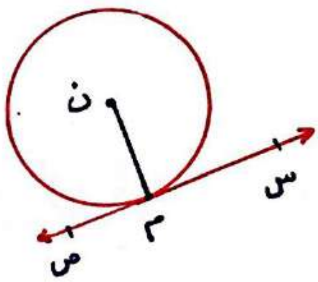
... كرة خضراء ، ٤ كرات ...

مماس الدائرة

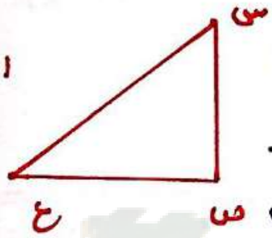
(1)



∵ $\overleftrightarrow{سص}$ مماس

∴ $\overline{نم} \perp \overleftrightarrow{سص}$

عكس نظرية فيثاغورث



إذا كان

$سع^2 = سص^2 + صع^2$

فإن ق(∠ص) = 90°

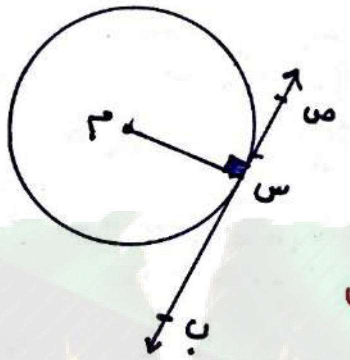
نحتاج هنا إثبات زاوية ٩٠ عكس فيثاغورث

لإثبات أن

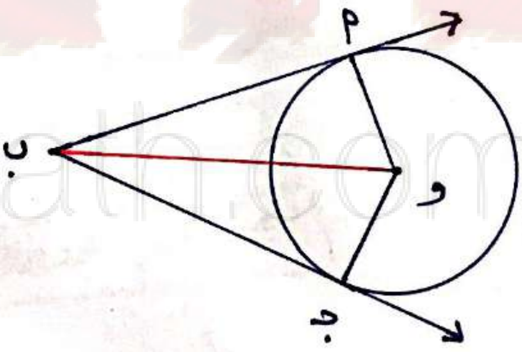
$\overleftrightarrow{سص}$ مماس

نثبت أن

$\overline{مس} \perp \overleftrightarrow{سص}$



القطعتان المماستان للدائرة من نقطة خارجها متطابقتان .



إذا أعطى نشاط نعتبر سابق

∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{بج}$ قطعتان مماستان

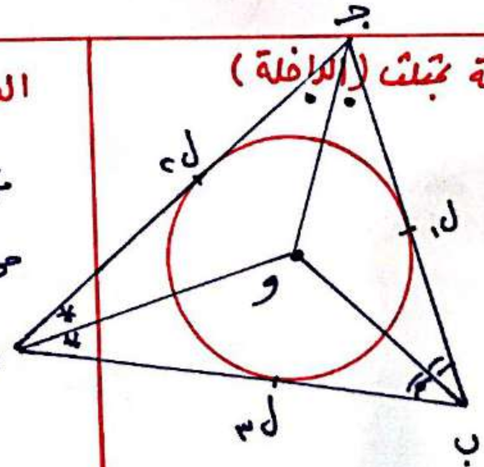
∴ أب = ب ج

∴ $\overrightarrow{بو}$ ينصف (∠ب) ، $\overrightarrow{وب}$ ينصف (∠و)

∴ ق(∠أ) = 90° ، ق(∠ج) = 90°

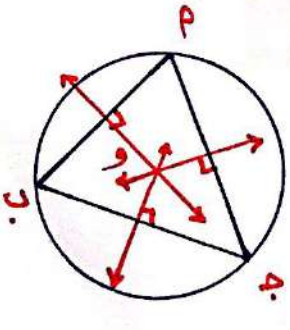
الدائرة المحاطة بمثلث (الداخلة)

مركزها نقطة تلاقي منصفات زوايا المثلث الداخلة

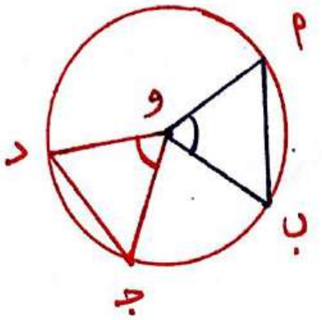


الدائرة المحيطة لمثلث (الخارجية)

مركزها نقطة تلاقي محاور أضلاعه



الأوتار والأقواس

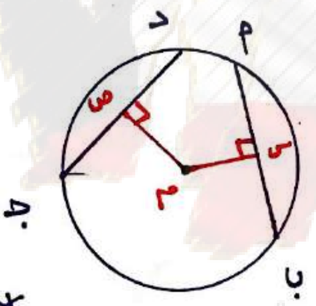


الأقواس المتطابقة ⇄ الأوتار متطابقة ⇄ الزوايا المركزية متطابقة

$\overset{\frown}{\text{مب}} \cong \overset{\frown}{\text{جد}}$

$\overline{\text{مب}} \cong \overline{\text{جد}}$ ⇄ $(\widehat{\text{موب}}) \cong (\widehat{\text{جود}})$

