الوحدة السابعة
الأعداد المركبة

أعداد وتجميع : أ/ صبحي عطية السيد أحمد
حل الأسئلة الموضوعية الصف الحادي عشر الفصل الدراسي الثاني

تمرّنْ
7–1

الأعداد المركبة

Complex Numbers

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) الصورة الجبرية للعدد: $3+\sqrt{-4}$ هي: $3+2i$

(a) (b)

السبب:

بأستخدام الآلة الحاسبة $\sqrt{-4}+3 = 2\,i + 3 = 3 + 2i$

(2) مرافق العدد المركب: $z = 3+4i$ هو: $\overline{z} = -3-4i$

(a) (b)

السبب:

مرافق العدد المركب: $z = 3+4i$ هو $\overline{z} = 3 - 4\,i$

(3) المعكوس الجمعي للعدد المركب $z = 3-2i$ هو: $-z = 3+2i$

(a) (b)

السبب:

المعكوس الجمعي للعدد المركب $z = 3-2i$ هو $-z = -3+2i$

(4) الصورة المبسّطة للتعبير: $(12+5i)-(2-i)$ هي: $10+6i$

(a) (b)

السبب: ملوحظة عند استخدام الآلة الحاسبة يجب استخدام زر الطرح وليس اشارة (-) ولا سنحصل على خطأ

باستخدام الآلة الحاسبة $(12+5i)-(2-i) = 12+5i-2+i = 10-6i$

في التمارين (14–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) العدد: $32+\sqrt{-225}$ يكتب بالصورة الجبرية كما يلي:

(a) $-15+6i$ (b) $6+15i$ (c) $6-15i$ (d) $32+15i$

السبب: الإجابات (c) و (b) و (a) لاتصلح لان جزءها الحقيقي لايساوي 32

باستخدام الآلة الحاسبة $\sqrt{-225}+32 = 15\,i+32 = 32+15\,i$

(6) حل المعادلة: $-10-6i = 2x+3yi$ هو:

(a) $x=5\,,\ y=-2$ (b) $x=-5\,,\ y=-2$ (c) $x=-5\,,\ y=2$ (d) $x=5\,,\ y=2$

السبب:

$$\begin{cases} 2x = -10 \\ 3y = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-10}{2} = -5 \\ y = \frac{-6}{3} = -2 \end{cases} \qquad x=-5, y=-2$$

(7) إذا كان $z_1 = 5i + 2$ ، $z_2 = -3 - i$ فإنّ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ تساوي:

(a) $\frac{1}{10} + \frac{17}{10}i$ (b) $\frac{-1}{10} - \frac{17}{10}i$ (c) $\frac{-1}{10} + \frac{17}{10}i$ (d) $\frac{1}{10} - \frac{17}{10}i$

السبب: كتابة العدد المركب في الصور الجبرية

$z_1 = 2 + 5i \quad , \quad z_2 = -3 - i$

$\overline{z}_1 = 2 - 5i \quad , \quad \overline{z}_2 = -3 + i$

باستخدام الآلة الحاسبة

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{2-5i}{-3+i} = -\frac{1}{10} + \frac{17}{10}$$

(8) إذا كان: $x\,i^2 + 3\,y\,i = 5 + 3\,i^5$ فإن $(x\ ,\ y)$ تساوي

(a) $(5, 1)$ (b) $(-5, -1)$ (c) $(5, -1)$ (d) $(-5, 1)$

السبب:

$i^2 = -1 \qquad .i^5 = i^4 \times i = 1 \times i = i$

$x\,i^2 + 3\,y\,i = 5 + 3\,i^5 \implies -x + 3\,yi = 5 + 3\,i$

$$\begin{cases} -x = 5 \implies x = -5 \\ 3\,y = 3 \implies y = 1 \end{cases}$$

$x = -5 \quad , \quad y = 1 \quad , \quad (x, y) = (-5, 1)$

(9) أبسط صورة للتعبير: $(3 + \sqrt{-4})(4 + \sqrt{-9})$ هي:

