التكامل

$$\int \frac{\sin x}{x}dx$$

$$\int \frac{e^x}{x}dx$$

$$\int \frac{1}{\ln x}dx$$

$$\int e^{x^2}dx$$

$$\int \ln(\ln x)dx$$

$$\int \sin(x^2)dx$$

$$\int \sqrt{2-\sin^2 x}\,dx$$

$$\int e^{e^x}dx$$

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a)+.......$$

With a = 0 , $f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+.......$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...;$ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$ ....

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-.......+(-1)\frac{x^{2n}}{n!}+......$$

$$\int e^{-x^2}dx=x-\frac{1}{1!}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2!}\frac{x^5}{5}-.......+(-1)^n\frac{1}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+......$$

السؤال الجديد

$$\int\left(\frac{1}{x\ \ln x}-\frac{\ln x}{x}+e^{-\ln x}\right)dx$$

$$\int \left(\frac{1/x}{\ln x}-\frac{1}{x}\ln x+\frac{1}{x}\right) dx = \ln(\ln x) - \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \ln x$$

$$\int \frac{dx}{1+e^x}$$

$$u=e^x \rightarrow x=\ln(u) \rightarrow dx=\frac{1}{u}du \rightarrow \int \frac{du}{[u(1+u)]}$$

$$=\int\left(\left(\frac{A}{u}+\frac{B}{1+u}\right)\right)du=\int\left(\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{(1+u)}\right)\right)du=\ln(u)-\ln(1+u)+c=\ln\left(e^x\right)-\ln\left(1+e^x\right)+c$$

mathyards.com

① الباب الأول: التكامل غير المحدد

Indefinite Integral

1-1 المشتقة العكسية والتكاملات الغير محددة:

Antiderivatives and Indefinite Integrals:

في هذا البند نود أن ندرس المسألة العكسية للاشتقاق. بمعنى لدينا دالة ما f فما هي الدالة F بحيث يكون $F' = f$

تعريف ①: الدالة F تسمى مشتقة عكسية أو تكامل للدالة f في الفترة I إذا كان:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

مثال ①: الدالة $\frac{x^5}{5}$ مشتقة عكسية للدالة x^4

وذلك لأن $D\left(\frac{x^5}{5}\right) = x^4$

والدالة $\frac{x^5}{5} + 4$ أيضاً مشتقة عكسية للدالة x^4

ومن المعروف أن أي دالتين لها نفس الاشتقاق يختلفان عن بعضهما بمقدار ثابت

نظرية ①: إذا كان G ، F مشتقتين عكسيتين للدالة f على فترة ما I فإن

$$F(x) = G(x) + c \quad \forall x \in I$$

حيث c مقداراً ثابتاً.

تعريف ②: الرمز $\int f(x)\,dx = F(x) + c$

حيث $F'(x) = f(x)$ ، c مقداراً ثابتاً

يعني عائلة جميع المشتقات العكسية للدالة $f(x)$ في الفترة I

مثال ②: أوجد

ⓐ $\int |x|\,dx$

ⓑ $\int \frac{|x|}{x}\,dx \quad , x \neq 0$

الحل

ⓐ $\int |x|\,dx = \frac{1}{2}x|x| + c$

لأن $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x|x|\right) = |x| \; ; x \in R$

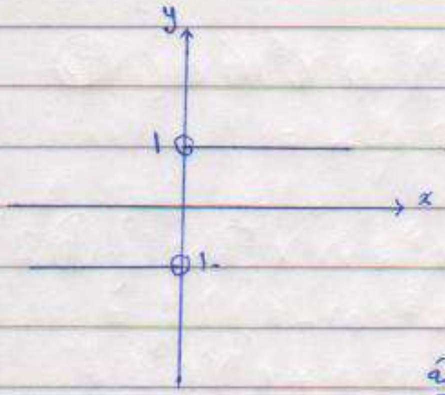
ⓑ $\int \frac{|x|}{x}\,dx = |x| + c \quad , \; x \neq 0$

لأن $\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{|x|}{x} \; ; \; x \neq 0$

مجدي عبد السلام

ملاحظات :-

١- ليس لكل دالة f مشتقة عكسية فمثلاً



$$sgn(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & ، \quad x \neq 0 \\ 0 & ، \quad x = 0 \end{cases}$$

والتي تسمى بدالة الإشارة ليس لها مشتقة عكسية

٢- ليس لكل دالة أولية مشتقة عكسية في صورة دالة أولية.

فالدالة $f(x) = \sin x^2$ لها مشتقة عكسية لأنها دالة متصلة ولكن لا توجد دالة أولية F تعبر عن $\int \sin x^2 \, dx$

٣- إن عملية إيجاد المشتقة العكسية لدالة ما لا تخلو من بعض الصعاب.

فمثلاً ليس من السهل الحصول على

$$\int \cos x^3 \, dx \quad ، \quad \int \sqrt{1-x^2} \, dx \quad ، \quad \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$$

وهكذا بالرغم من وجودها جميعاً.

٤- إن المشتقة العكسية ليست وحيدة بعكس المشتقة لأي دالة تكون وحيدة.

مجدي عبد السلام

ونستطيع الآن أن نتأكد من بعض التكاملات الآتية:

① $\int 1 \, dx = x + c$

② $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ ، $n \neq -1$

③ $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ ، $x \neq 0$

④ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ $\forall \; a > 0$

⑤ $\int e^x dx = e^x + c$

⑥ $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

⑦ $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

⑧ $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$

⑨ $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$

⑩ $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$

⑪ $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$

⑫ $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1}(\frac{x}{a}) + c$

⑬ $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}(\frac{x}{a}) + c$

⑭ $\int \frac{1}{\;} dx = \frac{1}{a} \sec^{-1}(\frac{x}{a}) + c$

⑮ $\int \cosh x \, dx = \sinh x + c$

⑯ $\int \sinh x \, dx = \cosh x + c$

⑰ $\int \operatorname{sech} x \tanh x \, dx = -\operatorname{sech} x + c$

⑱ $\int \operatorname{sech}^2 x \, dx = \tanh^2 x + c$

⑲ $\int \operatorname{csch} x \coth x \, dx = -\operatorname{csch} x + c$

مجدي عبد السلام

⑳ $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \sinh^{-1}(\frac{x}{a}) + c$

㉑ $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \tanh^{-1}(\frac{x}{a}) + c$ ، $|x| < a$