الأبعاد والأوتار



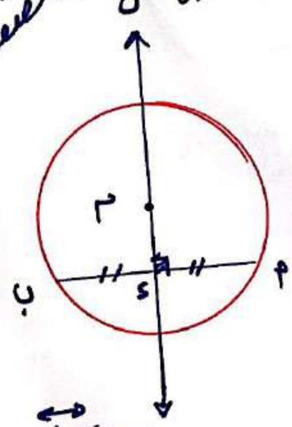
الأوتار متساوية ⇄ الأبعاد متساوية

مب = دجـ ⇄ م س = م ص

قطر		
منصف الوتر	عمودي على الوتر	

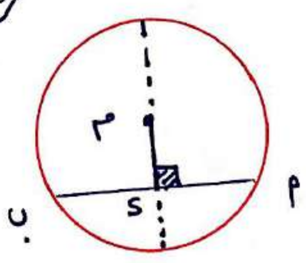
* يطلب بعد الوتر عن المركز
* يطلب طول نصف الوتر
* يطلب طول الوتر

نحتاج الوتر نظرية فيثاغورث



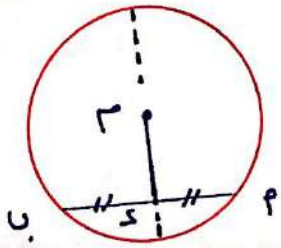
∵ ء منتصف $\overline{\text{مب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}} \perp \overline{\text{مب}}$

∴ م ∈ ل (يمر بالمركز)



∵ $\overline{\text{مء}} \perp \overline{\text{مب}}$

∴ ء منتصف $\overline{\text{مب}}$



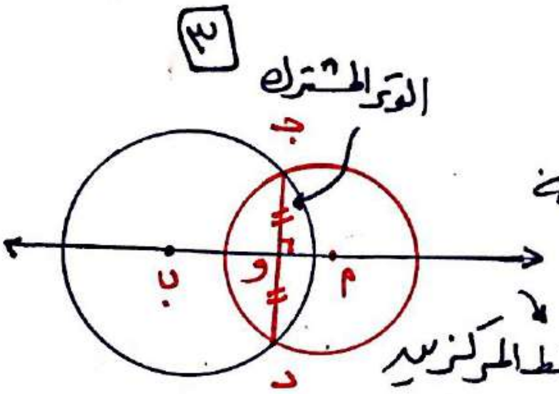
∵ ء منتصف $\overline{\text{مب}}$

∴ $\overline{\text{مء}} \perp \overline{\text{مب}}$

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين

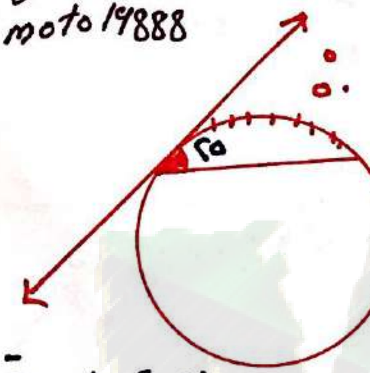
يكون عمودي على الوتر المشترك وينصفه

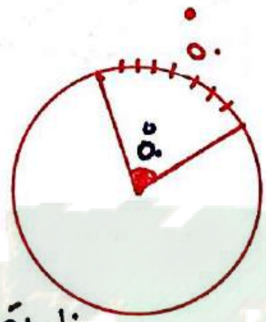
$\overleftrightarrow{مب} \perp \overline{جد}$ ، و منتصف $\overline{جد}$

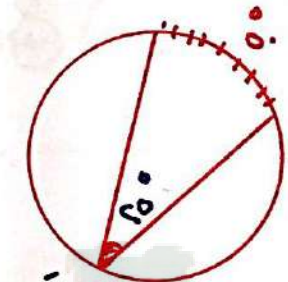


أنواع الزوايا

م/ مش
moto 14888





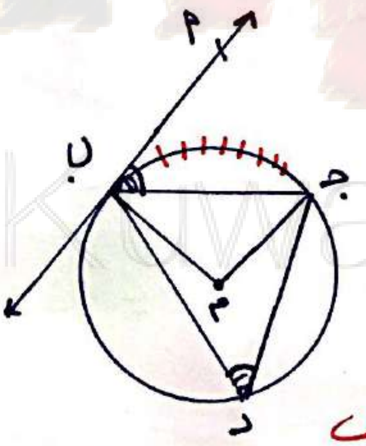


ذاوية محيطية = $\frac{1}{2}$ القوس

ذاوية مركزية = القوس

ذاوية مماسية = $\frac{1}{2}$ القوس

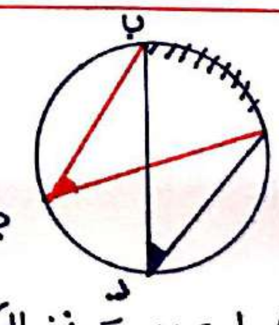
العلاقة بين الزاوية المحيطية والمماسية المشتركة
في نفس القوس .



