكبر قوة في البسط على معامل x بأكبر قوة في المقام.

ونلاحظ في المثال التمهيدي ⓑ أن درجة الحدودية في البسط **أصغر من** درجة الحدودية في المقام وأن نهاية الدالة النسبية تساوي 0

38

نستطيع تعميم ذلك من خلال النظرية التالية:

نظرية (11)

إذا كانت كل من g , f دالة حدودية حيث:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_0$$ فإن:

ⓐ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a_n}{b_m} : n = m$

ⓑ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 : n < m$

ملاحظة: تبقى النظرية صحيحة عندما $x \to -\infty$

مثال (2)

استخدم النظرية السابقة في حساب كل من:

ⓐ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-3x^3}{2x^3+5}$ ⓑ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{3x^4-x}$ ⓒ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-1}{7-2x^4}$

الحل:

ⓐ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-3x^3}{2x^3+5} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^3+4}{2x^3+5} = \dfrac{-3}{2}$ نظرية: $n = m = 3$ (درجة البسط = درجة المقام)

ⓑ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{3x^4-x} = 0$ نظرية: $n = 2$, $m = 4$, $n < m$ (درجة البسط أصغر من درجة المقام)

ⓒ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-1}{7-2x^4} = -\dfrac{1}{2}$ نظرية: $n = m = 4$ (درجة البسط = درجة المقام)

حاول أن تحل

2 استخدم النظرية السابقة في حساب كل من:

ⓐ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^2+5x+1}{6x^2-x+1}$ ⓑ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{4x^3-2x+3}$

مثال (3)

إذا كانت $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+bx+3}{2x+5} = 3$

فأوجد قيمة كل من الثابتين a , b

الحل:

$$\because \lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+3}{2x+5} = 3 \quad , \quad 3 \neq 0$$

39

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

   $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

   $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}} = \sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)} = \sqrt{1} = 1 \quad , \quad 1 \neq 0$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} 1 - \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}$

$= 1 - 0 = 1 \quad , \quad 1 \neq 0$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$

$= \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$

$= \frac{1}{1} = 1$

حاول أن تحل

4 أوجد:

a $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1}$

b $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}}$

41

$\therefore$ درجة الحدودية في البسط يجب أن تكون مساوية لدرجة الحدودية في المقام أي أن الحدودية في البسط يجب أن تكون من الدرجة الأولى.

$ax^2 = 0 \implies a = 0$

ومنه $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^2+bx+3}{2x+5}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{bx+3}{2x+5}$

نظرية $m = n = 1$

$= \frac{b}{2}$

$\because \frac{b}{2} = 3 \implies b = 6$

حاول أن تحل

3 أوجد قيمة كل من الثابتين a , b إذا كانت $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-2}{ax^2+bx-3} = -1$

مثال (4)

أوجد: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$

الحل:

$f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}} = \dfrac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}}$

$= \dfrac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$

عندما $x > 0$ يكون: $|x| = x$

$= \dfrac{\cancel{x}^{1}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}^{1}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$

بشرط $x \neq 0$

$= \dfrac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$

$\because \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x} - \lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}$

$= 1 + 0 - 0 = 1 \quad , \quad 1 > 0$

40

تمرَّنْ 1–3

صيغ غير معينة

Indeterminate Forms

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–10)، أوجد كلًّا مما يلي:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^2-5x+4)$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-4x^2+x-1)$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-3x+7)$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x^3+2x+5)$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-5x+7}{-2x^2+3x-1}$

(6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+7x-1}{-5x^3+x+2}$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+5}{2x^3+x-1}$

(8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x^2-2x+3}$

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+5}{\sqrt{x^2+2x+7}}$

(10) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{4x^2+5x+6}}$

في التمارين (11–13)، أوجد كلًّا مما يلي:

(11) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$

(12) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{(x^3-1)}\right)$

(13) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{4x}{x^2-4}\right)$

(14) إذا كانت: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^3+bx^2+4}{3x^2-2x+1} = -1$ فأوجد قيم a , b.

(15) إذا كانت: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+2x-5}{ax^3+bx^2+3} = -1$ فأوجد قيم a , b.

(16) إذا كانت: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-5}{\sqrt{ax^2+7x-2}} = 2$ فأوجد قيمة a.

(17) إذا كانت: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+bx-5}{\sqrt{4x^2-5x+8}} = -1$ فأوجد قيم a , b.

15

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^2+7x-8)=\infty$ (a) (b)

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3-2x+1)=-\infty$ (a) (b)

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(-x^2+x-3)=-\infty$ (a) (b)

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x+4}{3x^2-5x+1}=0$ (a) (b)

(5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^3+7x^2-1}{2x^3-4}=2$ (a) (b)

(6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x-7}{\sqrt{4x^2-8x+5}}=\frac{3}{2}$ (a) (b)

في التمارين (7–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+5}{2x^4+x^2-2}=$

(a) ∞ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 0 (d) $-\infty$

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5x+3}{\sqrt{9x^2-2x+4}}=$

(a) $\frac{5}{3}$ (b) $-\frac{5}{3}$ (c) $\frac{5}{9}$ (d) $-\frac{5}{9}$

(9) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x+1}{\sqrt{4x^2-x+3}}$

(a) -1 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

(10) إذا كان: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{mx^2+nx+4}{\sqrt{x^2-2x+4}}=-2$ فإن قيم m , n هي:

(a) $m=0$, $n=-2$ (b) $m=0$, $n=2$ (c) $m=1$, $n=-1$ (d) $m=1$, $n=1$

(11) إذا كانت: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-2x+3}}{mx^2+nx-4}=1$ فإن قيم m , n هي:

(a) $m=0$, $n=-2$ (b) $m=0$, $n=2$ (c) $m=0$, $n=4$ (d) $m=0$, $n=-4$

16

«حاول أن تحل»

1 $-\infty$

2 (a) $\frac{-1}{2}$ (b) 0

3 $a=0$; $b=-1$

4 (a) $\sqrt{2}$ (b) -3

4–1: نهايات بعض الدوال المثلثية

1 الأهداف

- يحسب النهايات لبعض الدوال المثلثية.
- يستخدم نظرية الإحاطة لإيجاد النهاية.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

نهاية دالة مثلثية – نظرية الإحاطة.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

أوجد ما يلي باستخدام التمثيل البياني لكل دالة:

$$\lim_{x\to 0}\sin x \ , \ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} \ , \ \lim_{x\to 0}\cos x$$

5 التدريس

يتبيّن لنا من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» أن $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ حيث x بالراديان. وتعتبر هذه النهاية أساسية في نهايات الدوال المثلثية إذ تمكننا من إيجاد النهايات:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1 \ , \ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

ذكّر الطلاب بأنهم يعوضون عن $\sin x$ بـ x في مادة الفيزياء عندما تأخذ x قيمًا قريبة جدًّا من الصفر (بالراديان).

أشر إلى أن النهاية لا تتغير إذا استبدلنا x بـ $\frac{x}{2}$ أو $3x$ ... ونرمز لذلك بـ : $\lim_{*\to 0}\frac{\sin *}{*}=1$

شدّد على أهمية نظرية الإحاطة في الحالات حيث لا نستطيع إيجاد النهاية مباشرة فنحاول إحاطة f بدالتين يسهل إيجاد نهايتيهما عندما تقترب x من c ونستنتج من ذلك نهاية f عندما تقترب x من c.

في الأمثلة (1), (2), (3)

نستخدم نتيجة $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ لإيجاد نهايات بعض الدوال التي يمكن أن تظهر فيها: $\frac{\sin x}{x}$ أو $\frac{\sin ax}{ax}$

نستخدم أيضًا خواص النهايات والتحليل أو الضرب للوصول إلى الصورة $\frac{\sin x}{x}$ وبالمثل

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1 \ , \ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

1–4

نهايات بعض الدوال المثلثية

Limits of Some Trigonometric Functions

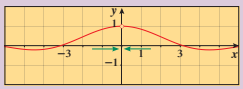
سوف تتعلم
- نهايات بعض الدوال المثلثية.
- نظرية الإحاطة.
- استخدام نظرية الإحاطة.

المفردات والمصطلحات:
- نهاية دالة مثلثية Limit of a Trigonometric Function
- نظرية الإحاطة Sandwich Theorem

دعنا نفكر ونتناقش

عند حساب: $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ (x rad) وتمثيلها بيانيًّا كما في الشكل (1)، تقتربُ قيمتُها من الواحد عندما تقترب x من الصفر (x rad). وفي هذه الحالة نقول إنّ نهاية $f(x)$ تساوي 1 عندما تقترب x بشكل كاف من الصفر دون أن تساويه.

x	y
−0.3	0.98507
−0.2	0.99335
−0.1	0.99833
−0.01	0.9998
0	ERROR
0.01	0.9998
0.1	0.99833
0.2	0.99335
0.3	0.98507
$y=\frac{\sin x}{x}$	



شكل (1)

يبيّن الشكل (1) الرسم البياني للدالة f كما يعطي الجدول أعلاه قيمًا للدالّة موضّحًا أنّ نهاية $f(x)$ تساوي 1 عندما تقترب x من الصفر.

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» نجد أن:

نظرية (12)

حيث x بالراديان ، $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

نتيجة (1)

إذا كان a , b عددين حقيقيين، $a\neq 0$, $b\neq 0$ فإن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b} \ , \ \lim_{x\to 0}\frac{bx}{\sin ax}=\frac{b}{a}$$

فمثلًا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x}=\frac{2}{5}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 3x}=\frac{2}{3}$$

معلومة:
في دراستنا للدوال المثلثية يكون قياس الزوايا بالراديان.

42

وبتطبيق تعريف النهاية على الدوال المثلثية الأساسية نجد أن:

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0 \ , \ \lim_{x\to 0}\cos x=1 \ , \ \lim_{x\to 0}\tan x=0$$

يمكننا تطبيق نظريات النهايات من البنود السابقة في إيجاد نهايات الدوال المثلثية.

مثال (1)

أوجد:

a $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2x}$ b $\lim_{x\to 0}\frac{x-3}{\cos x}$ c $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$

الحل:

a $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}$

نظرية (قاعدة الضرب) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$=1\times 0$

$=0$

b $\lim_{x\to 0}\frac{x-3}{\cos x}$

نظرية

$\lim_{x\to 0}\cos x=1 \ , \ 1\neq 0$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{x-3}{\cos x}=\frac{\lim_{x\to 0}(x-3)}{\lim_{x\to 0}\cos x}$

$=\frac{-3}{1}$

$=-3$

c $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$ اضرب البسط والمقام في $1+\cos x$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{(1-\cos x)(1+\cos x)}\cdot(1+\cos x)\right)$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{1-\cos^2 x}\cdot(1+\cos x)\right)$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot(1+\cos x)\right)$

$=\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot(1+\cos x)\right)$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}(1+\cos x)$

$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\left(\lim_{x\to 0}(1)+\lim_{x\to 0}\cos x\right)$

$=(1)^2\times(1+1)$

$=1\times 2=2$

حاول أن تحل

a هل يمكنك حل c في المثال (1) بطريقة أخرى؟

b أوجد النهاية:

1 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x^2-x}$ 2 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x\cos x}$ 3 $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\cos x-1}$

43

في المثالين (5) ,(4)

نستخدم نظرية الإحاطة لإيجاد نهاية بعض الدوال المثلثية عند $x \to 0$ أو $x \to \pm\infty$.

6 الربط

لا يوجد.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

يمكن ارتكاب الأخطاء في عدم معرفة تحويل بعض الدوال إلى $\frac{\sin ax}{ax}$ وذلك بعدم الضرب والقسمة بمعامل يسهل تلك العملية. وكذلك تطبيق نظرية الإحاطة بشكل خاطئ، مثال على ذلك كإحاطة $\tan x$ بـ $-1 \le \tan x \le 1$

8 التقييم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لتتحقق من مدى إدراكهم لمفاهيم هذا الدرس ونظرياته.

الحل:

a $\frac{5x+\sin x}{x} = \frac{5x}{x} + \frac{\sin x}{x}$ قسمة البسط على المقام

$= 5 + \frac{\sin x}{x}$ بسّط: $x \neq 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{5x+\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} 5 + \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ نظرية (قاعدة الجمع)

$= 5 + 1$

$= 6$

b $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{3} \cdot \frac{\tan x}{x} - \frac{2}{3}\cos x\right)$ قسمة البسط على المقام

$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{2}{3}\cos x$ بسّط $x \neq 0$

$= \frac{1}{3} \times 1 - \frac{2}{3} \times 1$

$= -\frac{1}{3}$ بسّط

حاول أن تحل

3 أوجد:

a $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x - x^2}{3x^2}$ b $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x + 3x\cos 4x}{5x}$

نظرية الإحاطة **Sandwich Theorem**

إذا لم يكن ممكنًا إيجاد قيمة النهاية بطريقة مباشرة، فبإمكاننا إيجادها بطريقة غير مباشرة باستخدام نظرية الإحاطة.

تتعلّق هذه النظرية بدالّة f قيمتها بين قيم دالّتين أخريين h, g

حيث إذا كان للدالّتين h, g النهاية نفسها عندما $x \to c$

فإن للدالّة f حينها النهاية نفسها عندما $x \to c$

معلومة:
تسمى نظرية الإحاطة أحيانًا
Squeeze Theorem
Sandwich Theorem
or Pinching Theorem

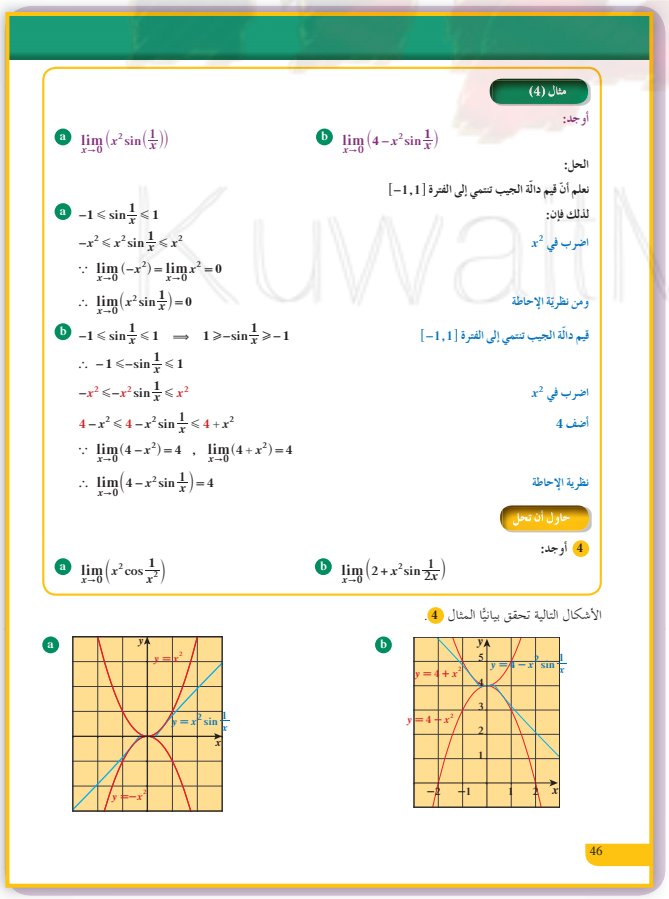
نظرية (13): نظرية الإحاطة
Sandwich Theorem

ليكن c, L عددين حقيقيين

فإذا كان $g(x) \le f(x) \le h(x)$ لكل x في جوار c، $x \neq c$

وكان $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$

فإنّ: $\lim_{x\to c} f(x) = L$



مثال (2)

أوجد:

a $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$ b $\lim_{x\to 0} \frac{5\tan x - 3\sin x}{4x}$

الحل:

a $\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\because \lim_{x\to 0} \cos x = 1 \ , \ 1 \neq 0$

$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$ قاعدة الضرب، توزيع النهاية $\lim_{x\to 0} \cos x \neq 0$

$= 1 \times \frac{1}{\cos 0} = 1 \times \frac{1}{1} = 1$

b $\lim_{x\to 0} \frac{5\tan x - 3\sin x}{4x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{5\tan x}{4x} - \frac{3\sin x}{4x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{5\tan x}{4x} - \lim_{x\to 0} \frac{3\sin x}{4x}$

$= \frac{5}{4}\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} - \frac{3}{4}\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ نظرية (قاعدة الطرح)

$= \frac{5}{4} \times 1 - \frac{3}{4} \times 1$ $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \ , \ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$= \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$ بسّط

حاول أن تحل

2 أوجد:

a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\tan x}$ b $\lim_{x\to 0} \frac{3\tan x + x^2\cos x}{5x}$

نتيجة (2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

نتيجة (3)