㉒ $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \cosh^{-1}(\frac{x}{a}) + c$ ، $x > a$

مجدي عبد السلام

(23) $\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{-1}{a}\,\text{sech}^{-1}\frac{|x|}{a} + c \,,\quad |x|<a \,,\ \neq 0$

(24) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \frac{-1}{a}\,\text{csch}^{-1}\frac{|x|}{a} + c \,,\quad x \neq 0$

والخواص الآتية للتكاملات ممكن برهنتها بسهولة ونذكرها فيما يلي

(25) $\int f'(x)\,dx = f(x) + c$

(26) $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$

(27) $\int c\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$

(28) $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

(29) $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + c$

(30) $\int (f(x))^n f'(x)\,dx = \frac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1} + c$

(31) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$

(32) $\int f'(x)\cos[f(x)]\,dx = \sin[f(x)] + c$

(33) $\int f'(x)\sin[f(x)]\,dx = -\cos[f(x)] + c$

(34) $\int f'(x)\sec^2[f(x)]\,dx = \tan[f(x)] + c$

(35) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

وهكذا علينا تعميم التكاملات السابقة.

مثال (٣) أوجد :

(a) $\int \frac{d}{dx}(x\sqrt{x-1})\,dx$

(b) $\frac{d}{dx}\int \cos\sqrt{x^2+1}\,dx$

الحل:

(a) $\int \frac{d}{dx}(x\sqrt{x-1})\,dx = x\sqrt{x-1} + c$

(b) $\frac{d}{dx}\int \cos\sqrt{x^2+1} = \cos\sqrt{x^2+1}$

مجدي عبدالسلام

مثال ٤ : أوجد التكاملات الآتية :

(التكاملات هي الأطراف المكتوبة باللون الأحمر)

ⓐ $\int (\sqrt{t} + \sec^2 t + 1)\, dt = \int t^{\frac{1}{2}}\, dt + \int \sec^2 t\, dt + \int 1\, dt$

$= \frac{2}{3} t^{3/2} + \tan t + t + C$

ⓑ $\int \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 dy = \int (y^2 + 2 + y^{-2})\, dy = \frac{1}{3} y^3 + 2y - \frac{1}{y} + C$

ⓒ $\int \tan^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\, dx = \int \sec^2 x\, dx - \int dx$

$= \tan x - x + C$

ⓓ $\int \frac{(x^2+3)^2}{x^2}\, dx = \int \frac{x^4 + 3x^2 + 9}{x^2}\, dx = \int (x^2 + 3 + 9x^{-2})\, dx$

$= \frac{1}{3} x^3 + 3x - \frac{9}{x} + C$

ⓔ $\int (5x^{\frac{3}{2}} - 2\cos x + \sqrt[3]{x})\, dx$

$= \int (5x^{\frac{3}{2}} - 2\cos x + x^{\frac{1}{3}})\, dx$

$= 2x^{\frac{5}{2}} - 2\sin x + \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C$

ⓕ $\int \frac{du}{\cos u \cot u} = \int \sec u \tan u\, du = \sec u + C$

مثال ⑤ :

أوجد التكاملات الآتية :

ⓐ $\int \sqrt{5x+3}\, dx = \int (5x+3)^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} \times (5x+3)^{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{2}{15} (5x+3)^{\frac{3}{2}} + C$

مجدي عبدالسلام

ⓑ $\int \cos 6\theta\, d\theta = \frac{1}{6} \sin 6\theta + C$

ⓒ $\int (t^3+4)^{10} t^2\, dt = \frac{1}{3} \int (t^3+4)^{10}\, 3t^2\, dt$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{11} \cdot (t^3+4)^{11} + C = \frac{1}{33} (t^3+4)^{11} + C$

ⓓ $\int y \sqrt[3]{2+5y^2}\, dy = \frac{1}{10} \int 10y\, (2+5y^2)^{\frac{1}{3}}\, dy$

$= \frac{1}{10} (2+5y^2)^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{3}{4} + C = \frac{3}{40} (2+5y^2)^{\frac{4}{3}} + C$

(e) $\int \sqrt{\sin\theta}\,\cos\theta\, d\theta = \int (\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\cos\theta\, d\theta$

نلاحظ أنه ما خارج القوس هو مشتقة ما داخل القوس

$= \frac{2}{3}(\sin\theta)^{\frac{3}{2}} + C$

(f) $\int \frac{\sin x}{(\cos x - 4)^4}\,dx = \int (\cos x - 4)^{-4}\sin x\, dx$

$= -\int (\cos x - 4)^{-4}(-\sin x)\,dx$

$= -\frac{(\cos x - 4)^{-3}}{-3} + C = \frac{1}{3(\cos x - 4)^3} + C$

مثال ⑦ :

أوجد (a) $\int \sin^2 x\, dx$ (b) $\int \cos^2 x\, dx$

الحل:

(a) $\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

(b) $\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

مجدي عبد السلام

الباب الثانى: طرق التكامل Techniques of Integration

٢-١ التكامل بالتعويض

وهى طريقة تهدف إلى وضع الدالة المكاملة على صورة يصلح معها استخدام الصور القياسية للتكامل.

إذا كانت كل من f ، F دالة فى المتغير Z

وكانت $F'(Z) = f(Z)$ فإن

$$\int f(Z)\,dZ = F(Z) + C$$

فإذا فرضنا $Z = g(x)$

فإن $dZ = g'(x)\,dx$

وعليه نحصل على القانون

$$\int f(Z)\,dZ = \int f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

ويسمى هذا القانون بقانون التكامل بالتعويض

مثال (١)

فى التكاملات التى تكون على الصورة $\int f(ax+b)\,dx$

نضع $ax + b = u$

أى أن $x = \dfrac{u-b}{a}$

وعلى ذلك فإن

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{a}$$

ويكون لدينا التكامل على الصورة:

$$\int f(ax+b)\,dx = \int f(u)\cdot\frac{1}{a}\,du = \frac{1}{a}\int f(u)\cdot du$$

ونود هنا أن نشير إلى أنه يمكن استنتاج القواعد التالية باستخدام قانون التكامل بالتعويض.