ق (م $\hat{ب}$ ج) = ق ($\hat{د}$)

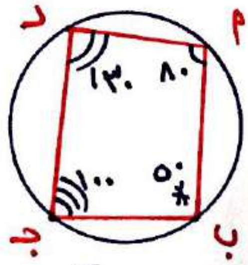
مماسية ومحيطية مشتركة في ($\overset{\frown}{جب}$)

لأن كلاً منها نصف القوس



الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس متطابقة

ق ($\hat{د}$) = ق ($\hat{ج}$) تحصر ($\overset{\frown}{مب}$)

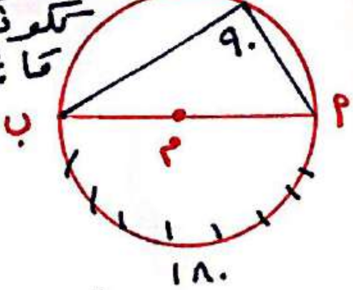


في الرباعي الدائري

كل زاويتان متقابلتان مجموعهم ١٨٠

ق ($\hat{م}$) + ق ($\hat{ج}$) = ١٨٠°

الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة تكون قائمة

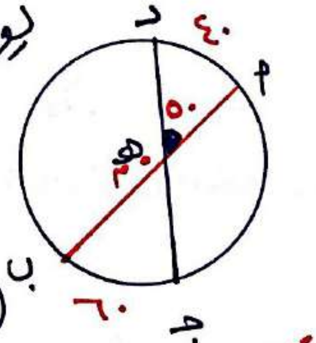


$\overleftrightarrow{مب}$ قطر ⟵ ق ($\hat{ج}$) = ٩٠

لإثبات مب قطر

٤

الزاوية الناتجة من تقاطع وترين بالدائرة



~~ق(ﻫ^)~~

ق(أ ﻫ^ د)

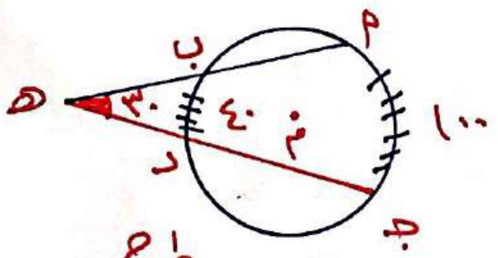
مجموع

$= \frac{1}{2}$ [ق(أد) + ق(جـ ب)]

موضوعي يعطي التوسية ويطلب الزاوية

أو إثبات القانون

الزاوية الناتجة من امتداد (تقاطع) وترين خارج الدائرة



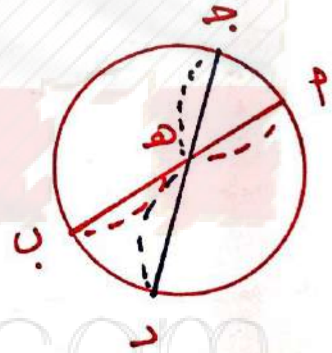
طرح

ق(ﻫ^) $= \frac{1}{2}$ [ق(أجـ) − ق(ب د)]

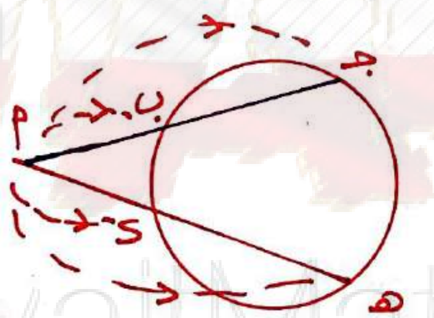
م/أمتثال
moto19888

الأوتار المتقاطعة والمماس

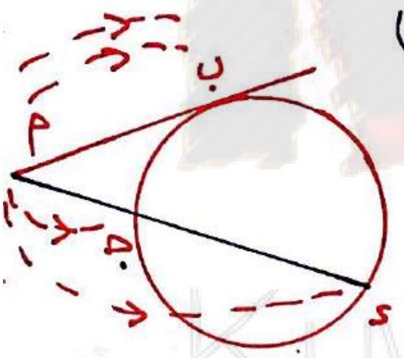
يطلب إيجاد أطوال



أ ﻫ × ﻫ ب = جـ ﻫ × ﻫ د



أب × أجـ = أد × أﻫ



$أب^2$ = أجـ × أد

المصفوفات

تساوي مصفوفتين

* $\begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ك} & \text{م} & \text{ل} \end{bmatrix}$

