الوحدة التاسعة

تطبيقات علي حساب المثلثات

تمرَّنْ
9−2

إثبات صحة متطابقات مثلثية

Confirming Trigonometric Identities

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4−1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $3\sin x = \sin(3x)$ تمثل متطابقة. (a) (b)

السبب: من خلال التعويض في طرفي المتطابق ببعض القيم غير الصفر

لأنه إذا كانت $x = 30^\circ$ مثلاً فإن :

الطرف الأيسر = $3\ \sin 30^\circ = 3\times\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

الطرف الأيمن = $\sin 3\times 30^\circ = \sin 90^\circ = 1$

(2) $\cos 2x = \sin^2 x - \cos^2 x$ تمثل متطابقة. (a) (b)

السبب:

من خلال التعويض في طرفي المتطابق ببعض القيم غير الصفر

لأنه إذا كانت $x = 60^\circ$ مثلاً فإن :

الطرف الأيسر = $cos2x = cos2\times 60^\circ = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

الطرف الأيمن = $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 60^\circ - \cos^2 60^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

وبالتالي : $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \neq \sin^2 x - \cos^2 x$

(3) $\sec x - \cos x = \tan x \ \sin x$ تمثل متطابقة.

a　　b

السبب

$$\sec x - \cos x = \frac{1}{\cos x} - \cos x = \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x \sin x}{\cos x} = \tan x \ \sin x$$ = الطرف الأيمن

(4) الصورة المبسّطة للمقدار: $\sqrt{\frac{\csc x}{\sin^3 x} - \frac{\cot x}{\sin^3 x}}$ هي: $\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$

a　　b

السبب:

$$\sqrt{\frac{\csc x}{\sin^3 x} - \frac{\cot x}{\sin^3 x}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{\sin x}}{\sin^3 x} - \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\sin^3 x}} = \sqrt{\frac{1}{\sin^4 x} - \frac{\cos x}{\sin^4 x}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos x}{\sin^4 x}} = \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin^2 x} \neq \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$$

في التمارين (10—5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) المقدار: $\frac{\sec^2 x - 1}{\sin x}$ متطابق مع المقدار:

a $\sin x \tan x$　　b $\sin x \sec^2 x$

c $\cos x \sec^2 x$　　b $\sin x \csc x$

السبب:

$$\frac{\sec^2 x - 1}{\sin x} = \frac{\tan^2 x}{\sin x} = \tan^2 x \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\sin x} = \sin x \cdot \sec^2 x$$

(6) المقدار: $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2$ متطابق مع المقدار:

a $-4 \sin x \cos x$　　b 2

c -2　　d $4 \sin x \cos x$

السبب:

$$(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2$$
$$= \cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin x^2 - \cos x^2 + 2\cos x \sin x - \sin^2 x$$
$$= 4\sin x \cos x$$

(7) المقدار: $\frac{1}{\tan x} + \tan x$ متطابق مع المقدار:

- **a** $\sec x \csc x$
- **b** $\sec x \sin x$
- **c** $\sec x \cos x$
- **d** $\sin x \cos x$

السبب:

$$\frac{1}{\tan x} + \tan x = \cot x + \tan x = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x}$$
$$= \frac{1}{\sin x \cos x} = \csc x \sec x$$

(8) المقدار: $\tan^2 x - \sin^2 x$ متطابق مع المقدار:

- **a** $\tan^2 x$
- **b** $\cot^2 x$
- **c** $\tan^2 x \sin^2 x$
- **d** $\cot^2 x \cos^2 x$

السبب:

$$\tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \sin^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)$$
$$= \sin^2 x(\sec^2 x - 1) = \sin^2 x \tan^2 x$$

(9) المقدار: $\frac{\sin x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x} + 1$ متطابق مع المقدار:

- **a** 1
- **b** -1
- **c** 2
- **d** -2

السبب:

$$\frac{\sin x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x} + 1 = \sin x \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos x + 1$$
$$= \sin^2 x + \cos x^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