مجدى عبد السلام

القاعدة الأولى:

في التكاملات التي على الصورة $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$

أي أن البسط يساوي تفاضل المقام

فإننا نضع $u=f(x)$ فيكون

$$\frac{du}{dx}=f'(x)$$

أو

$$\frac{dx}{du}=\frac{1}{f'(x)}$$

وباستخدام قانون التكامل بالتعويض نجد أنه

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\int \frac{f'(x)}{u}\cdot\frac{1}{f'(x)}\,du=\int \frac{1}{u}\,du$$

$$=\log|u|+c=\log|f(x)|+c$$

أي أنه إذا كان البسط يساوي تفاضل المقام فإن ناتج التكامل يساوي لوغاريتم المقام مثلاً

$$\int \tan x\,dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx=\log|\cos x|+c$$

القاعدة الثانية

في التكاملات التي على الصورة $\int [f(x)]^n f'(x)\,dx$

نضع $u=f(x)$

فيكون $\frac{du}{dx}=f'(x)$ أو $\frac{dx}{du}=\frac{1}{f'(x)}$

وباستخدام قانون التكامل بالتعويض نجد أنه

$$\int [f(x)]^n f'(x)\,dx=\int u^n f'(x)\cdot\frac{1}{f'(x)}\,du$$

$$=\int u^n\,du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+c$$

$$=\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+c$$

محمد عبد السلام

القاعدة الثالثة:

في التكاملات التي على الصورة $\int e^{f(x)} f'(x)\,dx$

نضع $u = f(x)$

ونصل إلى $\frac{dx}{du} = \frac{1}{f'(x)}$

وباستخدام قانون التكامل بالتعويض نجد أن

$$\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = \int e^{u} f'(x) \frac{1}{f'(x)}\,du$$

$$= \int e^{u}\,du = e^{u} + c = e^{f(x)} + c$$

مثال (٢)

أوجد التكامل $\int (x^2+1)^3\, 2x\,dx$

الحل:

نضع $u = x^2+1$

$\therefore$ $du = 2x\,dx$

$$\therefore \int (x^2+1)^3\, 2x\,dx = \int u^3\,du = \frac{u^4}{4} + c$$

$$= \frac{(x^2+1)^4}{4} + c$$

مثال (٣)

اوجد التكامل $\int 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$

الحل:

نضع $u = x^3+1$

فيكون $du = 3x^2\,dx$

$$\int 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}} + c$$

مثال (٤)

اوجد التكامل $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

الحل:

نضع $u = \ln x$

$\therefore$ $du = \frac{1}{x}\,dx$

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{(\ln x)^3}{3} + c$$

مجدي عبد السلام

مثال ⑤ أوجد قيمة التكامل

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-1}$$

الحل:

نضع $u^2 = x+1$

$\therefore \; 2u\,du = dx$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-1} = \int \frac{2u\,du}{u-1} = 2\int \frac{(u-1)+1}{(u-1)}\,du$$

$$= 2\int \left[\frac{(u-1)}{(u-1)} + \frac{1}{(u-1)} \right] du = 2\int \left[1 + \frac{1}{u-1} \right] du$$

$$= 2\left[u + \ln(u-1) \right] + c = 2\left[\sqrt{x+1} + \ln(\sqrt{x+1}-1) \right] + c$$

مثال ⑥

أوجد التكاملات الآتية:

ⓐ $\int \sin^3 x \, dx$

الحل

$$= \int \sin^2 x \, \sin x \, dx = -\int \sin^2 x \, d\cos x$$

$$= -\int (1-\cos^2 x)\, d\cos x$$

نضع $u = \cos x$

$$= -\int (1-u^2)\,du = -\left[u - \tfrac{1}{3}u^3 \right] + c$$

$$= -\left[\cos x - \tfrac{1}{3}\cos^3 x \right] + c$$

ⓑ $\int \cos^5 x \, dx$

الحل

$$= \int \cos^4 x \cos x \, dx = \int \cos^4 x \, d\sin x = \int (1-\sin^2 x)^2 \, d\sin x$$

نضع $u = \sin x$

$$\int \cos^5 x \, dx = \int (1-u^2)^2 \, du = \int (1-2u^2+u^4)\,du$$

$$= u - \tfrac{2}{3}u^3 + \tfrac{1}{5}u^5 + c$$

$$= \sin x - \tfrac{2}{3}\sin^3 x + \tfrac{1}{5}\sin^5 x + c$$

ⓒ $\int \tan^3 x \, dx = \int \tan^2 x \cdot \tan x \, dx = \int (\sec^2 x - 1)\tan x \, dx$

$$= \int \tan x \sec^2 x \, dx - \int \tan x \, dx = \int \tan x \, d\tan x - \int \frac{\sin}{\cos x}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + c$$

مجدي عبدالسلام

ملاحظة : يمكن هنا إيجاد هذا التكامل بطريقة أخرى وهي وضع هذا التكامل في الصورة

$$\int \tan^3 x\,dx = \int \tan^2 x \cdot \tan x\,dx = \int \frac{\tan^2 x}{\sec x} \cdot \sec x \tan x\,dx$$

ثم باستخدام التعويض $u = \sec x$

$$\therefore\ du = \sec x \tan x\,dx$$

فإننا نحصل على التكامل في الصورة

$$\frac{1}{2}\sec^2 x - \ln|\sec x| + c$$

(d) $\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx$

الحل

$$= \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x\,dx = \int \sin^2 x \cos^2 x\,d\sin x$$

ونضع $u = \sin x$

$$\therefore \int \sin^2 x \cos^3 x\,dx = \int (1 - u^2)\cdot u^2\,du = \int (u^2 - u^4)\,du$$

$$= \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 + c = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + c$$

(e) $\int \sin^5 x \cos^2 x\,dx = -\int \sin^4 x \cos^2 x\,d\cos x$

وباستخدام التعويض $u = \cos x$ نحصل على

$$\int \sin^5 x \cos^2 x\,dx = -\int (1-u^2)^2 \cdot u^2\,du$$

$$= -\left[\frac{1}{3}u^3 - \frac{2}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7\right] + c$$

$$= -\left[\frac{1}{3}\cos^3 x - \frac{2}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x\right] + c$$