١) إذا كانت من نفس الرتبة

٢) إذا كانت العناصر المتناظرة متساوية فإن

أ = س ، ب = ص ، جـ = ع

د = ك ، هـ = م ، و = ل

جمع وطرح المصفوفات

م/ منى
moto 19888

$\underline{\text{أ}}_{م \times ن}$ ، $\underline{\text{ب}}_{م \times ن}$ ∴ $\underline{\text{جـ}}_{م \times ن}$

حيث $\text{جـ}_{وس} = \text{أ}_{وس} + \text{ب}_{وس}$

$\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}} = \underline{\text{أ}} + (-\underline{\text{ب}})$

المعادلات المصفوفية

إذا كان أ = ب فإن
$\underline{\text{أ}} + \underline{\text{جـ}} = \underline{\text{ب}} + \underline{\text{جـ}}$
$\underline{\text{أ}} - \underline{\text{جـ}} = \underline{\text{ب}} - \underline{\text{جـ}}$

الضرب القياسي لمصفوفة في عدد

ك × $\underline{\text{أ}}$ ← نضرب ك في كل عنصر من عناصر $\underline{\text{أ}}$ والرتبة لا تتغير

$0 \times \underline{\text{أ}} = \underline{0}$

يطلب ٥$\underline{\text{أ}}$ + ٦$\underline{\text{ب}}$ مثلاً ٢$\underline{\text{ب}}$ − ٤$\underline{\text{أ}}$

المعادلات مثلاً: حل المعادلة

$$٤ \underline{س} + ٢ \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

م/ فتن
moto19888

ضرب المصفوفات

$$\underset{م \times ن}{\underline{أ}} \times \underset{ن \times ك}{\underline{ب}} = \underset{م \times ك}{\underline{جـ}}$$

شرط الضرب التساوي

رتبة الناتج

توضيح

لضرب مصفوفتين من الأولى نأخذ الصف من الثانية نأخذ العمود ونضرب العناصر المتناظرة ونجمع لايجاد العنصر في الناتج

مصفوفات الوحدة والنظير الضربي

مصفوفة الوحدة $\underline{و}$

$$\underset{٢\times٢}{\underline{و}} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \qquad \underset{٣\times٣}{\underline{و}} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\underline{و} \times \underline{أ} = \underline{أ} \times \underline{و} = \underline{أ}$$

* اذا كان $\underline{أ}$ نظير ضربي لـ $\underline{ب}$ فإن $\underline{أ}\,\underline{ب} = \underline{أ} \times \underline{ب} = \underline{و}$

السؤال

١ اثبت أن $\underline{س}$ نظير ضربي لـ $\underline{أ}$

النظير الضربي لمصفوفة مربعة $\underline{أ}$ هو $\underline{أ}^{-1}$

⇐ اذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{bmatrix}$

محدد $|\underline{أ}| = \begin{vmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{vmatrix} = (أ \times د) - (ب \times جـ)$

اذا كانت $|\underline{أ}| =$ صفر فإن $\underline{أ}$ مصفوفة منفردة

السؤال

> اذا كانت $\underline{أ}$ مصفوفة منفردة
> اوجد قيمة عنصر

أ/ فيصل
moto19888

النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة ٢×٢

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}$ بشرط $أ \times د - جـ \times ب \neq$ صفر

$\underline{أ}^{-1} = \dfrac{1}{|\underline{أ}|} \begin{bmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{bmatrix}$

اقلب الإشارة

اقلب المكان

السؤال

> حدد اذا كان للمصفوفة نظير ضربي
> أم لا و أوجده إن أمكن.

حل نظام معادلتين خطيتين

أ/ فتحة
moto19888

$$\begin{cases} أ_1 س + ب_1 ص = جـ_1 \\ أ_2 س + ب_2 ص = جـ_2 \end{cases}$$

كرامر (محددات)

$$\Delta = \begin{vmatrix} أ_1 & ب_1 \\ أ_2 & ب_2 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta_س = \begin{vmatrix} جـ_1 & ب_1 \\ جـ_2 & ب_2 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta_ص = \begin{vmatrix} أ_1 & جـ_1 \\ أ_2 & جـ_2 \end{vmatrix} =$$

$$س = \frac{\Delta_س}{\Delta} = \qquad ص = \frac{\Delta_ص}{\Delta} =$$

النظير الضربي

$$\begin{bmatrix} أ_1 & ب_1 \\ أ_2 & ب_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} جـ_1 \\ جـ_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{أ} \times \underline{س} = \underline{ب}$$