(10) المقدار: $\frac{\cos^2 x-1}{\cos x}$ متطابق مع المقدار:

a $-\tan x \sin x$

b $-\tan x$

c $\tan x \sin x$

d $\tan x$

السبب:

$$\frac{\cos^2 x-1}{\cos x} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\sin^2 x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = -\sin x \cdot \tan x$$

تمرَّنْ
9−3

حل معادلات مثلثية

Solving Trigonometric Equations

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1−5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة $\sin x = \frac{1}{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.   (a)   (b)

السبب:

$\sin\alpha = |\sin x| = \frac{1}{2} \implies \alpha = \sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

$\because \sin x > 0$

$\therefore$ x تقع في الربع الأول أو الثاني

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad or \quad x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad : k \in \mathbb{Z}$

السبب:

المعادلة $\cos x = \sqrt{2} \approx 1.4$ ليس لها حل

(3) حل المعادلة $\tan x = -\sqrt{3}$ هو: $x = +\frac{5\pi}{6} + k\pi$، حيث k عدد صحيح.   (b)   (b)

السبب:

$\tan\alpha = |\tan x| = \sqrt{3} \implies \alpha = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

$\tan x < 0$

$\therefore$ x تقع في الربع الثاني أو الربع الرابع

$x = \pi - \frac{\pi}{3} + k\pi = \frac{2\pi}{3} + k\pi : \; k \in \mathbb{Z}$

$or \quad x = 2\pi - \frac{\pi}{3} + k\pi \, x = \frac{5\pi}{3} + k\pi \quad : k \in \mathbb{Z}$

(4) حلول المعادلة $\sin x \tan^2 x = \sin x$ على الفترة $(0, \pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$

a b

السبب:

$$\sin x \ \tan^2 x = \sin x \implies \sin x \ \tan^2 x - \sin x = 0$$

$$\sin x\,(\tan^2 x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \implies x = 0 \notin (0 . \pi \ ) . \pi \notin (0 . \pi \ )$$

$$\tan^2 x - 1 = 0 \implies \tan x = \pm 1$$

$$\tan x = 1 \implies x = \frac{\pi}{4} \in (0 . \pi \ ) \quad or \quad x \ \frac{5\pi}{4} \notin (0 . \pi \ )$$

$$\tan x = -1 \implies x = \frac{3\pi}{4} \in (0 . \pi \ ) \quad or \quad x \ \frac{7\pi}{4} \notin (0 . \pi \ )$$

(5) حلول المعادلة $2\sin^2 x = 1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$

a **b**

السبب:

$$2 \ \sin^2 x = 1 \implies \sin^2 x = \frac{1}{2} \implies \sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies x = \frac{\pi}{4} \in [0, 2\pi) \quad . x = \frac{3\pi}{4} \in [0, 2\pi)$$

$$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \implies x = \frac{5\pi}{4} \in [0, 2\pi) \quad . x = \frac{7\pi}{4} \in [0, 2\pi)$$

في التمارين (6—11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان $\sin x + \cos x = 0$ فإن x تقع في الربع:

(a) الأول   (b) الأول أو الثالث

(c) الثالث   (d) الثاني أو الرابع

السبب:

$$\sin x + \cos x = 0 \implies \sin x = -\cos x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = -1 \implies \tan x = -1 \implies \tan x < 0$$

وبالتالي فأن x تقع في الربع الثاني أو الرابع

(7) حلول المعادلة: $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

ⓐ $-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$

ⓑ $\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$

ⓒ $\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

ⓓ $\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

السببب:

$$2\ \sin^2 x + 3\ \sin x + 1 = 0 \Longrightarrow (2\sin x + 1)\ (\sin x + 1) = 0$$

$2\sin x + 1 = 0\ \Rightarrow\ \sin x = -\frac{1}{2}$	$\sin x + 1 = 0\ \Rightarrow \sin x = -1$
x تقع في الربع الثالث أو الربع الرابع	x زاوية ربعية فتكون
$x\ = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \in\ [0\ .2\pi]$	$x\ = \frac{3\pi}{2} \in\ [0\ .2\pi]$
$x =\ 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{2}\ \ \in\ [0\ .2\pi]$	

