الوحدة الخامسة

تمرّنْ
5–1

المتجه في المستوى

The Vector in the Plane

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط التالية: $A(2,1), B(-3,0), C(3,-4), D(x,y)$

(1) الزوج المرتب الذي يمثل متجه الموضع لـ $\overline{BA}$: هو $(-5,-1)$ — (a) (b)

السبب :

متجه الموضع للقطعة الموجهة $\overline{BA}$ يمثله الزوج المرتب التالي :

$$(x_A - x_B, y_A - y_B) = (2-(-3), 1-0) = (5,1)$$

(2) مركّبات $\overrightarrow{BC}$ هي $<6,4>$ — (a) (b)

السبب :

$$\langle\overrightarrow{BC}\rangle = \langle x_C - x_B, y_C - y_B\rangle = \langle 3-(-3), -4-0\rangle = \langle 6,-4\rangle$$

(3) المثلث ABC هو متطابق الضلعين. — (a) (b)

السبب :

$$\langle\overrightarrow{BC}\rangle = \langle 6,-4\rangle \quad , \langle\overrightarrow{AB}\rangle = \langle -5,-1\rangle$$

$$\langle\overrightarrow{AC}\rangle = \langle x_C - x_A, y_C - y_A\rangle = \langle 3-2, -4-1\rangle = \langle 1,-5\rangle$$

$$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(6)^2+(-4)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}\ units$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(1)^2+(-5)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}\ units$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-5)^2+(-1)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{52}\ units$$

المثلث متطابق الضلعين لأن $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$

(4) إذا كان $<\overrightarrow{AB}> = <\overrightarrow{CD}>$ فإن: $x=-2, y=-5$ — (a) (b)

السبب :

نفرص أن $D(x,y)$

$$\langle\overrightarrow{CD}\rangle = \langle x_D - x_C, y_D - y_C\rangle = \langle x-3, y+4\rangle$$
$$\langle\overrightarrow{CD}\rangle = \langle\overrightarrow{AB}\rangle \Rightarrow \langle x-3, y+4\rangle = \langle -5,-1\rangle \Rightarrow x=-2, y=-5$$

في التمارين (8–5)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(5) في المستوى الإحداثي إذا كان $\vec{u} = <-2, 2>$

فإن قياس الزاوية التي يصنعها $\vec{u}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يساوي:

(a) 45° (b) -45° (c) 135° (d) 225°

السبب :

$\vec{u} = \langle -2 , 2 \rangle \qquad x = -2 \;, y = 2$ و θ تقع في الربع الثاني

$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{2}{-2}\right| = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$ أي $\theta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

(6) لنأخذ في المستوى الإحداثي $\vec{u} = <\frac{12}{13}, y>$. إذا كان $\vec{u}$ متجه وحدة فإن y يساوي:

(a) $\frac{1}{13}$ (b) $\frac{\sqrt{13}}{13}$ (c) $\frac{5}{13}$ (d) $\pm\frac{5}{13}$

السبب :

$\vec{u} = \langle \frac{12}{13} , y \rangle$ متجه وحدة $\qquad y = \pm\sqrt{1 - (\frac{12}{13})^2} = \pm\frac{5}{12}$

(7) لتكن في المستوى الإحداثي النقاط: $A(1,3), B(3,2), C(0,-1), D(-4,1)$ فيكون:

(a) $<\overrightarrow{AB}> = <\overrightarrow{CD}>$ (b) $<\overrightarrow{AB}> = -<\overrightarrow{CD}>$

(c) $<\overrightarrow{CD}> = -2<\overrightarrow{AB}>$ (d) $<\overrightarrow{AB}> = -2<\overrightarrow{CD}>$