إذا كان $a, b \in \mathbb{R}^+$ فإن:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

مثال (3)

أوجد:

a $\lim_{x\to 0} \frac{5x+\sin x}{x}$ b $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x\tan x - 2x\cos x}{3x}$

مثال (4)

أوجد:

a $\lim_{x\to 0}\left(x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ b $\lim_{x\to 0}\left(4 - x^2\sin\frac{1}{x}\right)$

الحل:

نعلم أنّ قيم دالّة الجيب تنتمي إلى الفترة $[-1, 1]$

لذلك فإن:

a $-1 \leqslant \sin\frac{1}{x} \leqslant 1$

اضرب في x^2 $-x^2 \leqslant x^2\sin\frac{1}{x} \leqslant x^2$

$\because \lim_{x\to 0}(-x^2) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$

$\therefore \lim_{x\to 0}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right) = 0$ ومن نظرية الإحاطة

b $-1 \leqslant \sin\frac{1}{x} \leqslant 1 \implies 1 \geqslant -\sin\frac{1}{x} \geqslant -1$ قيم دالّة الجيب تنتمي إلى الفترة $[-1, 1]$

$\therefore -1 \leqslant -\sin\frac{1}{x} \leqslant 1$

اضرب في x^2 $-x^2 \leqslant -x^2\sin\frac{1}{x} \leqslant x^2$

أضف 4 $4 - x^2 \leqslant 4 - x^2\sin\frac{1}{x} \leqslant 4 + x^2$

$\because \lim_{x\to 0}(4 - x^2) = 4 \ , \ \lim_{x\to 0}(4 + x^2) = 4$

$\therefore \lim_{x\to 0}\left(4 - x^2\sin\frac{1}{x}\right) = 4$ نظرية الإحاطة

حاول أن تحل

4 أوجد:

a $\lim_{x\to 0}\left(x^2\cos\frac{1}{x^2}\right)$ b $\lim_{x\to 0}\left(2 + x^2\sin\frac{1}{2x}\right)$

الأشكال التالية تحقق بيانيًا المثال 4.

a

b

اختبار سريع

أوجد نهاية كلّ من الدوال التالية:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-3x^2+2x\sin x}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-3x^2+2x\sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-3x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}x\sin x\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}(-3) + 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = -3+2 = -1$$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-3x^2\sin^2 x - 3x^2\cos^2 x + 4x}{x^2}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2\sin^2 x - 3x^2\cos^2 x}{x^2} + \frac{4x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-3x^2}{x^2}(\sin^2 x+\cos^2 x)+\frac{4}{x}\right)$$

$$= -3\times 1 + 0 = -3$$

كذلك يمكننا استخدام نظرية الإحاطة في إيجاد نهايات الدوال المثلثية عندما $x\to\pm\infty$.

مثال (5)

أوجد: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

الحل:

نعلم أن:

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$$

$$\forall x>0\ ,\ \frac{-1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{1}{x}$$

$$\because \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

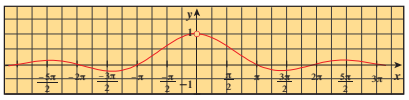
$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

نظرية الإحاطة

حاول أن تحل

5 أوجد: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x+1}$

ويمكننا التأكد من صحة حل المثال السابق بيانيًا كالتالي:



x (rad)	$y=\dfrac{\sin x}{x}$
$\frac{7\pi}{2}$	−0.091
$\frac{37\pi}{7}$	0.0224
150	−0.00477
240	0.00394
300	−0.00333
600	0.000074

الرسم البياني للدالة $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ يتذبذب حول محور السينات، وسعة التذبذب تتناقص للصفر عندما $x\to\pm\infty$.

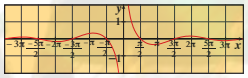
يبيّن جدول قيم الدالة f أن $f(x)\to 0$ عندما $x\to\infty$.

ويمكن استنتاج $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

كذلك يمكن استنتاج

الرسم البياني للدالة f: $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$ يتذبذب حول محور السينات وسعة التذبذب تتناقص للصفر عندما $x\to\pm\infty$ ويمكن استنتاج أن $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0$

x (rad)	$y=\dfrac{\cos x}{x}$
3π	−0.106
4π	0.0795
100	−0.00862
200	0.002435
300	−0.0000736
450	0.00162256



47

تمرّن 1–4

نهايات بعض الدوال المثلثية

Limits of Some Trigonometric Functions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–9)، أوجد النهاية في كلٍّ مما يلي:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos 2x}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1+\cos x}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\tan x}{\sin x-\cos x}$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x+3\sin x}{2x}$

(7) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2-\sin 3x}{x^2}$

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$

في التمارين (10–12)، أوجد النهاية في كلٍ مما يلي (إرشاد: اقسم كلًّا من البسط والمقام على x):

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 7x}$

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\tan 2x}$

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x}{\cos 3x}$

في التمارين (13–15)، أوجد النهاية في كلٍ مما يلي:

(13) $\lim\limits_{x\to 0}\left(3+x^2\cos\dfrac{1}{x^2}\right)$

(14) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x\cos x}{2x^2}$

(15) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+\sin x}{x}$

17

9 إجابات وحلول

«حاول أن تحل»

1 **(a)** يمكن كتابة $1-\cos x$ على الصورة $2\sin^2\frac{x}{2}$ فنحصل على:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{4}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{4}{2}=1$$

(b) **(1)** -1 **(2)** $\frac{2}{3}$ **(3)** -2

2 **(a)** $\frac{1}{2}$ **(b)** $\frac{3}{5}$

3 **(a)** 0 **(b)** 1

4 **(a)** 0 **(b)** 2

5 0

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin 3x}{2x}=\frac{3}{2}$ (a) (b)

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos 2x}{4x}=\frac{1}{2}$ (a) (b)

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=0$ (a) (b)

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin 2x}{2\cos 2x}=\frac{1}{2}$ (a) (b)

(5) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2\sin x+5x^3}{4x^3}=2$ (a) (b)

في التمارين (6–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin x}=$

(a) 2 (b) -2 (c) 0 (d) ∞

(7) $\lim_{x\to 0}\left(3+x^2\sin\frac{1}{x}\right)=$

(a) 0 (b) 4 (c) 3 (d) ∞

(8) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-x\cos x}{2x^2}$

(a) ∞ (b) $-\infty$ (c) -2 (d) 2

(9) $\lim_{x\to 0}\frac{4x^2+5\sin^2 x}{3x^2}=$

(a) 3 (b) 9 (c) 0 (d) ∞

(10) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\cos x}{|2x|}=$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) 0 (d) ∞

18

5–1: الاتّصال

1 الأهداف

- يتعرف الاتصال عند نقطة.
- يتعرف شروط اتصال دالة عند نقطة
- يتعرف أنواع الانفصال.
- يتخلص من الانفصال.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

الاتصال – اتصال من الجهتين – اتصال من جهة اليمين – اتصال من جهة اليسار – الاتصال عند نقطة – انفصال – انفصال يمكن التخلص منه – انفصال نتيجة قفزة – انفصال لا نهائي.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show) – مصورات.

4 التمهيد

اطلب إلى الطلاب رسم الدالة $f(x) = 2x - 3$، ثم اطلب إليهم رسم الدالة g المعرفة كما يلي:

$$g(x) = \begin{cases} -x+3 & : \ x \leqslant 2 \\ x+1 & : \ x > 2 \end{cases}$$

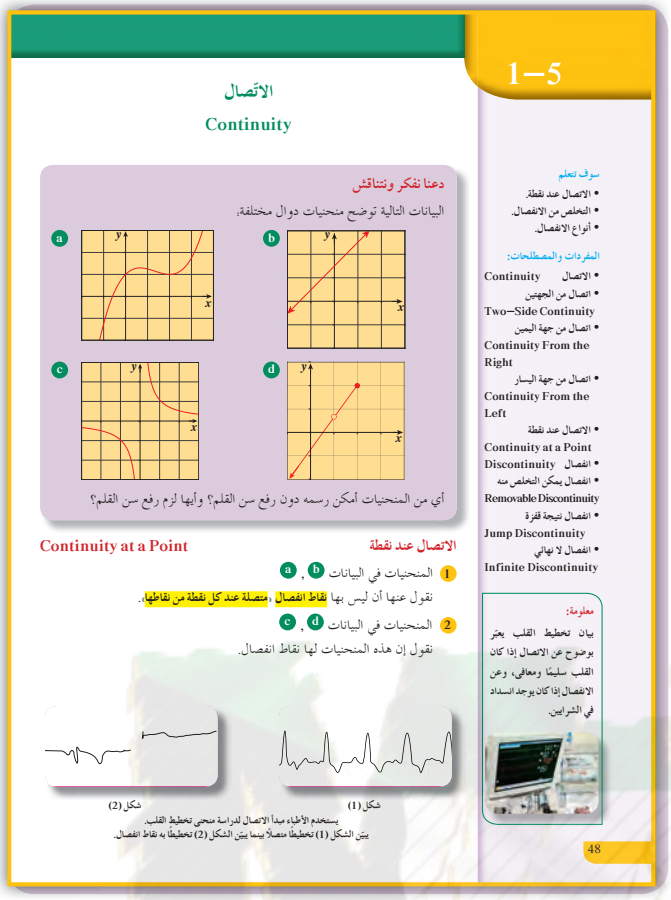
اسألهم: هل منحنى الدالة f متصل؟

هل منحنى الدالة g متصل؟

5 التدريس

يمكن أن تبدأ الدرس باستخدام قلم رصاص لتتبع الرسم البياني لدالة متصلة على أي فترة من دون رفع القلم عن الورقة.

ينبغي أن يكون تعريف الاتصال مفهومًا بوضوح لدى الطلاب، كن واعيًا لتميز جيّدًا بين الاتصال عند c حيث $c \in (a,b)$ والاتصال عند أطراف $[a,b]$.



1–5

الاتّصال

Continuity

سوف تتعلم

- الاتصال عند نقطة.
- التخلص من الانفصال.
- أنواع الانفصال.

المفردات والمصطلحات:

- الاتصال Continuity
- اتصال من الجهتين Two–Side Continuity
- اتصال من جهة اليمين Continuity From the Right
- اتصال من جهة اليسار Continuity From the Left
- الاتصال عند نقطة Continuity at a Point
- انفصال Discontinuity
- انفصال يمكن التخلص منه Removable Discontinuity
- انفصال نتيجة قفزة Jump Discontinuity
- انفصال لا نهائي Infinite Discontinuity

معلومة:

بيان تخطيط القلب يعبّر بوضوح عن الاتصال إذا كان القلب سليمًا ومعافى، وعن الانفصال إذا كان يوجد انسداد في الشرايين.

دعنا نفكر ونتناقش

البيانات التالية توضح منحنيات دوال مختلفة.

أي من المنحنيات أمكن رسمه دون رفع سن القلم؟ وأيها لزم رفع سن القلم؟

الاتصال عند نقطة Continuity at a Point

1 المنحنيات في البيانات a , b

نقول عنها أن ليس بها نقاط انفصال، متصلة عند كل نقطة من نقاطها.

2 المنحنيات في البيانات c , d

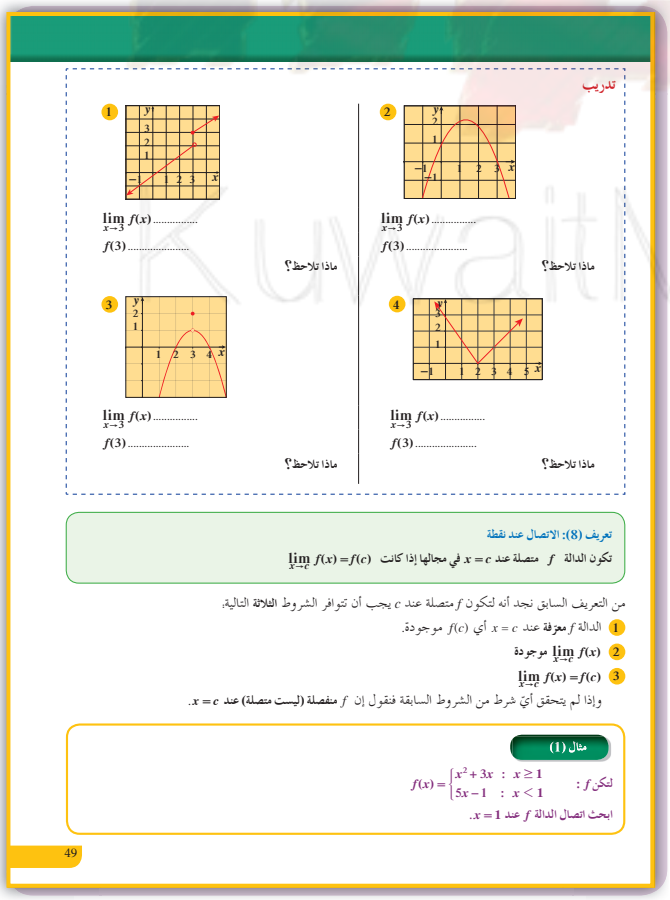
نقول إن هذه المنحنيات لها نقاط انفصال.

شكل (1) شكل (2)

يستخدم الأطباء مبدأ الاتصال لدراسة منحنى تخطيط القلب.

يبيّن الشكل (1) تخطيطًا متصلاً بينما يبيّن الشكل (2) تخطيطًا به نقاط انفصال.

48



تدريب

1 $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ .....

$f(3)$ .....

ماذا تلاحظ؟

2 $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ .....

$f(3)$ .....

ماذا تلاحظ؟

3 $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ .....

$f(3)$ .....

ماذا تلاحظ؟

4 $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ .....

$f(3)$ .....

ماذا تلاحظ؟

تعريف (8): الاتصال عند نقطة

تكون الدالة f متصلة عند $x = c$ في مجالها إذا كانت $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

من التعريف السابق نجد أنه لتكون f متصلة عند c يجب أن تتوافر الشروط **الثلاثة** التالية.

1 الدالة f **معرفة** عند $x = c$ أي $f(c)$ موجودة.

2 $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجودة

3 $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

وإذا لم يتحقق أيّ شرط من الشروط السابقة فنقول إن f **منفصلة (ليست متصلة)** عند $x = c$.

مثال (1)

لتكن f: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & : \ x \geq 1 \\ 5x - 1 & : \ x < 1 \end{cases}$

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 1$.

49

تجري مناقشة أنواع مختلفة من عدم الاتصال في هذا الدرس. سوف يكون من المفيد توضيح كل نوع من عدم الاتصال باستخدام آلة حاسبة علمية بيانة أو بشكل تقريبي على السبورة. ينبغي أن تستخدم مسميات الأنواع المختلفة من عدم الاتصال خلال هذا المقرر.

اطلب إليهم تحديد حالات الانفصال الذي يمكن التخلص منه.

الحل:

$f(1)=(1)^2+3(1)=1+3=4$ (1)

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(5x-1)=5(1)-1=4$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+3x)=(1)^2+3(1)=4$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=4$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=4$ (2)

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

من (1) و (2)

$\therefore$ f متصلة عند $x=1$

حاول أن تحل

1 $f(x)=\begin{cases} x^3+x & : x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{x+1} & : x>0 \end{cases}$ ابحث اتصال f عند $x=0$

مثال (2)

لتكن f : $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & : x>3 \\ 7 & : x\le 3 \end{cases}$

ابحث اتصال الدالة f عند $x=3$.

الحل:

$f(3)=7$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} 7=7$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-9}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{\cancel{(x-3)}^{1}(x+3)}{\cancel{x-3}_{1}}$

$=\lim\limits_{x\to 3^+}(x+3)=3+3=6$

$\because \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)\ne \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ليست موجودة

$\therefore$ الدالة f ليست متصلة عند $x=3$

حاول أن تحل

2 ابحث اتصال الدالة f عند $x=2$ حيث $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & : x<2 \\ 1 & : x=2 \\ x^2+1 & : x>2 \end{cases}$

في المثال السابق نجد أن $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=f(3)=7$ في هذه الحالة تكون الدالة f متصلة عند $x=3$ من جهة اليسار وسوف نتطرق لذلك لاحقًا.