نوجد $\underline{أ}^{-1}$ ويكون الحل

$$\underline{س} = \underline{أ}^{-1} \times \underline{ب}$$

لاحظ الضرب من اليمين

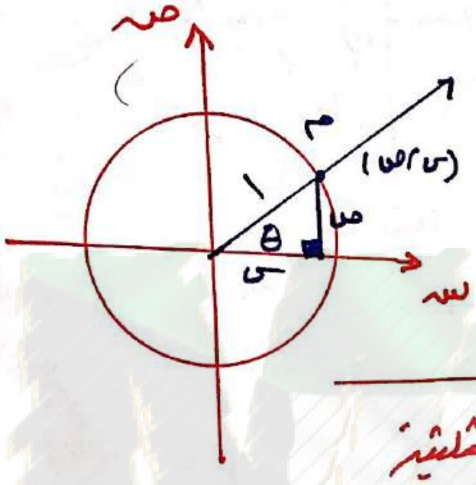
السؤال

حل نظام المعادلات
باستخدام كرامر (أو) النظير الضربي

دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية

دائرة الوحدة ← مركزها نقطة الأصل ، نصف قطرها = ١ وحدة طول

النقطة المثلثية ← هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة.



النقطة المثلثية (س، ص)

$$\boxed{س^2 + ص^2 = 1}$$

من نظرية فيثاغورث.

* النسب المثلثية

* جا $\theta = \frac{ص}{1} =$ ص
* جتا $\theta = \frac{س}{1} =$ س
* ظا $\theta = \frac{ص}{س}$

* مقلوبات النسب المثلثية

* قتا $\theta = \frac{1}{ص}$
* قا $\theta = \frac{1}{س}$
* ظتا $\theta = \frac{س}{ص}$

أ/ مثر
moto19888

إشارات الدوال المثلثية

$\theta = 90° = \frac{\pi}{2}$

الأول: $\boxed{0 < \theta < \frac{\pi}{2}}$ (+ ، +) ، $\theta = 0$ كل ⊕

الثاني: $\boxed{\frac{\pi}{2} < \theta < \pi}$ (+ ، −) ، جا $\theta > 0$

$\theta = 180° = \pi$

الثالث: $\boxed{\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}}$ (− ، −) ، ظا $\theta > 0$

$\theta = 270° = \frac{3\pi}{2}$

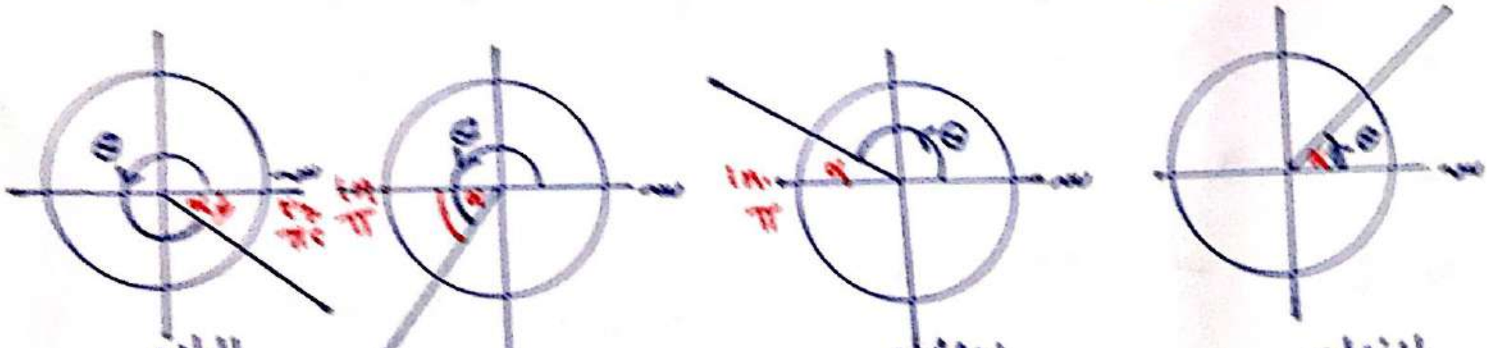
الرابع: $\boxed{\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi}$ (− ، +) ، $\theta = 360° = 2\pi$ ، جتا $\theta > 0$

السؤال

حدد إشارة جا θ ، جتا θ ، ظا θ ويعطى زاوية θ

زاوية الإسناد α

هي الزاوية الحادة α التي تصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة θ في الوضع القياسي مع محور السينات.



