الوحدة
الحادية عشر
الجبر المتقطع

تمرّنْ
11-1

مبدأ العد والتباديل والتوافيق

Counting Principle, Permutations and Combinations

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) قيمة المقدار $10!$ هي 3 628 800 [✓ a] b

السبب:

باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن : $10! = 3628800$

(2) قيمة المقدار $5! \times 4!$ هي 360 a [✓ b]

السبب:

لأن باستخدام الآلة الحاسبة : نجد أن : $5! \times 4! = 120 \times 24 = 2880$

(3) عدد طرق جلوس 4 أشخاص على 4 مقاعد في صفّ هو $4!$ [✓ a] b

السبب:

لان الشخص الأولي لدية أربعة فرص في الجلوس ، و الشخص الثاني لدية ثلاثة فرص في الجلوس ، الشخص الثاني لدية فرصتان في الجلوس ، الشخص الرابع لدية فرص واحده في الجلوس

وبالتالي يكون عدد طرق الجلوس = $4! = 4\times3\times2\times1$

(4) قيمة المقدار $3 \times {}_5C_4$ هي 15 [✓ a] b

السبب:

باستخدام الآلة الحاسبة $3\times {}_5C_3 = 5\times3 = 15$

(5) $(n-r)! = n! - r!$

a [✓ b]

السبب:

لأن المضروب لا يمكن توزيعه $(n-r)! \neq n! - r!$

في التمارين (15–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) قيمة المقدار $\frac{10!}{7!3!}$ هي:

a $\frac{10}{21}$ b $\frac{1}{120}$ [✓ c] 120 d 1

السبب: **باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن :**

$$\frac{10!}{7!\times 3!} = \frac{10\times 9\times 8\times 7!}{7!\times 3\times 2\times 1} = \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1} = 120$$

(7) قيمة المقدار ${}_{10}C_6 \times {}_6P_4$ هي:

[✓ a] 75 600 b 7 560 c 2.5 d 210

السبب:

باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن :

$${}_{10}C_6 \times {}_6P_4 = 120 \times 360 = 75600$$

(8) قيمة المقدار ${}_9C_2 \times \frac{{}_7C_4}{{}_9C_4}$ هي:

a 18 b 5.184 [✓ c] 10 d 735

السبب:

باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن :

$${}_9C_2 \times \frac{{}_7C_4}{{}_9C_4} = \frac{\frac{7\times 6\times 5\times 4}{4\times 3\times 2\times 1}}{\frac{9\times 8\times 7\times 6}{4\times 3\times 2\times 1}} = 10$$

(9) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار 5 لاعبين لفريق السلة من بين 12 لاعبًا إذا كان ترتيب المراكز في الفريق مهمًّا؟

[✓ a] 95 040 b 475 200 c 392 d 11 404 800

السبب

إذا كان ترتيب المراكز مهم فإن عدد طرق اختيار 5 لأعبين من بين 12 لاعبا يساوي $_{12}P_{5}$ وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن $_{12}P_{5} = 95040$

(10) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار 3 أعلام من مجموعة من 7 أعلام مختلفة؟

(a) 210

[✓ (b) 35]

(c) 840

(d) 24

السبب:

حيث أن الاختبار من مجموعة فهذا يعني أن ترتيب العناصر غير مهم ذلك نحسب عدد التوافيق ، وبالتالي فأن عدد طرق اختيار 3 أعلام من 7 أعلام تساوي $_{7}C_{3}$ باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن $_{7}C_{3} = 35$

(11) إذا كان هناك طريق واحدة تصل بين كل مدينتين. فما عدد الطرق التي تصل بين 8 مدن.