مثال (3)

ابحث اتصال الدالة f عند $x=2$ حيث $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-2}{|x-2|} & : x\ne 2 \\ 1 & : x=2 \end{cases}$

الحل:

$|x-2|=\begin{cases} x-2 & : x>2 \\ -x+2 & : x<2 \end{cases}$

$\dfrac{x-2}{|x-2|}=\begin{cases} \dfrac{x-2}{x-2} & : x>2 \\ \dfrac{-x+2}{x-2} & : x<2 \end{cases}$

$\therefore f(x)=\begin{cases} 1 & : x>2 \\ -1 & : x<2 \\ 1 & : x=2 \end{cases}$

$f(2)=1$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1$

$\because \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\ne \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ليست موجودة

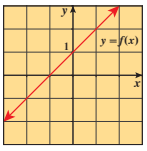
$\therefore$ الدالة f ليست متصلة عند $x=2$

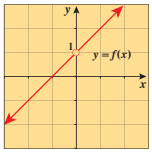
حاول أن تحل

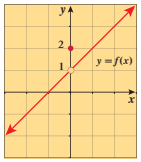
3 ابحث اتصال الدالة f عند $x=-1$ حيث $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x+1|}{x+1}-2x & : x\ne -1 \\ 2 & : x=-1 \end{cases}$

ملاحظة: الدالة f متصلة عند $x=2$ من جهة اليمين. لماذا؟

يبيّن الشكلان c , b أدناه أمثلة توضيحيّة لبعض الأنواع المختلفة للانفصال:

a


b


c


فالدالّة الموضّحة في الشكل a متّصلة عند $x=0$، والدالّة الموضّحة في الشكل b ليست متّصلة عند $x=0$ ولكي تكون متّصلة يقتضي أن تكون $f(0)=1$. الدالّة الموضّحة في الشكل c ليست متّصلة عند $x=0$ ولكي تكون متّصلة يقتضي أن تكون $f(0)$ مساوية لـ 1 بدلًا من 2.

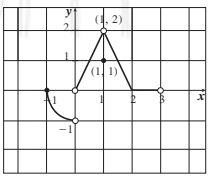
الانفصال في c , b هو انفصال يمكن التخلّص منه من خلال إعادة تعريف الدّالة عند $x=0$ وذلك بوضع $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

تمرّن 1–5

الاتّصال
Continuity

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–4)، استخدم الدالّة f المعرفة بأكثر من قاعدة ورسمها البياني للإجابة عن الأسئلة.



$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & , -1\le x<0 \\ 2x & , 0<x<1 \\ 1 & , x=1 \\ -2x+4 & , 1<x<2 \\ 0 & , 2\le x<3 \end{cases}$

(1) ابحث اتصال الدالة f عند $x=0$

(2) ابحث اتصال الدالة f عند $x=1$

(3) ابحث اتصال الدالة f عند $x=2$

(4) **تفكير ناقد.** هل من الممكن إعادة تعريف الدالّة f لتكون متّصلة عند $x=0$؟ فسّر إجابتك.

(5) ارسم شكلًا ممكنًا يمثّل دالّة f بحيث تحقق الشروط التالية.
$f(-2)$ موجودة، $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=f(-2)$ ولكن $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ غير موجودة.

في التمرينين (6–9)، ابحث اتصال كل من الدوال التالية عند $x=c$:

(6) $f(x)=\begin{cases} x+5 & : x\ge 0 \\ 5-x & : x<0 \end{cases}$, $x=0$

(7) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3x-4}{x+1} & : x\ne -1 \\ -1 & : x=-1 \end{cases}$, $x=-1$

(8) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3x}{|x|} & : x\ne 0 \\ -3 & : x=0 \end{cases}$, $x=0$

(9) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & : x\ne 1 \\ \dfrac{1}{2} & : x=1 \end{cases}$, $x=1$

في الأمثلة (1), (2), (3)

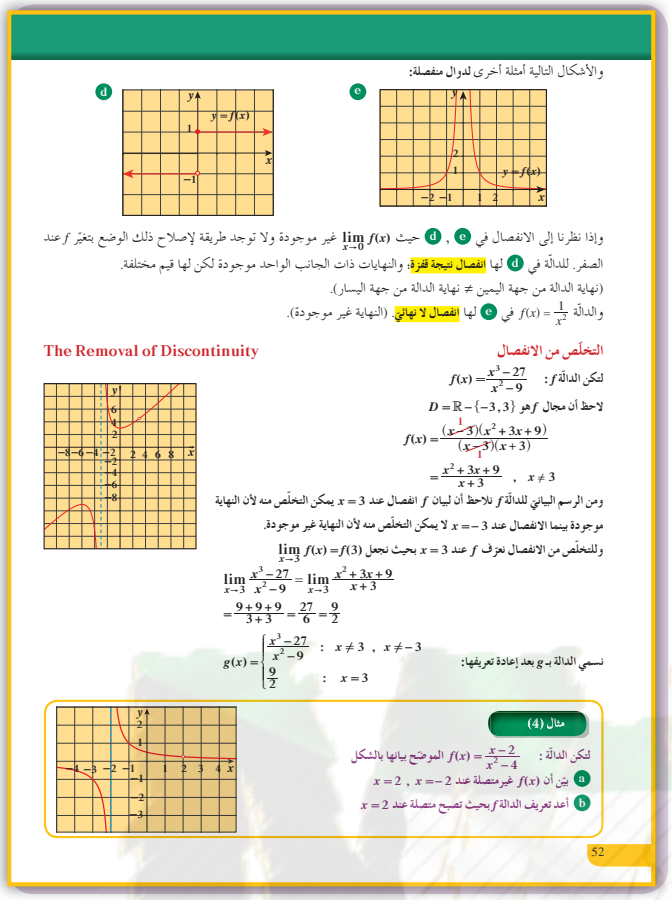
توفر هذه الأمثلة مقدمة حول كيفية معرفة إمكانية الاتصال عند نقطة محددة من خلال حساب النهايات من جهتي النقطة وعند حساب صورة النقطة، إذا تساوت جميعها يكون هناك اتصال.

في المثال (4)

يوضّح هذا المثال فكرة التخلص من الانفصال عند نقطة غير معرفة في الدالة، بحيث يتم إعادة تعريف الدالة عند تلك النقطة وتكون الدالة متصلة عندها.

6 الربط

اطلب إلى الطلاب إحضار رسم بياني لتخطيط قلب سليم، وناقش معهم كيفية اتصال جميع النقاط، إضافة إلى رسم بياني لتخطيط قلب مريض وناقش معهم أيضًا نقاط عدم الاتصال أو اطلب إليهم مشاهدة تخطيط قلب تمّ أخذه في غرفة العمليات.



والأشكال التالية أمثلة أخرى لدوال منفصلة:

d

e

وإذا نظرنا إلى الانفصال في e , d حيث $\lim_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة ولا توجد طريقة لإصلاح ذلك الوضع بتغيّر f عند الصفر. للدالّة في d لها **انفصال نتيجة قفزة**: والنهايات ذات الجانب الواحد موجودة لكن لها قيم مختلفة.
(نهاية الدالة من جهة اليمين ≠ نهاية الدالة من جهة اليسار).
والدالّة $f(x)=\frac{1}{x^2}$ في e لها **انفصال لا نهائي**. (النهاية غير موجودة).

التخلّص من الانفصال — **The Removal of Discontinuity**

لتكن الدالّة f: $f(x)=\frac{x^3-27}{x^2-9}$

لاحظ أن مجال f هو $D=\mathbb{R}-\{-3,3\}$

$$f(x)=\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+3)}$$

$$=\frac{x^2+3x+9}{x+3}\ ,\quad x\neq 3$$

ومن الرسم البياني للدالّة f نلاحظ أن لبيان f انفصال عند $x=3$ يمكن التخلّص منه لأن النهاية موجودة بينما الانفصال عند $x=-3$ لا يمكن التخلّص منه لأن النهاية غير موجودة.

وللتخلّص من الانفصال نعرّف f عند $x=3$ بحيث نجعل $\lim_{x\to 3} f(x)=f(3)$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x+9}{x+3}$$

$$=\frac{9+9+9}{3+3}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$$

نسمي الدالة بـ g بعد إعادة تعريفها:

$$g(x)=\begin{cases}\frac{x^3-27}{x^2-9} & :\ x\neq 3\ ,\ x\neq -3\\ \frac{9}{2} & :\ x=3\end{cases}$$

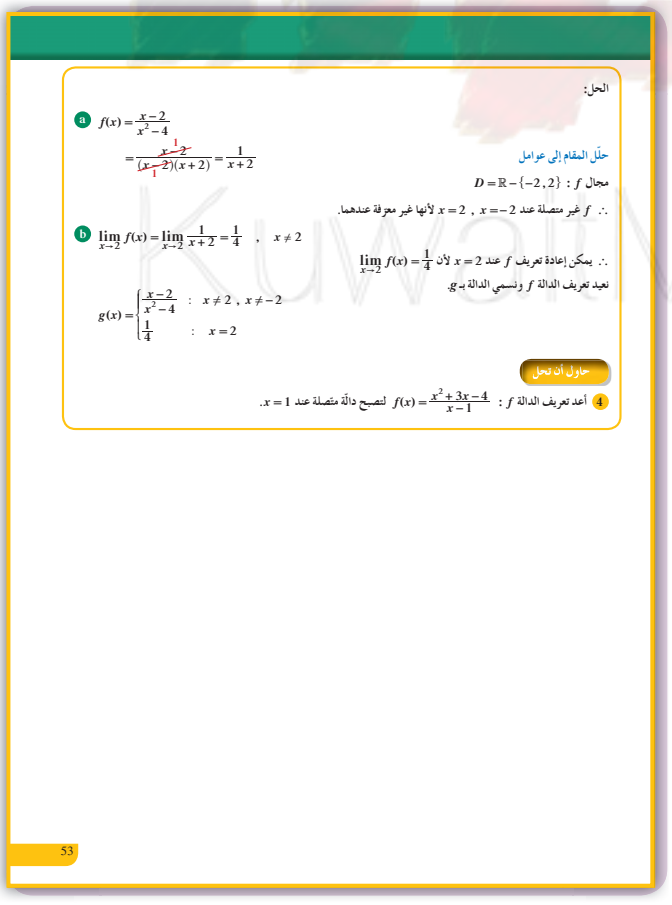
مثال (4)

لتكن الدالّة: $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$ الموضّح بيانها بالشكل

a بيّن أن $f(x)$ غير متصلة عند $x=2\ ,\ x=-2$

b أعد تعريف الدالة f بحيث تصبح متصلة عند $x=2$

52



الحل:

a $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$

$$=\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{1}{x+2}$$

حلّل المقام إلى عوامل

مجال f: $D=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

$\therefore$ f غير متصلة عند $x=-2\ ,\ x=2$ لأنها غير معرفة عندهما.

b $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}\ ,\quad x\neq 2$

$\therefore$ يمكن إعادة تعريف f عند $x=2$ لأن $\lim_{x\to 2} f(x)=\frac{1}{4}$

نعيد تعريف الدالة f ونسمي الدالة بـ g.

$$g(x)=\begin{cases}\frac{x-2}{x^2-4} & :\ x\neq 2\ ,\ x\neq -2\\ \frac{1}{4} & :\ x=2\end{cases}$$

حاول أن تحل

4 أعد تعريف الدالة f: $f(x)=\frac{x^2+3x-4}{x-1}$ لتصبح دالّة متصلة عند $x=1$.

53

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

(1) عدم إيجاد صورة العدد المطلوب بحيث الاتصال عنده.

(2) قد يجد بعض الطلاب صعوبة في إدراك الفرق بين الاتصال عند c : $c \in (a,b)$ والاتصال عند نقطة طرفية. شدّد على معنى النقطة الطرفية مدعمًا كلامك برسم بياني.

8 التقييم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» وتحقق من مدى إدراكهم لمفاهيم هذا الدرس ونظرياته.

اختبار سريع

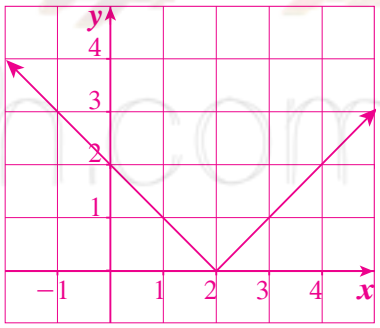
❶ (a) ابحث اتصال الدالة: $f(x) = \begin{cases} 2-x \ , & x < 2 \\ x-2 \ , & x \geqslant 2 \end{cases}$

عند $x = 2$

$f(2) = 0$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$$

(b) دعّم إجابتك برسم بيان الدالة f.



❷ إذا كانت: $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x-2} \ , \ x \neq 2$

فما القيمة التي تعطى لِـ $f(2)$ لتصبح f متصلة عند $x = 2$؟ 3

❸ إذا كانت: $f(x) = \begin{cases} x^2 \ , & x > 2 \\ x+a \ , & x \leqslant 2 \end{cases}$،

فما قيمة a التي تجعل الدالة f متصلة لكل قيمة x؟

$a = 2$

---

(10) أوجد قيمة a بحيث تصبح الدالّة التالية متّصلة عند $x = 3$: $f(x) = \begin{cases} x^2-1 \ , & x < 3 \\ 2ax \ , & x \geq 3 \end{cases}$

في التمارين (11–13)، أوجد نقاط الانفصال للدالّة. ثم حدّد نوع الانفصال وإمكانية التخلص منه مع ذكر السبب.

(11) $y = \dfrac{x-1}{x^2-4x+3}$

(12) $y = \sqrt[3]{2x-1}$

(13) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 \ , & x \neq -1 \\ 2 \ , & x = -1 \end{cases}$

في التمارين (14–16)، أعد تعريف الدالّة بحيث تكون متصلة عند النقطة المشار إليها.

(14) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x+3} \ , \ x = -3$

(15) $f(x) = \dfrac{\sin 4x}{x} \ , \ x = 0$

(16) $f(x) = \dfrac{x-4}{\sqrt{x-2}} \ , \ x = 4$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة f: $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2} + 1$ متصلة عند $x = -2$ (a) (b)

(2) الدالة: $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$ (a) (b)

(3) الدالة: $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ متصلة عند $x = -1$ (a) (b)

(4) إذا كانت الدالة f متصلة عند $x = -1$ وكان $\lim\limits_{x\to -1}(f(x) - 2) = -1$ فإنّ $f(-1) = 1$ (a) (b)

في التمارين (5–12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) نقاط انفصال الدالة f: $f(x) = \cot x$ هي:

(a) $0 \ , \ \pi$ (b) $2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

(c) $k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$ (d) $\frac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

(6) نقاط الدالة f: $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$ التي يمكن التخلص من الانفصال عندها هي:

(a) 2 (b) $-2 \ , \ 2$ (c) -2 (d) $-5 \ , \ 2$

(7) نقاط الدالة f: $f(x) = \dfrac{2x^3+16}{x^2+x-2}$ التي لا يمكن التخلص من الانفصال عندها هي:

(a) $-1 \ , \ 2$ (b) -2 (c) $1 \ , \ -2$ (d) 1

(8) إذا كانت الدالة f متصلة عند $x = 2$ فإنّ $f(x)$ يمكن أن تكون:

(a) $\dfrac{1}{|x-2|}$ (b) $\sqrt{x-2}$ (c) $\dfrac{|x-2|}{x-2}$ (d) $\begin{cases} \sqrt{x^2-3} & : x > 2 \\ 3x-5 & : x \leqslant 2 \end{cases}$

(9) إذا كانت الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & : x \geq 2 \\ \dfrac{x^2-4}{x-2} & : x < 2 \end{cases}$ فإن:

(a) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 4$ (b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 4$ (c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ موجودة (d) f متصلة عند $x = 2$

(10) لتصبح الدالة f ، $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}$ متصلة عند $x=1$، يجب إعادة تعريفها على الشكل التالي:

ⓐ $\begin{cases}\frac{x^2+x+1}{x+1} & , x\neq 1\\ \frac{3}{2} & , x=1\end{cases}$

ⓑ $\begin{cases}\frac{x^2+x+1}{x+1} & , x>1\\ \frac{3}{2} & , x=1\end{cases}$

ⓒ $\begin{cases}\frac{x^2+x+1}{x+1} & , x\neq 1\\ \frac{1}{2} & , x=1\end{cases}$

ⓓ لا يمكن إعادة تعريفها

(11) إذا كانت الدالة f متصلة عند $x=-2$ وكانت $\lim\limits_{x\to -2}(x^2+f(x))=7$ فإن $f(-2)$ تساوي:

ⓐ 3 ⓑ 5

ⓒ 9 ⓓ 11

(12) إذا كانت الدالة g متصلة عند $x=1$ وكانت النقطة $(1\ ,-3)$ تقع على منحنى الدالة g فإن $\lim\limits_{x\to 1}(g(x))^2$ تساوي:

ⓐ -6 ⓑ -3

ⓒ 1 ⓓ 9

في التمارين (13–15)، توجد قائمتان. اختر لكل سؤال من القائمة (1) ما يناسبه من القائمة (2) لتحصل على عبارة صحيحة:

إذا كانت g دالة متصلة عند $x=a$ ، $a\in\mathbb{Z}$ وكانت:

القائمة (1)	القائمة (2)
(13) $g(x)=\begin{cases}x+1 & : x>a\\ 3-x & : x\leq a\end{cases}$ $\Rightarrow a=$	ⓐ -1
(14) $g(x)=\begin{cases}2ax-2 & : x\neq a\\ 3a & : x=a\end{cases}$ $\Rightarrow a=$	ⓑ 2
(15) $g(x)=\begin{cases}3x^2 & : x>a\\ 2x & : x\leq a\end{cases}$ $\Rightarrow a=$	ⓒ 0
	ⓓ 1
	ⓔ $\frac{2}{3}$

22

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a)، (b) يمكن رسمهما دون رفع سن القلم.