الرابع	الثالث	الثاني	الأول
$\alpha = 360° - \theta$	$\alpha = \theta - \pi$	$\alpha = \pi - \theta$	$\alpha = \theta$
$= 2\pi - \theta$	$\theta = \pi + \alpha$	$\theta = \pi - \alpha$	$\theta = \alpha$
$\theta = 360° - \alpha$			
$\theta = -\alpha$			

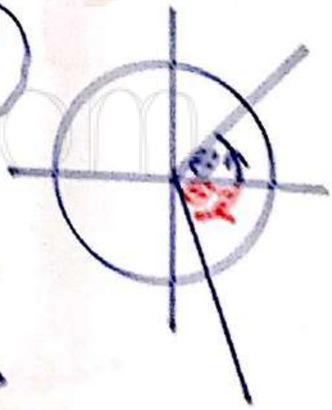
السؤال

١) يعطى زاوية موجهة θ واوجد زاوية الإسناد ومعطى θ

م/ ٩٩٥٠٥٧٢٣٣

العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

الأول θ ، الرابع $-\theta$



إشارات الربع الرابع

$$\text{جا}(-\theta) = -\,\text{جا}\,\theta$$

$$\text{جتا}(-\theta) = +\,\text{جتا}\,\theta$$

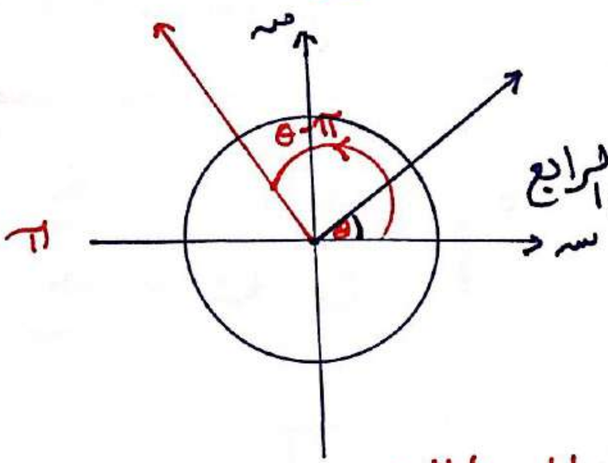
$$\text{ظا}(-\theta) = -\,\text{ظا}\,\theta$$

السؤال

يعطى جا ، جتا ، ظا للزاوية θ
ويطلب جا ، جتا ، ظا للزاوية $(-\theta)$

النسب المثلثية للزاويتان

الأول θ ، الثاني $(\theta - \pi)$



إشارات الربع الرابع

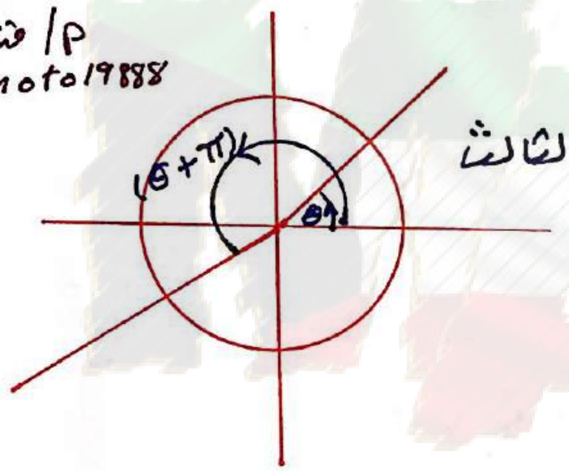
جا		=	$+$ جا θ
جتا	$\theta - \pi$	=	$-$ جتا θ
ظا			$-$ ظا θ

السؤال

يعطى جا θ ، جتا θ ، ظا θ
ويطلب جا ، جتا ، ظا للزاوية $(\theta - \pi)$

م/ فتحي
moto19888

الأول θ ، الثالث $(\theta + \pi)$



إشارات الربع الثالث

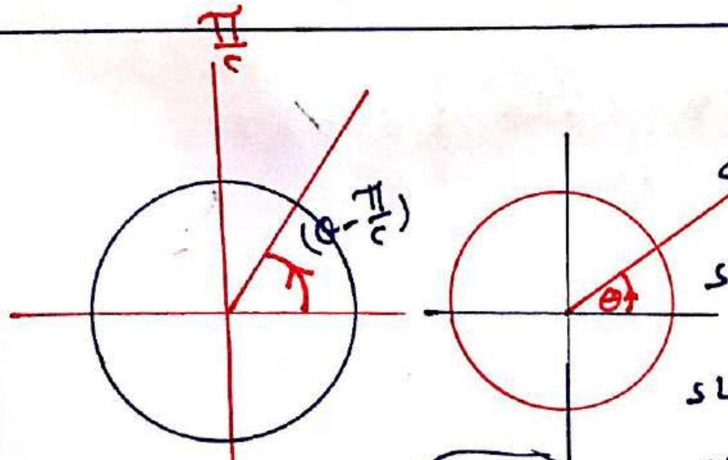
جا			$-$ جا θ
جتا	$\theta + \pi$	=	$-$ جتا θ
ظا			$+$ ظا θ