(a) 20 160

(b) 2 520

(c) 40 320

[✓ (d) 5 040]

السبب:

عدد الطرق التي تصل بين 8 مدن هي : $(8-1)! = 7! = 5040$

(12) في المخزن 6 بطاريات من ماركات مختلفة، 3 بطاريات جديدة و3 مستخدمة. بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار على الأقل بطارية واحدة جديدة من 3 بطاريات؟

(a) 1

[✓ (b) 19]

(c) 9

(d) 6

السبب:

لآنه يمكن أخذ كل الخيارات الممكنة لـ 3 بطاريات من بين $(3+3= 6)$ بطارية

ورفض اختيار 3 بطاريات من (البطاريات المستخدمة) فيكون

عدد اختيارات باستخدام الآلة الحاسبة هي : $_{6}C_{3} - (_{3}C_{3} \times {_{3}C_{0}}) = 20 - 1 = 19$

(13) بكم طريقة مختلفة يجلس أحمد ومحمد وعلي وجاسم وفهد بشرط تجاور محمد وأحمد؟

(a) $5!$

(b) $4!$

[✓ (c) $2! \times 4!$]

(d) $2! \times 5!$

السبب:

محمد	أحمد	علي	وجاسم	فهد
على	أحمد	محمد	أحمد	فهد
على	جاسم	أحمد	محمد	فهد
على	جاسم	فهد	أحمد	محمد

من الرسم أن هناك 4 طرائق مختلفة لجلوس محمد واحمد متجاورين وعدد طرق جلوس محمد وأحمد تساوي $2!$ عدد طرق جلوس على وجاسم وفهد $3!$ وبالتالي فإن إجمالي عدد طرق الجلوس تساوي $4\,(2!)(3!) = (4!)\,(2!) = 48$

(14) إذا كان: $_nP_3 = 60$ فإن n تساوي

(a) 6

[✓ (b) 5]

(c) 4

(d) 2

السبب:

$_nP_3 = 60$

$$n\,(n-1)\,(n-2) = 60$$

$$n\,(n-1)\,(n-2) = 5 \times 4 \times 3$$

$$n = 5$$

(15) مجموعة حلّ المعادلة: $_6C_r = 15$ هي:

(a) $\{2\}$

(b) $\{4\}$

[✓ (c) $\{2, 4\}$]

(d) $\{3\}$

السبب:

عندما $r = 2$ **فإن** $_6C_r = {_6C_2} = 15$ (**مقبول**)

عندما $r = 3$ **فإن** $_6C_r = {_6C_3} = 20$ (**مرفوض**)

عندما $r = 4$ **فإن** $_6C_r = {_6C_4} = 15$ (**مقبول**)

تمرَّنْ
11-2

نظرية ذات الحدين

The Binomial Theorem

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5−1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) مفكوك $(c+1)^5$ هو: $c^5+5c^4+10c^3+10c^2+5c+1$ [✓ a] b

السبب:

مفكوك

$$(c+1)^5 = {}_5C_0c^5 + {}_5C_1c^4 + {}_5C_2c^3 + {}_5C_3c^2 + {}_5C_4c + {}_5C_5c^0$$

$$(c+1)^5 = c^5 + 5c^4 + 10c^3 + 10c^2 + 5c + 1$$

(2) إذا كان الحد $126c^4d^5$ أحد حدود مفكوك $(c+d)^n$، فإنّ قيمة n هي 5 a [✓ b]

السبب:

إذا كان الحد $126\,C^4d^5$ **أحد مفكوك** $(c+d)^n$ **فإن** :

$n - r = 4 \ldots\ldots\ldots (1)\ , r = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

بالتعويض من $(2)\ , (1)$ **فإن**

$$n - 5 = 4 \Rightarrow n = 9$$

(3) إذا كان معامل الحد الثاني في مفكوك $(r+x)^n$ هو 7 فإنّ قيمة n هي 7 [✓ a] b

السبب:

معامل T_2 **يساوي** 7

$${}_nC_1 = 7 \Rightarrow n = 7$$

(4) الحدّ الثاني من $(x+3)^9$ هو $54x^8$

a [✓ b]

السبب:

نوجد الحد الثاني في مفكوك $(x+3)^9$

$$\because\ T_{r+1} = n\,C_r \times x^{n-r} \times y^r$$

$$T_2 = T_{1+1} = 9\,C_1 \times x^{9-1} \times 3^1 = 27\,x^9$$

(5) معامل الحد السابع في مفكوك $(x-y)^7$ هو عدد سالب.

a [✓ b]

السبب:

نوجد الحد السابع في مفكوك $(x-3)^7$

$$\because\ T_{r+1} = n\,C_r \times x^{n-r} \times y^r$$

$$T_7 = T_{6+1} = 7\,C_6 \times x^{7-6} \times (-3)^6 = 27\,x$$

يكون معامل الحد السابع موجب لأن (-3) **مرفوعة لأس زوجي**

(6) مفكوك $(a-b)^3$ هو:

- a $a^3+a^2b+ab^2+b^3$
- b $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- c $a^3-a^2b+ab^2-b^3$
- [✓ d] $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

السبب:

مفكوك

$$(a-b)^3 = {}_3C_0\,a^3 - {}_3C_1\,a^3b + {}_5C_2\,c^2b^2 - {}_3C_3\,b^3$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

(7) الحد الثالث من مفكوك $(a-b)^7$ هو:

- a $-21a^5b^2$
- b $-7a^6b$
- c $7a^6b$
- [✓ d] $21a^5b^2$

السبب:

نوجد الحد الثالث في مفكوك $(a-b)^7$

$$\because\ T_{r+1} = n\,C_r \times x^{n-r} \times y^r$$

$$T_3 = T_{2+1} = 7\,C_2 \times (a)^{7-2} \times (-b)^2 \quad = 21\,a^5\,b^2$$

(8) في مفكوك $(2a-3b)^6$ الحد الذي معامله 2 160 هو:

a الحدّ الثاني

[✓ b] الحد الثالث

c الحد الرابع

d الحد الخامس

السبب:

مفكوك $(2a-3\,b)^6$

$$(2a-3\,b)^6 \ = {}_6C_0\,(2a)^6 + {}_6C_1\,(2a)^{6-1}\,(-3b)^1 + {}_6C_2\,(2a)^{6-2}\,(-3b)^2$$

$${}_6C_3\,(2a)^{6-3}\,(-3b)^3 \ + {}_6C_4\,(2a)^{6-4}\,(-3b)^4 + {}_6C_5\,(2a)^{6-5}\,(-3b)^5$$

$$+ {}_6C_6\,(2a)^{6-6}\,(-3b)^6$$

$$(2a-3\,b)^6 = 64\,a^6 - 576a^5\,b + 2160\,a^4\,b^2 + \cdots$$

معامل الحد الثالث الذي معاملة *2160*

(9) معامل الحد الثالث في مفكوك $(3c-4b)^5$ هو:

a 5 170

b 3 312

[✓ c] 4 320

d 2 316

السبب

نوجد الحد الثالث في مفكوك $(3c-4b)^5$

$$\because\ T_{r+1} = n\,C_r \times x^{n-r} \times y^r$$

$$T_3 = T_{2+1} = 5\,C_2 \times (3c)^{5-2} \times (-4b)^2 \quad = 4320\,a^3\,b^2$$

(10) في مفكوك $(x+y)^9$ تكون رتبة الحد: $126x^5y^4$ هي:

a الرابعة   [✓ b الخامسة]   c السادسة   d التاسعة

السبب:

إذا كان الحد $126\,x^5\,y^4$ **أحد حدود مفكوك** $(x+y)^9$

$\because\ T_{r+1} = n\,C_r \times x^{n-r} \times y^r$

$\text{n} = 9\ .\ 9 - r = 5\ \Rightarrow r = 9 - 5 = 4$

وبالتالي فإن : $r = 4$ **وتكون رتبة الحد هي الرتبة الخامسة لأن**

$T_5 = T_{4+1}$

(11) في مفكوك $(3x+2y)^8$ الحد الذي يحوي x^3y^5 هو:

a T_3 [✓ b T_6]   c T_5 d T_8

السبب:

في مفكوك كثيرة الحدود $(3x+2y)^8$ **نجد** $n = 8$

في الحد الذي يحتوي على x^3y^5 **نلاحظ أن أس** y **يساوي** 5 **وبالتالي فإن** $r = 5$

$\because\ T_{r+1} = n\,C_r \times x^{n-r} \times y^r$

$\therefore\ T_{5+1} = 8\,C_3 \times (3x)^{8-5} \times (2y)^5 = 8\,C_5 \times 3^3 \times 2^5\,x^3y^5$

الحد السادس هو الذي يحتوي على x^3y^5 **أي الحد هو** T_6

تمرَّنْ
11−3

الاحتمال

Probability

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4−1)، ظلّل ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إن اختيار لون السيارة عشوائيًا، اختيار الدواليب عشوائيًا هما حدثان مستقلان. [✓ a] b

السبب:

لأن وقوع أحدهما لا يوثر في وقوع الأخر .

(2) الحدثان m، n مستقلان، $P(m)=\frac{12}{17}$, $P(n)=\frac{3}{8}$ إذاً $P(m\cap n)=\frac{9}{17}$ a [✓ b]

السبب:

حيث أن الحدثين $n\ ,\ m$ مستقلان فيكون

$$p\ (n\ \cap m\ ) = p(n)\ \cdot p(m)\ ) = \frac{2}{8} \times \frac{12}{17} = \frac{9}{34}$$

(3) عند رمي حجر نرد، فإن احتمال ظهور العدد 4 أو ظهور عدد زوجي يساوي $\frac{1}{2}$ [✓ a] b

$S\ = \{\ 1.2.3.4.5.6\}$ $\quad .n\ (s) = 6$

$A = \{\ 4\ \}\quad ,\quad B = \{\ 2\ ,4\ ,6\ \}$

الحدث $A\ \cup B$ (للحصول 4 أو عدد زوجي)

$A\ \cup B = \{\ 4\ \} \cup \{\ 2\ .\ 4.\ 6\ \} = \{\ 2.4.6\}\qquad n\ (A \cup B) = 3$

$$p\ (A\ \cup B\ ) = \frac{n\ (A\cup B)}{n\ (s)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(4) في اختبار صح – خطأ، أجبت عن 5 أسئلة عشوائيًا. احتمال أن تكون 3 من إجاباتك صحيحة هو $\frac{5}{16}$ [✓ a] b

السبب:

الحدث E : (أن يكون 3 من إجاباتك صحيحة)

وحيث أن الإختيار صح أو خطأ فنستخدم احتمال ذات الحدين ،

وتكون $K = 3 \ . n = 5 \ \ 1 - m = \frac{1}{2} \ . m = \frac{1}{2}$

$$\because P\ (E) = nC_k\, m^k \cdot (1-m)^{n-k}$$

$$\therefore P\ (E) = {}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = 10 \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$$

في التمارين (5–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) الحدثان m، n مستقلان، $P(m) = \frac{1}{3}$، $P(n) = \frac{9}{10}$ إذاً $P(m \cap n)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{25}{30}$

[✓ c] $\frac{3}{10}$ (d) $\frac{11}{30}$

السبب:

حيث أن n , m مستقلان فيكون

$$p\ (n\ \cap m\ ) = \ p(n)\ \cdot p(m)\ ) = \ \frac{1}{3} \times \frac{9}{10} = \ \frac{3}{10}$$

(6) الحدثان t، r متنافيان $P(t) = \frac{3}{5}$، $P(r) = \frac{1}{3}$ إذاً $P(t \cup r)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{5}$ [✓ b] $\frac{14}{15}$

(c) $\frac{4}{15}$ (d) 0

السبب:

حيث أن الحدثين r , t متنافيان فيكون :

$$P\ (t\ \cup r\ ) = P(t) + P(r) = \frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \frac{14}{15}$$