(c)، (d) يلزم رفع سن القلم لرسمهما.

«حاول أن تحل»

1 $f(0)=0$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x=0$

2 $f(2)=1$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=5$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=5$

$\therefore$ الدالة f غير متصلة عند $x=2$

3 $f(-1)=2$; $\lim\limits_{x\to (-1)^-} f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to (-1)^+} f(x)=3$

$\therefore$ الدالة f غير متصلة عند $x=-1$

4 $f(x)=\frac{(x-1)(x+4)}{x-1}=x+4$

$$g(x)=\begin{cases}\frac{x^2+3x-4}{x-1} & ; x\neq 1\\ 5 & ; x=1\end{cases}$$

«تدريب»

1 $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=2$; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=3$

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ غير موجودة

$= f(3)=3$

النهاية جهة اليمين $\neq$ النهاية لجهة اليسار

$\therefore$ f غير متصلة عند $x=3$

2 0، $f(3)=0$ ، f متصلة عند $x=3$

3 1، $f(3)=2$ ، f غير متصلة عند $x=3$

4 1، f غير معرّفة عند $x=3$ ، f غير متصلة عند $x=3$

6–1: نظريات الاتّصال

1 الأهداف

- يتعرف نظريات الاتصال.
- يتعرف الدوال المتصلة.
- يتعرف الدوال المركبة.
- يدرس اتصال الدوال المركبة.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

دالة متصلة – دالة مركبة.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة بيانية – حاسوب –جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

(1) ابحث اتصال الدوال التالية عند $x = 1$ حيث:

$$f(x) = 3x^2 \quad ; \quad g(x) = 4x \quad ; \quad h(x) = \frac{1}{x^2}$$

(2) ابحث اتصال الدالة v عند $x = 1$:

$$v(x) = 3x^2 + 4x + \frac{1}{x^2}$$

(3) في الدالة f : $f(x) = \frac{2x+1}{5}$ عوّض عن x بـ $3h - 2$

ما قيمة $f(h)$؟

5 التدريس

(1) سوف نتعلم في هذا الدرس خصائص الدوال المتصلة ونتعرف على أهمها مثل دالة كثيرة الحدود ودالة الحدودية النسبية وغيرها. ونرى أيضًا تطورًا في دراسة مفهوم الاتصال من الاتصال عند نقطة للوصول إلى الدوال المتصلة.

(2) أشر إلى أن $f(x) = \sin x$ ودالة المطلق $f(x) = |x|$ هما دالتان متصلتان عند كل c في مجالها

اطلب إلى أحد الطلاب رسم كل من بياني الدالتين على السبورة للتحقق من الاتصال.

(3) وضح للطلاب نظرية (15) التي تتعلق بالدالة الجذرية وأهمية دليل الجذر وسنكتفي بالجزء (b) بدراسة الاتصال لدالة جذرية $\sqrt{f(x)}$ عند $x = c$ حيث $f(c) > 0$

1–6

نظريات الاتصال

Continuous Theorems

سوف تتعلم
- نظريات الاتصال.
- دوال متصلة.
- الدوال المركبة.
- اتصال الدوال المركبة.

المفردات والمصطلحات:
- دالة متصلة Continuous Function
- دالة مركبة Composite Function

دعنا نفكر ونتناقش

لتكن الدالة f ؛ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

والدالة g ؛ $g(x) = |x - 2|$

والدالة q ؛ $q(x) = x^2 - 5$

1 ابحث اتصال كل من f, g عند $x = 2$

2 ابحث اتصال كل من $f \cdot q$ ، $f + q$

3 لتكن h ؛ $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

a اكتب h دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

b هل الدالة h متصلة عند $x = 2$؟ ولماذا؟

نظرية (14): خواصّ الدوالّ المتّصلة

Properties of Continuous Functions

إذا كانت f, g دالتين متصلتين عند $x = c$، فإنّ الدوال التالية هي دوالّ متصلة عند $x = c$

الجمع:	$f + g$	1
الطرح:	$f - g$	2
الضرب في ثابت:	$k \cdot f$, $k \in \mathbb{R}$	3
الضرب:	$f \cdot g$	4
القسمة:	$\frac{f}{g}$, $g(c) \neq 0$	5

معلومة:
تمثّل الأفعوانيّة خطًّا متصلًا لمسار العربة.

دوال متصلة — Continuous Functions

1 الدالة f : $f(x) = k$ حيث k ثابت متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.

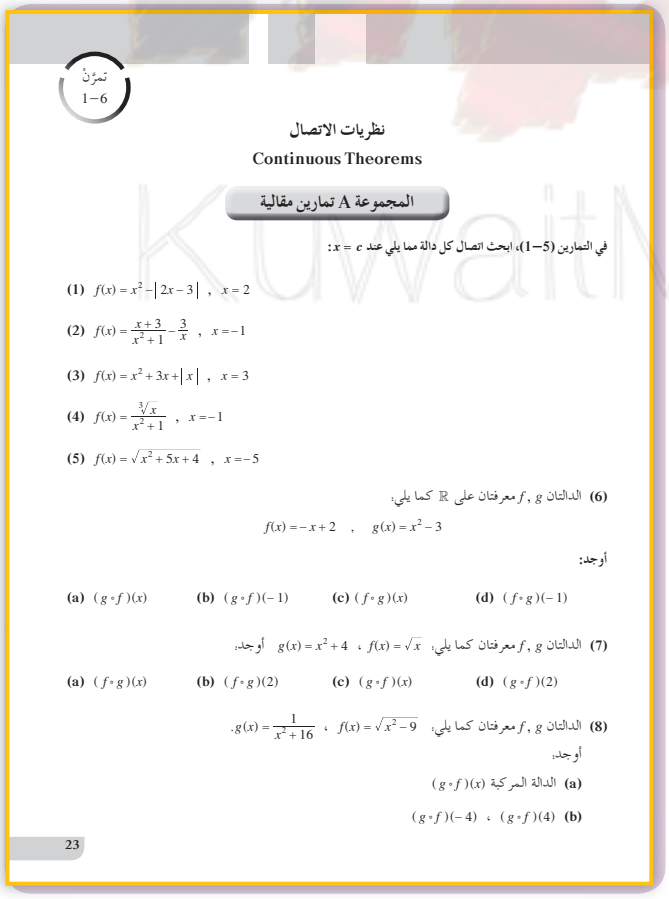
2 الدالة كثيرة الحدود متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.

3 الدالة الحدودية النسبية $\frac{f}{g}$ متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.

4 الدالة f : $f(x) = |x|$ متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.

5 الدوال المثلثية متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.

54



تمرّن 1–6

نظريات الاتصال

Continuous Theorems

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–5)، ابحث اتصال كل دالة مما يلي عند $x = c$:

(1) $f(x) = x^2 - |2x - 3|$, $x = 2$

(2) $f(x) = \frac{x+3}{x^2+1} - \frac{3}{x}$, $x = -1$

(3) $f(x) = x^2 + 3x + |x|$, $x = 3$

(4) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}$, $x = -1$

(5) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 4}$, $x = -5$

(6) الدالتان f, g معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = -x + 2 \quad , \quad g(x) = x^2 - 3$$

أوجد:

(a) $(g \circ f)(x)$ (b) $(g \circ f)(-1)$ (c) $(f \circ g)(x)$ (d) $(f \circ g)(-1)$

(7) الدالتان f, g معرفتان كما يلي: $f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = x^2 + 4$ أوجد:

(a) $(f \circ g)(x)$ (b) $(f \circ g)(2)$ (c) $(g \circ f)(x)$ (d) $(g \circ f)(2)$

(8) الدالتان f, g معرفتان كما يلي: $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ ، $g(x) = \frac{1}{x^2 + 16}$.

أوجد:

(a) الدالة المركبة $(g \circ f)(x)$

(b) $(g \circ f)(4)$ ، $(g \circ f)(-4)$

23

(4) وضح للطلاب مفهوم تركيب دالتين والشرط الواجب توافره للتركيب واقتصر في دراسة الدوال القابلة للتركيب.

(5) طبّق نظرية (16) وشروطها ولاحظ أن الشروط كافية وليست لازمة. مثال للمعلم

$$f(x)=x^2\ ,\ g(x)=\sqrt{x}$$

الدالة $(g\circ f)$ لا تحقق شروط النظرية (16) ولكنها متصلة عند $x=0$

في المثالين (1), (2)

تطبيق لخواص الدوال المتصلة (الجمع والطرح) والدوال النسبية لدراسة الاتصال عند نقطة.

في المثال (3)

مثال تطبيقي لدراسة اتصال الدوال الجذرية عند نقطة.

في المثالين (4), (5)

إيجاد الدالة المركبة لدوال قابلة للتركيب. أشر إلى أن دراستنا اقتصرت على الدوال القابلة للتركيب. وأكد أن $(g\circ f)$ ليست بالضرورة تساوي $(f\circ g)$

في المثالين (6), (7)

دراسة اتصال دالة مركبة عند نقطة.

في المثال (7)، أشر إلى أن الدالة g (دالة القيمة المطلقة) هي دالة متصلة.

6 الربط

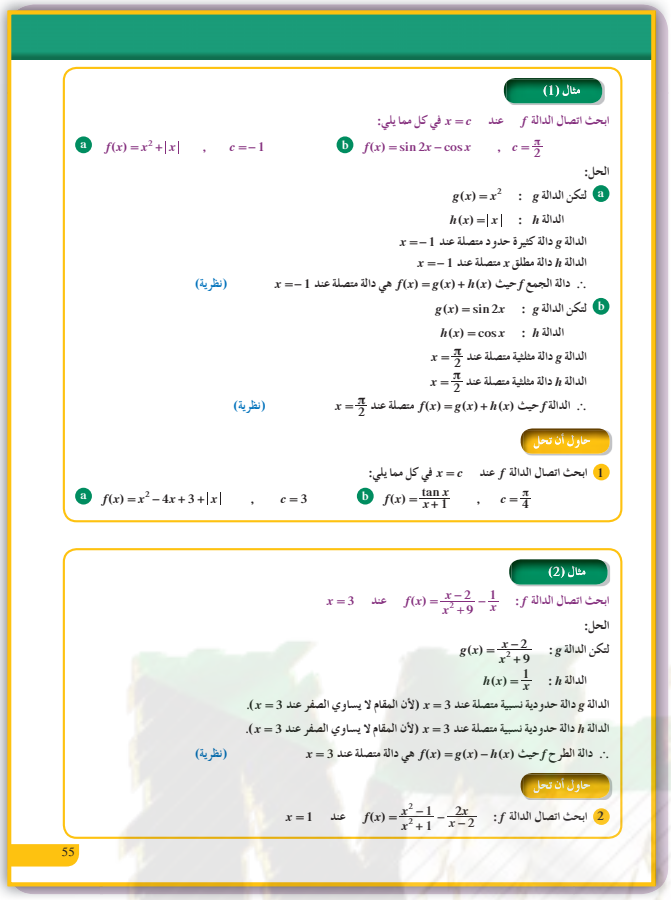
تمثل الأفعوانيّة خطًّا متصلًا لمسار العربة.

7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

- قد يحاول بعض الطلاب دراسة اتصال دالة عند نقطة لا تنتمي إلى مجال الدالة خاصة في حالة الدوال الجذرية. شدّد على أن انتماء النقطة إلى مجال الدالة أساسي ومبدئي لأنه إذا لم يكن بالإمكان حساب $f(a)$ فلسنا بحاجة إلى دراسة النهايات، ونؤكد مباشرة أن الدالة غير متصلة عند هذه النقطة.
- قد يخطئ الطلاب في تطبيق نظرية (16).

8 التقييم

تابع عمل الطلاب في فقرات «حاول أن تحل» لتتحقق من دقة تعاملهم مع الخصائص وصحة تطبيقهم للنظريات.



مثال (1)

ابحث اتصال الدالة f عند $x=c$ في كل مما يلي:

a $f(x)=x^2+|x|\ ,\ c=-1$ b $f(x)=\sin 2x-\cos x\ ,\ c=\frac{\pi}{2}$

الحل:

a لتكن الدالة g : $g(x)=x^2$

الدالة h : $h(x)=|x|$

الدالة g دالة كثيرة حدود متصلة عند $x=-1$

الدالة h دالة مطلق x متصلة عند $x=-1$

∴ دالة الجمع f حيث $f(x)=g(x)+h(x)$ هي دالة متصلة عند $x=-1$ (نظرية)

b لتكن الدالة g : $g(x)=\sin 2x$

الدالة h : $h(x)=\cos x$

الدالة g دالة مثلثية متصلة عند $x=\frac{\pi}{2}$

الدالة h دالة مثلثية متصلة عند $x=\frac{\pi}{2}$

∴ الدالة f حيث $f(x)=g(x)+h(x)$ متصلة عند $x=\frac{\pi}{2}$ (نظرية)

حاول أن تحل

1 ابحث اتصال الدالة f عند $x=c$ في كل مما يلي:

a $f(x)=x^2-4x+3+|x|\ ,\ c=3$ b $f(x)=\frac{\tan x}{x+1}\ ,\ c=\frac{\pi}{4}$

مثال (2)

ابحث اتصال الدالة f: $f(x)=\frac{x-2}{x^2+9}-\frac{1}{x}$ عند $x=3$

الحل:

لتكن الدالة g: $g(x)=\frac{x-2}{x^2+9}$

الدالة h: $h(x)=\frac{1}{x}$

الدالة g دالة حدودية نسبية متصلة عند $x=3$ (لأن المقام لا يساوي الصفر عند $x=3$).

الدالة h دالة حدودية نسبية متصلة عند $x=3$ (لأن المقام لا يساوي الصفر عند $x=3$).

∴ دالة الطرح f حيث $f(x)=g(x)-h(x)$ هي دالة متصلة عند $x=3$ (نظرية)

حاول أن تحل

2 ابحث اتصال الدالة f: $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}-\frac{2x}{x-2}$ عند $x=1$

55

اتصال الدوال الجذرية عند نقطة

نظرية (15)

a الدالة الجذرية $y=\sqrt[n]{x}$ متصلة عند كل $x=c:c\in\mathbb{R}^+$ ، n عدد صحيح زوجي موجب،

ومتصلة عند كل $x=c:c\in\mathbb{R}$ ، n عدد صحيح فردي أكبر من 1.

b إذا كانت f دالة متصلة عند $x=c$ وكانت $f(c)>0$

فإن الدالة: $g(x)=\sqrt{f(x)}$ متصلة عند $x=c$

مثال (3)

ابحث اتصال كل من الدالتين التاليتين عند العدد المبيّن:

a $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}\ ,\ x=1$ b $f(x)=\sqrt{x+3}\ ,\ x=-1$

الحل:

a لتكن الدالة g: $g(x)=\sqrt[3]{x}$

الدالة h: $h(x)=x^2+1$

g دالة جذرية حيث $n=3$ (عدد صحيح فردي) متصلة عند $x=1$ (نظرية)

h دالة كثيرة حدود متصلة عند $x=1$

وحيث إن $h(1)=2\ ,\ 2\neq 0$

∴ الدالة f حيث $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ متصلة عند $x=1$

b نفرض أن g: $g(x)=x+3$ حيث $x\geqslant -3$

g دالة متصلة عند $x=-1$

وحيث إن $g(-1)=2\ ,\ 2>0$

∴ الدالة f حيث $f(x)=\sqrt{g(x)}=\sqrt{x+3}$ متصلة عند $x=-1$ (نظرية)

حاول أن تحل

3 ابحث اتصال كل من الدالتين التاليتين عند $x=-2$

a $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+4}$ b $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$

الدالة المركبة Composite Function

إذا كانت كل من $f\ ,\ g$ دالة حقيقية فإننا سنرى من خلال بعض الأمثلة أننا نستطيع تعيين دالة جديدة تنتج من تركيب الدالتين $f\ ,\ g$ إذا توفرت بعض الشروط.