(8) حلول المعادلة: $2\sqrt{2}\sin x\cos x - \sqrt{2}\cos x - 2\sin x = -1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

ⓐ $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$

ⓑ $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}$

ⓒ $\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}$

ⓓ $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}$

السبب:

$$2\sqrt{2}\ \sin x\ \cos x\ -\ \sqrt{2}\ \cos x - 2\ \sin x = -1$$

$$2\sqrt{2}\ \sin x\ \cos x\ -\ \sqrt{2}\ \cos x - 2\ \sin x + 1 = 0$$

$$\sqrt{2}\ \sin x\ \cos x\ - 2\ \sin x) - \left(\sqrt{2}\ \cos x - 1\right) = 0$$

$$2\ \sin x\ \left(\sqrt{2}\ \cos x - 1\right) - \left(\sqrt{2}\ \cos x - 1\right) = 0$$

$$\left(\sqrt{2}\ \cos x - 1\right)(2\ \sin x - 1) = 0$$

$\sqrt{2}\ \cos x - 1 = 0\ \Rightarrow\ \ \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$2\ \sin x - 1 = 0\ \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$
x تقع في الربع الأول أو الربع الرابع	x تقع في الربع الأول أو الربع الثاني
$x\ =\ \frac{\pi}{4} \in [0\ .2\pi\ )$	$x\ = \frac{\pi}{6} \in\ [0\ .2\pi\ )$
$x =\ 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{2}\ \ \in\ [0\ .2\pi\ )$	$x\ = \pi -\ \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \in\ [0\ .2\pi\ )$

(9) عدد حلول المعادلة: $2\cos 4x = 1$ حيث $x \in \left[0, \frac{\pi}{8}\right)$ هو:

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) 3

السبب:

$$2 \quad \cos 4x = 1 \Rightarrow \cos 4x = \frac{1}{2}$$

زاوية الأسناد للزاوية $4x$ تساوي $\frac{\pi}{3}$

الـ $4x$ تقع في الربع الأول أو الربع الرابع لأن $4x > 0$ وبالتالي فإن :

$4x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$ $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \quad : k \in \mathbb{Z}$	$4x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$ $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \quad : k \in \mathbb{Z}$
$k = o: x = \frac{\pi}{12} + \frac{0\times\pi}{2} = \frac{\pi}{12} \in [0 . \frac{\pi}{8})$	$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{0\times\pi}{2} = \frac{5\pi}{12} \notin [0 . \frac{\pi}{8})$
$k = 1x = \frac{\pi}{12} + \frac{1\times\pi}{2} = \frac{13\pi}{12} \notin [0 . \frac{\pi}{8})$	يوجد حل واحد فقط

(10) حلول المعادلة: $3\tan 2y = \sqrt{3}$ هي:

(a) $\frac{\pi}{6} + k\pi$، حيث k عدد صحيح.

(b) $\frac{\pi}{12} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.

(c) $\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$، حيث k عدد صحيح.

(d) $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.

السبب:

$$3\tan 2y = \sqrt{3} \Rightarrow \tan 2y = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

زاوية الأسناد للزاوية $2y$ تساوي $\frac{\pi}{6}$ ولكن $\tan 2y > 0$

$2y$ تقع في الربع الأول أو الربع الثالث وبالتالي فإن :

$$2y = \frac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow y = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \quad \text{أو} \quad 2y = \pi + \frac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow y = \frac{7\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \quad : k \in \mathbb{Z}$$

(11) مجموعة حل المعادلة $3\tan(3x)=\sqrt{3}$ على الفترة $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ هي:

(a) $\left\{\frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}\right\}$

(b) $\left\{\frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\right\}$

(c) $\left\{\frac{-5\pi}{18}, \frac{\pi}{18}\right\}$

(d) $\left\{\frac{-5\pi}{18}, \frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\right\}$