السبب :

$$A(1,3)\,, B(3,2)\,, C\,(0\,,-1\,)\,, D\,(\,-4\,,1)$$

$$\langle\overrightarrow{AB}\rangle = \langle x_B - x_A \,, y_B - y_A \rangle = \langle 3-1, 2-2\rangle = \langle 1, -1\rangle$$

$$\langle\overrightarrow{CD}\rangle = \langle x_D - x_C \,, y_D - y_C \rangle = \langle -4-0, 1+1\rangle = \langle -4, 2\rangle$$

$$\langle\overrightarrow{CD}\rangle = -2\langle\overrightarrow{AB}\rangle$$

(8) لنأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: $E(2,4), F(-1,-5), G(x,y)$ إذا كان: $<\overrightarrow{EF}> = <\overrightarrow{EG}>$ فإن (x, y) يساوي:

(a) $(-1,-5)$ (b) $(-5,-13)$ (c) $(5,13)$ (d) $(1,5)$

السبب :

$$E(2,4)\,, F(-1,-5)\,, G\,(x\,, y\,)$$

$$\langle\overrightarrow{EF}\rangle = \langle\overrightarrow{EG}\rangle$$

$$\langle -3\,, -9\,\rangle = \langle x-2\,, y-4\rangle$$

$$x = -1 \;,\; y = 5 \quad \Rightarrow \; G\,(\,-1\,, -5\,)$$

مع التمنيات بالتوفيق ـ رئيس قسم الرياضيات ــ أ . فرج مبروك فرج ــ ت. 99716213

جمع المتجهات وطرحها

Addition and Subtraction of Vectors

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5−1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كان $AB + BC = AC$ فإن: $<\overrightarrow{AB}> + <\overrightarrow{BC}> = <\overrightarrow{AC}>$ (a) (b)

السبب :

$$\langle\overrightarrow{AC}\rangle = \langle\overrightarrow{AB}\rangle + \langle\overrightarrow{BC}\rangle$$

(قاعدة شال تتطبق على المتجهات وليس على القطع المستقيمة)

(2) $<\overrightarrow{AC}> + <\overrightarrow{BA}> + <\overrightarrow{CB}> = \vec{0}$ (a) (b)

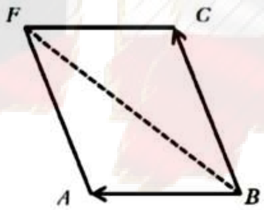
السبب :

$$\langle\overrightarrow{AC}\rangle + \langle\overrightarrow{BA}\rangle + \langle\overrightarrow{CB}\rangle = \langle\overrightarrow{AC}\rangle + \langle\overrightarrow{CB}\rangle + \langle\overrightarrow{BA}\rangle = \langle\overrightarrow{AB}\rangle + \langle\overrightarrow{BA}\rangle = \langle\overrightarrow{AA}\rangle = 0$$

(3) $ABCF$ متوازي أضلاع حيث: $\overrightarrow{BF} = <1,4>$ ، $\overrightarrow{BA} = <-2,3>$

$\therefore <\overrightarrow{BC}> = <3,1>$ (a) (b)

السبب :

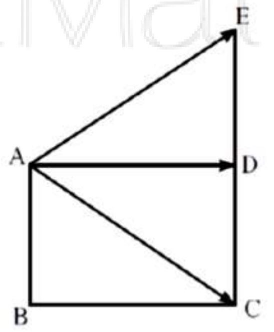


$$\langle\overrightarrow{BC}\rangle = \langle\overrightarrow{BF}\rangle - \langle\overrightarrow{BA}\rangle$$

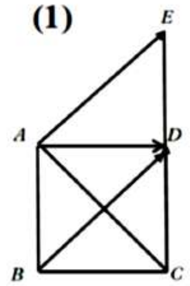
$$\langle\overrightarrow{BC}\rangle = \langle 1,4\rangle - \langle -2,3\rangle = \langle 1,4\rangle + \langle 2,-3\rangle$$

$$\langle\overrightarrow{BC}\rangle = \langle 3,1\rangle$$

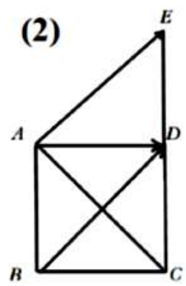
(4) في المستطيل $ABCD$، $<\overrightarrow{AE}> = <\overrightarrow{BD}>$ إذًا $<\overrightarrow{AE}> = <\overrightarrow{AC}> + <\overrightarrow{AD}>$ (a) (b)