لنأخذ على سبيل المثال الدالتين الحقيقيتين:

$f:\{1,2,3,4\}\to\mathbb{R}$

حيث $f(x)=x-1$

$g:\{0,1,2,3\}\to\mathbb{R}$

$g(x)=3x+1$

56

اختبار سريع

❶ ابحث اتصال الدالة f: $f(x) = \dfrac{x^2-4x+1}{x^2+x+3} - \dfrac{4}{x^2}$

عند $x = 1$

$h(x) = \dfrac{x^2-4x+1}{x^2+x+3}$; $g(x) = \dfrac{4}{x^2}$

h دالة حدودية نسبية مجالها $(-\infty , \infty)$

$\therefore$ h متصلة عند $x = 1$ كذلك g متصلة عند $x = 1$

$\therefore$ f متصلة عند $x = 1$

❷ ابحث اتصال الدالة f: $f(x) = \sqrt{x^2-7x+10}$

عند $x = 6$

$g(x) = x^2 - 7x + 10$ متصلة عند $x = 6$ مع $g(6) = 4 > 0$

$\therefore$ $f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة عند $x = 6$

❸ $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = \dfrac{x+3}{2}$

(a) أوجد: $(g \circ f)(x)$, $(f \circ g)(x)$

$\dfrac{x^2-1}{2}$, $\dfrac{x^2+6x-7}{4}$

(b) ابحث اتصال $(g \circ f)$ عند $x = 1$

f دالة متصلة عند $x = 1$, $f(1) = -3$

g دالة متصلة عند $x = -3$, $g(-3) = 0$

$\therefore$ $(g \circ f)$ دالة متصلة عند $x = 1$

ملاحظة: يمكن بحث الاتصال للدالة $(g \circ f)$ مباشرة كدالة حدودية.

9 إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

❶ الدالة f كثيرة الحدود $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$ ، $f(2) = 0$

$\therefore$ f متصلة عند $x = 2$

$g(2) = |0| = 0$

$\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (-x+2) = 0$

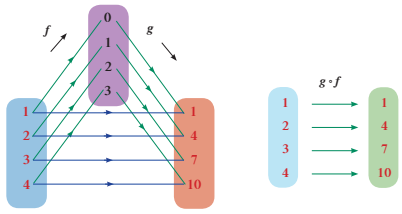
$\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x-2) = 0$

$\therefore$ g دالة متصلة عند $x = 2$

واضح أن:

تحت تأثير الدالة الأولى f	تحت تأثير الدالة الثانية g
$1 \longrightarrow 1-1=0$	$0 \longrightarrow 3\times0+1=1$
$2 \longrightarrow 2-1=1$	$1 \longrightarrow 3\times1+1=4$
$3 \longrightarrow 3-1=2$	$2 \longrightarrow 3\times2+1=7$
$4 \longrightarrow 4-1=3$	$3 \longrightarrow 3\times3+1=10$

وإذا فرضنا دالة ثالثة تعمل عمل الدالتين f , g معًا (f ثم g) لوجدنا أنه تحت تأثير هذه الدالة الجديدة:



نرمز للدالة الجديدة بالرمز $(g \circ f)$ وتقرأ g بعد f

ويكون: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(0) = 1$
$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 4$
$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(2) = 7$
$(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(3) = 10$

لاحظ أن: مدى الدالة الأولى f هو مجال الدالة الثانية g وإلا لما أمكن تعيين $(g \circ f)$.

وعمومًا:

إذا كانت كل من f , g دالتين حقيقيتين وكان مدى الدالة f مجموعة جزئية من مجال الدالة g فإنه يتعين دالة مركبة h:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

ستقتصر دراستنا على الدوال القابلة للتركيب.

57

مثال (4)

الدالتان f , g معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^2 - 1$, $f(x) = 1 + x$ أوجد:

ⓐ $(g \circ f)(x)$ ⓑ $(g \circ f)(2)$ ⓒ $(f \circ g)(x)$ ⓓ $(f \circ g)(2)$

الحل:

ⓐ $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 1 = (1+x)^2 - 1 = x^2 + 2x$

ⓑ $(g \circ f)(2) = (2)^2 + 2(2) = 8$

ⓒ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 1 + g(x) = 1 + x^2 - 1 = x^2$

ⓓ $(f \circ g)(2) = (2)^2 = 4$

حاول أن تحل

❹ إذا كانت f , g معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^2 + 3$, $f(x) = 2x + 3$ أوجد:

ⓐ $(g \circ f)(x)$ ⓑ $(g \circ f)(-1)$ ⓒ $(f \circ g)(x)$ ⓓ $(f \circ g)(-1)$

نستنتج من مثال (4) أن:

$$(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$$

إلّا في بعض الحالات الخاصة.

مثال (5)

لتكن: $g(x) = x^4 + 2$, $f(x) = \sqrt{x}$

أوجد:

ⓐ $(f \circ g)(x)$ ⓑ $(f \circ g)(0)$ ⓒ $(g \circ f)(x)$ ⓓ $(g \circ f)(0)$

الحل:

ⓐ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^4 + 2}$ — لاحظ أن مجال f هو $[0, \infty)$

ⓑ $(f \circ g)(0) = \sqrt{(0)^4 + 2} = \sqrt{2}$ — وأن مدى g : $[2, \infty)$ هو مجموعة جزئية من مجال f

ⓒ $(g \circ f)(x) = (f(x))^4 + 2 = (\sqrt{x})^4 + 2 = x^2 + 2$ — مجال g هو $\mathbb{R}$

ⓓ $(g \circ f)(0) = (0)^2 + 2 = 2$ — $\therefore$ مدى f هو مجموعة جزئية منه

حاول أن تحل

❺ لتكن: $g(x) = \dfrac{3}{x^2+4}$, $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ أوجد:

ⓐ $(f \circ g)(x)$ ⓑ $(g \circ f)(\sqrt{3})$

58

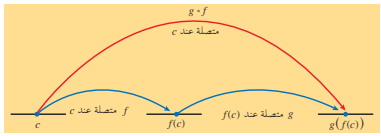
Continuity of Composite Functions at a Point — اتصال الدوالّ المركّبة عند نقطة

نظرية (16): اتصال الدوال المركّبة

إذا كانت f متصلة عند c ، و g متصلة عند $f(c)$ فإن الدالّة المركّبة $g \circ f$ متصلة عند c.

أي أن نهاية $g(f(x))$ عندما $x \to c$ هي $g(f(c))$ بمعنى

$$\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(f(c))$$



مثال (6)

لتكن: $f(x) = x^2 + 5$ ، $g(x) = \sqrt{x}$. ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$

الحل:

f دالة متصلة عند $x = -2$ (1)

$f(-2) = 9$

g دالة متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}^+$

$\therefore$ g دالة متصلة عند $x = 9$

أي أن g دالة متصلة عند $x = f(-2)$ (2)

من (1) , (2) نجد أن $g \circ f$ متصلة عند $x = -2$

حاول أن تحل

6 لتكن: $g(x) = 2x + 3$ ، $f(x) = \frac{|x|}{x+2}$. ابحث اتصال الدالة $f \circ g$ عند $x = 1$

59

مثال (7)

لتكن: $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

الحل:

نفرض أن: $h(x) = x^2 - 5x + 6$ ، $g(x) = |x|$

فنجد أن: $f(x) = (g \circ h)(x)$

$g(h(x)) = |x^2 - 5x + 6|$

h دالة متصلة عند $x = 2$ (1)

$h(2) = 4 - 10 + 6 = 0$

g دالة متصلة عند $x = 0$

أي أن g دالة متصلة عند $x = h(2)$ (2)

من (1) , (2) $\therefore$ $g \circ h$ متصلة عند $x = 2$

حاول أن تحل

7 لتكن: $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$

60

2 $(f+q)(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 5$

$(f+q)(2) = -1$

$$\lim_{x \to 2} (f+q)(x) = \lim_{x \to 2} (x^3 - 2x^2 + 2x - 5) = -1$$

$\therefore$ الدالة $f+q$ متصلة عند $x = 2$

$(f \cdot q)(x) = x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 15x^2 - 10x$

$(f \cdot q)(2) = 0$

$$\lim_{x \to 2} (f \cdot q)(x) = \lim_{x \to 2} (x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 15x^2 - 10x) = 0$$

$\therefore$ الدالة $f \cdot q$ متصلة عند $x = 2$

3 **(a)** $h(x) = \begin{cases} x(x-1) & : \quad x > 2 \\ -x(x-1) & : \quad x < 2 \end{cases}$

(b) h غير معرّفة عند $x = 2$

$\therefore$ h غير متصلة عند $x = 2$

«حاول أن تحل»

1 **(a)** $h(x) = -x^2 - 4x + 3$ متصلة عند $x = 3$

$g(x) = |x|$ متصلة عند $x = 3$

$\therefore$ دالة الجمع f متصلة عند $x = 3$

(b) $g(x) = \tan x$ متصلة عند $x = \frac{\pi}{4}$

$h(x) = x + 1$ متصلة عند $x = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ الدالة $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ متصلة عند $x = \frac{\pi}{4}$

2 كل من الدالتين $h(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ ، $g(x) = \frac{2x}{x - 2}$ متصلة عند $x = 1$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = 1$

3 **(a)** الدالة حدودية نسبية، دالة البسط ودالة المقام متصلتان عند $x = -2$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = -2$

(b) $g(x) = x^2 - 4x + 3$ متصلة عند $x = -2$ مع

$f(-2) = \sqrt{15} > 0$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = -2$

4 **(a)** $4x^2+12x+12$ **(b)** 4

(c) $2x^2+9$ **(d)** 11

5 **(a)** $\dfrac{\sqrt{x^4+8x^2+25}}{x^2+4}$ **(b)** $\dfrac{3}{8}$

6 g دالة متصلة عند $x=1$ (1)

$g(1)=5$

f دالة متصلة على $(-\infty,-2)$ و $(-2,\infty)$

$\therefore$ f دالة متصلة عند $x=5$

أي أن f دالة متصلة عند $x=g(1)$ (2)

من (1) و(2) نجد أن $(f\circ g)$ متصلة عند $x=1$

7 $h(x)=x^2-3x+2$, $g(x)=|x|$

h دالة متصلة عند $x=0$, $h(0)=2$

g دالة متصلة عند $x=2$

$\therefore$ f دالة متصلة عند $x=0$

(9) لتكن: $f(x)=2x^2-3$ ، $g(x)=\sqrt{x+4}$. ابحث اتصال الدالة $g\circ f$ عند $x=-2$

(10) ابحث اتصال الدالة f: $f(x)=|\sqrt{x-3}|$ عند $x=4$

(11) ابحث اتصال الدالة g: $g(x)=\sqrt{x^2+1}-|x-3|$ عند $x=3$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة f: $f(x)=x^2+|x-1|$ متصلة عند $x=3$ (a) (b)

(2) الدالة f: $f(x)=\dfrac{2x+5}{x+2}-\dfrac{2}{x}$ متصلة عند $x=0$ (a) (b)

(3) الدالة f: $f(x)=\dfrac{2x-2}{|x|-1}$ متصلة عند $x=0$ (a) (b)

(4) الدالة f: $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{3x-1}}{x^2}$ متصلة عند $x=3$ (a) (b)

(5) الدالة f: $f(x)=\sqrt{-x^2+5x-4}$ متصلة عند $x=2$ (a) (b)

في التمارين (6–12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) نقاط انفصال الدالة f: $f(x)=\dfrac{-x+2}{x^2+9}$ عند:

(a) 3 (b) -3

(c) 2 (d) لا يوجد

(7) نقاط انفصال الدالة f: $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$ عند:

(a) $1\ ,\ -1$ (b) $2\ ,\ -2$ (c) $1\ ,\ 2$ (d) $-1\ ,\ -2$

(8) لتكن الدالة f: $f(x)=x^2+3$ ، الدالة g : $g(x)=\dfrac{x}{x-3}$ ، فإن: $(g\circ f)(x)$ تساوي:

(a) $\dfrac{4x^2-18x+27}{(x-3)^2}$ (b) $\dfrac{x^2}{x^2-3}$ (c) $\dfrac{x^2+3}{x^2}$ (d) $\dfrac{x^2}{x^2+3}$

(9) لتكن الدالة f: $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-3}}$ ، الدالة g : $g(x)=x^2+3$ ، فإن: $(f\circ g)(x)$ تساوي:

(a) $\dfrac{x^2}{x-3}+3$ (b) $\dfrac{x}{\sqrt{x-3}}+3$ (c) $\dfrac{-(x^2+3)}{x}$ (d) $\dfrac{x^2+3}{|x|}$

(10) لتكن الدالة f: $f(x)=\sqrt{x^2+7}$ ، g : $g(x)=x^2-3$ فإن: $(f\circ g)(0)$ يساوي:

(a) 4 (b) -4

(c) 1 (d) -1

(11) إذا كانت g دالة متصلة عند $x=2$ فإن الدالة المتصلة عند $x=2$ فيما يلي هي $f(x)$ تساوي:

(a) $\sqrt{g(x)}$ (b) $\dfrac{1}{g(x)}$

(c) $\dfrac{g(x)}{x-2}$ (d) $|g(x)|$

(12) إذا كانت الدالة f: $f(x)=\sqrt{x^2-a}$ متصلة عند $x=3$ فإن a يمكن أن تساوي:

(a) 4 (b) 9

(c) 16 (d) 25

7–1: الاتّصال على فترة

1 الأهداف

- يتعرف الاتصال على فترة.
- يدرس اتصال دالة الجذر على فترة.
- يدرس اتصال ناتج تركيب دالتين متصلتين.

2 المفردات والمفاهيم الجديدة

الاتصال على فترة.

3 الأدوات والوسائل

آلة حاسبة بيانية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).

4 التمهيد

أوجد اتصال كلّ من الدوال التالية عند النقطة المعينة:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 1}\ ,\quad x = 2$$

$$g(x) = \frac{x+2}{x^2+1}\ ,\quad x = 0$$

$$h(x) = x + 3 + |x^2 - 4|\ ,\quad x = 2$$

5 التدريس

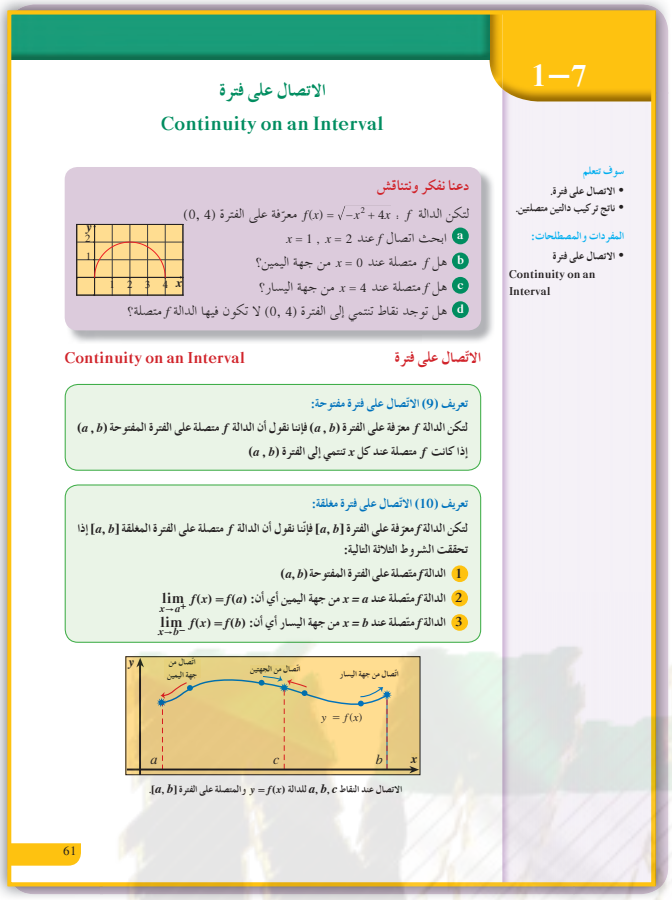
(1) اسأل الطلاب: هل يمكن دراسة اتصال دالة عند كل نقطة على فترة ما؟ ثم اسأل: متى تكون دالة متصلة على فترة مغلقة $[a\ ,\ b]$؟

هل يمكن دراسة الاتصال عند $x = a$ لجهة اليسار وعند b لجهة اليمين؟ أشر إلى أن الدالة تكون متصلة على فترة مغلقة $[a\ ,\ b]$ إذا كانت متصلة عند كل $x \in (a\ ,b)$ ومتصلة عند a لجهة اليمين وعند b لجهة اليسار.