(f) $\int \sec^2 x \tan^3 x\,dx$

الحل

$$= \int \tan^3 x \cdot d\tan x = \frac{1}{4}\tan^4 x + c$$

(g) $\int \operatorname{cosec}^6 x\,dx$

الحل

$$= \int \operatorname{cosec}^4 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x\,dx$$

$$= -\int (\cot^2 x + 1)^2\,d\cot x$$

وباستخدام التعويض $u = \cot x$

$$\int \operatorname{cosec}^6 x\,dx = -\int (u^2+1)^2\,du = -\left[\frac{1}{5}\cot^5 x + \frac{2}{3}\cot^3 x + \cot x\right] + c$$

مجدي عبد السلام

مثال ⑦ :

اجري التكاملات التالية :

ⓐ $\int \frac{\sin 3x}{\sqrt{\cos 3x + 5}}\, dx$

الحل $= -\frac{1}{3}\int (-3\sin 3x)(\cos 3x + 5)^{-\frac{1}{2}}\, dx$

$= -\frac{1}{3}(\cos 3x + 5)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 + C = \frac{-2}{3}(\cos 3x + 5)^{\frac{1}{2}} + C$

ⓑ $\int x^2 \sqrt{x+2}\, dx$

الحل

نضع $u = x + 2$

$du = dx$

التكامل $= \int (u-2)^2 \sqrt{u}\, du = \int (u^2 - 4u + 4) u^{\frac{1}{2}}\, du$

$= \int (u^{\frac{5}{2}} - 4u^{\frac{3}{2}} + 4u^{\frac{1}{2}})\, du$

$= \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} - 4 \cdot \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + 4 \cdot \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{2}{7}(x+2)^{\frac{7}{2}} - \frac{8}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + C$

ⓒ $\int \frac{dx}{1+e^x}$

الحل :

نضع $u = 1 + e^x$

$du = e^x\, dx$

$\Rightarrow dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u-1}$

وبذلك يكون لدينا

التكامل $= \int \frac{du}{u(u-1)} = \int \frac{du}{u^2 - u} = \int \frac{du}{(u-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}}$

$= \int \frac{du}{\frac{1}{4} - (u - \frac{1}{2})^2} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} \tanh^{-1} \frac{u - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + C$

$= -2\tanh^{-1}(2u - 1) + C$

$= -2\tanh^{-1}(2(1+e^x) - 1) + C$

مجدي عبد السلام

(d) $\int \frac{dx}{x^3(x-3)^2}$

الحل

نضع $u = \frac{x-3}{x}$

إذن $x = \frac{3}{1-u}$

ومنها $dx = \frac{3}{(1-u)^2}\,du$

وبذلك نحصل على

$$\text{التكامل} = \int \frac{\frac{3}{(1-u)^2}\,du}{\left(\frac{3}{1-u}\right)^3 u^2} = \frac{1}{81}\int \frac{(1-u)^3}{u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{81}\int \frac{1-3u+3u^2-u^3}{u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{81}\left[-\frac{1}{u} - 3\log u + 3u - \frac{1}{2}u^2\right] + c$$

$$= \frac{1}{81}\left[-\frac{x}{x-3} - 3\log\left(\frac{x-3}{x}\right) + 3\left(\frac{x-3}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{x}\right)^2\right] + c$$

(e) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})}$

الحل

نضع $x = u^6$

$dx = \frac{dx}{du}\cdot du = 6u^5\,du$

وبالتعويض في التكامل نجد أن

$$\text{التكامل} = \int \frac{1}{u^3(1+u^2)}\cdot 6u^5\,du = 6\int \frac{u^2}{1+u^2}\,du$$

وبإجراء عملية القسمة في التكامل الأخير نحصل على

$$= 6\int\left(1-\frac{1}{1+u^2}\right)du = 6\int du - 6\int\frac{du}{1+u^2}$$

$$= 6u - 6\tan^{-1}u + c$$

$$= 6x^{\frac{1}{6}} - 6\tan^{-1}x + c$$

مجدي عبد السلام

٣-٢ التكامل بالتجزئ:

هي إحدى الطرق الهامة لإجراء التكاملات وتعتمد على النتيجة التالية:

إذا كانت f, g دالتين قابلتين للاشتقاق فإن

$$(f(x)g(x))' = f(x)(g(x))' + g(x)(f(x))'$$

ومنها نحصل على:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int (f(x)g(x))'\,dx - \int g(x)f'(x)\,dx$$

$$= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx + c$$

وبوضع $u = f(x)$, $v = g(x)$ نحصل على

$$du = f'(x), \quad dv = g'(x)\,dx$$

وبالتالي فإن

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

وبذلك نكون قد تممنا برهان النظرية الهامة التالية:

نظرية:

إذا كانت $u = f(x)$ ، $v = g(x)$ وكانت g' ، f' دوال متصلة فإن

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

مثال ① أوجد:

ⓐ $\int x e^x\,dx$

الحل: نختار

$u = x$ $\quad dv = e^x\,dx$

$du = dx$ $\quad v = e^x$

$$\therefore \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$= xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + c$$

ⓑ $\int e^x \sin x\,dx$

الحل

$$\int e^x \sin x\,dx = \int \sin x\,de^x$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx$$ (تكرار التجزئ)

$$= e^x \sin x - \int \cos x\,de^x$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\,dx$$

مجدي عبد السلام

$\therefore 2\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x$

$\therefore \int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + c$

ⓒ $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int \frac{x}{x}dx = x\ln x - x + c$

ⓓ $I = \int \sec^3 x\,dx$

الحل

$= \int \sec x\,d\tan x = \sec x\tan x - \int \tan^2 x\sec x\,dx$

$= \sec x\tan x - \int (\sec^2 x - 1)\sec x\,dx$

$= \sec x\tan x - I + \int \sec x\,dx$

$2I = \sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x| + c$

$I = \frac{1}{2}\left[\sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x|\right] + c$

مثال ⓒ

أوجد التكاملات الآتية

ⓐ $\int x\sec^2 x\,dx$

$= \int x\,d\tan x = x\tan x - \int \tan x\,dx$

$= x\tan x + \ln(\cos x)$

ⓑ $\int x^3 e^x dx$

$= \int x^3 de^x = x^3e^x - 3\int x^2e^x dx$

$= x^3e^x - 3[x^2e^x - 2\int x\,de^x]$

$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6\int x\,de^x$

$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + c$

ⓒ $\int \sin^{-1}x\,dx$

$= x\sin^{-1}x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= x\sin^{-1}x + \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + c$ مجدي عبد السلام

طريقة الاختزال المتتالي:

ويستخدم التكامل بالتجزيء للحصول على صور مهمة جداً للتكامل بالاختزال المتتالي كما سيوضح ذلك المثال التالي:

مثال (٣)

أوجد صورة الاختزال المتتالي لكل من $(m,n \in N)$:

(a) $I_n = \int \sin^n x \, dx$

الحل

$$I_n = \int \sin^n x \, dx = -\int \sin^{n-1} d\cos x$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx$$

$$I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x (1-\sin^2 x)\, dx$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$n I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2}$$

$$I_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

(b) $\int \sin^4 x \, dx$

الحل

بوضع $n=4$ في (a) نحصل على

$$I_4 = -\frac{1}{4} \cos x \sin^3 x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x \, dx$$

والتكامل الأخير نضع في (a) $n=2$ نحصل على

$$I_4 = -\frac{1}{4} \cos x \sin^3 x + \frac{3}{4}\left[\frac{-1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2} I_0\right]$$

حيث

$$I_0 = \int \sin^0 x \, dx = \int dx = x + c$$

$$\therefore I_4 = -\frac{1}{4} \cos x \sin^3 x - \frac{3}{8} \cos x \sin x + \frac{3}{8} x + c$$

مجدي عبد السلام

ⓒ $I_n = \int \sec^n x \, dx \qquad , \quad n \neq 1$

الحل

$$I_n = \int \sec^n x \, dx = \int \sec^{n-2} x \, d\tan x \, dx$$
$$= \sec^{n-2} x \tan x - \int (n-2) \tan^2 x \sec^{n-2} x \, dx$$
$$= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int (\sec^n x - \sec^{n-2} x) dx$$
$$= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) I_n + (n-2) I_{n-2}$$
$$(n-1) I_n = \sec^{n-2} x \tan x + (n-2) I_{n-2}$$
$$I_n = \frac{1}{n-2} \sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} \quad , n \neq 1$$

ⓓ $\int \sec^5 x \, dx$

الحل:

بوضع $n=5$ في ⓒ نحصل على:

$$I_5 = \frac{1}{4} \sec^3 x \tan x + \frac{3}{4} I_3$$
$$= \frac{1}{4} \sec^3 x \tan x + \frac{3}{4} \left[\frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} I_0 \right]$$
$$= \frac{1}{4} \sec^3 x \tan x + \frac{3}{8} \sec x \tan x + \frac{3}{8} x + c$$

ⓔ $I_n = \int (\ln x)^n dx$

$$= x (\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx$$
$$= x (\ln x)^n - n I_{n-1}$$

ⓕ $\int (\ln x)^6 dx$

الحل:

بوضع $n=6$ في ⓔ نحصل على

$$I_6 = x(\ln x)^6 - 6 I_5 = x(\ln x)^6 - 6[x(\ln x)^5 - 5 I_4]$$
$$= x(\ln x)^6 - 6x(\ln x)^5 + 30[x(\ln x)^4 - 4 I_3]$$
$$= x(\ln x)^6 - 6x(\ln x)^5 + 30x(\ln x)^4 - 120[x(\ln x)^3 - 3 I_2]$$
$$= x(\ln x)^6 - 6x(\ln x)^5 + 30x(\ln x)^4 - 120x(\ln x)^3 - \ldots\ldots$$

مجدي عبد السلام

$$-360[x(\ln x)^2 - 2I_1]$$
$$= x(\ln x)^6 - 6x(\ln x)^5 + 30x(\ln x)^4 - 120x(\ln x)^3$$
$$-360x(\ln x)^2 - 720[x\ln x - I_0]$$

$$I_6 = x(\ln x)^6 - 6x(\ln x)^5 + 30x(\ln x)^4 - 120x(\ln x)^3$$
$$-360x(\ln x)^2 - 720x\ln x + 720x + c$$

(g) $I_n = \int x^n e^x \, dx$

الحل:

$$= \int x^n \, de^x = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x \, dx$$
$$= x^n e^x - nI_{n-1}$$

(h) $I_n = \int x^m \sin x \, dx$

الحل

$$= -\int x^m \, d\cos x = -x^m \cos x + m\int x^{m-1} \cos x \, dx$$
$$= -x^m \cos x + m\int x^{m-1} \, d\sin x$$
$$= -x^m \cos x + m x^{m-1} \sin x - m(m-1) I_{m-2}$$

مجدي عبد السلام

Trigonometric Integrals : ٣-٢ التكاملات المثلثية

نهتم فى هذا البند بتكامل حواصل ضرب لقوى دوال مثلثيه

① $\int \sin^m x \cos^n x \, dx \quad , n, m \in Z$

ⓐ إذا كانت m عدد فردى نكتب

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = -\int \sin^{m-1} x \cos^n x \, d\cos x$$

ثم نعوض عن

$\sin^{m-1} x$ بدلالة $\cos x$ باستخدام المطابقة $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

ⓑ إذا كانت n عدد فردى نكتب :

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin^m x \cos^{n-1} x \, d\sin x$$

ومرة أخرى نستخدم المطابقة

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ للتعويض على $\cos^{n-1} x$ بدلالة $\sin x$

ⓒ إذا كانت m, n زوجيتان فإننا نستخدم التعويض:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad , \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

مثال ①

أوجد التكاملات الآتية

ⓐ $\int \sin^5 x \, dx$

$$= -\int \sin^4 x \, d\cos x = -\int (1 - \cos^2 x)^2 \, d\cos x$$

$$= -\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \, d\cos x$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

ⓑ $\int \cos^4 x \, dx$

$$= \int \left[\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\right]^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) \, dx$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

مجدى عبد السلام

ⓒ $\int \sin^3 x \cos^6 x \, dx = -\int (1-\cos^2 x)\cos^6 x \, d\cos x$

$= -\frac{1}{7}\cos^7 x + \frac{1}{9}\cos^9 x + C$

ⓓ $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)(\frac{1}{2})^2(1+\cos 2x)^2 dx$

$= \frac{1}{8}\int (1-\cos^2 2x)(1+\cos 2x)\, dx$

$= \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x)\, dx$

$= \frac{1}{8}[\, x + \frac{1}{2}\sin 2x - \int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)dx$

$- \frac{1}{2}\int \cos^2 2x \, d\sin 2x \, dx]$

$= \frac{1}{8}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{2}\int (1-\sin^2 2x)\, d\sin 2x\right]$