(1)



(2)



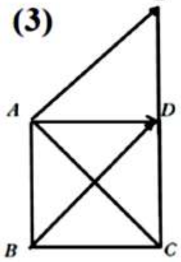
في الشكل رقم (1) $\langle\overrightarrow{AF}\rangle = \langle\overrightarrow{BD}\rangle = \langle\overrightarrow{BC}\rangle + \langle\overrightarrow{BA}\rangle$

في الشكل رقم (2) $\langle\overrightarrow{AF}\rangle = \langle\overrightarrow{BD}\rangle = \langle\overrightarrow{BC}\rangle + \langle\overrightarrow{CD}\rangle$

في الشكل رقم (3) $\langle\overrightarrow{AF}\rangle = \langle\overrightarrow{BD}\rangle = \langle\overrightarrow{BA}\rangle + \langle\overrightarrow{AD}\rangle$

وكل منهما لا يساوي : $\langle\overrightarrow{AC}\rangle + \langle\overrightarrow{AD}\rangle$

(3)



(5) في المثلث ABC: $<\overrightarrow{AB}>-<\overrightarrow{AC}>+<\overrightarrow{BC}>-<\overrightarrow{BA}>=<\overrightarrow{AB}>$

a ● (b)

السبب :

$$\langle\overrightarrow{AB}\rangle-\langle\overrightarrow{AC}\rangle+\langle\overrightarrow{BC}\rangle-\langle\overrightarrow{BA}\rangle=\langle\overrightarrow{AB}\rangle+\langle\overrightarrow{BC}\rangle+\langle\overrightarrow{CA}\rangle+\langle\overrightarrow{AB}\rangle$$

$$=\langle\overrightarrow{AC}\rangle+\langle\overrightarrow{CB}\rangle=\langle\overrightarrow{AB}\rangle$$

(6) إذا كان $\overrightarrow{L}=<\overrightarrow{AC}>+2<\overrightarrow{AB}>-<\overrightarrow{BC}>$ فإن:

(a) $\overrightarrow{L}=\frac{1}{2}<\overrightarrow{AB}>$ (b) $\overrightarrow{L}=-\frac{1}{2}<\overrightarrow{AB}>$

● c $\overrightarrow{L}=3<\overrightarrow{AB}>$ (d) $\overrightarrow{L}=-3<\overrightarrow{AB}>$

السبب :

$$\overrightarrow{L}=\langle\overrightarrow{AC}\rangle+2\langle\overrightarrow{AB}\rangle-\langle\overrightarrow{BC}\rangle=\langle\overrightarrow{AC}\rangle+2\langle\overrightarrow{AB}\rangle+\langle\overrightarrow{CB}\rangle$$

$$=\langle\overrightarrow{AC}\rangle+\langle\overrightarrow{CB}\rangle+2\langle\overrightarrow{AB}\rangle=\langle\overrightarrow{AB}\rangle+2\langle\overrightarrow{AB}\rangle=3\langle\overrightarrow{AB}\rangle$$

(7) إذا كان $<\overrightarrow{AM}>=2(3\vec{i}-\vec{j})+3(-2\vec{i})-2\vec{j}$، فإن $<\overrightarrow{AM}>$ يساوي:

(a) $2\vec{i}-3\vec{j}$ (b) $3\vec{i}-2\vec{j}$

● c $-4\vec{j}$ (d) $6\vec{i}-6\vec{j}$

السبب :

$$\langle\overrightarrow{AM}\rangle=2(3\vec{i}-\vec{j})+3(-2\vec{i})-2\vec{j}=(6\vec{i}-2\vec{j})+(-6\vec{i})-2\vec{j}=-4\vec{j}$$

(8) $ABCD$ متوازي أضلاع حيث: $A(-2,1), B(0,-2), C(3,-1)$. إذاً إحداثيات D هي:

(a) $(2,2)$ (b) $(-1,2)$ ● c $(1,2)$ (d) $(1,-2)$

السبب :

نفرض أن $D(x,y)$ ∵ الشكل **ABCD** متوازي أضلاع

$$\therefore \langle\overrightarrow{BA}\rangle=\langle\overrightarrow{CD}\rangle$$

$$\langle -2,3\rangle=\langle x-3,y+1\rangle$$

$$x=-1\ ,\ y=2$$

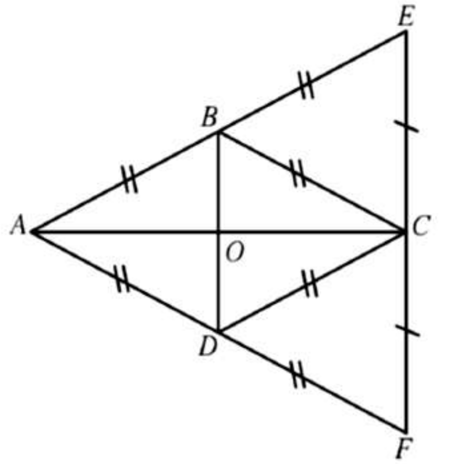
(9) $\overrightarrow{U}=4\vec{i}-2\vec{j}$, $\overrightarrow{V}=x\vec{i}-\vec{j}$ هما متجهان متوازيان. قيمة x هي:

● a 2 (b) −2 (c) 8 (d) −8

السبب :

∵ $\overrightarrow{U}$ // $\overrightarrow{V}$ فإن $\frac{x_V}{x_U}=\frac{y_V}{y_U}$ أي أن $\frac{x}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow 2x=4\Rightarrow x=2$

في التمارين (13–10) لديك قائمتان، اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.



من الشكل أعلاه

القائمة (2)	القائمة (1)
(a) $\overrightarrow{BD}$	(10) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=$ b
(b) $\overrightarrow{AC}$	(11) $\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CF}=$ c
(c) $\vec{0}$	
(d) $\overrightarrow{DB}$	

(10) من الشكل $\langle\overrightarrow{AB}\rangle + \langle\overrightarrow{AD}\rangle = \langle\overrightarrow{AC}\rangle$ لأن النقطة c

هي التي تكمل متوازي الأضلاع **ABCD**

(11) - من الشكل $\langle\overrightarrow{CE}\rangle + \langle\overrightarrow{CF}\rangle = \vec{0}$ لأن

لأن كل من المتجهين معكوس للآخر

القائمة (2)	القائمة (1)
(a) $2\,\overrightarrow{BA}$	(12) $\overrightarrow{EA}=$ a
(b) $2\,\overrightarrow{BE}$	(13) $2\,\overrightarrow{OC}=$ c
(c) $-\overrightarrow{CA}$	
(d) $\overrightarrow{CA}$	

(12) من الشكل : $\langle\overrightarrow{EA}\rangle = 2\,\langle\overrightarrow{BA}\rangle$ لأن النقطة **B** منتصف **AE**

لأن $\langle\overrightarrow{EA}\rangle = \langle\overrightarrow{BA}\rangle$

(13) من الشكل : $2\overrightarrow{oC} = \overrightarrow{AC}$

وبالتالي فإن : $2\overrightarrow{oC} = -\,\overrightarrow{CA}$

الضرب الداخلي
Scalar Product

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (6–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$، فإن $\vec{u}\perp\vec{v}$ — (a) ● (b)

السبب :

من تعريف حاصل ضرب متجهين

(2) إذا كان $\vec{u}=<-2,x>, \vec{v}=<5,1>, \vec{u}\perp\vec{v}$، فإن $x=-10$ — (a) ● (b)

السبب : $\because\ \vec{u}\perp\vec{v}$ فإن $\vec{u}.\vec{v}=0 \Rightarrow -2\times 5+x=0 \Rightarrow -10+x=0$