(7) الحدثان t، r متنافيان $P(t)=\frac{1}{7}$، $P(r)=60\%$ إذاً $P(t\cup r)$ تساوي:

(a) 28% (b) 42%

(c) $\frac{16}{35}$ [✓ d] $\frac{26}{35}$

السبب:

حيث أن الحدثين $r\ ,\ t$ متنافيان فيكون :

$$P\ (t\ \cup r\ )=P(t)+P(r)=\frac{1}{7}+\frac{3}{5}=\frac{26}{35}$$

(8) عند رمي حجر نرد فإن احتمال ظهور عدد زوجي أو عدد أولي يساوي:

(a) $\frac{2}{3}$ [✓ b] $\frac{5}{6}$

(c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

السبب:

$$S\ =\{\ 1.2.3.4.5.6\} \qquad .n\ (s)=6$$

$$A=\{\ 2{,}4{,}6\ \} \qquad , \qquad B=\{\ 2\ ,3\ ,5\ \}$$

الحدث $A\ \cup B$ (**للحصول عدد زوجي أو عدد أولي**)

$$A\ \cup B=\{\ 2.4.6\ \ \}\cup\{\ 2\ .\ 3.\ 5\ \}=\{\ 2.3.4.5.6\} \quad n\ (A\cup B)=5$$

$$p\ (A\ \cup B\ )=\frac{n\ (A\cup B)}{n\ (s)}=\frac{5}{6}$$

(9) يحتوي كيس على 5 كرات من اللون الأزرق، 3 كرات من اللون الأحمر. أخذت عشوائيًّا كرتان معًا من الكيس. احتمال الحدث: «أن تكون كرة حمراء والأخرى كرة زرقاء» هو:

(a) $\frac{1}{14}$ (b) $\frac{28}{15}$

(c) $\frac{2}{7}$ [✓ d] $\frac{15}{28}$

السبب:

بفرض أن S فضاء العينة فيكون :

$$n\ (S)=\ {}_8C_2=28$$

وبفرض الحدث B : (كرة زرقاء وكرة حمراء) فيكون

$$n\ (B)=\ {}_5C_1\times{}_3C_1=5\times3=15$$

$$P\ (B)=\frac{\text{عدد نواتج الحدث B}}{\text{عدد نواتج فضاء العينة S}}=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{15}{28}$$

(10) يتوزّع طلاب مدرستين B، A على الصفوف الثلاثة الأخيرة وفق النسب التالية:

الصف / المدرسة	العاشر	الحادي عشر	الثاني عشر
A	37%	35%	28%
B	38%	34%	28%

اختير عشوائيًا طالب من كل مدرسة. احتمال أن يكون طالب من الصف العاشر أو الصف الحادي عشر من المدرسة A وطالب من الصف الثاني عشر من المدرسة B هو:

[✓ a] 20.16% (b) 100%

(c) 0% (d) 79.84%

السبب:

بفرض أن الحدث E هو الحدث المطلوب فيكون احتمال هذا الحدث هو

$$P\,(E) = (37\% + 35\%)\times 28\%$$
$$= 0.2016$$
$$= 20.16\%$$

(11) 90% من القمصان التي تنتجها إحدى الشركات لا عيب فيها. اختار مراقب الجودة 8 قمصان عشوائيًا. احتمال أن يكون 3 قمصان من هذه المجموعة لا عيب فيها هو تقريبًا:

(a) 0.033 (b) 5.9×10^{-4}

[✓ c] 4×10^{-4} (d) 2.955

الحدث E (أن يكون 3 قمصان من هذه المجموعة لاعيب فيها)

$K = 3 \,.\, n = 8 \,.\; 1 - n = 1 - 0.90 = 0.10 \quad .\, n = 0.90$ **وتكون**

$$\because P\,(E) = nC_k\, m^k \cdot (1-m)^{n-k}$$
$$\therefore P\,(E) = {}_8C_3\,(0.9)^3 \cdot (0.10)^{8-3} = 4\times10^{-4} = 0.0004$$