$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{6}\sin^3 2x\right] + C$

$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$

---

② $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$

أ) اذا كانت m عدد فردي نكتب

$\int \tan^m x \sec^n x \, dx = \int \tan^{m-1} x \sec^{n-1} x \, d\sec x$

ب) اذا كانت n عدد فردي نكتب

$\int \tan^m x \sec^n x \, dx = \int \tan^m x \sec^{n-2} x \, d\tan x$

ونعبر عن $\sec^{n-2} x$ بدلالة $\tan x$ مستخدمين المتطابقة

$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

ج) اذا كانت m عدد زوجي و n عدد فردي فيمكن استخدام التكامل بالتجزيء أو أي طريقة اخرى

مجدي عبد السلام

مثال ⑥ : أوجد :

ⓐ $\int \tan^3 x \sec^5 x\, dx$

الحل

$= \int \tan^2 x \sec^4 x\, d\sec x = \int (\sec^2 x - 1)\sec^4 x\, d\sec x$

$= \frac{1}{7}\sec^2 x - \frac{1}{5}\sec^5 x + c$

ⓑ $\int \tan^2 x \sec^4 x\, dx$

الحل

$= \int \tan^2 x(1+\tan^2 x)\, d\tan x = \frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + c$

ⓒ $\int \sec^8 x\, dx$

الحل

$= \int \sec^6 x\, d\tan x = \int (1+\tan^2 x)^3\, d\tan x$

$= \int (1 + 3\tan^2 x + 3\tan^4 x + \tan^6 x)\, d\tan x$

$= \tan x + \tan^3 x + \frac{3}{5}\tan^5 x + \frac{1}{6}\tan^6 x + c$

ⓓ $\int \tan^6 x\, dx$

الحل

$= \int (\sec^2 x - 1)^3 dx = \int \sec^6 x\, dx - 3\int \sec^4 x\, dx + 3\int \sec^2 x\, dx$
$- \int dx$

$= \int (1+\tan^2 x)^2\, d\tan x - 3\int (1+\tan^2 x)\, d\tan x + 3\tan x - x + c$

$= \tan x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x - 3\tan x - \tan^3 x$

$+ 3\tan x - x + c$

$= \frac{1}{5}\tan^5 x - \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x - x + c$

مجدي عبد السلام

③ $\int \sin mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2}\int [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] \, dx$

$= \frac{-1}{2}\left[\frac{\cos(m+n)x}{m+n} + \frac{\cos(m+n)x}{m-n}\right] + c$

$\int \sin mx \sin nx \, dx = -\frac{1}{2}\int [\cos(m+n)x - \cos(m-n)x] \, dx$

$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} - \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right] + c$

$\int \cos mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2}\int [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] \, dx$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)}{m+n} + \frac{\sin(m-n)}{m-n}\right] + c$

مثال ⑦ أوجد التكاملات الآتية :

ⓐ $\int \cos 3x \cos 7x \, dx$

$= \frac{1}{2}\int (\cos 10x + \cos 4x) \, dx = \frac{1}{20}\sin 10x + \frac{1}{8}\sin 4x + c$

ⓑ $\int \sin 2x \sin 5x \, dx$

$= -\frac{1}{2}\int [\cos 7x - \cos(-3x)] \, dx$

$= -\frac{1}{2}\int (\cos 7x - \cos 3x) \, dx = -\frac{1}{14}\sin 7x + \frac{1}{6}\sin 3x + c$

ⓒ $\int \cos 7x \sin 3x \, dx$

$= \int \sin 3x \cos 7x \, dx = \frac{1}{2}\int [\sin 10x + \sin(-4x)] \, dx$

$= \frac{1}{2}\int [\sin 10 - \sin 4x] \, dx$

$= -\frac{1}{20}\cos 10x + \frac{1}{8}\cos 4x + c$

مجدي عبد السلام

٤-ج التكامل بإزالة الجذور:

نستخدم التعويض بالدوال المثلثية للتخلص من الجذور الموجودة تحت علامة التكامل:

وإذا اشتملت الدالة المكاملة على:

① $\sqrt{a^2-x^2}$ فإننا نستخدم التعويض $x=a\sin\theta ,\ |\theta| \le \frac{\pi}{2}$

② $\sqrt{a^2+x^2}$ نستخدم التعويض $x=a\tan\theta ,\ |\theta| \le \frac{\pi}{2}$

③ $\sqrt{x^2-a^2}$ نستخدم التعويض $x = a\sec\theta ,\ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}]$

مثال (٧)

أوجد قيمة التكاملات الآتية:

(a) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\, dx$

الحل

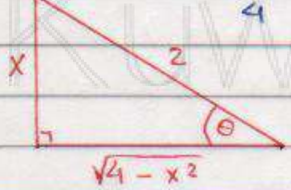
نضع $x = 2\sin\theta$ حيث $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ بذلك نحصل على

$dx = 2\cos\theta\, dx$

$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2\theta} = 2\cos\theta$

$\therefore$ التكامل $= 2\int \frac{\cos\theta}{8\sin^2\theta\cos\theta}\, d\theta = \frac{1}{4}\int \operatorname{cosec}^2\theta\, d\theta$

$= -\frac{1}{4}\cot\theta + c$



وحيث أن $\sin = \frac{x}{2}$ ، $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ فإما $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ وفي هذه الحالة نجد من المثلث المقابل أن

$\cot = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$

وبسهولة يمكن إثبات أن الصورة الأخيرة تظل كما هي عندما $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$

التكامل $= -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + c$

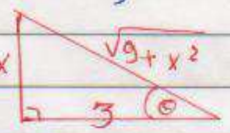
(b) $\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}\, dx$

نضع $x = 3\tan\theta$ ومنها نجد أن

جميل العبد الله

$\sqrt{9+x^2} = 3\sec\theta$, $dx = 3\sec^2\theta\, d\theta$

التكامل $= \int \frac{3\sec^2\theta}{3\sec\theta}\, d\theta = \int \sec\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta+\tan\theta|+c$



ومن المثلث المقابل نجد أن

التكامل $= \ln\left|\frac{\sqrt{9+x^2}}{3}+\frac{x}{3}\right|+C$

(c) $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}\, dx$

نفرض $x = 4\sec\theta$ فنحصل على

$\sqrt{x^2-16} = \sqrt{16\sec^2\theta-16} = 4\sqrt{\sec^2\theta-1} = 4\tan\theta$