ومن هنا يمكن التعميم والتكلم عن اتصال دالة على كل فترة من مجالها.

(2) ذكر الطلاب بشروط اتصال دالة الجذر التربيعي عند نقطة ومنها الاتصال على فترة.

(3) ذكر الطلاب بشروط اتصال تركيب دالتين عند نقطة ثم لاحظ أن ناتج تركيب دالتين كل منهما متصل على $\mathbb{R}$ هو دالة متصلة على $\mathbb{R}$.



1–7

الاتصال على فترة

Continuity on an Interval

سوف تتعلم
- الاتصال على فترة.
- ناتج تركيب دالتين متصلتين.

المفردات والمصطلحات:
- الاتصال على فترة Continuity on an Interval

دعنا نفكر ونتناقش

لتكن الدالة f ، $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x}$ معرّفة على الفترة $(0, 4)$

a ابحث اتصال f عند $x = 2$ ، $x = 1$

b هل f متصلة عند $x = 0$ من جهة اليمين؟

c هل f متصلة عند $x = 4$ من جهة اليسار؟

d هل توجد نقاط تنتمي إلى الفترة $(0, 4)$ لا تكون فيها الدالة f متصلة؟

الاتصال على فترة — Continuity on an Interval

تعريف (9) الاتصال على فترة مفتوحة:

لتكن الدالة f معرّفة على الفترة $(a\ ,b)$ فإننا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة $(a\ ,b)$ إذا كانت f متصلة عند كل x تنتمي إلى الفترة $(a\ ,b)$

تعريف (10) الاتصال على فترة مغلقة:

لتكن الدالة f معرّفة على الفترة $[a, b]$ فإننا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

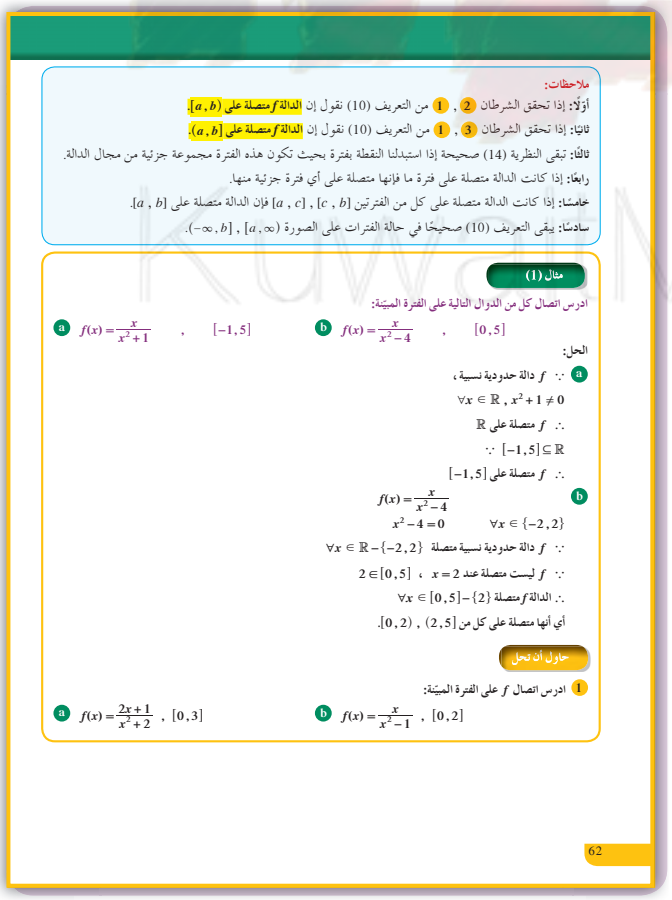
1 الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة (a, b)

2 الدالة f متصلة عند $x = a$ من جهة اليمين أي أن: $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

3 الدالة f متصلة عند $x = b$ من جهة اليسار أي أن: $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

الاتصال عند النقاط a, b, c للدالة $y = f(x)$ والمتصلة على الفترة $[a, b]$.

61



ملاحظات:

أولًا: إذا تحقق الشرطان 2 ، 1 من التعريف (10) نقول إن الدالة f متصلة على $(a\ ,b)$.

ثانيًا: إذا تحقق الشرطان 3 ، 1 من التعريف (10) نقول إن الدالة f متصلة على $[a\ ,b]$.

ثالثًا: تبقى النظرية (14) صحيحة إذا استبدلنا النقطة بفترة بحيث تكون هذه الفترة مجموعة جزئية من مجال الدالة.

رابعًا: إذا كانت الدالة متصلة على فترة ما فإنها متصلة على أي فترة جزئية منها.

خامسًا: إذا كانت الدالة متصلة على كل من الفترتين $[a\ ,\ c]\ ,\ [c\ ,\ b]$ فإن الدالة متصلة على $[a\ ,\ b]$.

سادسًا: يبقى التعريف (10) صحيحًا في حالة الفترات على الصورة $(-\infty\ ,b]\ ,\ [a\ ,\infty)$.

مثال (1)

ادرس اتصال كل من الدوال التالية على الفترة المبيّنة:

a $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $[-1,5]$

b $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$, $[0,5]$

الحل:

a ∵ f دالة حدودية نسبية ،

$\forall x \in \mathbb{R}\ , x^2 + 1 \neq 0$

∴ f متصلة على $\mathbb{R}$

∵ $[-1,5] \subseteq \mathbb{R}$

∴ f متصلة على $[-1,5]$

b $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

$x^2 - 4 = 0 \qquad \forall x \in \{-2,2\}$

∵ f دالة حدودية نسبية متصلة $\forall x \in \mathbb{R} - \{-2,2\}$

∵ f ليست متصلة عند $x = 2$ ، $2 \in [0,5]$

∴ الدالة f متصلة $\forall x \in [0,5] - \{2\}$

أي أنها متصلة على كل من $[0,2)\ ,\ (2,5]$.

حاول أن تحل

1 ادرس اتصال f على الفترة المبيّنة:

a $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2}$, $[0,3]$

b $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$, $[0,2]$

62

في المثال (1)

دراسة اتصال عدة دوال كل منها على فترة مبيّنة، وتطبيق مباشر يسمح بتركيز المفهوم عند الطلاب.

في المثالين (3) ,(2)

دراسة اتصال دالة على فترة أو على مجالها، حيث الدالة معرّفة على عدّة فترات ويجب دراسة النهايات من الجهتين عند النقاط المفصلية.

في المثال (4)

المطلوب إيجاد قيمة كل من الثابتين a , b لدالة متصلة. يعتبر المثال حالة متطورة من مفهوم الاتصال.

في المثالين (6) ,(5)

دراسة اتصال دوال جذرية. ينبغي أولًا تحديد مجال الدالة قبل الشروع في دراسة الاتصال وذلك عندما يكون دليل الجذر عددًا زوجيًّا كما يجب الانتباه إلى المقام في حال كان المجذور دالة حدودية نسبية.

في المثال (7)

توظيف ملاحظة تركيب دالتين ص 66 لدراسة الاتصال.

6 الربط

لا يوجد.

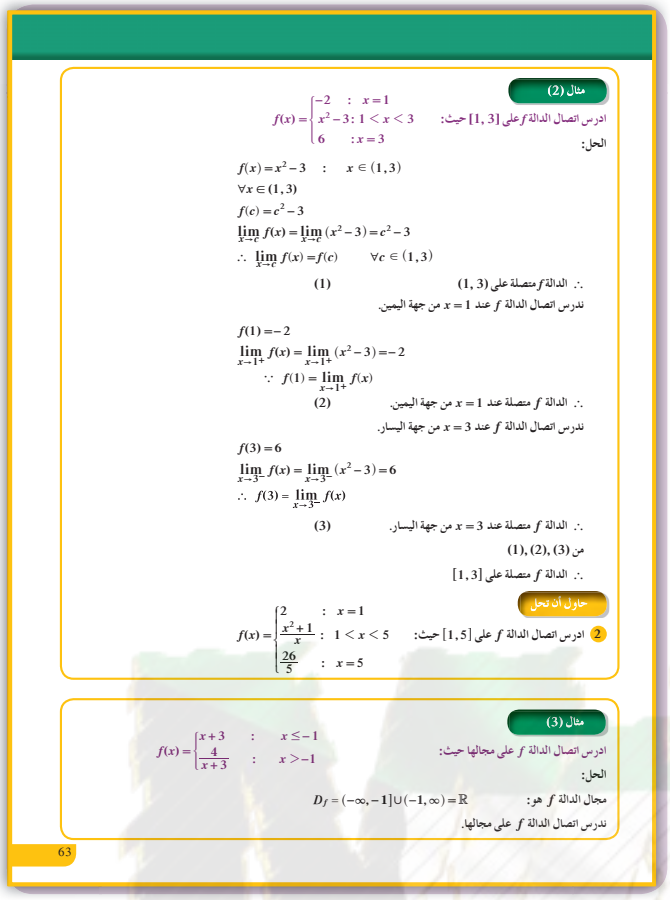
7 أخطاء متوقعة ومعالجتها

قد يحاول بعض الطلاب دراسة اتصال دالة على مجالها. أشر إلى أنه يمكن دراسة اتصال دالة على كل فترة من مجالها. فمثلًا إذا كان مجال دالة f : $(-\infty, a) \cup (a, \infty)$ فيمكن دراسة اتصال f على كل من الفترتين $(-\infty, a)$, (a, ∞) بمفردها وليس على المجال.

8 التقييم

راقب الطلاب وهم يعملون على فقرات «حاول أن تحل» لتتحقق من مدى إدراكهم للمفاهيم ودقة عملهم على حل المسائل.

وأكّد على ترتيب خطوات الحل لدراسة الاتصال على فترة.



مثال (2)

ادرس اتصال الدالة f على $[1, 3]$ حيث: $f(x) = \begin{cases} -2 & : x = 1 \\ x^2 - 3 & : 1 < x < 3 \\ 6 & : x = 3 \end{cases}$

الحل:

$f(x) = x^2 - 3 \quad : \quad x \in (1, 3)$

$\forall x \in (1, 3)$

$f(c) = c^2 - 3$

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} (x^2 - 3) = c^2 - 3$

$\therefore \lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c) \qquad \forall c \in (1, 3)$

$\therefore$ الدالة f متصلة على $(1, 3)$ (1)

ندرس اتصال الدالة f عند $x = 1$ من جهة اليمين.

$f(1) = -2$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 3) = -2$

$\because f(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = 1$ من جهة اليمين. (2)

ندرس اتصال الدالة f عند $x = 3$ من جهة اليسار.

$f(3) = 6$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 3) = 6$

$\therefore f(3) = \lim\limits_{x \to 3} f(x)$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = 3$ من جهة اليسار. (3)

من (1), (2), (3)

$\therefore$ الدالة f متصلة على $[1, 3]$

حاول أن تحل

2 ادرس اتصال الدالة f على $[1, 5]$ حيث: $f(x) = \begin{cases} 2 & : x = 1 \\ \frac{x^2 + 1}{x} & : 1 < x < 5 \\ \frac{26}{5} & : x = 5 \end{cases}$

مثال (3)

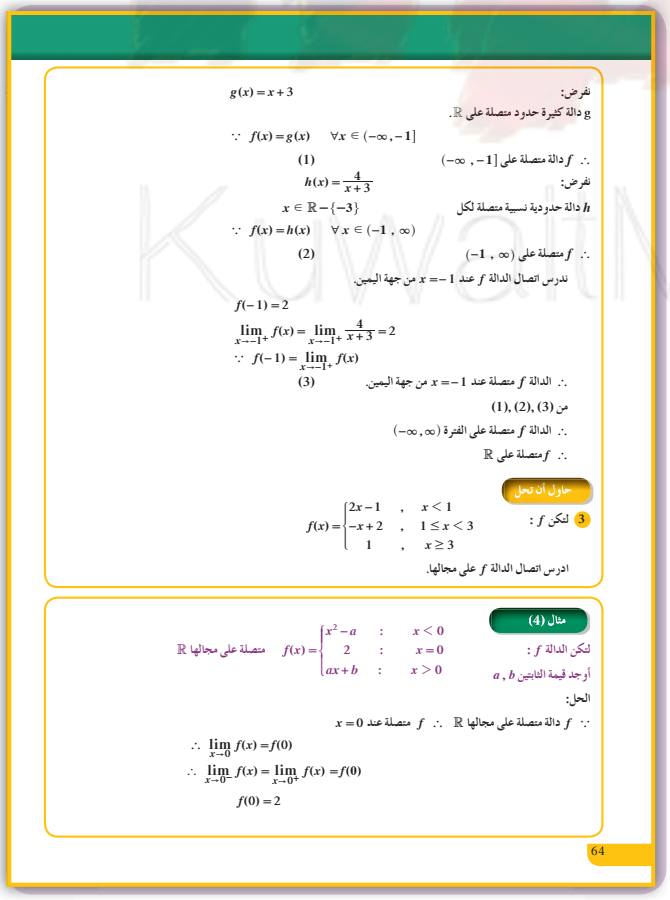
ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث: $f(x) = \begin{cases} x + 3 & : x \le -1 \\ \frac{4}{x + 3} & : x > -1 \end{cases}$

الحل:

مجال الدالة f هو: $D_f = (-\infty, -1] \cup (-1, \infty) = \mathbb{R}$

ندرس اتصال الدالة f على مجالها.

63



نفرض: $g(x) = x + 3$

g دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$.

$\because f(x) = g(x) \quad \forall x \in (-\infty, -1]$

$\therefore f$ دالة متصلة على $(-\infty, -1]$ (1)

نفرض: $h(x) = \frac{4}{x + 3}$

h دالة حدودية نسبية متصلة لكل $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$

$\because f(x) = h(x) \quad \forall x \in (-1, \infty)$

$\therefore f$ متصلة على $(-1, \infty)$ (2)

ندرس اتصال الدالة f عند $x = -1$ من جهة اليمين.

$f(-1) = 2$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{4}{x + 3} = 2$

$\because f(-1) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = -1$ من جهة اليمين. (3)

من (1), (2), (3)

$\therefore$ الدالة f متصلة على الفترة $(-\infty, \infty)$

$\therefore f$ متصلة على $\mathbb{R}$

حاول أن تحل

3 لتكن f : $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , x < 1 \\ -x + 2 & , 1 \le x < 3 \\ 1 & , x \ge 3 \end{cases}$

ادرس اتصال الدالة f على مجالها.

مثال (4)

لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2 - a & : x < 0 \\ 2 & : x = 0 \\ ax + b & : x > 0 \end{cases}$ متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

أوجد قيمة الثابتين a , b

الحل:

$\because f$ دالة متصلة على مجالها $\mathbb{R}$ $\therefore f$ متصلة عند $x = 0$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$

$f(0) = 2$

64

اختبار سريع

❶ ابحث اتصال الدالة f: $f(x)=\dfrac{x+1}{9-x^2}$

(a) على الفترة $[-1,2]$

f دالة حدودية نسبية متصلة بشرط:

$x\neq 3\ ,\ x\neq -3$

$\therefore$ f متصلة على $[-1,2]$

(b) على الفترة $[0,4]$

غير متصلة على الفترة $[0,4]$ لأن $x=3$ هي نقطة انفصال للدالة f على الفترة $[0,4]$

❷ لتكن f: $f(x)=\sqrt{x^2-7x+12}$

ابحث اتصال f على $[0,2]$

$D_f=(-\infty,3)\cup(4,\infty)$

الدالة g: $g(x)=x^2-7x+12$ متصلة على $[0,2]$

$g(x)\geqslant 0\ ,\ \forall x\in[0,2]$

$\therefore$ f متصلة على $[0,2]$

❾ إجابات وحلول

«دعنا نفكر ونتناقش»

(a) الدالة g: $g(x)=-x^2+4x$ متصلة عند $x=1$ ، $x=2$

$g(1)=3>0\ ,\ g(2)=4>0$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند كل من $x=2\ ,\ x=1$

(b) f غير معرّفة عند $x=0$

$\therefore$ f غير متصلة عند $x=0$ من جهة اليمين.

(c) f غير معرّفة عند $x=4$

$\therefore$ f غير متصلة عند $x=4$ من جهة اليسار.

(d) لا.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2-a)=-a$$

$\therefore\ -a=2 \implies a=-2$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(ax+b)=b$$

$\therefore\ b=2$

حاول أن تحل

❹ لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases}5 & : & x=1\\ ax+b & : & 1<x<4\\ b+8 & : & x=4\end{cases}$

متصلة على $[1,4]$. أوجد قيم الثابتين $a\ ,\ b$

تعلمنا دراسة اتصال الدالة $f(x)=\sqrt{g(x)}$ عند $x=c$ وكذلك يمكننا دراسة اتصال الدالة f على فترة ما باستخدام التعميم التالي:

تعميم:

إذا كانت الدالة g متصلة على فترة ما، $g(x)\geqslant 0$ في هذه الفترة فإن الدالة $f(x)=\sqrt{g(x)}$ متصلة على هذه الفترة.