السؤال

يعطى جا θ ، جتا θ ، ظا θ
ويطلب جا ، جتا ، ظا للزاوية $(\theta + \pi)$

الأول θ ، $(\theta - \frac{\pi}{2})$ الأول

الأول ، الأول



إشارات الربع الأول

جا			$+$ جتا θ	نضيف تا د
جتا	$\theta - \frac{\pi}{2}$	=	$+$ جا θ	نحذف تا د
ظا			$+$ ظا θ	نضيف تا د

السؤال يعطى جا θ ، جتا θ ، ظا θ
ويطلب جا ، جتا ، ظا للزاوية $\frac{\pi}{2} - \theta$

النسب المثلثية للزاويتان

الأولى θ ، الثاني $\theta + \frac{\pi}{2}$

اشارات الربع الثاني

$$\begin{array}{l} \text{جا} \\ \text{جتا} \\ \text{ظا} \end{array} \left[\theta + \frac{\pi}{2} \right] = \begin{array}{lll} (+) & \text{جتا } \theta & \text{نضيف تاء} \\ (-) & \text{جا } \theta & \text{نحذف تاء} \\ (-) & \text{ظتا } \theta & \text{نضيف تاء} \end{array}$$

السؤال

يعطى جا θ ، جتا θ ، ظا θ والطلب
ايجاد جا ، جتا ، ظا للزاوية $(\theta + \frac{\pi}{2})$

٢ن π ← ن (٣٦٠) ن عدد الدورات الكاملة

$$\begin{array}{l} \text{جا} \\ \text{جتا} \\ \text{ظا} \end{array} \left[\theta \pm 2\text{ن}\pi \right] = \begin{array}{l} \text{جا } \theta \\ \text{جتا } \theta \\ \text{ظا } \theta \end{array}$$

حل المعادلات المثلثية

هام جداً

جتا θ

* نوجد أصغر زاوية موجبة α

α = جتا$^{-1}$ ( ) =

shift + cos^{-1}

جتا θ = جتا α

في الربع

الأول: $\theta = \alpha + 2\text{ن}\pi$

الرابع: $\theta = -\alpha + 2\text{ن}\pi$

حيث ن ∈ ص

جا θ

* نوجد أصغر زاوية موجبة

α = جا$^{-1}$ ( )

shift sin^{-1} ( )

جا θ = جا α

في الربع الأول او الثاني

$\theta = \alpha + 2\text{ن}\pi$ | $\theta = (\pi - \alpha) + 2\text{ن}\pi$

حيث ن ∈ ص

ظا θ

* نوجد أصغر زاوية موجبة α

α = ظا$^{-1}$ ( )

shift + tan^{-1} ( )

ظا θ = ظا α

في الربع

الأول: $\theta = \alpha + 2\text{ن}\pi$

أو الثالث: $\theta = (\alpha + \pi) + 2\text{ن}\pi$

حيث ن ∈ ص

أو نكتب حل وحيد يشمل

$\theta = \alpha + \text{ن}\pi$

...٢٠ب عليها مكبرة ٥ مرات

العلاقات بين الدوال المثلثية (٢) $\boxed{١٣}$

المتطابقات المثلثية الأساسية.

$ظا\,\theta = \frac{جا\,\theta}{جتا\,\theta}$ ، $ظتا\,\theta = \frac{جتا\,\theta}{جا\,\theta}$ ، $ظتا\,\theta = \frac{1}{ظا\,\theta}$

$قا\,\theta = \frac{1}{جتا\,\theta}$ ، $قتا\,\theta = \frac{1}{جا\,\theta}$

متطابقات فيثاغورث

* $جا^2\theta + جتا^2\theta = 1$ * $ظا^2\theta + 1 = قا^2\theta$

$ظتا^2\theta + 1 = قتا^2\theta$

السؤال
يعطي نسبة جا θ أو جتا θ أو ظا θ
ويطلب باقي النسب نستخدم المتطابقات

السؤال
يطلب اثبات متطابقة
الطرف الأيمن = الأيسر

... ما مكبرة ٥ مرات

المستوى الإحداثي $\boxed{١٤}$

هذه القوانين مقررة للهندسة التحليلية

اذا كانت أ $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ ، ب $(\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$

المسافة بين النقطتين أ ، ب

$$\text{أب} = \sqrt{(\text{س}_1 - \text{س}_2)^2 + (\text{ص}_1 - \text{ص}_2)^2}$$

نقطة منتصف $\overline{\text{أب}}$

$$\text{احداثي المنتصف} = \left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2} ، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2}\right)$$

تقسيم $\overline{\text{أب}}$ بنسبة م : ن مبتدئة أ بالنقطة جـ(س، ص)

أ $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ ب $(\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$ $(\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$ $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$