$dx = 4\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

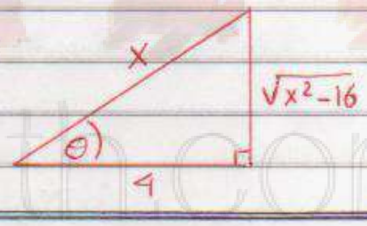
التكامل $= \int \frac{4\tan\theta}{4\sec\theta}\, 4\sec\theta\tan\theta\, d\theta = 4\int \tan^2\theta\, d\theta$

$= 4\int(\sec^2\theta-1)\, d\theta = 4\tan\theta - 4\theta + C$

ومن المثلث المقابل نحصل على

التكامل $= 4\,\frac{\sqrt{x^2-16}}{4} - 4\sec^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)+C$

$= \sqrt{x^2-16} - 4\sec^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)+C$



(d) $\int \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^6}\, dx$

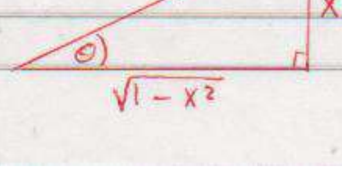
نفرض $x = \sin\theta$

$dx = \cos\theta\, d\theta$

التكامل $= \int \frac{(\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}\cos\theta\, d\theta}{\sin^6\theta} = \int \frac{\cos^4\theta}{\sin^6\theta}\, d\theta$

$= \int \cot^4\theta\, \mathrm{cosec}^2\theta\, d\theta = -\frac{1}{5}\cot^5 + C = -\frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^5 + C$

$= -\frac{1}{5}\,\frac{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}{x^5}+C$



مجدي عبد السلام

٢-٥ التكامل باستخدام الكسور الجزئية

Integration by Partial Fractions:

وهي الطريقة التي تتعامل مع الدوال النسبية $f(x)=\frac{P(x)}{q(x)}$
فيعبر عنها في صورة مجموع كسور جزئية
يسهل تكامل كل كسر على حدة ويتبع الآتي:

① اذا كانت درجة $P(x)$ اكبر من درجة $q(x)$ فنستخدم القسمة المطولة لنحصل على كثيرة حدود مضافا اليها باقي هو $\frac{R(x)}{q(x)}$ حيث درجة $R(x)$ أقل من درجة $q(x)$

② نحلل المقام $q(x)$ إلى عوامل ضرب كثيرات حدود خطية $ax+b$ أو تربيعية ax^2+bx+c مع احتمال تكرار بعض العوامل أكثر من مرة

③ كل عامل $n \geq 1$ ، $(ax+b)^n$ من عوامل $q(x)$ يكون الكسور المناظرة له في الصورة:

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

④ كل عامل $n \geq 1$ ، $(ax^2+bx+c)^n$ بشرط أن يكون العامل ax^2+bx+c غير قابل للتحليل فإن الكسر المناظر له يكون في الصورة:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

مثال ⑧ أوجد

(a) $$\int \frac{x^2+x+4}{x^3+2x^2-x-2}\,dx$$

الحل

$$\text{التكامل} = \int \frac{x^2+x+4}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

وباستخدام الكسور الجزئية نجد أن:

$$\frac{x^2+x+4}{(x-1)(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}$$

$$=\frac{A(x+1)(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

مجدي عبد السلام

$$x^2+x+4 = A(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x+1)$$

وهناك طريقتان لتحديد قيم الثوابت A, B, C

الطريقة الأولى:

بالتعويض بقيم مناسبة للمتغير x في كلا من الطرفين

بوضع $x=1$ نحصل على $6 = 6A \Rightarrow A = 1$

بوضع $x=-1$ نحصل على $4 = -B \Rightarrow B = -2$

بوضع $x=-2$ نحصل على $6 = 3C \Rightarrow C = 2$

$$\therefore \text{التكامل} = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x+2} \right) dx$$

$$= \ln|x-1| - 2\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + c$$

$$= \ln\left| \frac{(x-1)(x+2)^2}{(x+1)^2} \right| + c$$

الطريقة الثانية:

بمساواة معاملات القوى المتناظرة في كلا من طرفي المعادلة

$$x^2+x+4 = A(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x+1)$$

نحصل على

$A + B + C = 1$

(معامل x^2 في الطرف الأيمن = معامل x^2 في الطرف الأيسر)

$3A + B = 1$

(معامل x في الطرف الأيمن = معامل x في الطرف الأيسر)

$2A - 3B - C = 4$

(الحد المطلق في الطرف الأيمن = الحد المطلق في الطرف الأيسر)

وبحل هذه المعادلات نحصل على:

$A = 1 \quad , \quad B = -2 \quad , \quad C = 2$

(b) $$I = \int \frac{x^2+x+2}{x^3+x^2-x-1}\, dx$$

$$= \int \frac{x^2+x+2}{(x-1)(x+1)^2}\, dx$$

مجدى عبدالسلام

$$\therefore \frac{x^2+x+2}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \Rightarrow$$

$$x^2+x+2 = A(x-1)(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)$$

وبوضع $x=1$ نحصل على

$$4 = 4A \Rightarrow A = 1$$

وبوضع $x=-1$ نحصل على

$$2 = -2C \Rightarrow C = -1$$

وبوضع $x=0$ نحصل على

$$2 = 1 - B + 1 \Rightarrow B = 0$$

$$\therefore I = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \ln|x-1| + \frac{1}{x+1} + c$$

ⓒ $\int \frac{x^3+2x-1}{x^2+2x+1}\,dx$

هنا درجة البسط أكبر من درجة المقام فلا بد من إجراء القسمة المطولة ونحصل على:

$$\frac{x^3+2x-1}{x^2+2x+1} = x - 2 + \frac{5x+1}{x^2+2x+1}$$

وبالتحليل الى الكسور الجزئية

$$\frac{5x+1}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} \Rightarrow 5x+1 = A(x+1) + B$$

بوضع $x=-1$ نحصل على

$$B = -4$$

وبوضع $x=0$ نحصل على

$$1 = A - 4 \Rightarrow A = 5$$

$$\therefore I = \int (x-2)\,dx + 5\int \frac{dx}{x+1} - 4\int \frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5\ln|x+1| + \frac{4}{x+1} + c$$