مثال (5)

لتكن f: $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$.

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[-5,0]$.

الحل: نفرض أن $g(x)=x^2-2x$ ، $f(x)=\sqrt{g(x)}$

$\therefore\ D_f=\{x : g(x)\geq 0\}$

$x^2-2x\geq 0$

المعادلة المناظرة: $x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

$x=0\ ,\ x=2$

	مثل إشارة x^2 معامل	عكس إشارة x^2 معامل	مثل إشارة x^2 معامل
	+	−	+

0 2

$\therefore$ مجال الدالة f هو $\mathbb{R}-(0,2)$

لدراسة اتصال الدالة f على $[-5,0]$ حيث $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$

$g(x)\geqslant 0\quad \forall x\in\mathbb{R}-(0,2)$

$\because$ $[-5,0]$ مجموعة جزئية من $\mathbb{R}-(0,2)$

$\therefore\ g(x)\geqslant 0\quad \forall x\in[-5,0]\qquad (1)$

معلومة:

إشارة الحدودية $f(x)$ تكون ثابتة لا تتغير في الفترة (a,b) إذا كانت هذه الفترة لا تحتوي على صفر من أصفار الحدودية $f(x)$. ولتعيين إشارة الحدودية في هذه الفترة نعوّض عن x بأي قيمة $c\in(a,b)$.

$\because$ الدالة g: $g(x)=x^2-2x$ دالة متصلة على $[-5,0]$ $\qquad (2)$

من $(1)\ ,\ (2)$

$\therefore$ f متصلة على $[-5,0]$

حاول أن تحل

❺ لتكن f: $f(x)=\sqrt{x^2-7x+10}$.

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[6,10]$.

مثال (6)

لتكن f: $f(x)=\sqrt{9-x^2}$.

ادرس اتصال الدالة f على $[-3,3]$.

الحل: نفرض أن $g(x)=9-x^2$ ، $f(x)=\sqrt{g(x)}$

$D_f=\{x : g(x)\geqslant 0\}$

$9-x^2\geqslant 0$

المعادلة المناظرة: $9-x^2=0$

$(3-x)(3+x)=0$

$x=3\ ,\ x=-3$

−	+	−

−3 3

$\therefore$ مجال الدالة f هو $[-3,3]$

لدراسة اتصال الدالة f على $[-3,3]$ حيث $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

$g(x)\geqslant 0\quad \forall x\in[-3,3]\qquad (1)$

الدالة g: $g(x)=9-x^2$ متصلة على $[-3,3]$ $\qquad (2)$

من (1) و (2)

$\therefore$ f متصلة على $[-3,3]$

حاول أن تحل

❻ لتكن f: $f(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$.

ادرس اتصال الدالة f على $[1,3]$.

ملاحظة:

ناتج تركيب دالتين كل منهما متصلة على $\mathbb{R}$ هو دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

«حاول أن تحل»

1 **(a)** الدالة f دالة نسبية متصلة على مجالها $(-\infty,\infty)$.

$\therefore$ الدالة f متصلة على $[0, 3]$

(b) الدالة f غير معرّفة عند $x = 1$

ولكنها متصلة على كل من $(1,2]$ و $[0,1)$

يوجد انفصال عند $x = 1$

2 الدالة f دالة نسبية متصلة على $(1,5)$

$f(1) = 2 \;;\; \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$

$\therefore$ الدالة f متصلة لجهة اليمين عند $x = 1$

$f(5) = \frac{26}{5} \;;\; \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \frac{26}{5}$

$\therefore$ الدالة f متصلة لجهة اليسار عند $x = 5$

$\therefore$ الدالة f متصلة على $[1,5]$

3 على كل فترة من الفترات $(-\infty,1)$, $(1,3)$, $(3,\infty)$

f متصلة.

$f(1) = 1 \;;\; \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1 \;,\; \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = 1$

$f(3) = 1 \;;\; \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -1 \;,\; \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 1$

$\therefore$ الدالة f متصلة لجهة اليمين عند $x = 3$

$\therefore$ الدالة ليست متصلة على مجالها ولكنها متصلة

على كل من الفترات $(3,\infty)$ ، $[3,1)$ ، $(-\infty,1]$

4 $f(1) = 5 \;;\; \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = a + b$

$\therefore\; a + b = 5 \qquad (1)$

$f(4) = b + 8 \;;\; \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 4a + b$

$\therefore\; 4a + b = b + 8 \qquad (2)$

من (1)، (2) نستنتج أن: $a = 2 \;,\; b = 3$

مثال (7)

لتكن: $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4}$. ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$.

الحل:

نفرض أن: $g(x) = \sqrt[3]{x} \;,\; h(x) = x^2 - 5x + 4$

$$f(x) = (g \circ h)(x)$$
$$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x))$$
$$= g(x^2 - 5x + 4)$$
$$= \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4}$$

$\because$ الدالة h متصلة على $\mathbb{R}$.

$\because$ الدالة g متصلة على $\mathbb{R}$.

$\therefore$ الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها عبارة عن تركيب دالتين كل منهما متصلة على $\mathbb{R}$.

حاول أن تحل

7 لتكن: $f(x) = \sqrt[3]{-x^2 + 2x + 5}$.

ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$.

67

تمرّنْ 1–7

الاتصال على فترة

Continuity on an Interval

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–5)، ادرس اتصال كل دالة مما يلي على الفترة المبينة.

(1) $f(x) = x^2 + 2x - 3 \;,\; [-2 , 5]$

(2) $f(x) = \frac{7x}{x^2 + 5} \;,\; [1 , 3]$

(3) $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3} \;,\; [0 , 5]$

(4) $f(x) = \frac{-x + 3}{x^2 - 5x + 4} \;,\; [-2 , 6]$

(5) $f(x) = \begin{cases} -5 & : x = -3 \\ -x^2 + 4 & : -3 < x < 4 \\ -10 & : x = 4 \end{cases} \;,\; [-3 , 4]$

(6) الدالة f معرفة كما يلي: $f(x) = \begin{cases} -x + 4 & : x \leqslant 7 \\ \frac{9}{-x + 4} & : x > 7 \end{cases}$ ، ادرس اتصال الدالة على مجالها.

(7) الدالة f معرفة كما يلي: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 9} & : x \leqslant 0 \\ \frac{6}{x + 3} & : x > 0 \end{cases}$ ، ادرس اتصال الدالة على مجالها.

(8) الدالة f معرفة كما يلي: $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & : x \leqslant -2 \\ x - 7 & : -2 < x < 4 \\ x^2 - 7 & : x \geqslant 4 \end{cases}$ ، ادرس اتصال الدالة على مجالها.

(9) الدالة f معرفة كما يلي: $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x + 2} & : x \leqslant -4 \\ x^3 + 3x - 6 & : -4 < x \leqslant 1 \\ x^3 - 3x^2 & : x > 1 \end{cases}$ ، ادرس اتصال الدالة على مجالها.

26

5 $D_f = (-\infty, 2] \cup [5, \infty)$

على الفترة $[6,10]$ ، $g(x) = x^2 - 7x + 10$ ،

$g(x) \geqslant 0$

$\therefore$ الدالة f متصلة على $[6,10]$

6 $D_f = [1,3]$

على $[1,3]$ ، $g(x) = -x^2 + 4x - 3$ متصلة

و $g(x) \geqslant 0$

$\therefore$ $f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة عند $[1,3]$

7 الدالة h: $h(x) = -x^2 + 2x + 5$ متصلة على $\mathbb{R}$.

الدالة g: $g(x) = \sqrt[3]{x}$ متصلة على $\mathbb{R}$.

(دليل الجذر عدد فردي).

$\therefore$ الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$. لأنها ناتج تركيب دالتين كل منهما متصل على $\mathbb{R}$.

في التمرينين (10–11)، أوجد قيم a , b بحيث تكون كل دالة متصلة على مجال تعريفها.

(10) $f(x) = \begin{cases} x^2 - \sqrt{x} & : x < 1 \\ 3x + a & : x > 1 \\ b & : x = 1 \end{cases}$

(11) $f(x) = \begin{cases} x^2 & : x < -2 \\ \dfrac{x^2 - a}{x - b} & : -2 \le x < 1 \\ x & : x \ge 1 \end{cases}$

(12) لتكن الدالة f: $f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x + 6}$ ، أوجد D_f ثم ادرس اتصالها على $[0 , 4]$

في التمرينين (13–14)، ادرس اتصال كل من الدوال التالية على مجالها:

(13) $f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$ (14) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

في التمرينين (15–16)، ادرس اتصال كل من الدوال التالية على $\mathbb{R}$.

(15) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 2}$ (16) $f(x) = |3x^2 + 4x - 1|$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت f دالة متصلة على كل من $[1 , 3)$, $[3 , 5]$ فإن f متصلة على $[1 , 5]$ (a) (b)

(2) الدالة f: $f(x) = x^2 - |x|$ متصلة لكل قيم $x \in \mathbb{R}$ (a) (b)

(3) الدالة f: $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ متصلة على $[-2 , 2]$ (a) (b)

(4) الدالة f: $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 2}$ متصلة على $(-\infty , 0)$ (a) (b)

(5) الدالة f: $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2}$ متصلة على $(-\infty , 2)$ فقط (a) (b)

في التمارين (6–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) لتكن الدالة f: $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 4}$ فإن الدالة f:

(a) لها نقطتي انفصال عند كل من $x = 4$, $x = -1$ (b) متصلة على $(-\infty , 4]$

(c) متصلة على مجالها (d) ليس أي مما سبق

(7) إذا كانت f دالة متصلة على $[-2 , 3]$ فإن:

(a) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = f(3)$

(c) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = f(-2)$ (d) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = f(-2)$

(8) الدالة f: $f(x) = \dfrac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - 25}}$ متصلة على:

(a) $(-\infty , \frac{1}{2}]$ (b) $(5 , \infty)$

(c) $\mathbb{R}$ (d) $(-5 , 5)$

(9) لتكن f: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{2} & : x \leqslant -3 \\ \dfrac{\sqrt{x^2 + 16}}{2} & : -3 < x < 0 \\ \dfrac{4 - x^2}{x - 2} & : x \geqslant 0 \end{cases}$ ، فإن f دالة متصلة على:

(a) $(-\infty , \infty)$ (b) $(-\infty , 2)$

(c) $(-\infty , 0]$ (d) $(-\infty , -3]$

(10) الدالة f: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x + m}{x - 2} & : x < 1 \\ x + n & : x > 1 \\ 2m & : x = 1 \end{cases}$ متصلة على $\mathbb{R}$ إذا كان:

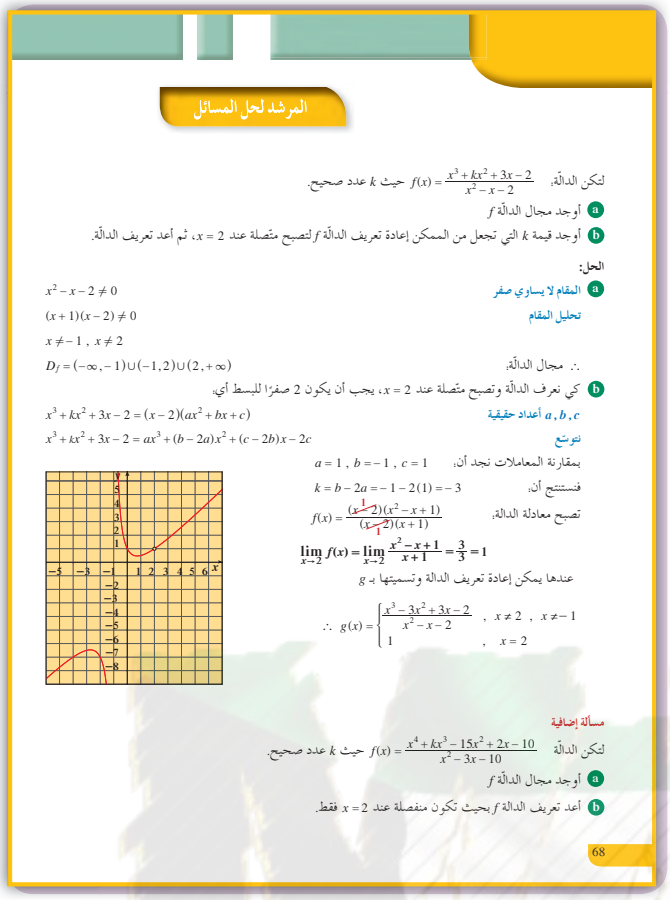
(a) $m = -1$, $n = 3$ (b) $m = 1$, $n = -3$

(c) $m = -1$, $n = -3$ (d) $m = 1$, $n = 3$

(11) الدالة g: $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & : x > 1 \\ 3x & : x \le 1 \end{cases}$ متصلة على:

(a) $(-\infty , 1] , (1 , \infty)$ (b) $(-\infty , 1) , [1 , \infty)$

(c) $(-\infty , \infty)$ (d) $(-\infty , 3]$



المرشد لحل المسائل

لتكن الدالّة: $f(x)=\dfrac{x^3+kx^2+3x-2}{x^2-x-2}$ حيث k عدد صحيح.

a أوجد مجال الدالّة f

b أوجد قيمة k التي تجعل من الممكن إعادة تعريف الدالّة f لتصبح متّصلة عند $x=2$، ثم أعد تعريف الدالّة.

الحل:

a المقام لا يساوي صفر

$x^2-x-2\neq 0$

تحليل المقام

$(x+1)(x-2)\neq 0$

$x\neq -1\ ,\ x\neq 2$

$\therefore$ مجال الدالّة: $D_f=(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$

b كي نعرف الدالّة وتصبح متّصلة عند $x=2$، يجب أن يكون 2 صفرًا للبسط أي:

a,b,c أعداد حقيقية

$x^3+kx^2+3x-2=(x-2)(ax^2+bx+c)$

نوسّع

$x^3+kx^2+3x-2=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$

بمقارنة المعاملات نجد أن: $a=1\ ,\ b=-1\ ,\ c=1$

فنستنتج أن: $k=b-2a=-1-2(1)=-3$

تصبح معادلة الدالة: $f(x)=\dfrac{\cancel{(x-2)}^{1}(x^2-x+1)}{\cancel{(x-2)}_{1}(x+1)}$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x+1}{x+1}=\frac{3}{3}=1$$

عندها يمكن إعادة تعريف الدالة وتسميتها بـ g

$$\therefore\ g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x^2+3x-2}{x^2-x-2} & ,\ x\neq 2\ ,\ x\neq -1\\ 1 & ,\ x=2\end{cases}$$

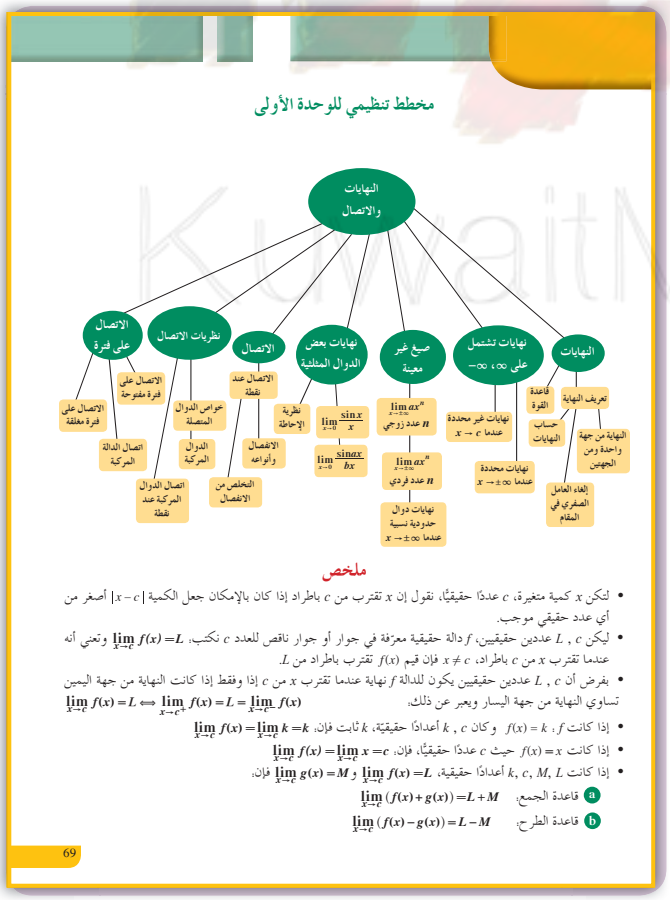
مسألة إضافية

لتكن الدالّة $f(x)=\dfrac{x^4+kx^3-15x^2+2x-10}{x^2-3x-10}$ حيث k عدد صحيح.

a أوجد مجال الدالّة f

b أعد تعريف الدالة f بحيث تكون منفصلة عند $x=2$ فقط.