(a) $18 + 17i$ (b) $18 + 3\sqrt{-9} + 4\sqrt{-4}$

(c) $6 + 17i$ (d) 18

السبب:

$$(3 + \sqrt{-4})(4 + \sqrt{-9}) = (3 + 2i)(4 + 3i) = 6 + 17\,i$$

يمكن كتابة التعبير السابق مباشرة باستخدام الآلة الحاسبة وسيظهر الناتج مباشرة

(بشرط أن تكون الآلة الحاسبة بوضع الأعداد المركبة)

كيفة التنفيذ M ODE + 2

(10) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = (1 + 2i)^2$ هي:

(a) $z = -3 + 4i$ (b) $z = 5 + 4i$ (c) $z = -3$ (d) $z = 5$

السبب:

باستخدام الآلة الحاسبة

$$z = (1 + 2\,i)^2 = -3 + 4\,i$$

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = (2-i)^3$ هي:

(a) $z = 14 + 13i$　(b) $z = 14 - 13i$　(c) $z = 2 - 11i$　(d) $z = 2 - 13i$

السبب: باستخدام الآلة الحاسبة

$$z = (2-i)^3 = (2-i)^2 \cdot (2-i)^1 = 2 - 11\,i$$

(12) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = \frac{i}{i+2}$ هي:

(a) $z = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$　(b) $z = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$

(c) $z = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$　(d) $z = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$

السبب: باستخدام الآلة الحاسبة

$$z = \frac{i}{i+5} = \frac{1}{5} + \frac{2}{3}\,i$$

(13) إذا كان $z = i$ فإنّ z^{250} يساوي:

(a) $-i$　(b) i　(c) 1　(d) -1

السبب: عند أستخدام الآلة الحاسبة مباشرتا في هذا التمرين سوف نحصل Err عند الأستخدام

∵ (250) عدد زوجي في هذا الحالة سوف نسبعد كلا من الأجابة (a) و (b)

∵ (250) لا تقبل القسمة على 4 ∴ الإجابة (1-) هي

$$(i)^{250} = (i^2)^{125} = (-1)^{125} = -1$$

(14) ليكن $x \in \mathbb{Z}^+$ فإنّ مجموعة قيم x التي تجعل العدد $(5 + i^x)$ عددًا حقيقيًّا هي:

(a) $\mathbb{Z}^+$　(b) $\{0,2,4,6,...\}$　(c) $\{1,3,5,...\}$　(d) $\{2,4,6,...\}$

السبب:

∵ الناتج عدداً حقيقي ∴ x يجب أن تكون عدد زوجب

∵ الشرط أن $x \in \mathbb{Z}^+$ ∴ x لايمكن أن تكون صفر

الأجابة (d) مجموعة الأعداد الزوجية الموجبة " بدون الصفر "

KuwaitMath.com

تمرّنْ
7–2

الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

Polar Coordinates and Trigonometric Form of a Complex Number

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (6–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4, \frac{7\pi}{6}\right)$ هي: $A(-2\sqrt{3}, 2)$

(a) (b)

السبب:

$r = 4 \quad . \quad \theta = \frac{7\pi}{6}$

$x = r\cos\theta = 4\cos\frac{7\pi}{6} = -2\sqrt{3} \qquad . \quad y = r\sin\theta = 4\sin\frac{7\pi}{6} = -2$

$A = (-2\sqrt{3}\ .-2)$

(2) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $B(\sqrt{2}, 135^\circ)$ هي: $B(-1,1)$

(a) (b)

السبب:

$r = \sqrt{2} \quad . \quad \theta = 135^\circ$

$x = r\cos\theta = 4\cos 135^\circ = -1 \qquad . \quad y = r\sin\theta = 4\sin 135^\circ = 1$

$B = (-1\ .1)$

(3) الإحداثيات القطبية للنقطة: $M\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ هي: $M\left(1, \frac{5\pi}{4}\right)$

(a) (b)

السبب:

$r = 1 \quad . \quad \theta = \frac{7\pi}{6}$

$x = r\cos\theta = 1\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad . \quad y = r\sin\theta = 1\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$B = (-\frac{\sqrt{2}}{2}\ .\frac{-\sqrt{2}}{2})$

(4) العدد المركب: $z = \sqrt{3} - i$ بصورة المثلثية هو: $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

(a) (b)

السبب:

$z = 2\left(\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3} + i$

(5) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ هي: $z = 1 - i$

a ⓑ

السبب:

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 1 - 1$$

(6) السعة الأساسية للعدد $z = \cos 30^\circ + i\cos 240^\circ$ هي 330°

a ⓑ

السبب:

$$z = \cos 30^\circ + i\cos 240^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right| = 30^\circ \quad . \quad x > 0 \ , y < 0$$

$$\theta = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$$

في التمارين (13–7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4, \frac{5\pi}{3}\right)$ هي:

ⓐ $A(2, 2\sqrt{3})$ الربع الأول

ⓑ $A(-2, 2\sqrt{3})$ الربع الثاني

ⓒ $A(-2, -2\sqrt{3})$ الربع الثالث

d $A(2, -2\sqrt{3})$ الربع الرابع

السبب:

$$A\left(4, \frac{5\pi}{3}\right) \quad . \ \theta = \frac{5\pi}{3} = \frac{5\times 180^\circ}{3} = 300^\circ \quad (\text{الربع الرابع})$$

(8) الإحداثيات القطبية للنقطة: $B\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ هي:

ⓐ $B\left(1, \frac{-\pi}{4}\right)$ ⓑ $B\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ c $B\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$ ⓓ $B\left(1, \frac{-3\pi}{4}\right)$

السبب:

$$B\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\alpha \ \tan^{-1}\left|\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{-\sqrt{2}}{2}}\right| = \frac{\pi}{4} \quad . \quad \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$y < 0 \ . \ x > 0$$

∴ z (تقع في الربع الرابع)

(9) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$ هي:

(a) $= 4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ ربع رابع

(b) $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ربع أول

(c) $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ربع أول

(d) $z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ ربع ثاني

السبب:

بدون حل يمكن مناقشة الاختيارات

$x > 0$, $y < 0$ أي أن z تقع في الربع الرابع

(10) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = \frac{-4}{1-i}$ حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$ هي:

(a) $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

(b) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

(c) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

(d) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

الحـــــــل

$$z = \frac{-4}{1-i} = -2 - 2i$$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\alpha \tan^{-1}\left|\frac{-2}{-2}\right| = \frac{\pi}{4} \quad , \quad \theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$x < 0$, $y < 0$

$\therefore$ z **(تقع في الربع الثالث)**

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$ هي:

(a) $z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

(b) $z = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

(c) $z = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

(d) $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

السبب:

$$z = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 3\cos\frac{2\pi}{3} - 3\sin\frac{2\pi}{3}i = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

KuwaitMath.com

(12) $\forall n \in \mathbb{Z}^{+}$ فإنّ قيمة $(i^{2n+2}+i^{2n+8})$ تساوي:

(a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) i^{-2n}

السبب:

$$(i^{2n+2} + i^{2n+8}) = (i^{2n} \times i^2 + i^{2n} \times i^8) = i^{2n}(i^2 + i^2)$$
$$= i^{2n}(-1+1) = 0$$

(13) $(6-2i+3i^5)^2$ تساوي:

(a) $35-12i$ (b) $35+12i$ (c) $81-12i$ (d) $81+12i$

السبب:

$$(6-2i+3i^5)^2 = (6-2i+3i \times i^4)^2 = (6-i)^2 = 35-12i$$

KuwaitMath.com

تمرّنْ
7–3

حل معادلات

Solving Equations

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (6–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة: $z = 3 + i$ هو: $\bar{z} + 2 = 5 - i$

a (b)