مجدي عبد السلام

٦-٢ التكاملات التي تشتمل على صيغ تربيعية

التحليل الى كسور جزئية يؤدي في بعض الأحيان الى تكاملات تشتمل على كثيرة حدود من الدرجة الثانية غير قابلة للتحليل ax^2+bx+c فإذا كانت $b \neq 0$ فيلزم هنا أن نكمل المربع والأمثلة التالية كافية لتوضيح هذه الطريقة:

مثال (٩)

أوجد التكاملات الآتية:

(a) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2-6x+13}\,dx$

$$= \int \frac{2x-6+5}{x^2-6x+13}\,dx = \int \frac{2x-6}{x^2-6x+13}\,dx + 5\int \frac{1}{x^2-6x+13}\,dx$$

$$= \ln|x^2-6x+13| + 5\int \frac{dx}{(x-3)^2+4}$$

$$= \ln|x^2-6x+13| + \frac{5}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x-3}{2}\right) + c$$

(b) $\displaystyle I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+8x+25}}\,dx$

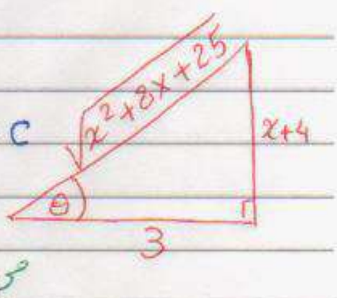
$$= \int \frac{1}{\sqrt{(x+4)^2+9}}\,dx$$

بوضع $x+4 = \tan\theta$ فيكون $dx = 3\sec^2\theta\,d\theta$

$$I = \int \frac{3\sec^2\theta\,d\theta}{\sqrt{9\tan^2\theta+9}} = \int \sec\theta\,d\theta = \ln|\sec\theta+\tan\theta| + c$$

$$I = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+8x+25}}{3} + \frac{x+4}{3}\right| + c$$

$$= \ln\left|\sqrt{x^2+8x+25} + x+4\right| - \ln 3 + c$$



$$= \ln\left|\sqrt{x^2+8x+25} + x+4\right| + K$$

مجدي عبد السلام

(c) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x}}$

بوضع $x-1 = \sin\theta$

نحصل على $dx = \cos\theta \, d\theta$

$$I = \int \frac{\cos\theta \, d\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \int d\theta = \theta + C = \sin^{-1}(x-1) + C$$

(d) $$\int \frac{x+1}{\sqrt{2x^2-6x+4}} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{2x-3+5}{\sqrt{x^2-3x+2}} dx$$

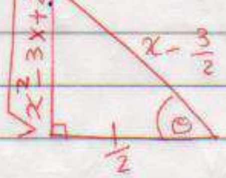
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+2}} dx + \frac{5}{2\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x^2-3x+2} + \frac{5}{2\sqrt{2}} \int \frac{dx}{(x-\frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}}$$

في التكامل الأخير بوضع $x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\sec\theta$

نحصل على $dx = \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta \, d\theta$

$$\therefore \int \frac{dx}{(x-\frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \int \frac{\sec\theta \tan\theta}{\frac{1}{2}\tan\theta} d\theta = \int \sec\theta \, d\theta$$



$$= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

$$= \ln|2x-3+\sqrt{x^2-3x+2}| + C$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2-3x+2} + \frac{5}{2\sqrt{2}} \ln|2x-3+\sqrt{x^2-3x+2}| + C$$

٧ـ ح تكاملات ذات طابع معين:

Certain Types of Intrgrals:

مثال (١٠): أوجد التكاملات الآتية

(a) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$

نضع $x = u^6$

فيكون $dx = 6u^5\,du$

$$= 6\int \frac{u^5}{u^3+u^2}\,du = 6\int \frac{u^3}{u+1}\,du$$

$$= 6\int \left(u^2 - u + 1 - \frac{1}{u+1}\right) du$$

$$= 6\left[\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{2}u^2 + u - \ln|u+1|\right] + c$$

$$= 6\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} - \ln|\sqrt[6]{x}+1| + c$$

(b) $\int \frac{dx}{4\sin x - 3\cos x}$

مثل تلك التكاملات والتي تشتمل على دوال نسبية في $\sin x$ ، $\cos x$ يفضل استخدام التعويض التالي:

نضع $u = \tan\frac{x}{2}$, $|x| < \frac{\pi}{2}$ ومنه نجد أن

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad dx = \frac{2}{1+u^2}\,du$$

$$= \int \frac{1}{4\left(\frac{2u}{1+u^2}\right) - 3\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+u^2}\,du$$

$$= 2\int \frac{1}{3u^2+8u-3}\,du$$

محمد عبد السلام

$$= 2\int \frac{1}{(3u-1)(u+3)}\,du = \frac{2}{10}\int\left(\frac{3}{3u-1} - \frac{1}{u+3}\right) du$$

$$= \frac{1}{5}\left[\ln|3u-1| - \ln|u+3|\right] + c$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{3u-1}{u+3}\right| + c$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{3\tan(\frac{x}{2})-1}{\tan(\frac{x}{2})+3}\right| + c$$

ⓒ $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$

نضع $u = \sin x$

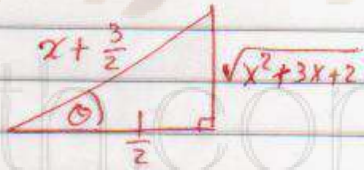
فيكون $du = \cos x\,dx$

$$= \int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} u + c = \tan^{-1}(\sin x) + c$$

ⓓ $\int \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\,dx$

$$= \int \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)(x+2)}}\,dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+3-1}{\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$$



$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx - \int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx\right)$$

$$= \sqrt{x^2+3x+2} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}}}$$

نضع $x+\frac{3}{2} = \frac{1}{2}\sec\theta$ فيكون $dx = \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta\,d\theta$

$$= \sqrt{x^2+3x+2} - \frac{1}{2}\int \frac{\sec\theta\tan\theta}{\frac{1}{2}\tan\theta}\,d\theta$$

$$= \sqrt{x^2+3x+2} - \int \sec\theta\,d\theta$$

$$= \sqrt{x^2+3x+2} - \ln|\sec\theta + \tan\theta| + c$$

$$= \sqrt{x^2+3x+2} - \frac{1}{2}\ln\left|2x+3+\sqrt{x^2+3x+2}\right| + c$$