68



مخطط تنظيمي للوحدة الأولى

النهايات والاتصال

- النهايات
  - تعريف النهاية
  - النهاية من جهة واحدة ومن الجهتين
  - إلغاء العامل الصفري في المقام
  - قاعدة القوة
  - حساب النهايات
- نهايات تشتمل على ∞، $-\infty$
  - نهايات غير محددة عندما $x\to c$
  - نهايات محددة عندما $x\to\pm\infty$
- صيغ غير معينة
  - $\lim\limits_{x\to\pm\infty} ax^n$ عدد زوجي n
  - $\lim\limits_{x\to\pm\infty} ax^n$ عدد فردي n
  - نهايات دوال جذرية نسبية عندما $x\to\pm\infty$
- نهايات بعض الدوال المثلثية
  - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$
  - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{bx}$
  - نظرية الإحاطة
- الاتصال
  - الاتصال عند نقطة
  - الانفصال وأنواعه
  - التخلص من الانفصال
- نظريات الاتصال
  - خواص الدوال المتصلة
  - الدوال المركبة
  - اتصال الدوال المركبة عند نقطة
- الاتصال على فترة
  - الاتصال على فترة مفتوحة
  - الاتصال على فترة مغلقة
  - اتصال الدالة المركبة

ملخص

- لتكن x كمية متغيرة، c عددًا حقيقيًا، نقول إن x تقترب من c باطراد إذا كان بالإمكان جعل الكمية $|x-c|$ أصغر من أي عدد حقيقي موجب.
- ليكن $L\ ,\ c$ عددين حقيقيين، f دالة حقيقية معرّفة في جوار أو جوار ناقص للعدد c نكتب: $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$ وتعني أنه عندما تقترب x من c باطراد، $x\neq c$ فإن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L.
- بفرض أن $L\ ,\ c$ عددين حقيقيين يكون للدالة f نهاية عندما تقترب x من c إذا وفقط إذا كانت النهاية من جهة اليمين تساوي النهاية من جهة اليسار ويعبر عن ذلك: $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=L=\lim\limits_{x\to c^+} f(x)\Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to c} f(x)=L$
- إذا كانت $f:\ f(x)=k$ وكان $k\ ,\ c$ أعدادًا حقيقيّة، k ثابت فإن: $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c} k=k$
- إذا كانت $f(x)=x$ حيث c عددًا حقيقيًا، فإن: $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c} x=c$
- إذا كانت $k,\ c,\ M,\ L$ أعدادًا حقيقية، $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to c} g(x)=M$ فإن:
  - a قاعدة الجمع: $\lim\limits_{x\to c}(f(x)+g(x))=L+M$
  - b قاعدة الطرح: $\lim\limits_{x\to c}(f(x)-g(x))=L-M$

69

حل «مسألة إضافية»

(a) $D=(-\infty,-2)\cup(-2,5)\cup(5,\infty)$

(b) $k=-2$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-2x^3-15x^2+2x-10}{x^2-3x-10} & ,\ x\neq -2\ ,\ x\neq 5\\ \dfrac{202}{7} & ,\ x=5\end{cases}$$

c قاعدة الضرب: $\lim\limits_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = L\cdot M$

d قاعدة الضرب في ثابت: $\lim\limits_{x\to c}(k\cdot f(x)) = k\cdot L$

e قاعدة القسمة: $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}\ ,\ M\neq 0$

- إذا كانت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ دالّة كثيرة الحدود، c عدد حقيقيّ، فإنّ:

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c) = a_nc^n + a_{n-1}c^{n-1} + \ldots + a_0$$

- إذا كانت $f(x)$ ، $g(x)$ كثيرتي حدود، c عدد حقيقيّ، فإنّ: $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(c)}{g(c)}\ ,\ g(c)\neq 0$
- إذا كانت n عددًا صحيحًا موجبًا وكانت $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ موجودة فإن:

a $\lim\limits_{x\to c}(f(x))^n = \left(\lim\limits_{x\to c} f(x)\right)^n$

b $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$ (في حالة n عددًا زوجيًا يشترط أن يكون $c>0$)

c $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$ (في حالة n عددًا زوجيًا يشترط أن تكون $\lim\limits_{x\to c} f(x)>0$)

- لتكن f دالة معرّفة في الفترة (a,∞) فإن: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى ∞.
- لتكن f دالة معرّفة في الفترة $(-\infty,a)$ فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى $-\infty$.
- لتكن: $f(x)=\dfrac{1}{x}$ فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0\ ,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$
- لتكن: $f(x)=\dfrac{k}{x^n}\ ,\ n\in\mathbb{Z}^+\ ,\ k\in\mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{k}{x^n}=0$
- إذا كان $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ وكان b عدد حقيقي فإن: $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm b]=\pm\infty$
- إذا كان $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ وكان b عدد حقيقي موجب فإن: $\lim\limits_{x\to a}[b\cdot f(x)]=\pm\infty$

وإذا كان b عدد حقيقي سالب $\lim\limits_{x\to a}[b\cdot f(x)]=\mp\infty$

- إذا كان n عدد صحيح موجب وزوجي فإن: $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{1}{(x-c)^n}=\infty$
- إذا كان n عدد صحيح موجب وفردي فإن:

1 $\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{1}{(x-c)^n}=\infty$ 2 $\lim\limits_{x\to c^-}\dfrac{1}{(x-c)^n}=-\infty$

- إذا كانت قيم $f(x)$ تتزايد بلا حدود عندما تؤول x إلى c فإننا نعبّر عن ذلك رياضيًّا بالتالي: $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$
- إذا كانت $f(x)$ تتناقص بلا حدود عندما x تؤول إلى c فإننا نعبّر عن ذلك رياضيًّا بالتالي: $\lim\limits_{x\to c} f(x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$ ، $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty$ إذا وفقط إذا $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$
- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ إذا وفقط إذا $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$
- الخط $y=b$ يسمى خط مقارب أفقي لمنحنى الدالة $y=f(x)$ إذا توفر أحد الشرطين التاليين أو كلاهما:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$

- الخط $x=a$ يسمى خط مقارب رأسي لمنحنى الدالة $y=f(x)$ إذا توافر على الأقل أحد الشروط التالية:

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$

- لتكن: $f(x)=ax^n\ ,\ n\in\mathbb{Z}^+\ ,\ a\in\mathbb{R}^+$

1 إذا كان n عدد زوجي فإن: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} ax^n=\begin{cases}\infty\ , & a>0\\ -\infty\ , & a<0\end{cases}$

2 إذا كان n عدد فردي فإن: $\lim\limits_{x\to\infty} ax^n=\begin{cases}\infty\ , & a>0\\ -\infty\ , & a<0\end{cases}$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} ax^n=\begin{cases}-\infty\ , & a>0\\ \infty\ , & a<0\end{cases}$

- إذا كانت كل من f , g دالة حدودية حيث: $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0\ ,\ g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0$

فإن: a $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a_n}{b_m}\ :\ n=m$ b $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0\ :\ n<m$

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ حيث x بالراديان. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$
- إذا كان a , b عددين حقيقيين، $a\neq 0$, $b\neq 0$ فإن: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{bx}=\dfrac{a}{b}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{\sin ax}=\dfrac{b}{a}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{bx}=\dfrac{a}{b}$
- ليكن c , L عددين حقيقيين، إذا كان $g(x)\le f(x)\le h(x)$ لكل $x\neq c$ في جوار c، وكان $\lim\limits_{x\to c} g(x)=\lim\limits_{x\to c} h(x)=L$ فإن: $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$
- تكون الدالة $y=f(x)$ متصلة عند نقطة c في مجالها إذا كانت $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$
- لتكون f متصلة عند c يجب أن تتوافر الشروط الثلاثة التالية:

1 الدالة معرّفة عند $x=c$ أي $f(c)$ موجودة.

2 $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ موجودة

3 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

وإذا لم يتحقق أيّ شرط من الشروط السابقة فنقول إن f ليست متصلة (منفصلة) عند c.

- إذا كانت f , g دالتين متّصلتين عند $x=c$، فإنّ الدوال التالية هي دوالّ متّصلة عند $x=c$

1 $f+g$ 2 $f-g$

3 $k\cdot f$ حيث k أيّ عدد حقيقي ثابت. 4 $f\cdot g$

5 $\dfrac{f}{g}\ ,\ g(c)\neq 0$

- الدالة الجذرية $y=\sqrt[n]{x}$ متصلة عند كل $x=c\ :\ c\in\mathbb{R}^+$ حيث n عدد صحيح زوجي موجب، ومتصلة عند كل $x=c\ :\ c\in\mathbb{R}$ حيث n عدد صحيح فردي أكبر من 1.
- إذا كانت f دالة متصلة عند $x=c$ وكانت $f(c)>0$ فإن الدالة: $g(x)=\sqrt{f(x)}$ متصلة عند $x=c$
- إذا كانت كل من f, g دالتين حقيقيتين وكان مدى الدالة f مجموعة جزئية من مجال الدالة g فإنه يتعيّن دالة مركبة h: $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$
- إذا كانت f متّصلة عند c و g متّصلة عند $f(c)$ فإن الدالة المركّبة $g\circ f$ متّصلة عند c.
- إذا كانت الدالّة f معرّفة على الفترة $[a,b]$ فإنّ:

1 الدّالة f متّصلة على الفترة المفتوحة (a,b)، إذا كانت f متّصلة عند كل x في الفترة (a,b)

2 الدّالة f متّصلة عند a من جهة اليمين إذا كان: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

3 الدّالة f متّصلة عند b من جهة اليسار إذا كان: $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$

وإذا تحقّقت الشروط الثلاثة، فإنّ الدالّة تكون متّصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$

- إذا كانت الدالة g متصلة على فترة ما، $g(x)\geqslant 0$ في هذه الفترة فإن الدالة $f(x)=\sqrt{g(x)}$ متصلة على هذه الفترة.

اختبار الوحدة الأولى

في التمارين (1–11)، أوجد النهايات.

(1) $\lim\limits_{x\to-2}(x^3-2x^2+1)$ (2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{3x^2-2x+5}\right)$ (3) $\lim\limits_{x\to-4}\sqrt{1-2x}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x}$ (5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{4x}$ (6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\csc x+1}{x\csc x}$

(7) $\lim\limits_{x\to 1}|x-2|+2x$ (8) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{9-x}-2}{x-5}$ (9) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}$

(10) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-7x+12}$ (11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}$

(12) لتكن الدالة f: $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

(a) بيّن أن $f(x)$ غير متصلة عند $x=-2$ ، $x=2$

(b) أعد تعريف الدالة f بحيث تصبح متصلة عند $x=2$

في التمرينين (13, 14)، أوجد المقاربات الرأسية لمنحنى الدالة f.

(13) $f(x)=\dfrac{x+3}{x+2}$ (14) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2(x+2)}$

(15) لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases}1\ , & x\le -1\\ -x\ , & -1<x<0\\ 1\ , & x=0\\ -x\ , & 0<x<1\\ 1\ , & x\ge 1\end{cases}$

(a) أوجد إن أمكن: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

(b) هل f متّصلة عند كل من $x=-1$ ، $x=0$ ، $x=1$؟ فسّر إجابتك.

في التمرينين (16, 17)، أوجد جميع نقاط عدم الاتصال للدالّة إن وجدت:

(16) $f(x) = \dfrac{x+1}{4-x^2}$

(17) $g(x) = \sqrt[3]{3x+2}$

في التمرينين (18, 19)، أوجد المقارب الأفقي والمقاربات الرأسية.

(18) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-2x+1}$

(19) $f(x) = \dfrac{2x^2+5x-1}{x^2+2x}$

في التمرينين (20, 21)، أوجد قيمة k التي تجعل الدالة f متصلة.

(20) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-15}{x-3} & , \ x \neq 3 \\ k & , \ x = 3 \end{cases}$

(21) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{2x} & , \ x \neq 0 \\ k & , \ x = 0 \end{cases}$

(22) لتكن f ، $f(x) = \sqrt{x^2+5}$ ، g : $g(x) = x^2 - 5$ أوجد:

(a) $(g \circ f)(x)$ **(b)** $(g \circ f)(0)$

(c) $(f \circ g)(x)$ **(d)** $(f \circ g)(0)$

(23) لتكن f ، $f(x) = \begin{cases} 1 & : \ x \leqslant 2 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+21}}{5} & : \ 2 \leqslant x < 15 \\ \dfrac{225-x^2}{x-15} & : \ x > 15 \end{cases}$ ، ادرس اتصال الدالة على مجالها.

تمارين إثرائية

(1) لتكن f ، $f(x) = \sqrt{3x-2}$

بيّن أن: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 2$

(2) في كلٍّ مما يلي أوجد: $\lim\limits_{x \to b} (f \circ g)(x)$ ، $\lim\limits_{x \to b} g(x)$ ، $\lim\limits_{x \to b} f(x)$

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x$, $b = 0$

(b) $f(x) = -\dfrac{2}{x^3}$, $g(x) = 4x^3$, $b = 0$

(c) $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$, $g(x) = (x-2)^3$, $b = 2$

(d) $f(x) = \dfrac{5}{(3-x)^4}$, $g(x) = (x-3)^3$, $b = 3$

(3) لتكن f دالة متصلة ولا تساوي الصفر على الفترة $[a , b]$.

بيّن أن دائمًا $f(x) > 0$ لكل $x \in [a , b]$ أو $f(x) < 0$ لكل $x \in [a , b]$

(4) بيّن أنه إذا كانت الدالة f متصلة على فترة ما فإن الدالة $|f|$ هي كذلك أيضًا.

(5) لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} |x^3 - 4x| & , \ x < 1 \\ x^2 - 2x - 2 & , \ x \geq 1 \end{cases}$

(a) أوجد النهاية لجهة اليمين والنهاية لجهة اليسار لـ f عند $x = 1$

(b) هل f لها نهاية عندما $x \to 1$؟ إذا كان كذلك فما هي تلك النهاية؟ وإذا لم يكن كذلك فبيّن السبب.

(c) هل f متصلة عند $x = 1$؟

(6) لنأخذ الدالتين f ، g حيث إن: $f(x) = \sqrt{2x+1}$ ، $g(x) = 3x - 4$

(a) حدّد مجال: $f \circ g$ ، $g \circ f$

(b) أوجد: $(f \circ g)(x)$ ، $(g \circ f)(x)$

(c) أوجد: $\lim\limits_{x \to \infty} (f \circ g)(x)$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} (g \circ f)(x)$

(7) لتكن f ، g دالتين: $f(x) = \sqrt{x^2-3}$ ، $g(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

أوجد نقاط انفصال الدالة $g \circ f$. هل يمكن التخلص من هذا الانفصال؟ اشرح.

(8) لتكن f , g دالتين: $f(x) = x^2 + 1$ معرفة على $\mathbb{R}$،

$g(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2-4}}$ معرفة لكل $x \in (-\infty , -2) \cup (2 , \infty)$

(a) أوجد نقاط انفصال: $f \circ g$

(b) أوجد المقارب الأفقي والمقاربات الرأسية لمنحنى الدالة $f \circ g$

(9) لتكن الدالة f ، $f(x) = \begin{cases} 5 & : \ x \leqslant 4 \\ \dfrac{x^2+9}{5} & : \ 4 < x \leqslant 18 \\ \dfrac{324-x^2}{x-18} & : \ x > 18 \end{cases}$ ، ادرس اتصال الدالة على مجالها.

في التمارين (10–15) أوجد النهاية:

(10) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ **(11)** $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$

(12) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h}$ **(13)** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$

(14) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{14x^3-5x+27}{x^4+10}$ **(15)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^4+12x^2+5}{7x^2+6}$

(16) لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x & , \ x > 0 \\ x+1 & , \ x \leq 0 \end{cases}$

(a) ارسم منحنى الدالة f.

(b) أوجد: $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

(17) بيّن في كل دالة مما يلي نقاط الانفصال وابحث إذا كان بالإمكان التخلص منه:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+10}{x+2}$ **(b)** $f(x) = \begin{cases} -x+4 & , \ x > 3 \\ x-2 & , \ 0 < x < 3 \\ x-1 & , \ x \leq 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ **(d)** $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$