السبب:

$$3\tan 3x = \sqrt{3} \Rightarrow \tan 3x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

زاوية الأسناد للزاوية $3x$ تساوي $\frac{\pi}{6}$ ولكن $\tan 3x > 0$

$3x$ تقع في الربع الأول أو الربع الثالث وبالتالي فإن

$3x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad : k \in \mathbb{Z}$ $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \quad : k \in \mathbb{Z}$	$3x = \frac{5\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbb{Z}$ $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \quad : k \in \mathbb{Z}$
$k = o : x = \frac{\pi}{18} + \frac{0\times\pi}{3} = \frac{\pi}{18} \in (-\frac{\pi}{2} . \frac{\pi}{2})$	$x = \frac{5\pi}{18} + \frac{0\times\pi}{3} = \frac{5\pi}{18} \notin (-\frac{\pi}{2} . \frac{\pi}{2})$
$k = 1 : x = \frac{\pi}{18} + \frac{1\times\pi}{3} = \frac{7\pi}{18} \in (-\frac{\pi}{2} . \frac{\pi}{2})$	
$k = -1 : x = \frac{\pi}{18} + \frac{-1\times\pi}{3} = \frac{-5\pi}{18} \in (-\frac{\pi}{2} . \frac{\pi}{2})$	

تمرّنْ
9–4

متطابقات المجموع والفرق

Sum and Difference Identities

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\sin 75° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

a b

السبب:

باستخدام الآلة الحاسبة

$$\sin 75^{\circ} = \sin(45^{\circ} + 30^{\circ}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(2) $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

a b

السبب:

باستخدام الآلة الحاسبة

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(60^{\circ} - 45^{\circ}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(3) $\cos(h + \frac{\pi}{2}) = -\cos h$

a b

السبب:

$$\cos\left(h + \frac{\pi}{2}\right) = \cos h \cos\frac{\pi}{2} - \sin h \sin\frac{\pi}{2} = 0 - \sin h \times 1 = -\sin h$$

(4) $\tan^2\frac{\pi}{12}+\tan^2\frac{5\pi}{12}=14$ Ⓐ a Ⓑ b

السبب:

باستخدام الآلة الحاسبة

$$\tan^2\frac{\pi}{12}+\tan^2\frac{5\pi}{12}=\left(2-\sqrt{3}\right)^2+\left(2+\sqrt{3}\right)^2=14$$

في التمارين (11–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) $\tan\frac{7\pi}{12}$ تساوي:

a) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ b) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

c) $2+\sqrt{3}$ d) $-2-\sqrt{3}$

السبب:

باستخدام الآلة الحاسبة

$$tan\ \frac{7\pi}{12}=tan\left(\frac{4\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=-2-\sqrt{3}$$

(6) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ تساوي:

a) $\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$ b) $\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x$

السبب:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\ \sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$$

(7) $\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

a) $1+\tan h$ b) $\frac{1-\tan h}{1+\tan h}$

c) $\frac{1+\tan h}{1-\tan h}$ d) $1-\tan h$

السبب:

$$\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan h+tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan h\cdot\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\tan h+1}{1-\tan h\times 1}=\frac{\tan h+1}{1-\tan h}$$

(8) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

(a) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$ (b) $\sqrt{2}(\cos x+\sin x)$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos x+\sin x)$ (d) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)$

السبب:

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x\ \cos\frac{\pi}{4}+\sin x\ \sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)$$

(9) $\cos 94° \cos 18° + \sin 94° \sin 18°$ تساوي:

(a) $\cos 112°$ (b) $\cos 76°$

(c) $\sin 112°$ (d) $\sin 76°$

$$\cos 94^\circ\ \cos 18^\circ-\ \sin 94^\circ\ \sin 18^\circ=\cos(94^\circ-18^\circ)=\cos 78^\circ$$

(10) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{3}$ تساوي:

(a) $\cos\frac{4\pi}{21}$ (b) $\sin\frac{4\pi}{21}$

(c) $\cos\frac{10\pi}{21}$ (d) $\sin\frac{10\pi}{21}$

السبب:

$$\sin\frac{\pi}{3}\ \cos\frac{\pi}{7}-\ \cos\frac{\pi}{3}\ \sin\frac{\pi}{7}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{7}\right)=\sin\frac{4\pi}{21}$$

(11) $\dfrac{\tan\frac{\pi}{5} - \tan\frac{\pi}{3}}{1 + \tan\frac{\pi}{5}\tan\frac{\pi}{3}}$ تساوي:

(a) $\tan\frac{2\pi}{15}$ (b) $\tan\frac{8\pi}{15}$

(c) $\tan\left(\frac{-8\pi}{15}\right)$ (d) $\tan\left(\frac{-2\pi}{15}\right)$

السبب:

$$\frac{\tan\frac{\pi}{5} - \tan\frac{\pi}{3}}{1 - \tan\frac{\pi}{5}\cdot\tan\frac{\pi}{3}} = \tan\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(-\frac{2\pi}{15}\right)$$

تمرَّنْ
9-5

متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

Double-Angle and Half-Angle Identities

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5-1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x$ — (a) (b)

السبب:

لأنه من قانون ضعف الزاوية يكون

$$\sin 4x = \sin 2(2x) = 2\sin(2x)\cos(2x)$$

(2) $\sin 4x = -4\cos x \sin^3 x + 4\cos^3 x \sin x$ — (a) (b)

السبب:

$$\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x = 2(2\sin x\cos x)(\cos^2 x - \sin^2 x)$$
$$= 4\sin x\cos^3 x - 4\cos x\sin^3 x = -4\cos x\sin^3 x + 4\sin x\cos^3 x$$

(3) $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$ — (a) (b)

السبب:

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

بتربيع الطرفين

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$$

(4) $\cos 6x = 2\cos^2 3x - 1$ — (a) (b)

السبب

لأنه من قانون ضعف الزاوية يكون

$$\cos 6x = \cos 2(3x) = 2\cos^2(3x) - 1$$

(5) $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$ 　　 (a) 　 (b)

السبب:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

بالتعويض عن x بـــــ $\frac{x}{2}$ يكون

$$\cos 2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Rightarrow \cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

في التمارين (6–8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $2\cos^2\frac{x}{2}$ تساوي:

(a) $\frac{1+\cos x}{2}$ 　 (b) $1+\cos x$

(c) $1+\cos 2x$ 　 (d) $\frac{1-\cos 2x}{2}$

السبب:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

بالتعويض عن x بـــــ $\frac{x}{2}$ يكون

$$\cos x = \cos 2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Rightarrow 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos x + 1$$

(7) $\cos\frac{\pi}{8}$ تساوي:

(a) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ 　 (b) $\sqrt{2}-1$

(c) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ 　 (d) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$

السبب:

$$\cos\frac{\pi}{8} = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{2}\right) \qquad .\ 0 < \frac{x}{4} < \frac{\pi}{2} \quad .\ 0 < \frac{x}{8} < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

(8) إذا كان: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\cos\theta = \frac{-7}{25}$ فإن $\cos\frac{\theta}{2}$ يساوي:

(a) $\frac{2}{5}$	(b) $\frac{-2}{5}$
(c) $\frac{-3}{5}$	(d) $\frac{3}{5}$

السبب:

$0 < \vartheta < \frac{3\pi}{2} \qquad \Rightarrow 0 < \frac{\vartheta}{2} < \frac{3\pi}{4}$

الزاوية $\frac{\vartheta}{2}$ تقع في الربع الثاني ويكون $\cos\frac{\vartheta}{2} < 0$

$$\cos\frac{\vartheta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\vartheta}{2}}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\left(\frac{-7}{25}\right)}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}} = -\sqrt{\frac{\frac{18}{25}}{2}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$