$x=10$

(3) إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{w}=-5, \vec{v}\cdot\vec{w}=3$، فإن $(\vec{u}-\vec{v})\cdot\vec{w}=-8$ — ● (a) (b)

السبب :

$$(\vec{u}-\vec{v}).\vec{w}=\vec{u}.\vec{w}-\vec{v}.\vec{w}=-5-3=-8$$

(4) إذا كانت $A(-1,2), B(2,3), C(-4,5)$، فإن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-6$ — ● (a) (b)

السبب :

$$\overrightarrow{AB}=\langle 2+1, 3-2\rangle=\langle 3, 1\rangle$$

$$\overrightarrow{AC}=\langle -4+1, 5-2\rangle=\langle -3, 3\rangle$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\langle 3, 1\rangle.\langle -3, 3\rangle=-9+3=-6$$

(5) إذا كانت $L(-3,4), M(0,5)$، فإن $\|\overrightarrow{LM}\|=10$ — (a) ● (b)

السبب :

$$\overrightarrow{LM}=\langle 0-(-3), 5-4\rangle=\langle 3, 1\rangle$$

$$\|\overrightarrow{LM}\|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$$

(6) $\vec{A}, \vec{B}$ متجهان في المستوى حيث $\vec{A}=<2,-3>, \vec{B}=<1,0>$

$\therefore\ \cos(\vec{A},\vec{B})=2\frac{\sqrt{13}}{13}$ — ● (a) (b)

السبب : $$\cos(\vec{A},\vec{B})=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{\|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|}=\frac{\langle 2,-3\rangle.\langle 1,0\rangle}{\sqrt{4+9}\times\sqrt{1+0}}=\frac{2+0}{\sqrt{13}}=2\frac{\sqrt{13}}{13}$$

في التمارين (14–7)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

(7) إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3$ ، $\vec{v} = <-1, m>$ ، $\vec{u} = <2, -2>$ ، فإن m تساوي:

(a) $-\frac{5}{2}$ (b) $\frac{5}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

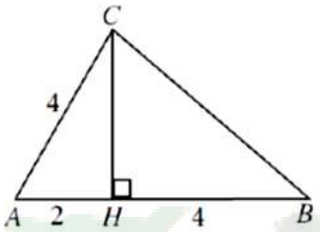
السبب :

$$\vec{u}.\vec{v} = 3 \implies \langle 2, -2\rangle . \langle -1, m\rangle = 3 \quad -2-2m = 3$$

$$-2-2m = 3 \implies -2m = 5 \implies m = -\frac{5}{2}$$

(8) في مثلث ABC ، H هو المسقط العمودي لـ C على $\overleftrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} =$



(a) -6 (b) 12 (c) -12 (d) 6

السبب :

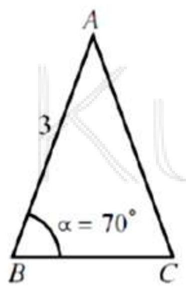
بفرض أن النقطة $A(0,0), H(2,0), B(6,0), C(2, y)$

$$\overrightarrow{AB} = \langle 6, 0\rangle \quad , \overrightarrow{AC} = \langle 2, y\rangle$$

$$\overrightarrow{AB}.\ \overrightarrow{AC} = \langle 6, 0\rangle . \langle 2, y\rangle = 12 + 0 = 12$$

(9) في الشكل المقابل $AB = AC = 3\,cm$ ، $m(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = 70^\circ$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ يساوي تقريبًا:



(a) 2.3 (b) 6.89 (c) 3 (d) -2.3

السبب :

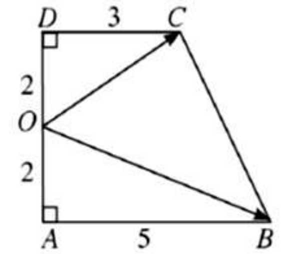
$$\overrightarrow{AB}.\ \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|\cos(\overrightarrow{AB}.\ \overrightarrow{AC}) = 3 \times 3\cos(40^\circ)$$

$$= 9\cos(40^\circ) \approx \mathbf{6.89}$$

(10) $ABCD$ شبه منحرف قائم (انظر الشكل المقابل) حيث:

$AB = 5\,\text{cm}\,,\, AO = 2\,\text{cm}\,,\, OD = 2\,\text{cm}\,,\, CD = 3\,\text{cm}$

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$ يساوي:



(a) 11 (b) -11 (c) 12 (d) -12

السبب :

$$\overrightarrow{0B} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \quad , \overrightarrow{0C} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}$$

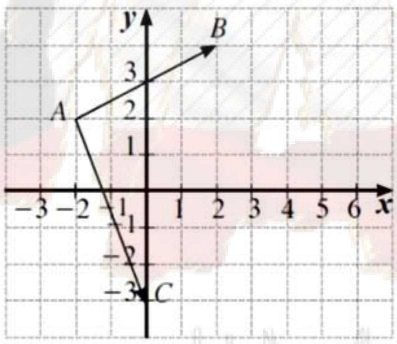
$$\overrightarrow{0B} \,.\, \overrightarrow{0C} = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right).\left(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}\right)$$

$$= \left(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OD}.\overrightarrow{DC}\right) + \left(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}\right)$$

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{DC} = \ 2 \times 2\cos 180^\circ + 2 \times 3\cos 90^\circ + 2 \times 5\cos 90^\circ$$

$$+2 \times 5\cos 0^\circ = -4 + 0 + 0 + 15 = 11$$

(11) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$



السبب :

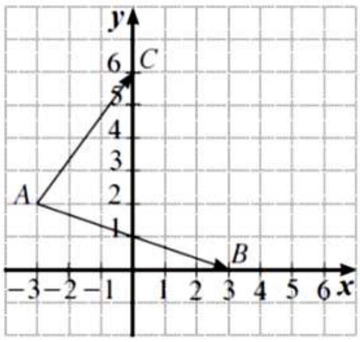
$$\overrightarrow{AB} = \langle 2-(-2)\,,4-2\rangle = \langle 4\,,2\rangle$$

$$\overrightarrow{AC} = \langle 0-(-2)\,,-3-2\rangle = \langle 2\,,-5\rangle$$

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \langle 4\,,2\rangle.\langle 2\,,-5\rangle = 4\times 2 + 2\times(-5) = -2$$

(a) 2 (b) -2 (c) 18 (d) 0

(12) في الشكل المقابل، $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) =$



السبب :

$$\overrightarrow{AB} = \langle 3-(-3)\,,0-2\rangle = \langle 6\,,-2\rangle$$

$$\overrightarrow{AC} = \langle 0-(-3)\,,6-2\rangle = \langle 3\,,4\rangle$$

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \langle 6\,,-2\rangle.\langle 3\,,4\rangle = 6\times 3 + 4\times(-2) = 10$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{10} \quad , \ \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{3^2 + (4)^2} = 5$$

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}\right) = \frac{10}{2\sqrt{10}\times 5} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

(a) 0 (b) $\frac{3}{5}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{10}}$

(13) إذا كان $\vec{u} \perp \vec{v}$ ، $\vec{u} = <-5, m>, \vec{v} = <2, 3>$ فإن m تساوي:

(a) $\frac{10}{3}$ (b) $-\frac{3}{10}$ (c) $\frac{-10}{3}$ (d) $\frac{15}{2}$

السبب :

$\because \vec{u} \perp \vec{v}$ فإن $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow -5 \times 2 + 3m = 0 \Longrightarrow -10 + 3m = 0$

$$3m = 10 \Longrightarrow m = \frac{10}{3}$$

(14) إذا كان $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -2$ فإن $m(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ **لا يمكن** أن يساوي:

(a) 60° (b) 28° (c) 122° (d) 50°

السبب :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 , -2 < 0$ لابد أن $90^{\circ} < \cos(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) < 180^{\circ}$

$$m(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) = 122^{\circ}$$