السبب:

$$z = 3 + i \quad \Longrightarrow \bar{z} = 3 - i$$

$$\bar{z} + 2 = 3 - i + 2 = 5 - i$$

(2) حل المعادلة: $z = 1 - 5i$ هو: $2z + \bar{z} - 3 - 5i = 0$

(a) *b*

السبب:

$$z = 1 - 5i \quad \Longrightarrow \bar{z} = 1 + 5i$$

$$2\,(1 - 5i\,) + 1 + 5\,i - 3 - 5i \;=\; -10\,i \;\neq 0$$

(3) مجموعة حل المعادلة: $\{-2 - i, 2 + i\}$ هي: $z^2 - 4z + 5 = 0$

(a) *b*

السبب:

باستخدام الآلة الحاسبة مود 5 , 3 نجد أن نجد أن الجواب خاطئ

أو ملاحظة : يجب أن يكون الحلان عددان مترافقان لأنها معادلة تربيعية ذات معاملات حقيقية

(4) الجذران التربيعيان للعدد -1 هما: $-1, 1$

(a) *b*

السبب:

الجذر التربيعية للعدد السالب أعداد تخيلية

a (b) **(5)** الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z = 16 + 30i$ هما: $z_1 = 5 + 3i,\ z_2 = -5 - 3i$

السبب:

باستخدام الآلة الحاسبة : $(5 + 3i)^2 = 16 + 30\,i$ والجذر الآخر هو المعكوس الجمعي

a (b) **(6)** إذا كان z_1, z_2 جذران تربيعيان للعدد z فإن $z_1 + z_2 = 0$

السبب: إذا كان z_1 جذر للعدد z فإن الجذر الآخر هو المعكوس الجمعي $z_2 = z_1$

$\therefore\ z_2 + z_1 = 0$ صحيحة

في التمارين (10—7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) حل المعادلة: $2z - 5 + 6i = -3\bar{z}$ هو:

a $z = 1 + 6i$ (b) $z = -1 + 6i$ (c) $z = 1 - 6i$ (d) $z = -1 - 6i$

السبب: يجب الحل بطريقة مقالية أو التعويض بالآلة الحاسبة أربع مرات

$$2\,z - 5 + 6i = -3\,\bar{z} \implies 2\,z + 3\bar{z} = 5 - 6i$$

$$2(x + i\,y) + 3\,(x - iy) = 5 - 6i \implies x = 1\ .y = 6$$

$$z = 1 + 6\ i$$

(8) مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 4z + 20 = 0$ هي:

(a) $\{2 - 4i, -2 - 4i\}$ (b) $\{-2 + 4i, -2 - 4i\}$

(c) $\{2 - 4i, -2 + 4i\}$ **d** $\{2 - 4i, 2 + 4i\}$

السبب:

باستخدام الآلة الحاسبة الاجابة الجذرين عددين مترافقين إذا a , b لاتنفع مباشرة

KuwaitMath.com

(9) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z = 33 - 56i$ هما:

(a) $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = 7 + 4i \end{cases}$

b $\begin{cases} z_1 = 7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$

(c) $\begin{cases} z_1 = 7 + 4i \\ z_2 = 7 - 4i \end{cases}$

(d) $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$

السبب:

جذري العدد المركب متعاكسين اذا c . d لا ينفعان

في الحل a إشارة الجزئين الحقيقي والتخيلي متماثلين والحل مرفوض لأن إشارة الجزء التخيلي للعدد سالبة وبالتالي يجب أن يكون الأشارتين مختلفتين

(10) حل المعادلة $(3 - 4i)z = 5 - 2i$ هو:

(a) $\frac{5}{3} + \frac{1}{2}i$

(b) $\frac{5}{3} - \frac{1}{2}i$

c $\frac{23}{25} + \frac{14}{25}i$

(d) $\frac{23}{25} - \frac{14}{25}i$

السبب:

باستخدام الآلة الحاسبة $z = \frac{5-2i}{3-4i} = \frac{23}{25} + \frac{14}{25}\,i$

KuwaitMath.com