م ⊕ ن

$$\text{س} = \frac{\text{م} \times \text{س}_2 \oplus \text{ن} \times \text{س}_1}{\text{م} \oplus \text{ن}} =$$

$$\text{ص} = \frac{\text{م} \times \text{ص}_2 \oplus \text{ن} \times \text{ص}_1}{\text{م} \oplus \text{ن}} =$$

احياناً سهل البعض نسبة التقسيم نوجدها كالآتي:

مثال

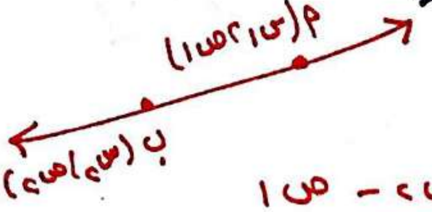
$$\boxed{٢\ \text{أجـ} = ٣\ \text{ب جـ}}$$

$$\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{٢}{٣}$$

٢ : ٣ مبتدئة ب

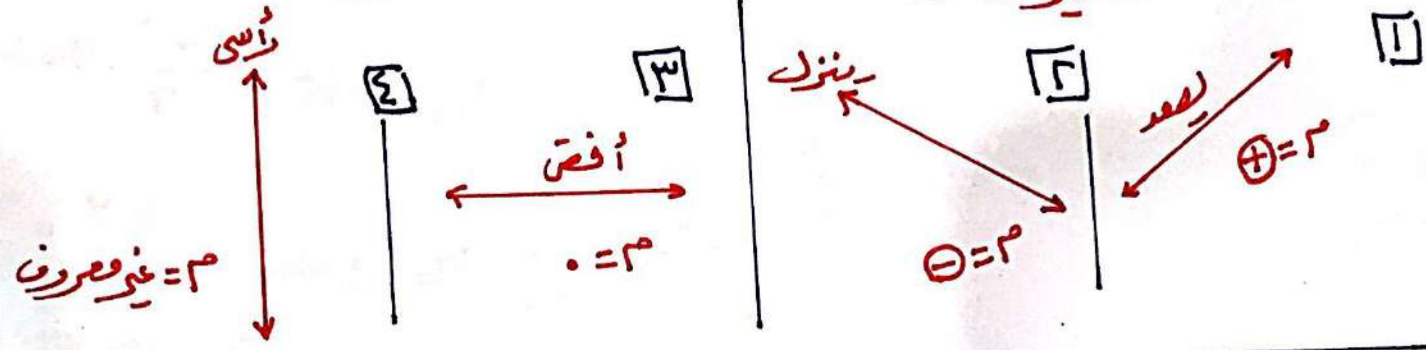
أو ٣ : ٢ مبتدئة أ

ميل الخط المستقيم



الميل = $\dfrac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$

$م = \dfrac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$



الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات θ

ظا θ = م

θ ← الزاوية الموجبة

م ← الميل

معادلة الخط المستقيم

لابد من معرفة شيئين

١ الميل = م ٢ ويمر بالنقطة (س١ ، ص١)

المعادلة

$$\boxed{ص - ص_1 = م\,(س - س_1)}$$

بصفة عامة ← س

بصفة عامة ← ص

من النقطة ← ص١

من النقطة ← س١

* المستقيم الذي معادلته ص = م س + ب ميله م

← لاحظ ص من طرف

16

اذا كان ميل مستقيمين $م_1$ ، $م_2$

* اذا كان المستقيم متوازيان $م_1 = م_2$

* اذا كان المستقيمان متعامدان $م_1 \times م_2 = -1$

اذا كان ميل مستقيم $\frac{-2}{3}$

ميل الموازي له $= \frac{-2}{3}$ نفسه

ميل العمودي عليه $= \frac{\ominus 3}{-2} = \frac{3}{2}$

نقلب ونغير الاشارة

السؤال

يعطى معادلة مستقيم ويطلب معادلة مستقيم موازي أو عمودي عليه ويمر بنقطة معلومة.

البعد بين نقطة ومستقيم

لابد أن تكون المعادلة على الصورة العامة الصفرية

$$\boxed{أ س + ب ص + جـ = 0}$$

والنقطة $(س_1 ، ص_1)$

$أ =$ $ب =$ $جـ =$

$س_1 =$ $ص_1 =$

أ $(س_1 ، ص_1)$

?

المسافة العمودية بين النقطة والمستقيم

ل : معادلته $أ س + ب ص + جـ = 0$

ل

$$\text{المسافة} = \frac{|أ \times س_1 \oplus ب \times ص_1 \oplus جـ|}{\sqrt{(أ)^2 + (ب)^2}} =$$

السؤال

أوجد بعد النقطة عن مستقيم ويعطي النقطة والمستقيم

* اذا طلب اثبات نقطة لا تقع على مستقيم نعوض